6 Ángulos, distancias, áreas y volúmenes

Se suelen llamar problemas afines a todos los que se refieren a intersección (incidencia) y paralelismo de los elemento básicos del espacio: puntos, rectas y planos. Por el contrario, se denominan problemas métricos a los que hacen referencia a las medidas de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

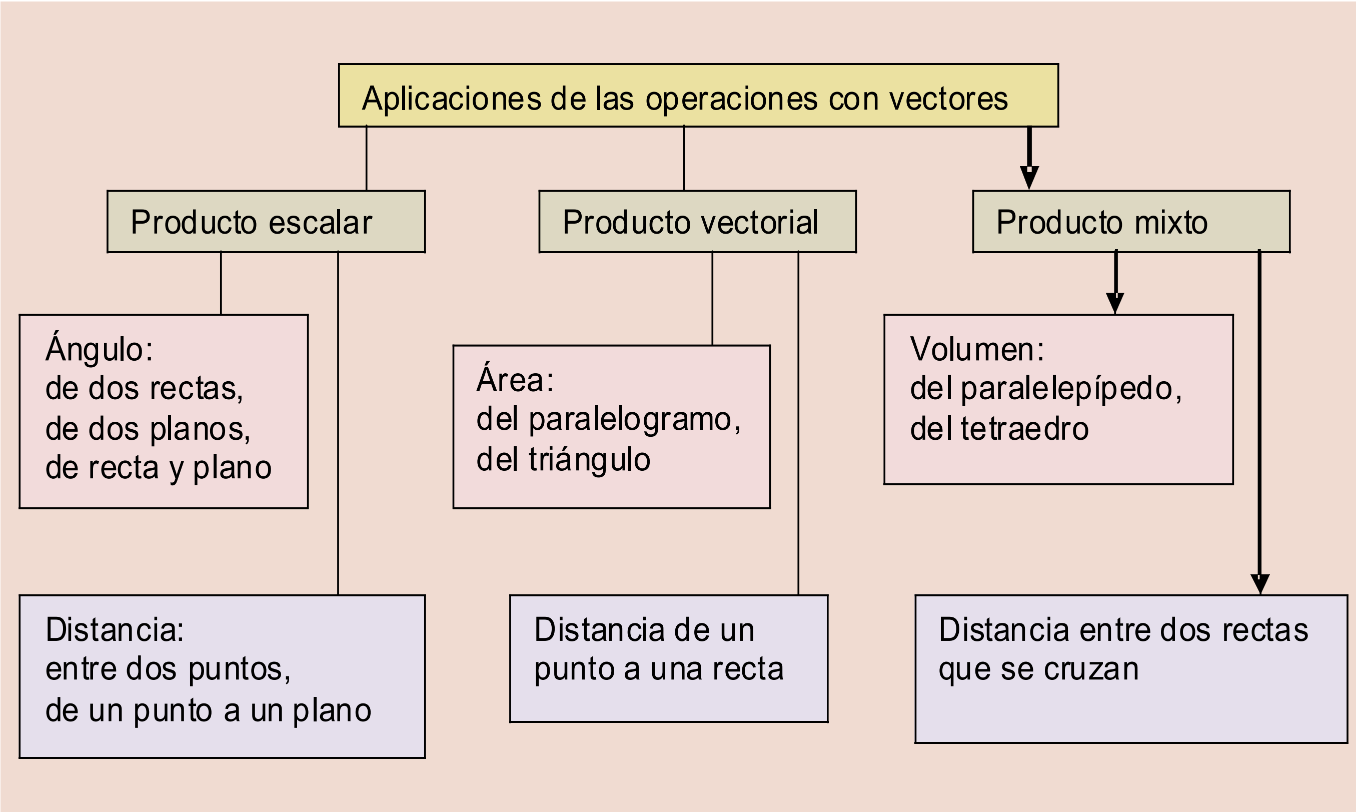
En esta Unidad didáctica trataremos los problemas métricos que se pueden establecer entre puntos, rectas y planos; en algunas figuras planas: triángulos y paralelogramos, y los cuerpos geométricos sencillos: paralelepípedos y tetraedros.

Todos los problemas métricos planteados admiten soluciones basadas en los vectores y las operaciones con vectores. El producto escalar tiene especial relevancia para medir ángulos y distancias, hasta el punto que se suele considerar como la cinta métrica con la se aborda los problemas referentes a longitudes. El módulo del producto vectorial es el instrumento para el cálculo de áreas y el módulo del producto mixto se emplea para hallar los volúmenes de los sólidos más simples.

• *Las torres Kio de Madrid tienen forma de paralelepípedo.* (ITE. Banco imágenes)

En la Unidad didáctica hemos clasificado los problemas en relativos a ángulos, a distancias, a áreas y a volúmenes. Hemos dedicado un apartado al estudio de algunos lugares geométricos del espacio que tienen una solución inmediata con los instrumentos de medida considerados.

1. Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:
2. Conocer los procedimientos para medir ángulos.
3. Definir el concepto de distancia y resolver problemas de distancias entre puntos, rectas y planos.
4. Deducir fórmulas que abrevian el cálculo de distancias.
5. Aplicar el producto vectorial y el producto mixto para calcular áreas y volúmenes.
6. Estudiar qué es un lugar geométrico y cómo se determinan los puntos que lo constituyen.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

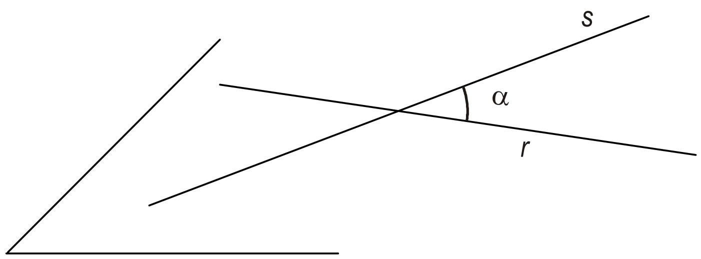
1. Ángulos

1.1. Ángulo de dos rectas

Sabemos, lo hemos visto en la Unidad didáctica 4, que dos vectores, trazados con origen en el mismo punto, pueden formar dos ángulos; uno comprendido entre 0º y 180º y otro, mayor, comprendido entre 180º y 360º. Tomamos como ángulo de los vectores el menor de los dos. Si llamamos α al ángulo que forman dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el cálculo de la medida α se hace con una calculadora científica y a partir de la definición de producto escalar,

