5 Puntos, rectas y planos

Si en la Unidad anterior estudiamos los vectores y las operaciones con vectores, en ésta y en la siguiente estudiaremos algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Analítica del espacio. Aunque los primeros estudios de esta geometría se deben a Descartes y a Fermat, fueron otros matemáticos, Euler, Lagrange y Monge, en el siglo XVIII, los que llevaron a cabo el desarrollo de esta rama de las matemáticas.

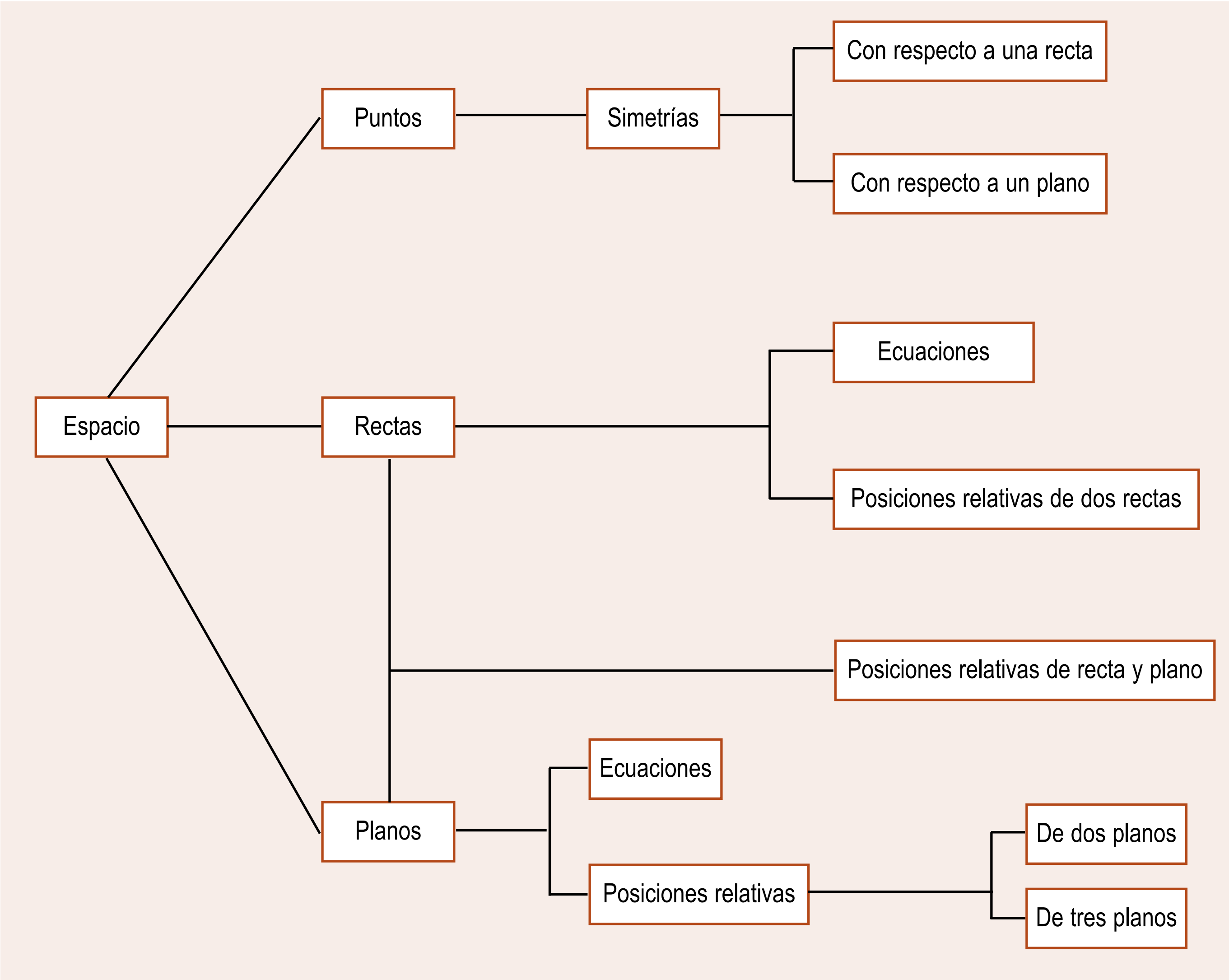
• *Muchas imágenes sugieren los ejes de coordenadas para representar puntos en el espacio, como en el Templo de Debod, Madrid.* (ITE. Banco de imágenes)

La novedad que los modernos textos de Geometría Analítica aportan es la incorporación de los métodos vectoriales. Con ayuda de los vectores se agiliza la descripción de las figuras y la realización de cálculos en problemas de intersección (incidencia) y paralelismo de rectas y planos.

