7 Límite y continuidad de funciones

En esta Unidad vamos a fundamentar las nociones de límite y de continuidad, siguiendo los pasos marcados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).

• *Karl T. W. Weierstrass*
(Wikipedia.org. Dominio Público)

Para utilizar la definición de límite con rigor hacen falta algunas nociones previas sobre la recta real y el valor absoluto, que usaremos en los teoremas que aparecen en la Unidad. Se demuestran los casos más sencillos del álgebra o reglas para el cálculo de límites.

También se amplía el abanico de indeterminaciones calculables con la introducción de la Regla de L'Hôpital, cuya justificación veremos en la Unidad 8, tomar logaritmos neperianos (indeterminaciones 1^{∞}, 0^0, ∞^0) y el número *e* (indeterminación 1^{∞}). El alumnado puede calcular la gran mayoría de los límites que puedan aparecerle con posterioridad.

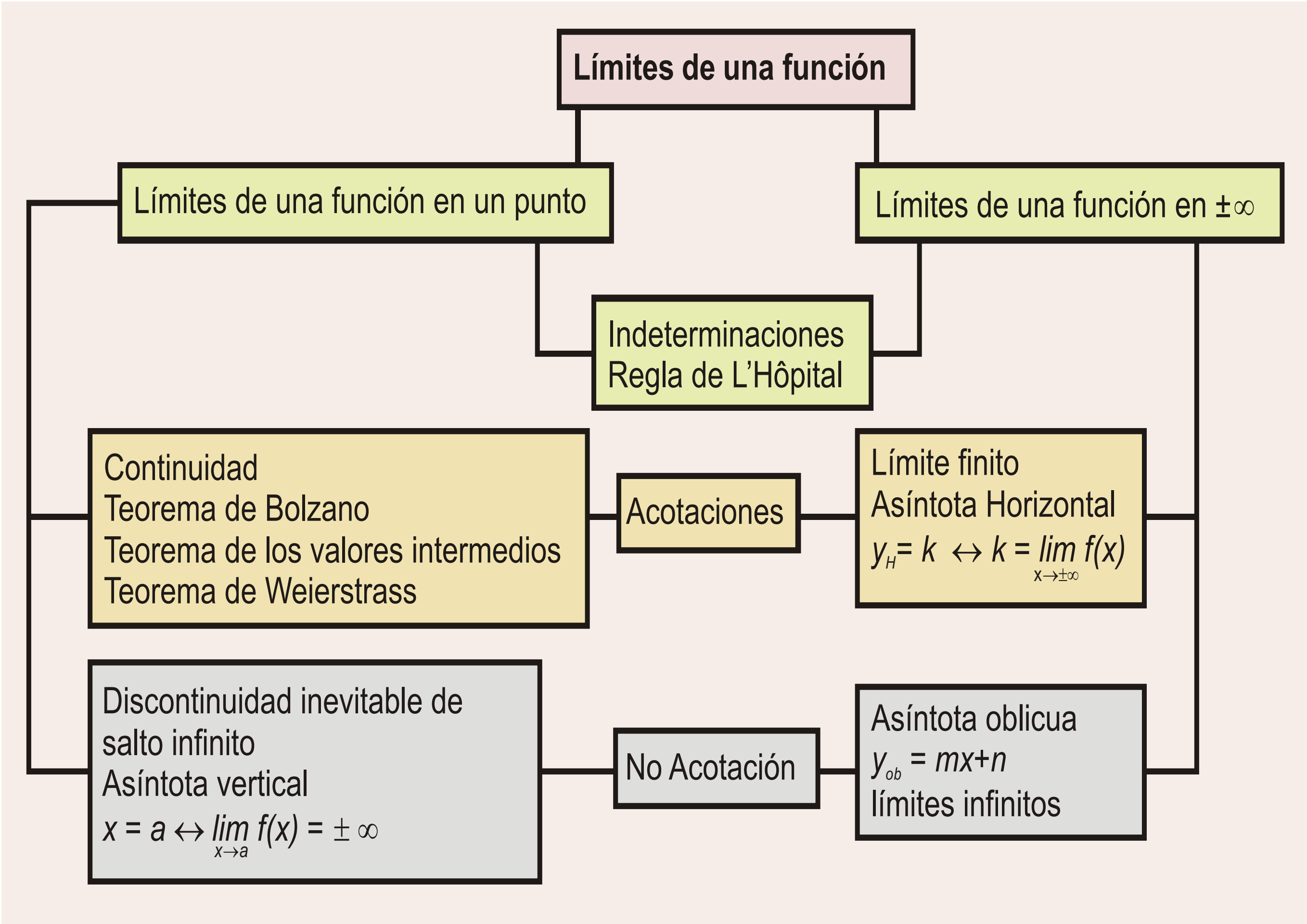
Introducimos la Regla de L'Hôpital, sin esperar a la derivada, para agrupar todos los procedimientos más habituales usados para el cálculo de límites. Además, aunque la derivada ya es conocida de Primero de Bachillerato, la estudiaremos con más profundidad en la Unidad siguiente, a la que remitimos en caso de tener alguna duda.

Retomamos la continuidad, su estudio en diferentes casos y hacemos hincapié en la relación entre continuidad, signo y acotación. Se demuestran 3 teoremas importantes (de Bolzano, de los valores intermedios y de Weierstrass), junto con otros de menor entidad, sencillos de entender, y usados a menudo en el Análisis Matemático.

El límite permite fundamentar la idea no sólo de continuidad sino también de discontinuidad. A raíz de las discontinuidades de salto infinito, surge la noción de asíntota vertical. El límite en $\pm\infty$ conduce a las asíntotas horizontales y oblicuas. No sólo es importante saber calcular las ecuaciones de las asíntotas, sino conocer cómo se aproxima la función a ellas.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Conocer la definición de límite y su uso.
2. Mejorar el cálculo de límites, resolviendo las indeterminaciones existentes.
3. Estudiar la continuidad de una función.
4. Utilizar teoremas derivados del concepto de continuidad.
5. Obtener las asíntotas de una función.
6. Estudiar cómo se aproxima una función a sus asíntotas.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Límites de una función

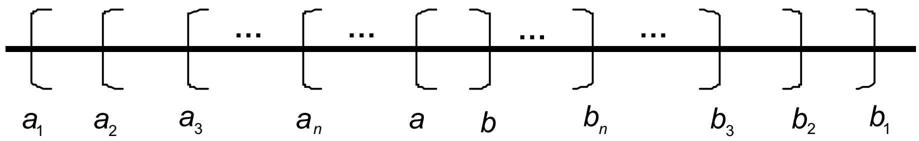
1.1. Conceptos previos

Antes de definir el límite de una función en un punto necesitamos refrescar y aprender algunos conceptos sobre la recta real:

- En la recta no hay huecos entre puntos (o números reales) y cualquier intervalo (a, b), con $a < b$, contiene infinitos elementos o puntos. Recuerda que $(a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$.

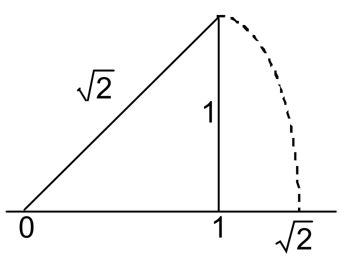
  Piensa en el intervalo (0,1;0,2). Al número 0,1 podemos añadirle un 1 a su derecha y tendríamos 0,11. A éste le podemos añadir otro 1 (u otra cifra) y tendremos 0,111 y así sucesivamente. Se rellenan todos los huecos que pudieran quedar entre dos números, pues podemos escribir cualquier cifra a continuación de la última y proseguir así indefinidamente. Por lo tanto, hay infinitos números reales entre 0,1 y 0,2.

- Dada la sucesión de intervalos cerrados y encajados $s_n = [a_n, b_n]$, con $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le \ldots \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1$, la intersección de todos estos intervalos es otro intervalo $[a, b]$, con $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$:
  $s_1 \cap s_2 \cap \ldots \cap s_n \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} s_i = [a,b]$



Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, el intervalo queda reducido a un punto. Esta propiedad es la que nos obliga a usar intervalos cerrados, que siempre llevan la igualdad.

Esto es lo que ocurre con $\sqrt{2}$:



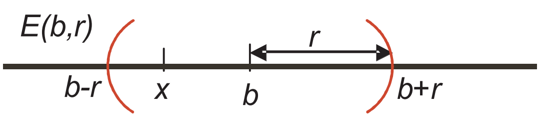
Sabemos que está en la recta real (para representarlo usamos el teorema de Pitágoras, construyendo un triángulo rectángulo de catetos iguales entre sí e iguales a 1). Para usarlo en los cálculos hay que determinar su valor decimal. Una primera aproximación da $1 \le \sqrt{2} \le 2$; una segunda $1{,}4 \le \sqrt{2} \le 1{,}5$; una tercera $1{,}41 \le \sqrt{2} \le 1{,}42$; una cuarta $1{,}414 \le \sqrt{2} \le 1{,}415$ y así hasta conseguir infinitas cifras decimales no periódicas. Si representamos nuestras aproximaciones como intervalos, tendremos la sucesión de intervalos encajados [1,2], [1,4;1,5], [1,41;1,42], [1,414;1,415]... de límite $\sqrt{2}$. Los extremos inferiores forman una sucesión monótona creciente (1 < 1,4 < 1,14 < 1,414 <...) mientras que los extremos superiores forman una sucesión monótona decreciente (2 > 1,5 > 1,42 > 1,415 >...). Esto es lógico si queremos mejorar nuestra aproximación al valor decimal de $\sqrt{2}$. Hemos encajado un número irracional ($\sqrt{2}$), entre números racionales (sus aproximaciones).