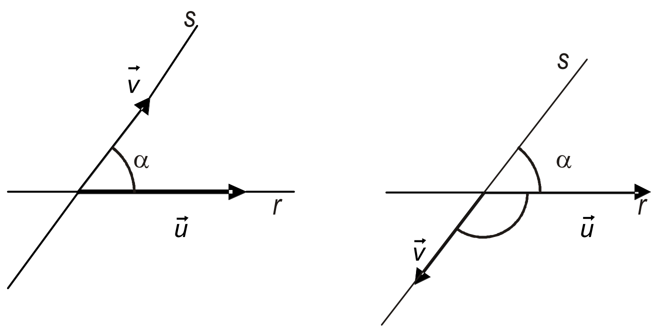
$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \text{ o } \alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \text{ (como aparece en las calculadoras).}$$

Dos rectas determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos, y tomamos como ángulo de las dos rectas el menor de ellos, que es un ángulo agudo o a lo sumo recto si son perpendiculares.



El ángulo formado por dos rectas que se cruzan, *r* y *s*, se define como el ángulo formado por dos rectas secantes paralelas a las dadas.

En cualquier caso, el ángulo que forman las dos rectas *r* y *s* es igual o suplementario al ángulo que forman sus vectores de dirección, como se advierte en la figura



Llamamos α al ángulo de *r* y *s*; como este ángulo es el menor de los dos ángulos suplementarios será un ángulo agudo y su coseno será siempre positivo, luego podemos escribir:

$$\cos\alpha = \left|\cos \textit{ángulo}(\vec{u},\vec{v})\right| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ejemplo

1. Calcular el ángulo que forman las rectas r:$(x, y, z) = (2 + \lambda, 3 + 2\lambda, 5 - \lambda)$ y s: $\dfrac{x+1}{2} = y - 4 = \dfrac{z+2}{1}$

Solución:

Los vectores de dirección de r y s son $\vec{v}(1, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, 1, 1)$, respectivamente.

Si α es el ángulo que forman r y s, entonces tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|(1, 2, -1)\cdot(2, 1, 1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

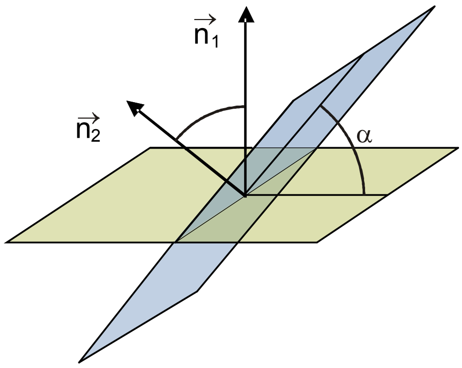
Por tanto, $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2} = 60^{\circ}$. Con la calculadora científica

$\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\cos^{-1}}\,0.5\,\boxed{=}\,60$.

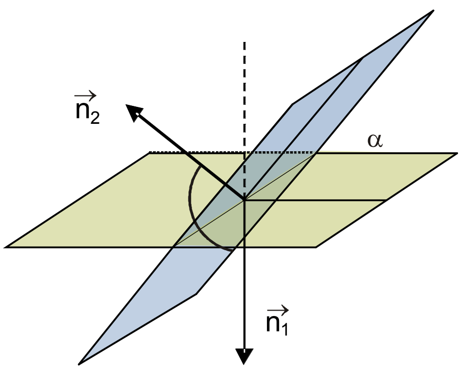
1.2. Ángulo de dos planos

El ángulo de dos planos secantes, π_1 y π_2, es el menor de los cuatro ángulos diedros que determinan. Su medida coincide con el ángulo rectilíneo formado por dos rectas perpendiculares a la recta común a los planos, y trazadas por el mismo punto.

Llamando α al ángulo de π_1 y π_2, pueden aparecer dos situaciones:



1. Si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son los vectores normales a π_1 y π_2, puede ocurrir tal como vemos en la figura, que α = ángulo $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ porque son ángulos comprendidos entre perpendiculares.
2. Si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ adoptan otra posición, y lo hemos dibujado en la segunda figura, entonces: α y ángulo $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ son suplementarios.



De cualquier forma, como α es el menor de dos ángulos suplementarios, es agudo y su coseno positivo, en consecuencia:

$$\cos\alpha = |\cos \textit{ángulo}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Ejemplo

2. Hallar el ángulo que forman los planos π_1: $2x - y + z - 1 = 0$ y π_2: $3x + 3y - z + 3 = 0$.

Solución:

Los vectores normales de π_1 y π_2 son $\vec{n}_1 = (2,-1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (3, 3, -1)$, luego se cumple que

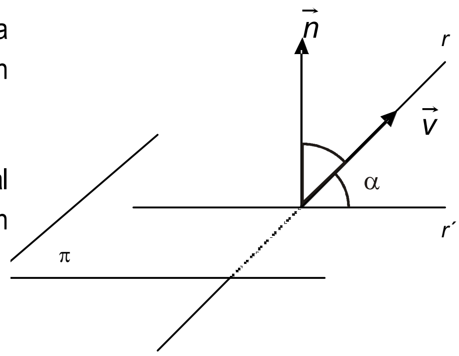
$$\cos\alpha = \left|\cos\ \text{ángulo}\,(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|(2,-1,1)\cdot(3,3,-1)\right|}{\sqrt{6}.\sqrt{19}} = \frac{10}{\sqrt{6}.\sqrt{19}} = \frac{10}{\sqrt{114}}$$

Por tanto, $\alpha = \arccos\dfrac{10}{\sqrt{114}} = 20^\circ\ 30'\ 50{,}86''$. Para obtener el resultado empleamos la calculadora:

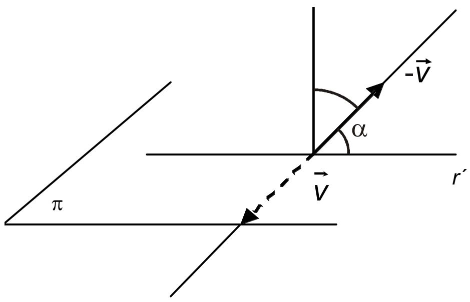
SHIFT cos⁻¹ (10 ÷ √ 114) = 20.514….. SHIFT ° ′ ″ 20° 30′ 50,86″.