La Unidad comienza con la asignación de coordenadas a los puntos del espacio, para ello es necesario elegir un punto arbitrario y tres vectores linealmente independientes, lo que constituye un sistema de referencia. Los ejes de coordenadas son las rectas que pasan por el punto elegido y tienen la dirección de los vectores linealmente independientes. A partir de ahí es sencillo asociar tres números a cada punto. Además, los vectores contribuirán a la deducción de los diversos tipos de ecuaciones de rectas y planos.

En esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Conocer cómo se asignan coordenadas a los puntos del espacio.
2. Saber deducir las ecuaciones paramétricas y continuas de la recta, y convertir unas en otras.
3. Saber deducir las ecuaciones paramétricas y general del plano y pasar de unas a otra.
4. Resolver problemas de incidencia, es decir, de corte e intersección de rectas y planos.
5. Resolver problemas de paralelismo de rectas y planos.



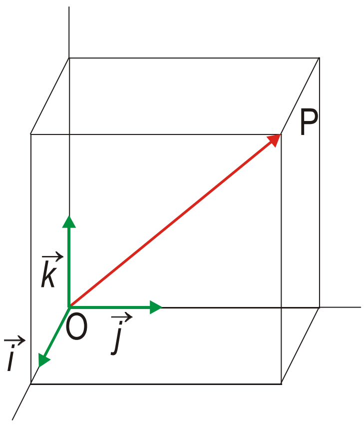
ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Coordenadas de un punto en el espacio. Sistema de referencia

Escogemos un punto arbitrario del espacio, que simbolizamos por O y llamamos origen de coordenadas. Entre O y cualquier otro punto del espacio, P, podemos trazar el vector $\overrightarrow{OP}$. A este vector se le llama vector de posición del punto P porque desde O localiza al punto P.

Al vector de posición $\overrightarrow{OP}$ lo podemos escribir como combinación lineal de los vectores de una base del espacio $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y así obtenemos la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = a_1\vec{u}_1 + b_1\vec{u}_2 + c_1\vec{u}_3$$



Si, para simplificar las cosas, la base escogida es la base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ entonces tenemos:

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

A los números (x_1, y_1, z_1), coeficientes de la combinación lineal anterior, se les llama **coordenadas cartesianas** del punto P relativas al punto O y la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Al conjunto heterogéneo formado por O y $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se le denomina **sistema de referencia** y se simboliza por $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. En este caso, el **sistema de referencia** es ortonormal por serlo los vectores de la base.

Es evidente que si tomamos otro punto como origen de coordenadas, por ejemplo Q, y tres vectores linealmente independientes $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, tenemos otro sistema de referencia $R_1 = \{Q; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ respecto al cual las coordenadas del punto P serán distintas de (x_1, y_1, z_1). Aunque también es verdad que existen fórmulas que nos permiten pasar de unas coordenadas del punto P a otras, y se denominan ecuaciones del cambio del sistema de referencia; pero no las emplearemos en este curso.

En lo sucesivo haremos uso únicamente del sistema de referencia ortonormal $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y las **coordenadas cartesianas** de los puntos del espacio estarán referidas a él.

Desde el momento en que a cada punto del espacio, fijado un sistema de referencia, se le pueden asociar de modo único tres números, llamados sus coordenadas, simbolizamos al conjunto de todos los puntos del espacio por R^3.

Ejemplo

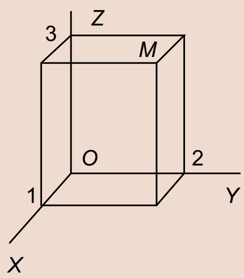
1. Dibujar en el espacio los puntos $M(1, 2, 3)$ y $N(1, 0, -2)$.