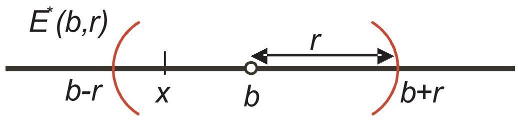
- La distancia entre dos puntos a y b de la recta real vale $dist(a, b) = |a - b|$. Gracias al valor absoluto se verifica que $dist(a, b) = dist(b, a)$. Recordemos que $|x| = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow |x-a| = \begin{cases} -x+a, \text{ si } x < a \\ x-a, \text{ si } x \ge a \end{cases}$. A continuación vienen algunas propiedades y definiciones importantes en las que aparece dicho valor absoluto:

- ○ La desigualdad triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$. Si a y b tienen el mismo signo se verifica la igualdad, pues se suman ambos valores y se pone el signo común (que el valor absoluto transformará en positivo). Si tienen signos distintos se restarán, con lo que se verificará la desigualdad.

- ○ La inecuación $|x - b| < c$ se resuelve de la siguiente manera:

$$|x-b|<c \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -x+b<c \Rightarrow x-b>-c \Rightarrow x>b-c \\ x-b<c \Rightarrow x<b+c \end{matrix}\right\} \Rightarrow b-c<x<b+c \Rightarrow x \in (b-c, b+c)$$





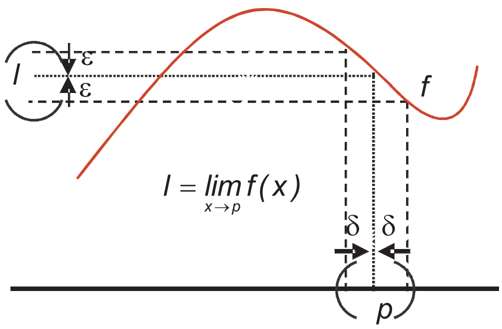
Su interpretación geométrica lleva al concepto de **entorno de un punto *b* de radio *r***
$E(b,r) = \{x \in R \,/\, b - r < x < b + r\} = \{x \in R \,/\, |x - b| < r\}$. El entorno es reducido cuando se excluye el punto: $E^*(b,r) = E(b,r) - \{b\} = \{x \in R \,/\, 0 < |x - b| < r\}$. Observa que al escribir $0 < |x - b|$, b no cumple la inecuación, pues quedaría $0 < 0$, que es falso.

- ○ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Puedes comprobarlo usando en la regla de los signos.

- Las cotas son conceptos importantes. Se dice que un número real M es una **cota superior** de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $a \leq M, \forall a \in A$. Es decir, todos lo elementos de A son menores o a lo sumo iguales a M. Si un conjunto tiene una cota superior se dice que está acotada superiormente. Un número real N es una **cota inferior** de A si $a \geq N, \forall a \in A$. Si un conjunto tiene una cota inferior se dice que está acotada inferiormente. Un conjunto que está acotado superior e inferiormente se dice que está acotado. A la menor de las cotas superiores se le llama **extremo superior** o **supremo** (máximo si pertenece al conjunto A) y a la mayor de la cotas inferiores se le llama **extremo inferior** o **ínfimo** (mínimo si pertenece al conjunto).

1.2. Límite de una función en un punto

Hay tres resultados posibles para el valor del límite de una función en un punto: que sea finito (normalmente se denomina l), ∞ o $-\infty$. Estos dos últimos no son valores, sino la forma de representar el hecho de que la función no está acotada en el punto.



a) Límite finito

De forma poco rigurosa, decimos que l es el límite de f cuando x tiende a p cuando los valores que toma la función f se aproximan a l al acercase x al punto p. Se escribe $\lim_{x \to p} f(x) = l$. En esta definición intuitiva parece que la condición la impone que x se acerque p, pero lo que interesa es que f se acerque a su límite. Por ello, la definición de límite es: *el límite de f cuando x tiende a p es l si y sólo si para todo ε (épsilon) positivo existe un δ (delta) positivo tal que si* $0 < |x - p| < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \varepsilon$, es decir,

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

La condición la pone ε y hay que encontrar un δ, relacionado con ε, de modo que δ disminuya al disminuir ε. Así, demostrar que un número l es el límite de una función f en un punto p es encontrar una relación entre δ y ε, mediante las dos inecuaciones que aparecen en la definición.

Podemos rescribir la definición usando entornos. La función *f* tiene que estar en un $E\,(l,\varepsilon)$ y *x* en un $E^*\,(p,\delta\,)$ (*x* no puede tomar el valor del punto *p*, pues al sustituir *x* por *p* en la definición queda $0 < |p - p| < \delta \Rightarrow 0 < 0$, que es falso). La definición queda así: $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *tal que si* $x \in E^*(p,\delta)$ *entonces* $f(x) \in E(l,\varepsilon)$.

Ejemplos

1. Usando la definición demuestra que: **a)** $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3) = -1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5\right) = 4$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3) = -1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|2x-3+1| < \varepsilon$. Hay que encontrar una relación entre δ y ε. La 2ª inecuación se convierte en $|2x-2| = |2(x-1)| = 2\cdot|x-1| < 2\delta = \varepsilon \Rightarrow$ tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ queda demos trado el límite. Así, si $\varepsilon = 10^{-5}$, los valores de x que hacen que la función verifique que $-1-10^{-5} < f(x) < -1+10^{-5}$, ve rifican a su vez que $1-5\cdot10^{-6} < x < 1+5\cdot10^{-6}$, $x \neq 1$. Es decir, si queremos una precisión de $\varepsilon = 10^{-5}$ en la función, es necesaria una precisión de $\delta = 5\cdot10^{-6}$ en la variable independiente. Por ejemplo, $-1{,}00001 < f(1{,}0000001) =$
$= -0{,}9999998 < -0{,}99999\ \left(x = 1+10^{-7}\right)$ mientras que $f(1{,}00001) = -0{,}99998 \not< -0{,}99999\ \left(x = 1+10^{-5}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5\right) = 4 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $\left|x^2-5-4\right| < \varepsilon$. Se parte de $0 < |x-3| < \delta$ y se opera $\left|x^2-9\right| = |(x+3)(x-3)| = |x+3|\cdot|x-3|$.

El primer valor absoluto verifica $|x+3| \le |x-3+3+3| \le |x-3| + |6| = |x-3| + 6 \le \delta + 6$; el 2º está acotado por δ. Así, $\left|x^2-9\right| = |x+3|\cdot|x-3| \le (\delta+6)\delta = \varepsilon \Rightarrow$ La ecuación $\delta^2 + 6\delta = \varepsilon$ tiene como solución positiva $\delta = \sqrt{9+\varepsilon} - 3$, que e la relación buscada.

En ambos casos, si disminuye ε también lo hace δ.

Si tomamos $\varepsilon = 10^{-3}$, los valores de x que hacen que la función verifique que $4-10^{-3} < f(x) < 4+10^{-3}$, verifican a su vez que $3-1{,}67\cdot10^{-4} < x < 3+1{,}67\cdot10^{-4}$, $x \neq 3$. Por ejemplo, $f\left(3+1{,}5\cdot10^{-4}\right) = 4{,}000900023 < 4{,}001$ pero $f\left(3+2\cdot10^{-4}\right)$
$= 4{,}00120004 > 4{,}001$.

2. Usando la definición demuestra que: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x} = -1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+4} = 2$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}+1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1+x}{x}\right| < \varepsilon$. Tenemos $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x+1 < \delta \Rightarrow x < \delta - 1 \\ -x-1 < \delta \Rightarrow x > -1-\delta \end{cases}\right\} \Rightarrow -(1+\delta) < x < -(1-\delta) \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{-1}{1-\delta} < \frac{1}{x} < \frac{-1}{1+\delta} \Rightarrow \frac{1}{1+\delta} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{1-\delta} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1+x}{x}\right| < \dfrac{\delta}{1-\delta} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon - \varepsilon\delta \Rightarrow \delta(1+\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. La relación (1) es fácil de ver si piensas que $-1{,}1 < x < -0{,}9 \Rightarrow \dfrac{-1}{0{,}9} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{-1}{1{,}1} \Rightarrow \dfrac{1}{1{,}1} < \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{0{,}9}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+4} = 2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces $\left|\sqrt{x+4} - 2\right| < \varepsilon$.

Usamos que $\sqrt{a+b} \le \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}$. Para comprobarla elevamos ambos miembros al cuadrado: $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 =$ $= a+b$; $\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2 = |a| + 2\sqrt{|a\cdot b|} + |b| \Rightarrow$ $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \le \left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2$ y de aquí el primer resultado. Para evitar raíces de números negativos ($a+b$ puede ser positivo aunque alguno sea negativo), se utilizan a la derecha los valores absolutos. Tendremos: $\left|\sqrt{x+4}-2\right| \le \left|\sqrt{|x|} + \sqrt{4} - 2\right| \le \sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon^2$.

Observa que:

- La definición no proporciona un método para calcular límites, sino que nos asegura que, de haberlo calculado bien, el resultado es correcto. Por ello, la definición la usaremos únicamente para demostrar alguna de las reglas empleadas en el cálculo de límites.

- En todos los ejemplos se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esto es así porque todas son **funciones continuas**, que para serlo deben verificar esa igualdad. Habitualmente tratamos con funciones continuas (las que pueden presentar discontinuidades, como las definidas a trozos, las definidas como cocientes y los logaritmos, suelen ser continuas fuera de los puntos problemáticos). Así, podemos usar el resultado siempre que sepamos que la función es continua.

Ejemplos

3. Calcula los límites siguientes: **a)** $\lim_{x \to 5} (x^2 - 20)$; **b)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (3senx - 2)$; **c)** $\lim_{x \to -3} e^{x+4}$.

Solución:

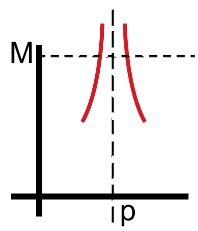
a) $\lim_{x \to 5} (x^2 - 20) = 5^2 - 20 = 5$; **b)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (3senx - 2) = 3sen\frac{\pi}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$; **c)** $\lim_{x \to -3} e^{x+4} = e^{-3+4} = e$.

4. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim_{x \to 5} \ln(x - 4)$; **b)** $\lim_{x \to \pi} (5\cos x + 7)$; **c)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 + tg^2 x)$.

Solución:

a) $\lim_{x \to 5} \ln(x - 4) = \ln(5 - 4) = 0$; **b)** $\lim_{x \to \pi} (5\cos x + 7) = 5\cos\pi + 7 = -5 + 7 = 2$; **c)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 + tg^2 x) = 1 + tg^2\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$

b) Límite infinito

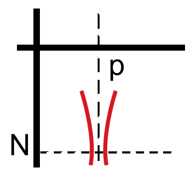


Si la función no está acotada superiormente en el punto, se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Esto es, al acercarse x al punto p, la función aumenta cada vez más su valor, sin nada que la pare. La definición es:

$$\lim_{x \to p} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, M \in R, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - p| < \delta \text{ entonces } f(x) > M.$$

Fijamos una cota superior M. La función f supera ese valor al aproximarse x a p, por lo que M ya no es cota superior. Como esto sucede para cualquier valor de M, f no tiene cota superior en el punto p.

c) Límite menos infinito

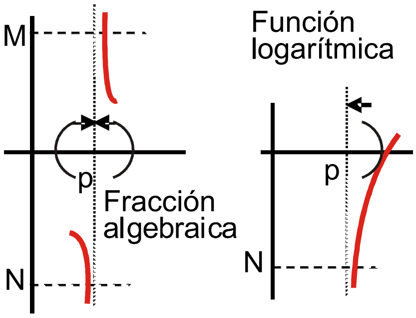


Si la función no está acotada inferiormente se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, esto es:

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, N \in R, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - p| < \delta \text{ entonces } f(x) < N.$$

Se fija una cota inferior N, esta cota queda por encima de la función f al aproximarse x a p. Ya no es cota inferior; y como esto sucede para cualquier valor de N, la función f no está acotada inferiormente.

La no acotación de la función (**discontinuidad inevitable de salto infinito**) se presenta en los puntos en los que el denominador se anula y no el numerador o donde el argumento del logaritmo se hace cero. En el primer caso (fracciones algebraicas o funciones definidas como cocientes) los límites laterales suelen ser distintos, mientras



que las funciones logarítmicas sólo tienen un límite lateral (para el otro el argumento es negativo, no existe el logaritmo y lógicamente carece de límite)

Por las razones precedentes, cuando aparece una división de un número no nulo entre cero hay que calcular los límites laterales. Nunca existirá el límite en el punto, pues la función siempre tendrá una discontinuidad inevitable de salto infinito, es decir, una asíntota vertical de ecuación $x = p$.

Ejemplos

5. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 4}\ln\left(x^2-16\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{7}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty.\\[2mm] \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{7}{0^+}=\infty.\end{cases}$ Si el denominador es cero, para calcular los límites laterales, cuando x tiende a 3 por la derecha ($x\to 3^+$) y cuando x tiende a 3 por la izquierda ($x\to 3^-$), lo único que hay que averiguar es el signo de la fracción cerca del punto.

b) $\lim\limits_{x\to 4}\ln\left(x^2-16\right)=\ln 0\Rightarrow\begin{cases}\nexists\lim\limits_{x\to 4^-}\ln\left(x^2-16\right)\\[2mm] \lim\limits_{x\to 4^+}\ln\left(x^2-16\right)=-\infty\end{cases}$, pues $x^2-16<0$ si $x<4$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=0.\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{\infty}=\infty.\end{cases}$ La función exponencial cambia su comportamiento debido a la influencia que tiene el cambio de signo del exponente.

6. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-5}{(x-2)^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\ln|x-5|$; **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1)^2$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$: al ser el denominador un cuadrado, siempre será positivo, por lo que no hay que calcular los límites laterales.

b) $\lim\limits_{x\to 5}\ln|x-5|=-\infty$: debido al valor absoluto, el argumento siempre se acerca por la derecha a cero.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1)^2=-\infty$: al ser el argumento un cuadrado siempre se acerca por la derecha a cero.

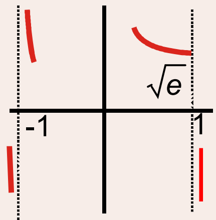
7. Dada $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1}, \text{ si } x<-1\\[2mm] e^{\frac{1}{x+1}}, \text{ si } -1\le x\le 1\\[2mm] \ln\left(x^2-1\right), \text{ si } x>1\end{cases}$, calcula $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Solución :

Hay que calcular los límites donde la función cambia de definición, por lo que hallamos directamente los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\infty} = \infty.$

Hay que seguir con los límites laterales, pues son necesarios para averiguar el signo del cociente.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(x^2-1\right) = -\infty.$



Arriba está la gráfica de la función en los puntos en los que hemos calculado los límites.

8. Usando la definición, demuestra que $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x+1}{x}\right| = \infty.$

Solución:

$\lim\limits_{x\to o}\left|\dfrac{x+1}{x}\right| = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, M\in R, \exists\delta>0$ tal que si $0<|x|<\delta$ entonces $\left|\dfrac{x+1}{x}\right| < M \Rightarrow |x+1| < M\cdot|x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x+1| \le |x|+1 < \delta+1 < M\delta \Rightarrow 1 < \delta\,(M-1) \Rightarrow \delta > \dfrac{1}{M-1}$. Así, si $M=1000, \delta = 1{,}001\cdot 10^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(0{,}9\cdot 10^{-3}\right) = 1112{,}1 > 1000.$

1.3. Límites en el infinito y en el menos infinito

También aquí pueden darse varios casos:

I. Que la función se acerque a un valor finito, que puede ser distinto en ∞ y en $-\infty$. Si el valor es el mismo en ambos casos, se escribe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$. Este valor nos da la ecuación de la asíntota horizontal de la función $y_H = k$.

¿Cómo indicar que *f* tiene un límite finito cuando *x* tiende a ∞ o $-\infty$? Recordando la definición de límite de una sucesión ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N$ tal que si $n>n_0$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$), podemos escribir el límite de la función cuando *x* tiende a $\pm\infty$:

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in R^+$ tal que si $x>x_0$ entonces $\left|f(x)-l\right| < \varepsilon.$

  La tendencia a infinito se indica haciendo x_0 positivo (pues pertenece a $\mathbb{R}^+$).

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in R, x_0<0,$ tal que si $x<x_0$ entonces $\left|f(x)-l\right| < \varepsilon.$

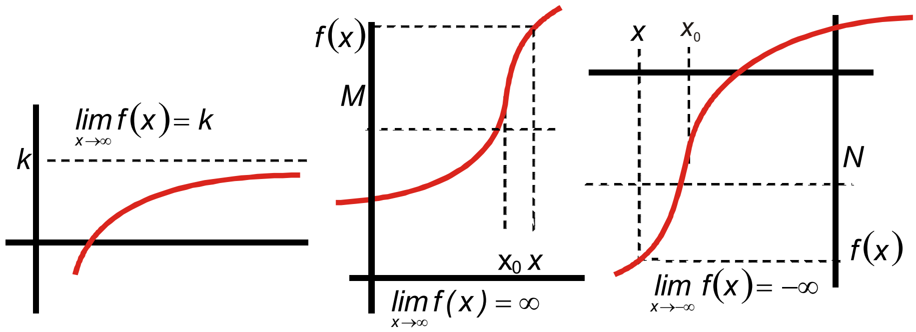
Recuerda la relación de orden para los números negativos.

II. Que la función no esté acotada superiormente $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ o inferiormente $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$. Igual que en el primer caso, los límites de la función pueden variar de ∞ a $-\infty$. La función no tiene asíntota horizontal.

Las definiciones serán ahora:

- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M\in R^{+}\ \exists x_0\in R^{+}$ tal que si $x>x_0 \Rightarrow f(x)>M$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall N\in R, N<0, \exists x_0\in R, x_0<0$, tal que si $x<x_0 \Rightarrow f(x)<N$.

Intenta escribir las definiciones para los dos límites que faltan ($\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$). Gráficamente se puede representar de las siguientes maneras:



Ejemplos

9. Demuestra que $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$.

Solución:

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in R, x_0<0$ tal que si $x<x_0 \Rightarrow \left|\dfrac{x+1}{x-1}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{2}{x-1}\right|=\dfrac{2}{|x-1|}<\varepsilon \Rightarrow 2<\varepsilon|x-1| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-1|>\dfrac{2}{\varepsilon}$. Como x ha de ser negativa, queda $-x+1>\dfrac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x-1<-\dfrac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x<1-\dfrac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x_0=1-\dfrac{2}{\varepsilon}$. Si $\varepsilon=10^{-10}$, $x_0=-2\cdot10^{10}$. Es decir, si queremos que el valor de la función f difiera de 1 en menos de $\varepsilon=10^{-10}$, x ha de ser menor que $x_0=-2\cdot10^{10}$.

10. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$.

Solución :

$\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in R^{+}$ tal que si $x>x_0 \Rightarrow \left|e^{-x}\right|<\varepsilon \Rightarrow$ Al ser la exponencial positiva: $e^{-x}<\varepsilon$. Para despejar x, se toman logaritmos neperianos en ambos miembros: $-x<\ln\varepsilon \Rightarrow x>-\ln\varepsilon \Rightarrow x_0=-\ln\varepsilon$. Si $\varepsilon=10^{-20}$, $x_0=46{,}052$. Esto es, para que f difiera de 0 en menos de $\varepsilon=10^{-20}$, x ha de ser mayor que $x_0=46{,}052$.