1.3. Ángulo de recta y plano

El ángulo de la recta r con el plano π es igual al ángulo que forma la recta r con la recta r', proyección de r sobre el plano π. Se pueden dar dos situaciones:



1. En la figura, llamando $\vec{v}$ al vector director de r y $\vec{n}$ al vector normal a π y α al ángulo de r y π, observamos que α y *ángulo* $(\vec{v},\vec{n})$ son complementarios y, por lo tanto, sen α = cos *ángulo* $(\vec{v},\vec{n})$



2. En esta figura hemos dibujado otra situación y es que *ángulo* $(\vec{v},\vec{n})$ y el *ángulo* $(-\vec{v},\vec{n})$ son suplementarios, entonces

   sen α = cos *ángulo* $(-\vec{v},\vec{n})$ = – cos *ángulo* $(\vec{v},\vec{n})$ = |cos *ángulo* $(\vec{v},\vec{n})$|

De cualquiera de las dos situaciones concluimos que:

$$sen\alpha = \left|\cos\ \text{ángulo}\left(\vec{v},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{v}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

Ejemplo

3. Hallar el ángulo que forma el plano π : $x - y + z + 3 = 0$ con la recta r: $-x = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Solución:

Sabemos que $\vec{n} = (1, -1, 1)$ y que el vector director de r es $\vec{v} = (-1, 2, 2)$. Si α es ángulo de r y π se cumple que :

$$sen\,\alpha = \left|\cos\, ángulo\left(\vec{v},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|(1,-1,1)\cdot(-1,2,2)\right|}{\sqrt{3}.\sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Luego, $\alpha = \text{arcsen}\dfrac{1}{3\sqrt{3}} = 10^{o}\ 5'\ 44{,}89''$. Con la calculadora científica:

SHIFT sin⁻¹ (1 ÷ 3 √ 3) = 11.095….. SHIFT ° ' " 11° 5′ 44,89″.

Actividades

1. Hallar el ángulo que forman las rectas $x = y-1 = z+2$ y $\begin{cases} x+y=3 \\ y-z=1 \end{cases}$

2. Comprueba que las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = y-4 = z$ y $s:(x,\ y,\ z) = (-2+3\lambda,\ 3,\ 1+\lambda)$ se cruzan y luego halla el ángulo que forman.

3. Dados los planos π_1: $4x-3y+5z+7=0$ y π_2: $x-my+z+1=0$, hallar el valor de m para que sean perpendiculares.

4. Determina el ángulo que forma la recta s: $\begin{cases} 3x-y-z+3=0 \\ x+y-z+5=0 \end{cases}$ con el plano $2x+2y-z+8=0$

5. ¿Cuál es el ángulo que forman los planos: π_1: $x+2y-z=3$ y π_2: $2x-y+3z=0$?

2. Distancias

2.1. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** de R^3, $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Si simbolizamos la distancia de A a B como $d(A,B)$, entonces

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Comprobamos que se cumplen las siguientes propiedades:

1. $d(A, B) = d(B, A)$, ya que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

2. $d(A, B) \geq 0$, únicamente es cero cuando $A = B$.

3. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, desigualdad triangular

Ejemplo

4. Si $A(3,-1,2)$ y $B(-1,2,4)$ comprobar que $d(A,B) = d(B,A)$.

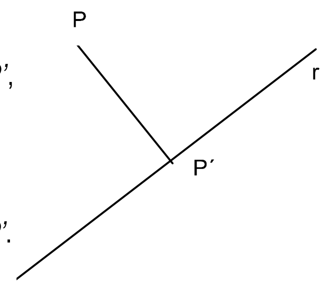
Solución:

$$d(A,B)=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-(-1))^2+(4-2)^2}=\sqrt{29}$$
$$d(A,B)=\sqrt{(3-(-1))^2+(-1-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{29}$$

2.2. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ a una recta r, que pasa por A y tiene vector director $\vec{v}$, es la distancia del punto P al punto P', proyección de P sobre r:

$$d(P,r)=d(P,P')$$



Hay varios **procedimientos para calcular las coordenadas** del punto P', proyección de P sobre r:

1. a) Determinamos un plano π que contiene a P y es perpendicular a r.

b) Hallamos la intersección de r con π, que nos dará las coordenadas de P'.

c) Conocidas las coordenadas de P', entonces $d(P, r) = d(P, P')$

2. a) Tomamos un punto genérico de r al que llamamos P', cuyas coordenadas dependen de un parámetro λ, y formamos el vector $\overrightarrow{PP'}$, cuyas coordenadas también dependen de λ.

b) Hallamos el valor de λ para que $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0$

c) Con el valor de λ encontrado, calculamos las coordenadas de P', y evidentemente: $d(P, r) = d(P, P')$.

El tercer procedimiento nos proporciona una fórmula para determinar la distancia de P a r.

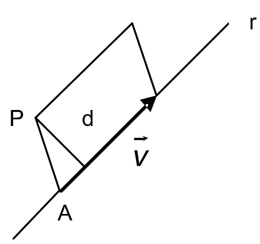
3. En la figura adjunta dibujamos el punto P y la recta r con sus elementos. En ella trazamos un paralelogramo con vértices en A, P y de lados $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AP}$.

El área de este paralelogramo es $|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|$, pero es conocido que

Área paralelogramo = base · altura.