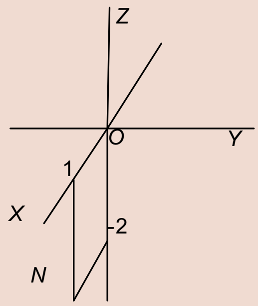
Solución:

Las rectas que pasan por el punto O y tienen la dirección de los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se les llama ejes de coordenadas y se simbolizan por las letras X, Y y Z.

Las coordenadas de $M(1, 2, 3)$, son las medidas de las proyecciones del vector $\overrightarrow{OM}$ sobre los ejes X, Y y Z.

Aunque la mejor manera de dibujar M en R^3 es marcar 1 en el eje X, 2, en el eje Y, y 3, en el eje Z. Dibujamos sobre cada plano XY, YZ y XZ un rectángulo a partir de las marcas y trazamos paralelas a los ejes por los vértices opuestos a O, en estos rectángulos. El punto donde se cortan estas rectas paralelas a los ejes es M.



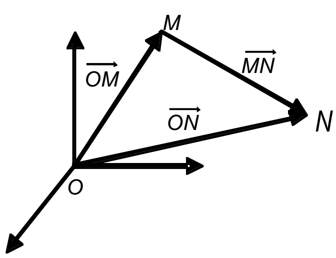


El punto $N(1, 0, -2)$ es un punto del plano XZ como vemos en la figura.

Actividades

1. Representa en R^3 los puntos $S(2, 2, 2)$ y $T(3, -3, 3)$.
2. Dibuja los puntos $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$ y $M_3(0,0,1)$ y luego traza el vector $\overrightarrow{OM}$ siendo $M(1,1,1)$.
3. ¿Cuál es el vector de posición del origen de coordenadas O? ¿Cuáles son las coordenadas del punto O?

2. Coordenadas de un vector de extremos conocidos



Consideremos el vector $\overrightarrow{MN}$ cuyo origen es el punto $M(x_1, y_1, z_1)$ y cuyo extremo es $N(x_2, y_2, z_2)$. El vector $\overrightarrow{MN}$ cumple que

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$$

Sabemos que $\overrightarrow{ON} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ y $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, luego tenemos:

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Con lo que podemos afirmar que las coordenadas del vector $\overrightarrow{MN}$, de extremos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, son igual a la diferencia de coordenadas de N y M:

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Ejemplos

2. Dados los puntos A (2, 4, –3), B (1, –3, 0) y C (–5, 3,1) halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$.

Solución:

$\overrightarrow{AB}$ = (1–2, –3–4, 0–(–3)) = (-1, -7, 3)

$\overrightarrow{AC}$ = (–5–2, 3–4, 1–(–3)) = (–7, –1, 4)

$\overrightarrow{BC}$ = (–5–1, 3–(–3), 1–0) = (–6, 6, 1)

$\overrightarrow{BA}$ = (2–1, 4–(–3), –3–0) = (1, 7, -3)

$\overrightarrow{CA}$ = (2–(–5), 4–3, –3–1) = (7, 1, –4)

$\overrightarrow{CB}$ = (1–(–5), –3–3, 0–1) = (6, –6, –1)

3. Si $\overrightarrow{AB}$ = (3, –2, 6) y B(1, 0, 4), halla las coordenadas de A.

Solución:

Como (3, –2, 6) = ($1–x_1$,$–y_1$, $4–z_1$), entonces $3 = 1–x_1$, $-2 = –y_1$, $6 = 4–z_1$.

Y por tanto, $x_1 = –2$, $y_1 = 2$, $z_1 = –2$, es decir, A(–2, 2, –2).

Actividades

4. Si A (1, 2, 3), B (4, –3, 5), C (0, –1, 2), halla las coordenadas de otro punto D para que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

5. Halla el valor de x para que los puntos A(5, 2, 3), B(0, 7, 2), C(x, 5, 2) sean los vértices de un triángulo rectángulo en C.

6. Tenemos los puntos A (1, –3, 2), B (1, 1, 2) y C (1, 1, –1).

a) ¿Pueden ser A, B y C los vértices consecutivos de un rectángulo?

b) Halla las coordenadas del punto D para que el paralelogramo $ABCD$ sea un rectángulo.