Dejando ya aparte la definición, y como interesa que podamos efectuar cálculos, debes recordar los siguientes resultados de los límites en $\pm\infty$:

$$1)\quad Si\ r>0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\infty} x^{r}=\infty.\ Por\ ejemplo, \lim_{x\to\infty} x^{3}=\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^{r}=\infty\ si\ r\ es\ par.\ Por\ ejemplo, \lim_{x\to-\infty} x^{4}=\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^{r}=-\infty\ si\ r\ es\ impar.\ Por\ ejemplo, \lim_{x\to-\infty} x^{5}=-\infty \\ \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^{r}}=0.\ Por\ ejemplo, \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0 \end{cases}$$

2) Cuando se trata de polinomios, el comportamiento en ∞ ó $-\infty$ viene dado por su monomio de mayor grado, siendo despreciables los demás términos.

$$\lim_{x\to\infty}\left(4x^5-7x^3+25x^2-1000\right)\approx\lim_{x\to\infty}4x^5,\text{ porque } \frac{x^3}{x^5},\frac{x^2}{x^5},\frac{1000}{x^5}\to 0 \text{ cuando } x\to\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty.$

5) No podemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} sen\,x,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos x,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} tg\,x.$

6) $\lim\limits_{x\to a} g_1(x)\le\lim\limits_{x\to a} f(x)\le\lim\limits_{x\to a} g_2(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g_1(x)=\lim\limits_{x\to a} g_2(x)=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

1.4. Cálculo de límites

Para calcular límites necesitamos conocer el **Álgebra de límites**:

- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ el límite de una suma o resta de funciones es la suma o resta de los límites.
- $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ el límite de un producto de funciones es el producto de los límites.
- $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$: el límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$: el límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites.

Cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ se pueden presentar dos casos:

a) Que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{k}{0}\Rightarrow$ se toman límites laterales. Se obtendrá ∞ ó $-\infty$ dependiendo de los signos.

b) Que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\Rightarrow$ cualquier número es válido. Se trata de una indeterminación, que resolveremos un poco más adelante.

- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$: el límite de una función elevada a otra es igual al límite de la base elevada al límite del exponente.

Como ejemplo, a continuación demostramos las dos primeras fórmulas.

Demostración $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ($\forall \varepsilon_1>0\, \exists \delta_1>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta_1$ entonces $|f(x)-l|<\varepsilon_1$) y que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$ ($\forall \varepsilon_2>0\, \exists \delta_2>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-k|<\varepsilon_2$). Hay que demostrar que $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(l+k)|<\varepsilon$. Usando la desigualdad triangular se tiene: $|f(x)+g(x)-(l+k)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l+g(x)-k| \le |f(x)-l|+|g(x)-k|<\varepsilon_1+\varepsilon_2 \Rightarrow$ tomando $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ y $\delta=máx(\delta_1,\delta_2)$ queda demostrada la regla.

Demostración $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$:

Se usan los presupuestos anteriores. Hay que demostrar que $\forall \varepsilon>0\, \exists \delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-l\cdot k|<\varepsilon$. Introducimos dentro del valor absoluto $g(x)\cdot l$ (sumando y restando):
$|f(x)\cdot g(x)-g(x)\cdot l+g(x)\cdot l-l\cdot k|=\left|[f(x)-l]\cdot g(x)+l\cdot[g(x)-k]\right| \le |f(x)-l|\cdot|g(x)|+$ $+|l|\cdot|g(x)-k|<\varepsilon_1\cdot|g(x)-k+k|+|l|\cdot\varepsilon_2<\varepsilon_1\cdot(\varepsilon_2+|k|)+|l|\cdot\varepsilon_2 \Rightarrow$ tomando $\varepsilon=\varepsilon_1(\varepsilon_2+|k|)+$ $+\varepsilon_2|l|$ y $\delta=máx(\delta_1,\delta_2)$ queda demostrado.

Estas fórmulas sirven también para $\pm\infty$, como todo lo que se diga a continuación. Para no alargar la Unidad, sólo escribiremos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Cuando los límites son finitos no hay más que operar y cuando son infinitos hay que usar las reglas para manejar los infinitos que vimos en primero.

Ejemplo

11. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^5+7x^2\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{2x+6}-x\right)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+1}=\left(-\dfrac{5}{3}\right)^3=-\dfrac{125}{27}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^5+7x^2\right)=\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{2x+6}-x\right)=-1$.

1.5. Indeterminaciones

El cálculo de límites que no son indeterminaciones es una trivialidad (se sustituye y se opera). La aparición de algún ∞ o de algún 0 (cero) en determinados lugares puede convertir el límite en una indeterminación. Conocemos $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty$. También lo son $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Salvo 0^0, todas las indeterminaciones se deben a que ∞ no es un número y, por lo tanto, no se puede operar como tal. Como $0^a=0$ y $a^0=1$, no sabemos qué valor dar a 0^0. Éstas son las 7 **indeterminaciones** posibles.

Para resolver estas 7 indeterminaciones necesitamos alguna herramienta más potente que la división por el método de Ruffini, que sólo sirve para polinomios, o el conjugado, válido cuando hay raíces cuadradas. Esta herramienta se llama **Regla de L'Hôpital** y consiste en cambiar, en un cociente, el numerador y el denominador por sus respectivas derivadas, y calcular a continuación el límite. Si de nuevo sale una indeterminación se procede de forma análoga hasta que ésta desaparezca. Por supuesto, deben existir las derivadas de *f* y de *g*, que es lo habitual.

Puede enunciarse así: Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

La demostración de esta Regla tiene que esperar a la Unidad 8, pero creemos más conveniente unificar todo el cálculo de límites, con los métodos que se usan habitualmente. Las derivadas pueden repasarse de Primero o en la Unidad 8.

- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:
  - Si ambos son polinomios nos quedamos en el numerador y en el denominador con los monomios de mayor grado, simplificamos y obtenemos el valor del límite.
  - En cualquier otro caso, se usa la Regla de l'Hôpital.
- Indeterminación $\frac{0}{0}$:
  - Si ambos son polinomios, factorizamos numerador y denominador y simplificamos los factores comunes.
- Indeterminación $0\cdot\infty$:
  - Se efectúa la multiplicación indicada pero no realizada y se resuelve la indeterminación que aparezca.
  - Se convierte en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ usando el procedimiento: $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$, por el que 0 se convierte en ∞ ó ∞ en 0. Después se utiliza la Regla de L'Hôpital.
- Indeterminación 0^0, ∞^0, 1^∞:
  - Se toman logaritmos neperianos para *bajar* los exponentes ($\ln a^b = b\cdot\ln a$). Todas se convierten en $0\cdot\infty$ ($\ln 1^\infty=\infty\cdot\ln 1=\infty\cdot 0$, $\ln 0^0=0\cdot\ln 0=0\cdot(-\infty)$, $\ln\infty^0=0\cdot\ln\infty=0\cdot\infty$) y después en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.
- Indeterminación $\infty-\infty$:
  - Se efectúa la resta indicada pero no realizada y se resuelve la indeterminación que aparezca.
  - Se usa el conjugado cuando haya raíces cuadradas.

Ejemplos

12. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2-7x+15}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-4x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2-7x+15}=\frac{\infty}{\infty}(ind)\approx\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(2x)=\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-4x^2}=\frac{-\infty}{\infty}(ind)\approx\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}(ind)\approx\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{4x^2}=1.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty}(ind)\approx\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$

13. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{2x}=-\dfrac{1}{2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \ln x)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \ln x)=0\cdot(-\infty)\,(ind)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\dfrac{-\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

14. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{5}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+x}{7x+1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\sqrt{x^2+8}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{5}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+x}{7x+1}\right)=\dfrac{5}{0}\cdot\dfrac{0}{-6}=\infty\cdot 0\,(ind)\overset{multiplicando}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x(x+1)}{(x+1)(7x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x}{7x+1}=\dfrac{5}{6}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\sqrt{x^2+8}\right)=0\cdot\infty\,(ind)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2+8}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{\dfrac{x^2+8}{x^2}}\right)\approx\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}}\right)=2.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)=\infty-\infty\,(ind)\overset{restando}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{4}.$

15. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{3\ln(\cos 2x)}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{3\ln(\cos 2x)}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{3\cdot\dfrac{-2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2\cos 2x}{2\operatorname{sen}2x}=\dfrac{0}{0}\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\cos 2x-2x^2\operatorname{sen}2x}{4\cos 2x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cos x-\operatorname{sen}x}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x}=-\infty\end{cases}.$

16. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot e^{-x})$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}x^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot e^{-x})=\infty\cdot 0\,(ind)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=0^0\,(ind)\Rightarrow$ hacemos $y=x^x\Rightarrow \ln y=x\cdot\ln x\Rightarrow$ Calculamos el límite: $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=$

$=0\cdot(-\infty)\,(ind)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\dfrac{-\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}==\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)\overset{(1)}{=}\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}y\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}x^x\overset{(2)}{=}e^0=1.$

En (1) hemos intercambiado el límite y el neperiano. Lo podemos hacer porque el logaritmo es una función continua en su dominio y verifica que $\lim\limits_{x\to a}\left(\ln f(x)\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

En [(2)] deshacemos el neperiano recurriendo a su función inversa, la exponencial.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{3/x}=\infty^0\ (ind)\Rightarrow y=(1+2x)^{3/x}\Rightarrow \ln y=\dfrac{3}{x}\cdot\ln(1+2x)=\dfrac{3\cdot\ln(1+2x)}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\cdot\ln(1+2x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{1+2x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{3/x}=e^0=1.$

17. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2+\cos x-\cos^2 x}{x\operatorname{sen}x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0}\left[\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}\right]$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2+\cos x-\cos^2 x}{x\operatorname{sen}x}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left[\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}\right]=\infty-\infty(ind)\overset{conjugado}{=}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1+\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)}=-\infty.$

Hay que usar el conjugado y simplificar antes de tomar de nuevo el límite. Escribimos únicamente $\lim\limits_{x\to0}$ y no $\lim\limits_{x\to0^+}$, que es lo riguroso, porque no hay confusión posible.

18. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+x}{x}\right)}{\dfrac{2}{x}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+x}{x}\right)}{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x+2}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-\dfrac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+2}=1.$

Aquí podemos hacer un cambio de variable. Tanto en el numerador como en el denominador aparece el término $\dfrac{2}{x}$ (en el argumento del logaritmo neperiano $\dfrac{2+x}{x}=\dfrac{2}{x}+1$), que tiende a cero cuando $x\to\infty$. Hacemos , $y=\dfrac{2}{x}$ cambiamos el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}$ por $\lim\limits_{y\to0}$. Calculamos entonces $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y+1}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}}=1^\infty(ind)\Rightarrow y=(tgx)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}}\Rightarrow\ln y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}\cdot\ln(tgx)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(tgx)}{\operatorname{sen}x-\cos x}=$

$=\dfrac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1+tg^2x}{tgx}}{\cos x+\operatorname{sen}x}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\ln y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}y\right)=\sqrt{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}}=e^{\sqrt{2}}.$

También podemos resolver 1^{∞} recurriendo al **número e**. Para las funciones $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ o $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Como en sucesiones $\lim\limits_{n\to\infty}(p(n))^{q(n)}=1^{\infty}=exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(p(n)-1)\cdot q(n)\right\}$, para las funciones usaremos la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=1^{\infty}=exp\left\{\lim_{x\to a}\left[(f(x)-1)\cdot g(x)\right]\right\}.$$

Para mayor claridad se escribe exp en lugar de e. En el caso de las funciones la indeterminación no sólo aparece en ∞ sino en cualquier otro punto.

El ejemplo **17 b)** quedaría: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{1}{senx-\cos x}}=1^{\infty}\overset{n^o\, e}{=}exp\left\{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(tgx-1)\cdot\frac{1}{senx-\cos x}\right]\right\}=$

$$=exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{senx-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{senx-\cos x}\right]\right\}=exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x}\right]\right\}=e^{\sqrt{2}}.$$

Para las indeterminaciones 1^{∞} suele ser más sencillo usar el número e.

Ejemplo

19. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=1^{\infty}\,(ind)\overset{n^o\, e}{=}exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot 3x\right]\right\}=e^{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}=1^{\infty}\,(ind)\overset{n^o\, e}{=}exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}-1\right)2x\right]\right\}=exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{5x^3-7}\right\}=e^{0}=1.$

20. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{2/x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{2/x}=\infty^{0}\,(ind)\Rightarrow y=(x+1)^{2/x}\Rightarrow \ln y=\frac{2\cdot\ln(x+1)}{x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln(x+1)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\,(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{2/x}=e^{0}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{0}{0}\,(ind)\overset{conjugado}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$

Este ejemplo también se puede resolver mediante la Regla de L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{0}{0}\,(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}.$

Actividades

1. Halla: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^4-16}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-9x+5}{x^3-3x^2+3x-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+2x^2-11x-12}{x^3+8x^2+11x-20}$.

2. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-7x+6}{x^4-16}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5}{2x^3-x^2+5x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+2x}-7x}{3x+8}$.

3. Halla: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{x+16}}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{x-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.

4. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-25}{x^3+2x-7}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-x^4}{16-3x^4}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)$.

5. Averigua: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot e^{1/x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\cdot e^{1/x}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x\cdot e^{1/x}\right)$.

6. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} x^{2/x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\right)^x$.

7. Calcula **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-3x^2+4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{\sqrt{6x+1}-5}$.

8. Calcula **a)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+3x+5}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^4-3x^3+x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}\right)$.

9. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^3-4x^2-19x-14}{x^2-49}$.

10. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+9}-3}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$.

11. Averigua: **a)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x+5}-\dfrac{x^3+4}{x^2}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6x}{x-3}\cdot\dfrac{x^2-3x}{2x+5}\right)$.

12. Halla: **a)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x^2-5}{6x^2+2x-1}\right)^{3x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^4-3x^3+4x}$.

13. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3\right)^{\frac{5}{x^2-4}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{2\ln\left(e^{x+3}+x+3\right)}$.

14. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-sen2x)^{\frac{3}{tgx}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+senx}{x}\right)^{\frac{3}{\cos x}}$.

15. Calcula los límites siguientes: **a)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^3-6x+4}{x^2+5}-\dfrac{2x^2+7}{x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x+2}{3x-7}\right)$.

16. Calcula los límites siguientes: **a)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-4x}\right)^{\frac{x}{5}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^4-x^3-4x^2+4x}$.

2. Continuidad de un función

2.1. Estudio de la continuidad de una función. Tipos de discontinuidades

Una ***función*** f es ***continua*** en un punto $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, f *es continua en* $x = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *tal que si* $|x-a| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. La definición empleando entornos es la siguiente: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *tal que si* $x \in E(a,\delta)$ *entonces* $f(x) \in E(f(a),\varepsilon)$. Es la definición de límite, pero considerando lo que le ocurre a la función en el punto a.

La definición puede desglosarse en los tres siguientes pasos:

1. Existe $f(a)$: $\exists f(a)$
2. $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$: existen y coinciden los límites laterales.

Las funciones que pueden presentar problemas en su continuidad son las definidas a trozos (donde cambia de definición), con denominadores (en los puntos que anulan dicho denominador) y las logarítmicas (donde el argumento se hace cero).

Para estudiar la continuidad en un punto de las funciones definidas a trozos dábamos los tres pasos anteriores. En el caso de las funciones con denominadores, se iguala éste a cero y se sustituyen los valores en la función. Puede aparecer una no acotación $\frac{k}{0}$, que se resuelve calculando los límites laterales, o una indeterminación $\frac{0}{0}$, que hay que resolver por algún procedimiento válido. Las funciones logarítmicas siempre presentan una discontinuidad en los puntos en los que se anula el argumento.

Hay tres tipos de discontinuidades:

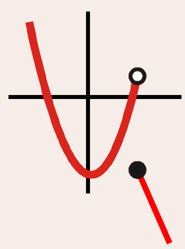
i. **Discontinuidad inevitable de salto finito** (suele darse en funciones definidas a trozos). Los límites laterales son distintos, pero ambos finitos.

ii. **Discontinuidad inevitable de salto infinito** (La función no está acotada en el punto y tiene una asíntota vertical en el punto).

iii. **Discontinuidad evitable** (aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resuelta da un límite finito y cuyo valor asignaremos a la función en el punto).

Ejemplos

21. ¿Es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ si } x < 2 \\ 1 - 2x, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$ continua en $x = 2$?



Solución :

1. $f(2) = 1 - 2x|_{x=2} = -3$.
2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 3) = 1$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(1 - 2x) = -3 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$ pues los límites laterales son distintos. Por lo tanto, f no es continua en $x = 2$.

22. ¿Es discontinua $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ en $x=-1$? ¿Y en $x=0$? ¿Cómo podrías resolver la discontinuidad evitable?

Solución :

$f(-1)=\dfrac{0}{0}(ind)\Rightarrow f(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+x}\overset{factorizando}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x}=-1\Rightarrow$ discontinuidad evitable en $x=-1$.

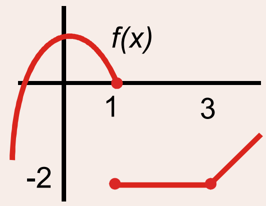
$f(0)=\dfrac{1}{0}\Rightarrow$ discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=0$.

Se redefine la función como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+x}, \text{ si } x=-1\\ -1, \text{ si } x=-1\end{cases}$.

El siguiente paso es definir la continuidad en un intervalo [*a*,*b*]. Obviamente *f* será continua en [*a*,*b*] cuando sea continua en todos los puntos de dicho intervalo.

Ejemplos

23. Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Representa gráficamente f y esboza la gráfica de g en donde sea discontinua. **a)** $f(x)=\begin{cases}1-x^2, \text{ si } x<1\\ -2, \text{ si } 1\le x\le 3\\ x-5, \text{ si } x>3\end{cases}$; **b)** $g(x)=\dfrac{2x-8}{x^2-x-12}$.



Solución :

a) Los posibles puntos de discontinuidad son $x=1$, $x=3$.

Se analizan los pasos necesarios para que la función sea continua en $x=1$:

1º) $f(1)=-2$;

2º) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-2)=-2\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 1}f(x)\Rightarrow f$ no es continua en $x=1$.

Es una discontinuidad de salto finito.

Analogamente en $x=3$:

1º) $f(3)=-2$;

2º) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-2)=-2$; $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x-5)=-2\Rightarrow\exists\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2\Rightarrow$ continua en $x=3$.

f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, y presenta una discontinuidad de salto finito en x = 1.

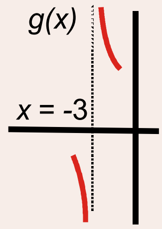
b) Los posibles puntos de discontinuidad son $x=4$, $x=-3$ $(DEN=0)$.

$x=4$: $f(4)=\dfrac{0}{0}(ind)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-4)}{(x-4)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{2}{7}\Rightarrow$ discontinuidad evitable.

$x=-3$: $f(-3)=\dfrac{-14}{0}\Rightarrow$ discontinuidad inevitable de salto infinito. La función g tiene una asíntota vertical en $x=-3$. Para el esbozo calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x-8}{x^2-x-12}=\dfrac{-14}{0^+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x-8}{x^2-x-12}=\dfrac{-14}{0^-}=\infty$.

g es continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$, presenta una discontinuidad evitable en $x=4$ y una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=-3$. Escribimos la función como: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-8}{x^2-x-12}, \text{ si } x\neq 4\\ \dfrac{2}{7}, \text{ si } x=4\end{cases}$.



No es una función definida a trozos, pues cambia en un único punto. A la derecha está parte del esbozo de g.