Ahora, la altura del paralelogramo, d, es la distancia de P a r, $d(P, r)$; luego

$$d(P,r)=\frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base}}=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$



Ejemplo

5. Halla la distancia del punto $P(2,–1,1)$ a la recta $(x, y, z) = (1-2\lambda, 2+\lambda, 3-2\lambda)$ por cada uno de los procedimientos anteriores.

Solución:

1. El plano que contiene a P y es perpendicular a la recta es:

$$-2x+y-2z+d=0,\ -2\cdot 2+(-1)-2\cdot 1+d=0,\ d=7.$$

Por tanto el plano es: $-2x+y-2z+7=0$.

La intersección del plano con la recta:

$$-2(1-2\lambda)+2+\lambda-2(3-2\lambda)+7=0,\ \ \lambda=-1/9.$$

Luego el punto P' es

$$\left(1+2\cdot\frac{1}{9}, 2-\frac{1}{9}, 3+2\cdot\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{11}{9},\frac{17}{9},\frac{29}{9}\right)$$

y la distancia entre P y r

$$d(P,r)=d(P,P')=\sqrt{\left(\frac{11}{9}-2\right)^2+\left(\frac{17}{9}+1\right)^2+\left(\frac{29}{9}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

2. El vector $\overrightarrow{PP'}$ tiene de coordenadas $(-1-2\lambda, 3+\lambda, 2-2\lambda)$, como $\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{v}=0$,

$(-1-2\lambda, 3+\lambda, 2-2\lambda)\cdot(-2,1,-2)=0$, $\lambda=-1/9$. Luego $P'\left(\frac{11}{9},\frac{17}{9},\frac{29}{9}\right)$ y

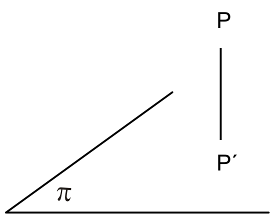
$$d(P,r)=d(P,P')=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

3. El punto de la recta A es (1, 2, 3), luego $\overrightarrow{AP}=(1,-3,-2)$ y como $\vec{v}=(-2,1,-2)$ aplicamos la fórmula

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|(-2,1,-2)\times(1,-3,-2)\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|(-8,-6,5)\right|}{\sqrt{9}}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

2.3 Distancia de un punto a un plano

Dados un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y un plano π: $ax + by + cz + d = 0$ en R^3, la distancia de P a π, simbólicamente $d(P, \pi)$, es la distancia de P al punto P', siendo éste la proyección de P sobre el plano π.



Como en el apartado anterior, hay varios modos de calcular esta distancia.

1. a) Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π.

b) Hallamos intersección de r con π y llamamos a este punto P'.

c) Entonces $d(P, \pi) = d(P, P')$.

2. Hay otro procedimiento que proporciona una fórmula para encontrar la distancia de un punto a un plano y resulta muy fácil de aplicar.

Sea $P'(x_0, y_0, z_0)$ el pie de la perpendicular trazada por P sobre π, es decir, la proyección de P sobre π. Como es un punto del plano se cumplirá que:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \text{ y } d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Por otra parte, si sustituimos las coordenadas de $P(x_1, y_1, z_1)$ en la ecuación del plano π y sustituyendo d por la expresión anterior, obtenemos:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0 = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) =$$

$$= \vec{n} \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P'P}.$$

Es decir,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P'P}$$

Además de la definición de producto escalar:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P'P} = |\vec{n}| \left|\overrightarrow{P'P}\right| \cos\alpha$$

Combinando las dos igualdades anteriores:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = |\vec{n}| \left|\overrightarrow{P'P}\right| \cos\alpha$$

Donde α es el ángulo que forman $\vec{m}$ y $\overrightarrow{P'P}$ y que sólo puede ser α = 0º o α = 180º, dependiendo que $\vec{m}$ y $\overrightarrow{PP'}$ estén al mismo lado del plano o en lados opuestos, y por tanto cos α = 1 o cos α = –1. En consecuencia, el valor absoluto del primer miembro es igual al valor absoluto del segundo miembro

$$|ax_1 + by_1 + cz_1 + d| = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{P'P}\right| \cdot |\cos\alpha|$$

$$|ax_1 + by_1 + cz_1 + d| = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$

Como $d(P,\pi) = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$ podemos escribir:

$$\left|\overrightarrow{P'P}\right| = d(P,\pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{|\vec{n}|}$$

Luego la distancia de un punto a un plano se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano, se halla su valor absoluto, y se divide por el módulo del vector normal al plano.

Ejemplos

6. Halla la distancia del punto $P(1, -2, 1)$ al plano π: $2x + y - 2z + 3 = 0$.

Solución:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{|\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3} \text{ unidades de longitud}$$

7. Halla la proyección ortogonal del origen de coordenadas sobre el plano $x + 2y + 3z - 4 = 0$. Calcula la distancia del origen a su proyección sobre el plano.

Solución:

La proyección ortogonal del origen sobre el plano es un punto del plano, P´, que se obtiene de la intersección de la recta que pasa por el origen, y es perpendicular al plano, con el plano dado.

Las ecuaciones paramétricas de esta recta son: $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$. Sustituyendo en la ecuación del plano

$$\lambda + 2\cdot 2\lambda + 3\cdot 3\lambda - 4 = 0,\ \lambda = 4/14 = 2/7.$$

Luego el punto P' es $(2/7, 4/7, 6/7)$. La distancia del origen O(0,0,0,) a $P'(2/7, 4/7, 6/7)$ es la misma que la del origen al plano:

$$d(O,P') = \sqrt{(2/7)^2 + (4/7)^2 + (6/7)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{7} \text{ unidades de longitud}$$

$$d(O,\pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

Actividades

6. Dados $A(1,1,1)$, $B(3,3,3)$ y $C(4,5,6)$ comprueba que $d(A, C) < d(A, B) + d(B, C)$. ¿Cómo tienen que estar los tres puntos A, B, y C para que $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$?

7. Calcular la distancia del punto $P(3,-2,-1)$ a la recta $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ z = 3 \end{cases}$.

8. Halla las coordenadas de un punto P del eje OY tal que su distancia al punto $A(2,3,4)$ es igual a 6 unidades de longitud.