24. Halla el valor de a para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2+1}, \text{ si } x<1\\ \dfrac{x}{1+ax}, \text{ si } x\geq 1\end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución :
En principio, el posible punto de discontinuidad es $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{a}{x^2+1}=\frac{a}{2}=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+ax}=\frac{1}{1+a}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{1}{1+a}\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow a=-2,1.$$

Así, f podría tener las dos formas siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2+1}, \text{ si } x<1\\ \dfrac{x}{1-2x}, \text{ si } x\geq 1\end{cases}$; **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, \text{ si } x<1\\ \dfrac{x}{1+x}, \text{ si } x\geq 1\end{cases}$. En la forma a) vemos que $1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\notin[1,\infty)$.

En la b), tenemos que $1+x=0\Rightarrow x=-1\notin[1,\infty)$. Por ello, para $a=-2,1$ la función es continua en $\mathbb{R}$.

25. Halla a, b, c y d para que sea continua $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, \text{ si } x<2\\ 3x-a, \text{ si } 2\leq x<3\\ b, \text{ si } 3\leq x<5\\ -x+c, \text{ si } 5\leq x<7\\ d, \text{ si } 7\leq x\end{cases}$ y represéntala.

Solución :
Los posibles puntos de discontinuidad son $x=2, 3, 5, 7$. Calculamos los límites laterales (el valor de la función en el punto coincidirá con alguno) y los igualamos:

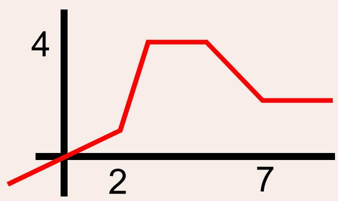
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}x=1;\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(3x-a)=6-a\Rightarrow 1=6-a\Rightarrow a=5.$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}(3x-5)=4;\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} b=b\Rightarrow b=4.$

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5} 4=4;\ \lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5}(-x+c)=-5+c\Rightarrow 4=-5+c\Rightarrow c=9.$

$\lim_{x\to 7^-} f(x)=\lim_{x\to 7}(-x+9)=2;\ \lim_{x\to 7^+} f(x)=\lim_{x\to 7} d=d\Rightarrow d=2.$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, \text{ si } x<2\\ 3x-5, \text{ si } 2\leq x<3\\ 4, \text{ si } 3\leq x<5\\ -x+9, \text{ si } 5\leq x<7\\ 2, \text{ si } 7\leq x\end{cases}$ y su representación:

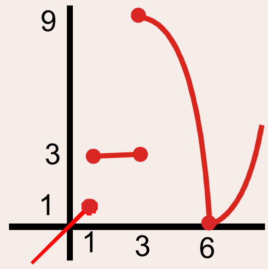


26. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x\le 1 \\ 3, \text{ si } 1<x<3 \\ \left|x^2-6x\right|, \text{ si } x\ge 3 \end{cases}$. Represéntala.

Solución :

Parece que los únicos posibles puntos de discontinuidad son $x=1,\ x=3$. Sin embargo, hay que considerar también el valor absoluto: $\left|x^2-6x\right|=0\Rightarrow x=0$ y $x=6$. De estos dos valores, sólo influye el 6, pues $6\ge 3$.

Separamos y rescribimos la función como $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x\le 1 \\ 3, \text{ si } 1<x<3 \\ -x^2+6x, \text{ si } 3\le x<6 \\ x^2-6x, \text{ si } x>6 \end{cases}$.



$x=1\Rightarrow 1^{\text{o}})\ f(1)=1;\quad 2^{\text{o}})\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1} x=1\ne \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1} 3=3\Rightarrow$ No es continua.

$x=3\Rightarrow 1^{\text{o}})f(3)=9;\quad 2^{\text{o}})\ \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3} 3=3\ne \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\left(-x^2+6x\right)=9\Rightarrow$ No es continua.

$x=6\Rightarrow 1^{\text{o}})f(6)=0;\ 2^{\text{o}})\ \lim\limits_{x\to6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to6}\left(-x^2+6x\right)=0=\lim\limits_{x\to6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to6}\left(x^2-6x\right)=0\Rightarrow$ Sí es continua.

f es continua en $\mathbb{R}-\{1,3\}$ presentando discontinuidades inevitables de salto finito en ambos puntos. Como ya sabíamos, el valor absoluto es continuo.

Actividades

17. Considera la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} -4x+a, \text{ si } x\le -2 \\ x^2-5, \quad \text{si } -2<x<1. \\ bx+3, \text{ si } 1\le x \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y de b para la f sea continua para todo x.

b) Haz un gráfico de la función obtenida en el apartado anterior.

18. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}, \text{ si } x\le 1 \\ 2x^3-1, \text{ si } x>1 \end{cases}$, ¿en qué puntos es discontinua? ¿De qué tipo?

19. Averigua para qué valor de a la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+a, \text{ si } x\le 0 \\ 1-x^2, \text{ si } x>0 \end{cases}$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Esboza la gráfica de dicha función para ese valor de a.

20. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\left|\dfrac{2x}{1-x^2}\right|$.

21. De una función f se sabe que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{7},f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9},\ldots,f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n+3}$ .....$n\in\mathbb{N}$.

¿Cuánto vale $f(0)$ si f es continua en el origen de coordenadas?

22. Si la función f es continua, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?:

a) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to0} f(x+2)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x-1)$; **c)** $\lim\limits_{x\to7} f(x)=\lim\limits_{h\to0} f(7+h)$;

d) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=f(-5)$; **e)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)=5\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\left[f(x)-5\right]=0$; **f)** $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=\lim\limits_{h\to0}(h-4)$.

2.2. Consecuencias de la continuidad: teoremas de Weierstrass, de Bolzano y de los valores intermedios

De la definición de continuidad en un punto obtenemos dos resultados muy importantes:

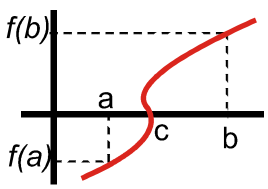
Teorema: Si una función f es continua en a entonces existe un entorno de a en donde f está acotada.

Demostración: $x \in E(a,\delta) \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$. No hay más que dar un valor a ε para obtener el entorno buscado.

Teorema: Si una función f es continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a en donde f tiene el mismo signo que $f(a)$.

Demostración: Sabemos que $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$. Haciendo $\varepsilon = \frac{f(a)}{3}$ tenemos que $\frac{2}{3}f(a) < f(x) <$ $< \frac{4}{3}f(a)$, por lo que sgn $f(x)$ = sgn $f(a)$ en un cierto entorno.

De la continuidad en un intervalo obtenemos varios resultados importantes y muy interesantes:



Teorema de Bolzano: Si la función f es continua en un intervalo real $[a,b]$ y sgn $f(a) \neq$ sgn $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Es decir, si una función es continua en un intervalo y tiene signos distintos en los extremos de dicho intervalo, debe anularse en algún punto del interior del intervalo.

Demostración: supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (como en el gráfico). Encontraremos c usando intervalos encajados. Dividimos el intervalo por la mitad. Llamamos m_1 a ese punto. Puede ocurrir que:

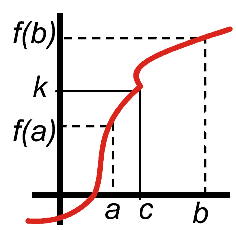
- $f(m_1) = 0 \Rightarrow c = m_1$ y estaría demostrado el teorema.
- $f(m_1) < 0 \Rightarrow$ hacemos $a_1 = m_1$, $b_1 = b$.
- $f(m_1) > 0 \Rightarrow$ hacemos $a_1 = a$, $b_1 = m_1$.

En ambos casos se tiene $[a_1,b_1]$, con la mitad de longitud que $[a,b]$ y que sigue verificando que sgn $f(a_1) \neq$ sgn $f(b_1)$. Repetimos el procedimiento, obteniendo una sucesión de intervalos cerrados encajados $[a_n,b_n] \subset \ldots [a_1,b_1] \subset [a,b]$, cada uno con la mitad de longitud que el anterior, así que verifican que $\lim_{n\to\infty} f(b_n - a_n) = 0$. La intersección de todos dará un punto c. Si $f(c) > 0$, existe un entorno de c en el que $f(x) > 0$, pero dentro de ese entorno habrá intervalos $[a_n,b_n]$, que deben verificar que $f(a_n) > 0$ y $f(b_n) > 0$, contrariamente a nuestra hipótesis de partida. Si $f(c) < 0$, hay otra contradicción, pues ahora $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) < 0$. Por lo tanto, $f(c) = 0$.

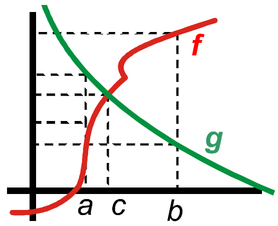
El teorema de Bolzano es la base del **método de la bisección**, que puede usarse para resolver ecuaciones numéricamente. No obstante, su uso es más teórico que práctico, pues es muy lento al tener que dividir los intervalos y probar signos.

Teorema de los valores intermedios: Si la función f es continua en un intervalo real $[a,b]$ y k es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.

Es decir, si una función es continua en un intervalo $[a,b]$, toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.



Demostración: usamos una función auxiliar $g(x) = f(x) + k$, que es continua en $[a,b]$, pues es la diferencia de dos funciones continuas, y además verifica que sgn $g(a) \neq$ sgn $g(b)$, pues o $f(a) < k < f(b)$, y sería $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$, o, $f(a) > k > f(b)$, siendo $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$. De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c) + k = 0 \Rightarrow f(c) = k$.



Teorema: Si las funciones f y g son continuas en un intervalo real $[a,b]$ y verifican que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Si una función empieza por debajo y termina por encima de otra en un intervalo, debe cortar a la segunda en el interior del intervalo. Evidentemente, es indiferente cuál sea la primera o la segunda función. Es consecuencia del teorema de Bolzano.

Demostración: usamos una función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$, continua por ser la resta de dos funciones continuas. Además $h(a) = f(a) - g(a) < 0$; $h(b) = f(b) - g(b) < 0 \Rightarrow$ sgn $h(a) \neq$ sgn $h(b) \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

Teorema: Si la función f es continua en un intervalo real $[a,b]$, está acotada en dicho intervalo.

Demostración: construimos una sucesión de intervalos cerrados encajados $[a_n,b_n]\subset\ldots[a_1,b_1]\subset[a,b]$, cada uno de longitud mitad que el anterior (verifican que $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n - a_n) = 0$), cuya intersección es un punto c. Supongamos que f no está acotada en $[a,b]$, por lo que tampoco lo estará en ninguno de los intervalos encajados. En c se produce una contradicción: al ser f continua, debe estar acotada en algún entorno de c, lo que incluiría algún intervalo $[a_n,b_n]$, en los que f no estaba acotada por nuestra suposición. Por lo tanto, nuestra suposición es errónea y f debe estar acotada en $[a,b]$.

Teorema de Weierstrass: Si la función f es continua en un intervalo real $[a,b]$, $\exists\ c$ y $\exists\ d \in (a,b)$ tales que $f(c)$ es el máximo y $f(d)$ es el mínimo de f en $[a,b]$, esto es, $f(d) \leq f(x) \leq f(c)\ \ \forall x \in [a,b]$.

Este teorema es consecuencia del hecho de que toda función continua está acotada en un intervalo. Por ello, tendrá una cota inferior y una superior. La cota inferior será su mínimo y la superior su máximo (ambas cotas siempre son números del intervalo, pues son números reales). No hay que confundir estos mínimos y máximos con los extremos relativos. Aquí son los menores y mayores valores que alcanza la función, mientras que los relativos exigen un cambio en la monotonía.

Ejemplos

27. Demuestra que la ecuación $2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ tiene alguna solución real y escribe un intervalo en el que se encuentra.

Solución:

Usaremos el teorema de Bolzano. A partir del enunciado se construye una función continua: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6$ (continua pues es un polinomio de tercer grado). Se busca un intervalo donde cambie de signo. Para ello, hay que probar distintos valores: $f(0) = -6 < 0\,; f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{sgn}\, f(0) \neq \text{sgn}\, f(1) \Rightarrow \exists c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Al tratarse de ejemplos académicos, las soluciones no suelen ser números extraños, ni se necesita gran precisión. Ésta se conseguiría con el método de la bisección que consiste en ir dividiendo los intervalos por la mitad, y cogiéndolos de modo que la función siempre tenga signos distintos en sus extremos. Se para al conseguir la precisión buscada. En el presente ejemplo tendríamos:

$f(0,5) = -4,5 \Rightarrow$ se coge $[0,5;\ 1]$; se divide: $f(0,75) = -2,344 \Rightarrow$ se coge $[0,75;\ 1]$; se divide: $f(0,875) = -0,832 \Rightarrow$ se coge $[0,875;\ 1]$; se divide: $f(0,9375) = 0,042 \Rightarrow$ se coge $[0,875;\ 0,9375]$; se divide: $f(0,90625) = -0,405 \Rightarrow$ se coge [0,90625; 0,9375]; se divide:f(0,921875) = – 0,184 ⇒ se coge [0,921875; 0,9375]. En el siguiente paso tendríamos una precisión de 2 cifras decimales únicamente (probaríamos con 0,9296875).

El procedimiento es largo y pesado, pues se acerca con lentitud al valor buscado. Repite los anteriores pasos usando la calculadora. Para mayor comodidad, introduce el valor que vas a probar en la memoria.

El teorema de Bolzano permite decir si tiene alguna solución, pero no que sea la única. Para poder hacer tal afirmación hay que estudiar la derivada de la función.

28. Demuestra que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real:

a) $4sen2x-\left(x^2+1\right)\cos 2x=2$; **b)** $3x^2-\dfrac{1}{2-x+x^2}=1$.

Solución :

a) $f\left(x\right)=4sen2x-\left(x^2+1\right)\cos 2x-2$, continua por ser el resultado de operar funciones continuas. Probamos:

$$f\left(0\right)=-3<0\,;f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4sen\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\cos\frac{\pi}{2}-2=2>0\Rightarrow \text{sgn}\,f\left(0\right)\neq \text{sgn}\,f\left(\frac{\pi}{4}\right)\overset{th\ Bolzano}{\Rightarrow}\ \exists c\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

tal que $f\left(c\right)=0$.

Cuando hay funciones trigonométricas, suelen aparecer soluciones con ? radianes (los ángulos hay que medirlos en radianes para que sean números reales en base 10).

Se puede usar $f\left(x\right)=4sen2x-\left(x^2+1\right)\cos 2x$ y el teorema de los valores intermedios. Verifica que tal que

$$f\left(0\right)=-1,f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\Rightarrow f\left(0\right)<2<f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\exists c\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\text{ tal que } f\left(c\right)=2.$$

b) Hagamos $f\left(x\right)=3x^2-\dfrac{1}{2-x+x^2}$, que es continua en $\mathbb{R}$ ($2-x+x^2\neq 0$). Tenemos que $f\left(0\right)=-\dfrac{1}{2},f\left(1\right)=\dfrac{5}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{2}<1<\dfrac{5}{2}\Rightarrow\exists c\in\left(0,1\right)$ tal que $f\left(c\right)=1$. Se puede usar $f\left(x\right)=3x^2-\dfrac{1}{2-x+x^2}-1$ y el teorema de Bolzano.

29. Un polinomio verifica que $p\left(5\right)=8$, siendo -1 su término independiente. Demuestra que existe algún punto del intervalo [0,5] en el cual el polinomio vale 6.

Solución :

Los polinomios son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, por lo que lo serán en cualquier intervalo de la recta real.

Además, $p\left(0\right)<6<p\left(5\right)\overset{\substack{th\ valores\\ intermedios}}{\Rightarrow}\ \exists c\in\left(0,5\right)$ tal que $p\left(c\right)=6$.

Recuerda que el término independiente de un polinomio es $p\left(0\right)$.

30. Demuestra que $f(x)=4\cos\dfrac{x}{2}-7sen\dfrac{x}{2}$ alcanza el valor 1 en algún punto.

Solución :

f es continua en $\mathbb{R}$ (resta de funciones continuas) y $f\left(0\right)=4\,;f\left(\pi\right)=-7\Rightarrow$ como $f\left(0\right)>1>f\left(\pi\right)\overset{\substack{th\ de\ los\ valores\\ intermedios}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\exists c\in\left[0,\pi\right]$ tal que $f\left(c\right)=1$.

31. Demuestra que las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=\cos x$ se cortan en algún punto.

Solución:

Ambas son continuas en $\mathbb{R}$. Se verifica que $f(0)=0, g(0)=1 \Rightarrow f(0)<g(0)$ y que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \exists c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c)=g(c)$.

32. Encuentra un intervalo en el que se corten las funciones $y=x^2$ e $y=e^{-x^2}$.

Solución:

Ambas funciones son continuas. Hacemos $f(x)=e^{-x^2}$ y $g(x)=x^2$. Se verifica que $f(-1)=\frac{1}{e}, g(-1)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-1)<g(-1); f(0)=1, g(0)=0 \Rightarrow f(0)>g(0) \Rightarrow \exists c \in (-1,0)$ tal que $f(c)=g(c)$.

Como también $f(1)=\frac{1}{e}, g(1)=1 \Rightarrow f(1)<g(1) \Rightarrow \exists c \in (0,1)$ tal que $f(c)=g(c)$.

33. Indica si las siguientes funciones están acotadas en los intervalos que se dan. Di también si tienen máximo o mínimo: **a)** $f(x)=e^{-x^2}$ en $[-2,5]$; **b)** $g(x)=\frac{x}{x-5}$ en $[0,4]$; **c)** $h(x)=\frac{x}{x-3}$ en $[0,4]$; **d)** $m(x)=\frac{x}{x^2+4}$ en $(-\infty,\infty)$; **e)** $n(x)=\frac{x}{\ln x}$ en $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Solución:

Aplicaremos el teorema de Weierstrass. Para ello, hay que ver si las funciones son continuas en el intervalo dado:

a) $f(x)=e^{-x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, luego lo será en $[-2,5]$. Está acotada. Como f es creciente en $(-2,0)$ y decreciente en $(0,5)$, tiene un máximo en el punto $x=0$, de valor 1. Como f es simétrica, tiene un mínimo en $x=5$, de valor e^{-25}.

b) $g(x)=\frac{x}{x-5}$ es continua en $[0,4]$ (el único punto de discontinuidad es $x=5$, que no pertenece intervalo considerado). Por lo tanto, g está acotada y tiene un máximo (en $x=0$ y vale 0) y un mínimo (en $x=4$ y vale -4); g es decreciente en $[0,4]$.

c) $h(x)=\frac{x}{x-3}$ no es continua en $[0,4]$, por lo que ni tiene que estar acotada (hay una división por cero en $x=3$) ni que verificar el teorema de Weierstrass.

d) $m(x)=\frac{x}{x^2+4}$ es continua en $\mathbb{R}$, pero no tiene que verificar el teorema de Weierstrass porque el intervalo $(-\infty,\infty)$ (la recta real) no es cerrado. No obstante, vemos que $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+4}=0$ y que la función presenta un mínimo relativo en $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$ y un máximo relativo en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$, que lo son también absolutos.

e) $n(x)=\frac{x}{\ln x}$ no es continua en $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$ (hay una división por cero en $x=1$ y no está acotada), por lo que no verifica el teorema de Weierstrass.