9. Determina el punto de la recta $(x, y, z) = (2 - \lambda, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$ cuya distancia a un punto $P(0,2,-1)$ sea $\sqrt{41}$.

10. Halla un punto de la recta $(x, y, z) = (2 - \lambda, 3 - \lambda, 1 + 3\lambda)$ que equidista de los puntos $M(0,-1, 2)$ y $N(1, 2, 0)$.

11. Halla en el eje OY un punto que equidiste del punto $M(1, 1, 1/\sqrt{2})$ y del plano $x + y + \sqrt{2}z = 0$.

12. Determinar la ecuación de un plano que contiene a la recta $\begin{cases} x - 3z - 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ y que está a 1 unidad de longitud del punto $P(1,1,1)$.

13. Calcular la distancia del punto $a(1,1,-1)$ al plano $2x + y - z = 0$. Determinar el punto del plano que está a distancia mínima del punto A.

14. Determinar un punto de la recta r: $\frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos π_1: $x + y + z = 0$ y π_2: $(x, y, z) = (-3 + \lambda, -\lambda + \mu, -6\mu)$.

3. Distancia entre rectas y planos

3.1. Distancia entre planos paralelos

La distancia entre dos planos paralelos, π y π', es igual a la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos, por ejemplo P de π, al otro plano:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi')$$

Es decir, la distancia entre planos paralelos se reduce a la distancia de un punto a un plano.

3.2. Distancia de rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas r y s, es igual a la distancia de un punto cualquiera de una de ellas, por ejemplo P de r, a la otra recta s:

$$d(r, s) = d(P, s)$$

Es decir, la distancia entre dos rectas paralelas se reduce a la distancia de un punto a una recta.

3.3. Distancia de una recta a un plano paralelo a ella

La distancia entre una recta r y un plano π es igual a la distancia de un punto cualquiera P de r al plano π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi)$$

El cálculo de la distancia de una recta a un plano se reduce a la distancia de un punto a un plano o de un punto a una recta, si el punto lo tomamos sobre la recta o sobre el plano.

Ejemplo

8. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ y $s: \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Determinar la distancia de s al plano π.

Solución:

a) La ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s se obtiene a partir de un punto de r, $A(1,-1,0)$, y su vector director, $\vec{v} = (2,3,-1)$, además del vector director de s, $\vec{w} = (-3,3,2)$. La ecuación de π es

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -3 \\ y+1 & 3 & 3 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad 9x - y + 15z - 10 = 0$$

b) La distancia de s a π es la distancia de un punto de s, $B\,(0,2,-1)$, al plano π

$$d(s,\pi) = d(P',\pi) = \frac{|9\cdot 0 - 2 + 15(-1) - 10|}{\sqrt{9^2 + (-1)^2 + 15^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{307}} = \frac{27}{\sqrt{307}} \text{ unidades de longitud.}$$

3.4. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Sea una recta r, que pasa por A y tiene vector director $\vec{v}$ y otra recta s, que contiene a B y tiene como vector de dirección $\vec{w}$. Existen varios procedimientos para hallar la distancia entre ellas. Vamos a estudiarlos.

1. a) Tomamos un punto genérico de r, llamémosle R, y otro de s, llamémosle S. Las coordenadas de R dependen de un parámetro λ y las de S de un parámetro μ. Con ambos puntos formamos el vector $\overrightarrow{RS}$.

b) Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{w}=0 \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema con λ y μ como incógnitas y cuyas soluciones nos permiten hallar las coordenadas de R y S. Puntos por los cuales pasa la perpendicular común a las rectas r y s.

c) Entonces $d(r, s) = d(R, S)$

Otro procedimiento para hallar la perpendicular común es el siguiente:

2. a) Buscamos un plano π que contiene a r y es paralelo a s. Para ello elegimos en r el punto A y el vector director $\vec{v}$ y con $\vec{w}$, vector director de s, tenemos una determinación lineal de π. (También podemos hallar π como el plano que pasa por A y tiene como vector normal $\vec{v}\times\vec{w}$).

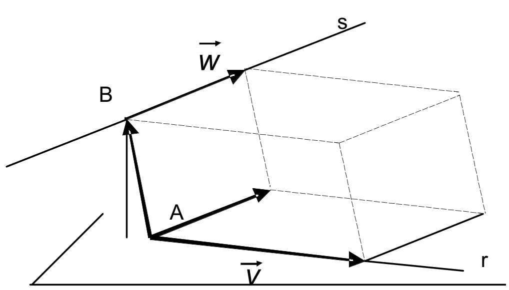
b) La distancia de r a s, $d(r, s)$, es la misma que la distancia de s a π, luego

$$d(r, s) = d(s, \pi) = d(B, \pi)$$

siendo B un punto de la recta s.

Un tercer procedimiento nos suministra una fórmula para calcular automáticamente la distancia entre las rectas.

3. La deducción de la fórmula se facilita observando la figura adjunta. Hemos dibujado las rectas r y s y construido un paralelepípedo de aristas $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$.



La distancia $d(r, s)$ = *altura del paralelepípedo*. Por otra parte, tenemos:

Volumen del paralelepípedo = área de la base · altura

Luego

$$d(r,s)=altura=\frac{Volumen\ del\ paralelepipedo}{área\ de\ la\ base}=\frac{\left|\det\left(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AB}\right)\right|}{\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|}$$

Ejemplo

9. Hallar la distancia entre las rectas r y s, siendo $r:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$ y $s:\ x=y=\dfrac{z}{4}$.

Solución:

Las rectas se cruzan porque, si es $\vec{v}=(2,3,-1), \vec{w}=(1,1,4)$ y $\overrightarrow{AB}=(0,-1,4)$, rango$\left(\vec{v},\vec{w}\right)=2$ y rango$\left(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AB}\right)=3$

Conociendo que se cruzan, el método más directo para resolverlo es aplicando la fórmula:

$$d(r,s)=\frac{\left|\det\left(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AB}\right)\right|}{\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}\right|}{\left|(13,-9,-1)\right|}=\frac{5}{\sqrt{251}}\ \text{ya que } \vec{v}\times\vec{w}=(13,-9,-1).$$

Este problema podíamos haberlo resuelto por alguno de los otros métodos mencionados.

Actividades

15. Hallar la distancia entre los planos paralelos
$x+y+z-3=0$ y $3x+3y+3z-5=0$.

16. Comprueba que el plano $2x-3y+5=0$ es paralelo al eje OZ. Halla la distancia de este eje al plano.

17. Halla la distancia entre las rectas paralelas
$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=z+2$ y $(x,\ y,\ z)=(4-4\lambda,1+2\lambda,-2\lambda)$

18. Halla el valor de c para que la recta $r:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ sea paralela al plano
$\pi:\ 2x-y+cz-2=0$. Para el valor de c obtenido, calcular la distancia entre r y μ?.

19. Dadas las rectas $r:\ (x,\ y,\ z)=(-1-\lambda,\ 3+\lambda,\ 1+\lambda)$ y $s:\ \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{4}=z-2$

a) Hallar las ecuaciones de la recta que las corta perpendicularmente.

b) Calcular la distancia de r a s.

20. Determinar el punto de la recta $r:\begin{cases}2x+y+z-3=0\\y-z=0\end{cases}$ que se encuentra a la mínima distancia de la recta
$s:\begin{cases}x-y=-1\\2y+z=-2\end{cases}$. Calcular la distancia de r a s.

4. Áreas de paralelogramos y triángulos

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados opuestos iguales y paralelos. Si conocemos los vértices consecutivos del paralelogramo, *A*, *B*, *C* y *D*, los lados no paralelos están constituidos por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$; y, como ya hemos visto, el área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\text{Área del paralelogramo } ABCD = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

Al unir dos triángulos iguales (e igualmente orientados) por un lado común resulta siempre un paralelogramo, cuyos lados coinciden con los otros dos lados del triángulo. En consecuencia, el área del triángulo será igual a la mitad del área de un paralelogramo con el que comparte tres vértices, y por tanto podemos escribir:

$$\text{Área del triángulo } ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Ejemplo

9. Comprueba que los puntos *A*(1,1,2), *B*(3,–2,1) y *C*(4,5,–2) no están alineados y halla el área del triángulo *ABC*.

Solución:

Como rango $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2$, los puntos no están alineados. Dado que $\overrightarrow{AB}\,(2,-3,-1)$ y $\overrightarrow{AC}\,(3,4,-4)$, entonces tenemos:

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(16,5,17)\right| = \sqrt{570} \text{ unidades cuadradas.}$$

Actividades

21. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $2x + y + 3z - 6 = 0$ con los ejes de coordenadas.

22. Calcular el área del triángulo de vértice *A'*,*B'*,*C'* proyección ortogonal del triángulo de vértices *A*(1,1,1), *B*(1,1,2) y *C*(1,2,1) sobre el plano $x + y + z - 1 = 0$.

23. Dados *A*(1, 0, –2), *B*(–2, 3, 1) determina la coordenadas de un punto *C* sobre la recta $x = y = \frac{z+3}{2}$ para que *A*,*B*, y *C* sean los vértices de un triángulo de área $\frac{3\sqrt{26}}{2}$.

24. Se sabe que los puntos *A*(1, 0, –1), *B*(3, 2, 1) y *C*(–7, 1, 5) son vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD*.

a) Calcula las coordenadas del punto *D*.

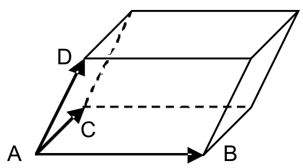
b) Halla el área del paralelogramo.

25. De los planos paralelos al plano $x + y + z - 8 = 0$, halla los que determinan con los ejes de coordenadas un triángulo de área $8\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

5. Volúmenes

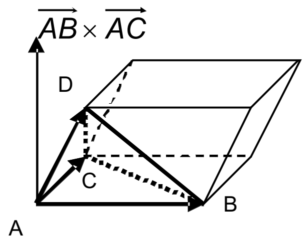
Volumen de un paralelepípedo

Un paralelepípedo es un prisma de 6 caras. Se trata de un sólido constituido por 6 caras, de modo que las caras opuestas son iguales y paralelas.



Sabemos que el volumen de un paralelepípedo de aristas $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el valor absoluto del producto mixto, $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$. Si conocemos las coordenadas de cuatro vértices contiguos del paralelepípedo: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $D(x_4, y_4, z_4)$, entonces el volumen viene dado por

$$Volumen = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix}\right\|$$

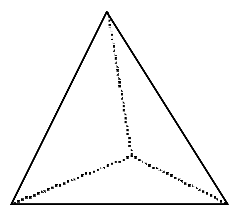


Volumen de un tetraedro

Si en la figura anterior unimos los vértices C con B y D con C y B, obtenemos un poliedro de cuatro caras triangulares y seis aristas, llamado tetraedro.

En realidad, un **tetraedro** es una pirámide triangular y sabemos que el volumen de una pirámide es:

$$Volumen\ pirámide = \frac{1}{3}\ área\ de\ la\ base \cdot altura$$



Tetraedro

Además conocemos que:

Dado que el volumen del tetraedro debe ser una cantidad positiva, el producto mixto debe estar en valor absoluto:

$$Área\ de\ la\ base = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Y la altura es la proyección del vector $\overrightarrow{AD}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$altura = \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\ ángulo(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

Por lo tanto, el volumen del tetraedro quedará así:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\ ángulo(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\ ángulo\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right] = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

La última igualdad es consecuencia de una de las propiedades de los determinantes: al permutar dos filas el determinante sólo cambia de signo.

Luego el volumen de un tetraedro es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo construido sobre tres de sus aristas concurrentes en un vértice.

Ejemplos

10. Calcular el volumen del paralelepípedo cuyas aristas no paralelas son las distancias del origen a los puntos de corte del plano π: $3x - 3y + 2z - 6 = 0$ con los tres ejes de coordenadas.