3. Asíntotas

Se llama asíntota a la recta a la que se acerca la función cuando no está acotada en un punto (asíntota vertical), o a la recta a la que se acerca la función cuando $x \to \pm\infty$ (asíntota horizontal y asíntota oblicua). Hay tres tipos de asíntotas: la asíntota vertical, la asíntota horizontal y la asíntota oblicua.

La ecuación de la **asíntota vertical** es $x = a$, siendo a la solución de la ecuación *DENOMINADOR(x) = 0* ó *ARGUMENTO(x) = 0* (para el logaritmo). Se calculan los límites laterales para saber si la función tiende a ∞ ó $-\infty$ al acercarse x al punto a.

Una función f tiene una **asíntota horizontal** cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$. La ecuación es $y_H = k$ (escribimos el subíndice H para distinguirla de la función que se suele llamar y). Una función no tiene asíntota horizontal cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Si la función tiene asíntota horizontal, no tendrá oblicua, pues la horizontal es un caso particular de ésta, con la pendiente igual a cero.

Una **asíntota oblicua** es una recta de ecuación $y_{Ob} = mx + n$ a la que se aproxima la función cuando $x \to \pm\infty$. Como se aproxima a y_{Ob} debe verificar que:

$$1^{\circ})\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{y_{Ob}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{mx+n} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{mx} = 1 \Rightarrow m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$2^{\circ})\quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - y_{Ob}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0 \Rightarrow n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right).$$

Primero se calcula m y después n. Ambos valores deben ser finitos, pues en caso contrario no tendrá asíntota oblicua. Para saber cómo se acerca la función a la asíntota horizontal o a la oblicua hay que estudiar el signo de la diferencia $y - y_{AS}$ tanto en ∞ como en $-\infty$. Si $sgn(y - y_{AS}) > 0$, la función va por encima de la asíntota; si $sgn(y - y_{AS}) < 0$, y va por debajo de y_{AS}.

Puede darse el caso de que la asíntota horizontal o la oblicua sea distinta para $x \to \infty$ que para $x \to -\infty$. En ese caso, hay que calcular por separado ambos límites.

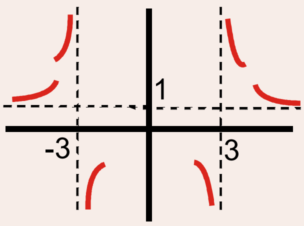
Ejemplos

34. Averigua las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$ e indica cómo se aproxima a ellas.

Solución :

Asíntotas verticales: $DEN = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Las ecuaciones de las asíntotas verticales son $x = -3$, $x = 3$.

La función se aproxima a cada asíntota:



$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^+} = \infty;\ \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^-} = -\infty;\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^+} = \infty.$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-9} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, la asíntota horizontal es $y_H = 1$ y se aproxima como:

$$sgn\left(\frac{x^2}{x^2-9} - 1\right) = sgn\left(\frac{9}{x^2-9}\right) \approx sgn\left(\frac{9}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow f > y_H \Rightarrow f \text{ va por encima de } y_H.$$

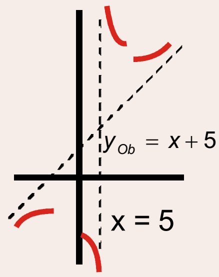
35. Halla las asíntotas de la función $y=\dfrac{x^2}{x-5}$ y estudia el comportamiento de la función en sus proximidades.

Solución :

Asíntotas verticales: $DEN=0\Rightarrow x=5\Rightarrow AV:x=5\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2}{x-5}=\dfrac{25}{0^-}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2}{x-5}=\dfrac{25}{0^+}=\infty.$

Asíntotas horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x-5}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\Rightarrow$ No tiene horizontal.

Asíntotas oblicua: $\left.\begin{aligned} m&=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x(x-5)}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\\ n&=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-5}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x}{x-5}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x}{x}=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow y_{Ob}=x+5.$



$sgn\left[\dfrac{x^2}{x-5}-(x+5)\right]=sgn\dfrac{25}{x-5}\Rightarrow\begin{cases}<0,\text{ si } x\to-\infty\Rightarrow y<y_{Ob}\\ >0,\text{ si } x\to\infty\Rightarrow y>y_{Ob}\end{cases}.$

Una fracción algebraica tiene asíntota oblicua cuando la diferencia de grado de numerador y denominador es 1, que es el grado de la asíntota oblicua.

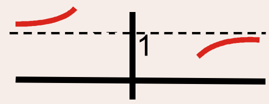
36. Halla las asíntotas de $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+1}$ y estudia su comportamiento cerca de ellas.

Solución :

$DEN\neq 0$ No tiene asíntota vertical. Si tiene asíntota horizontal:

$$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\Rightarrow y_H=1\Rightarrow sgn\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}-1\right)=sgn\left(\frac{2-2x}{x^2+1}\right)\approx sgn\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=sgn\left(\frac{-2}{x}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\begin{cases}>0,\text{ si } x\to-\infty\Rightarrow y>y_H\\ <0,\text{ si } x\to\infty\Rightarrow y<y_H\end{cases}$. No tiene asíntota oblicua, pues tiene horizontal.



Actividades

23. Demuestra que la ecuación $2sen2x-x^2\cos 2x=1$ tiene alguna solución.

24. Considera la función $f(x)=\begin{cases}|3-x|,\text{ si } x<7\\ ax+4,\text{ si } 7\leq x<10\end{cases}$.

a) Determina el valor de a para que f sea continua en $x=7$.

b) Esboza la gráfica de f.

25. Una función f cumple que $|f(x)|\leq|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Demuestra que f es continua en 0.

26. Demuestra que $f(x)=\begin{cases}x,\text{ si } x\in Q\\ 3x-x^2,\text{ si } x\in Q-R\end{cases}$ sólo es continua en dos puntos.

27. Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas, si las hubiere.

28. Determina el dominio de definición y obtén las asíntotas de $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$.

29. Estudia la continuidad y las asíntotas de $y=\dfrac{2x}{1-|x|}$.

30. Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$. Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

31. Demuestra que la ecuación $x^3+2x+1=0$ tiene alguna solución.

32. Sea $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2, \text{ si } x<3 \\ \dfrac{10}{a-x}, \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

a) Halla los valores del parámetro a para los que f es continua en $x=3$.

b) Para $a=4$ calcula las asíntotas verticales y horizontales de f.

33. Sea $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} \text{ si } x<1 \\ (x+a)^2 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$. ¿Para qué valores de a la función es continua?

34. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+5x, \text{ si } x\leq -5 \\ x, \text{ si } -5<x\leq 6 \\ \dfrac{1}{(x-6)^2}, \text{ si } 6<x \end{cases}$, estudia su continuidad y sus asíntotas.

35. La función $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ cambia de signo en los extremos del intervalo [1,3], pero no se anula en su interior. ¿Se contradice el teorema de Bolzano?

36. Halla a y b para que $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x<-1 \\ -2x^3+b & \text{si } -1\leq x<0 \\ e^x-a & \text{si } 0\leq x \end{cases}$ sea continua.

37. Estudia la continuidad y las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$ y $g(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$.

38. ¿Tomará el polinomio x^5+3 el valor 1 en algún punto de la recta real?

39. Estudia la continuidad y las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

40. Demuestra que un polinomio de grado impar tendrá al menos una raíz real. Usa para ello los límites en $\pm\infty$ y el teorema de Bolzano. ¿Se puede afirmar lo mismo de un polinomio de grado par?

Recuerda

✓ Los casos importantes del cálculo de **límites** son las indeterminaciones. En total hay 7: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

El mejor método es la Regla de L'Hôpital:

- Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

  Su aplicación es inmediata para los casos citados y escribiendo $f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$, para $0\cdot\infty$. En el caso $\infty-\infty$ o bien se hace la resta y luego se toma el límite, o bien se multiplica y se divide por el conjugado, si hay raíces cuadradas. Los casos $0^0, \infty^0, 1^\infty$ se resuelven tomando logaritmos neperianos. Después aparece $0\cdot\infty$, ya descrito. Hay que recurrir a la exponencial para deshacer el haber tomado logaritmos.

  La indeterminación 1^∞ puede resolverse usando el número *e*:

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right]\right\}$.

✓ Para que una función sea **continua** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Si es definida a trozos, se siguen estos tres pasos: 1º) Cálculo de $f(a)$; 2º) Cálculo de los límites laterales. Si coinciden, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3º) Se comprueba si $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Si es una función con denominadores, se resuelve la ecuación *DEN = 0*. Después se sustituyen los puntos en la función:

  a) Si sale $\frac{n^0}{0}$, *f* presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Si sale $\frac{0}{0}$, hay que resolver una indeterminación.

  b) Si da un valor finito, se trata de una discontinuidad evitable.

✓ Las funciones continuas están acotadas en intervalos cerrados por lo que verifican dos teoremas fundamentales: el de Bolzano (el cambio de signo lleva aparejado que la función se anule) y el de Weierstrass (la función tiene máximo y mínimo en un intervalo cerrado). De estos dos se deducen otros también importantes.

✓ Hay 3 tipos de **asíntotas**:

- La *asíntota vertical* de ecuación $x = a$, siendo a la solución de las ecuaciones *DEN (x) = 0* ó *ARG (x) = 0* (en el caso del logaritmo). Para saber cómo se acerca la función a la asíntota se calculan los límites laterales.
- La *asíntota horizontal* de ecuación $y_H = k$ cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$, $k \in$ R.
- La *asíntota oblicua*, recta de ecuación $y_{Ob} = mx + n$, con $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$, a la que se aproxima la función f cuando $x\to\pm\infty$.

Para saber cómo se acerca la función a las asíntotas horizontal y oblicua hay que estudiar el signo de la diferencia $y - y_{AS}$ tanto en ∞ como en $-\infty$. Si $sgn\,(y - y_{AS}) > 0$, y va por encima de y_{AS}; si $sgn\,(y - y_{AS}) < 0$, la función va por debajo de la asíntota.