Solución:

Tenemos que hallar las tres aristas que concurren en un vértice. Si tomamos como vértice el origen, las aristas están formadas por los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, siendo *A* un punto sobre el eje *OX*, *B*, sobre el eje *OY*, y *C*, sobre el eje *OZ*.

Los puntos del eje *OX*, tienen $y = 0$ y $z = 0$, luego sustituyendo en la ecuación del plano tenemos:

$$3x - 3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 6 = 0,\quad 3x - 6 = 0,\quad x = 6/3 = 2.$$

El punto *A* es (2, 0, 0).

Los puntos del eje *OY*, tienen $x=0$ y $z=0$, luego sustituyendo en la ecuación del plano

$$3\cdot 0 - 3y + 2\cdot 0 - 6 = 0,\ -3y - 6 = 0,\ y = -2.$$

El punto *B* es (0, –2, 0).

Los puntos del eje *OZ* tienen $x = 0$ e $y = 0$, luego sustituyendo en la ecuación del plano tenemos:

$$3\cdot 0 - 3\cdot 0 + 2z - 6 = 0,\ 2z - 6 = 0,\ z = 3.$$

El punto C es (0, 0, 3).

Las aristas del paralelepípedo son $\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, -2, 0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$. El volumen del paralelepípedo será:

$$Volumen = \left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right\| = 12 \text{ unidades cúbicas.}$$

11. Hallar el volumen del tetraedro de vértice (1,1,1) y los puntos en que el plano $2x+3y+z-12=0$ corta a los ejes coordenados.

Solución:

Llamemos *A*, *B* y *C* a los puntos de corte del plano $2x+3y+z-12 = 0$ con los ejes de coordenadas. Procediendo como en el ejemplo anterior encontramos que son:

$$A\,(6, 0, 0)\ ,\ B\,(0, 4, 0)\ \text{ y }\ C\,(0, 0,12)$$

Llamando *V* al vértice (1,1,1), los vectores $\overrightarrow{VA} = (5, -1, -1)$, $\overrightarrow{VB} = (-1, 3, -1)$ y $\overrightarrow{VB} = (-1, -1, -11)$ son tres aristas que concurren en *V*; y por tanto el volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{matrix}\right\| = \frac{137}{6} \text{ unidades cúbicas.}$$

Actividades

26. Hallar el volumen del tetraedro de vértices (2,2,2), (1,0,0), (0,1,0), (1,0,1).

27. Calcular el área y volumen del tetraedro determinado por los puntos (0, *a*, *a*), (*a*, 0, *a*),(*a*, *a*, 0),(*a*, *a*, *a*).

6. Lugares geométricos

Un **lugar geométrico** del espacio es un conjunto de puntos de R^3 que cumple ciertas propiedades geométricas. Estudiaremos algunos lugares geométricos sencillos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

12. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos *A*(3, 4, –1) y *B*(2, –3, 5).

Solución:

Los puntos *P*(*x, y, z*) del lugar geométrico equidistan de *A* y *B*, luego

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2}$$

Elevando al cuadrado, desarrollando y reduciendo términos se obtiene:

$$-2x-14y+12z-12=0$$

Dividiendo por –2, llegamos al plano:

$$x+7y-6z+6=0.$$

Este plano se llama **plano mediador** del segmento *AB*, y es plano que divide perpendicularmente al segmento en dos partes iguales.

Es obvio que obtendremos el mismo resultado si buscamos la ecuación del plano que tiene como vector normal $\overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del segmento *AB*, $M_{AB}=\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)$.

13. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos

π_1: $5x + 2y - 3z + 4 = 0$ y π_2: $4x - y + z - 1 = 0$.

Solución:

Los planos π_1 y π_2 se cortan determinando cuatro ángulos diedros, de otro modo los vectores normales $\vec{n}_1 = (5, 2, -3)$ y $\vec{n}_2 = (4, -1, 1)$ serían proporcionales, es decir, paralelos, pero no es el caso.

Sean *P*(*x, y, z*) los puntos del lugar buscado, entonces se cumplirá que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

Y como se trata de un valor absoluto resultan dos planos:

$$\frac{|5x+2y-3z+4|}{\sqrt{25+4+9}}=\frac{|4x-y+z-1|}{\sqrt{16+1+1}}$$

$$|5x+2y-3z+4|=\frac{\sqrt{38}}{\sqrt{18}}|4x-y+z-1|$$

Y como se trata de un valor absoluto resultan dos planos:

$$5x+2y-3z+4=+\frac{\sqrt{19}}{3}(4x-y+z-1)$$
$$5x+2y-3z+4=-\frac{\sqrt{19}}{3}(4x-y+z-1)$$

Escritos de otra forma, resulta

$$\left(5-\frac{4\sqrt{19}}{3}\right)x+\left(2+\frac{\sqrt{19}}{3}\right)y+\left(-3-\frac{\sqrt{19}}{3}\right)z+4+\frac{\sqrt{19}}{3}=0$$

$$\left(5+\frac{4\sqrt{19}}{3}\right)x+\left(2-\frac{\sqrt{19}}{3}\right)y+\left(-3+\frac{\sqrt{19}}{3}\right)z+4-\frac{\sqrt{19}}{3}=0$$

Es fácil comprobar que

$$\left(5-\frac{4\sqrt{19}}{3},2+\frac{\sqrt{19}}{3},-3-\frac{\sqrt{19}}{3}\right)\cdot\left(5+\frac{4\sqrt{19}}{3},2-\frac{\sqrt{19}}{3},-3+\frac{\sqrt{19}}{3}\right)=0$$

Se trata, por tanto, de dos planos perpendiculares que dividen a los cuatro diedros en dos partes iguales y a los que se denomina **planos bisectores**.

Actividades

28. Hallar el lugar geométrico de los puntos P que determinan con $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ y $C = (0,0,1)$ un tetraedro de volumen $\frac{1}{6}$.

29. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan del origen y del punto $P(3,-5,6)$.

30. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos $x-y+z+6 = 0$ y $2x-3y-3z+1 = 0$.

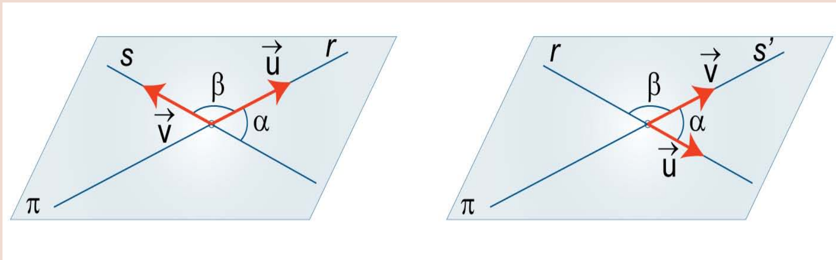
31. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan 3 unidades del plano $2x+y-2z+1 = 0$.

32. Hallar el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los 3 planos siguientes: π_1: $x-y+4 = 0$, π_2: $x-y-2 = 0$ y π_3: $x-4y+z = 0$.

Recuerda

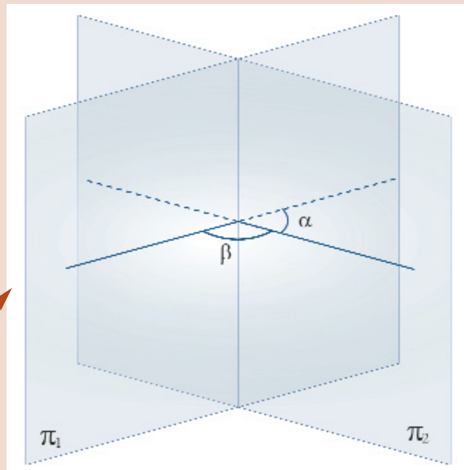
- El ángulo α que forman las dos rectas r y s es igual o suplementario al ángulo que forman sus vectores de dirección, se calcula

$$\cos\alpha = \left|\cos \acute{a}ngulo(\vec{u},\vec{v})\right| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



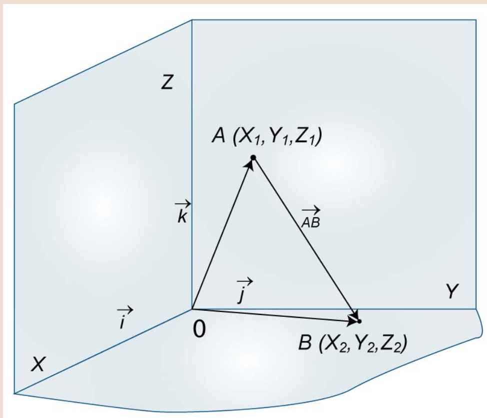
- El ángulo α que forman dos planos secantes, π_1 y π_2, es igual o suplementario al que determinan los vectores normales:

$$\cos\ \alpha = \left|\cos\ \acute{a}ngulo(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$



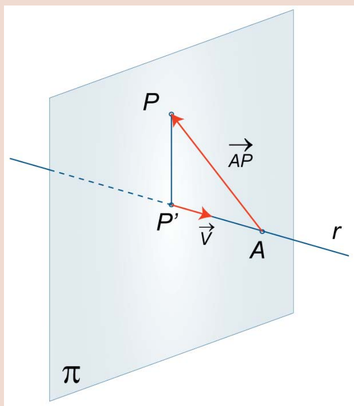
- El ángulo α de una recta r y un plano π se calcula de la fórmula:

$$sen\ \alpha = \left|\cos\ \acute{a}ngulo\left(\vec{v},\vec{n}\right)\right| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$



- La distancia entre dos puntos, $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, entonces

$$d(A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

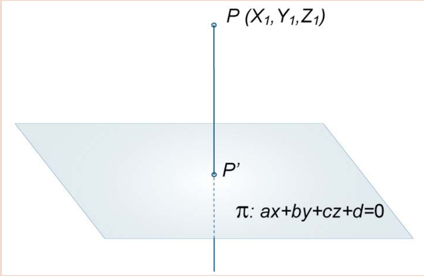


- La distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,\ r) = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

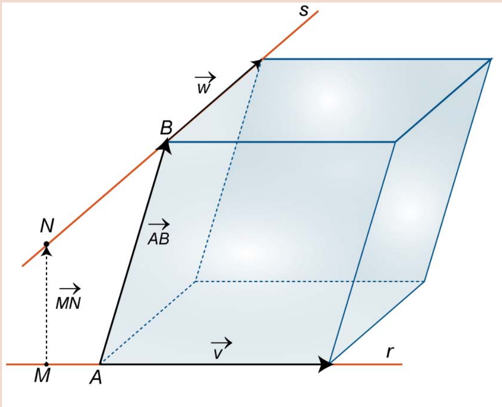
✓ La distancia de un punto P a un plano π:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{|\vec{n}|}$$



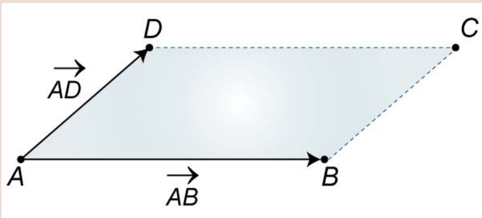
✓ La distancia entre dos rectas, r y s, que se cruzan:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det\left(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}\right)\right|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$



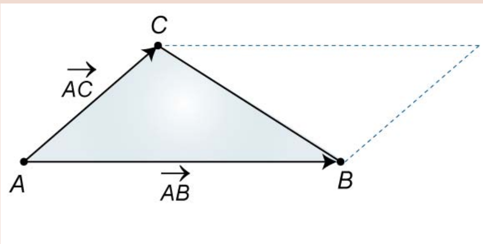
✓ El área de un paralelogramo de vértices consecutivos $ABCD$ es:

$$\textit{Área del paralelogramo } ABCD = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$



✓ El área de un triángulo ABC es:

$$\textit{Área del triángulo } ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$



✓ El volumen de un paralelepípedo del que conocemos cuatro vértices contiguos es:

$$Volumen = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix} \right\|$$

✓ El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D es:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$