3. Ecuaciones de una recta

3.1. Determinación lineal de una recta. Ecuaciones paramétricas y continuas

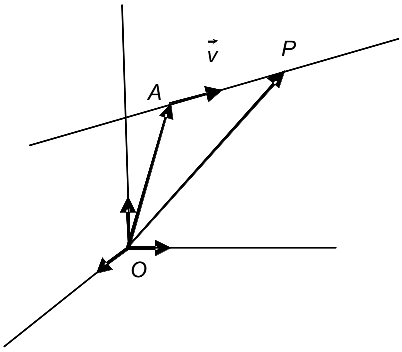
Una recta puede determinarse si conocemos uno de sus puntos y un vector paralelo a ella, que llamaremos **vector de dirección** de la recta. Sea *r* una recta de la que conocemos un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y un **vector de dirección** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ distinto del vector cero. Cualquier otro punto de la recta $P(x, y, z)$ cumple, como vemos en la figura, que el vector $\overrightarrow{AP}$ es proporcional a $\vec{v}$, es decir: $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$;

siendo λ un número real. Pero, además, al sumar el vector de posición de *A* con el vector $\overrightarrow{AP}$ resulta el vector de posición de *P*:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$$

Esta ecuación vectorial podemos escribirla así:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}.$$



Donde para cada punto *P* de *r* obtenemos un valor λ y para cada valor deλ obtenemos un punto de *r*. Expresando esta ecuación vectorial en coordenadas resulta:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda\,(v_1, v_2, v_3)$$

Igualando separadamente cada coordenada llegamos a las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas de la recta** *r* y para cada valor de λ encontramos las coordenadas de un punto diferente de *r*. Este modo de lograr las ecuaciones paramétricas de una recta se denomina **determinación lineal de la recta**.

Las **ecuaciones paramétricas de una recta** no son únicas. Evidentemente, si en vez de *A* tomamos otro punto *B* y un vector director paralelo a $\vec{v}$, resultan otras ecuaciones paramétricas pero que describen también todos los puntos de *r* al variar el parámetro λ.

Si despejamos λ en las ecuaciones paramétricas de la recta se obtiene

$$\lambda = \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

A la expresión $\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$ se le conoce como **ecuaciones en forma continua de la recta** *r*.

A veces en las ecuaciones continuas puede aparecer un cero en algún denominador, no en todos, pero debe tenerse en cuenta que no estamos dividiendo entre 0, sino que los numeradores son proporcionales a los denominadores y si uno de éstos es 0, también lo será el numerador correspondiente.

Ejemplo

4. Hallar las ecuaciones paramétricas y continuas de la recta que pasa por A (–1, 2, –3) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (3, 0, –2).

Solución:

Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$

Ecuaciones en forma continua: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{-2}$

5. Escribe las ecuaciones paramétricas y continuas de la recta que pasa por el origen O(0, 0, 0) y tiene como vector de dirección $\vec{j}$ = (0, 1, 0).

Solución:

Se trata del eje Y, sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

y las continuas: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+4}{3}$.

Solución:

Igualando cada fracción a λ y despejando las letras obtenemos las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

3.2. Recta que pasa por dos puntos. Comprobar si tres puntos están alineados

Sabemos que por dos puntos pasa una única recta. Si queremos hallar las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por los puntos $A\,(x_1, y_1, z_1)$ y $B\,(x_2, y_2, z_2)$, tomamos uno de los puntos por donde pasa r, por ejemplo A, y como vector de dirección o vector director, el vector $\overrightarrow{AB}$. Se trata también de una determinación lineal.

Ejemplo

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (–1, 4, –5) y B (3, –6, –2).

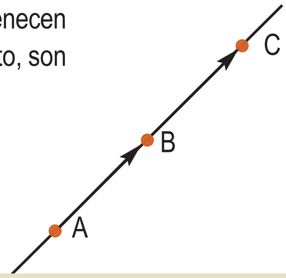
Solución:

Estamos ante la recta que pasa por A(–1, 4, –5) y tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$ = (4, –10, 3), luego las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 10\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

y las continuas: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-4}{-10} = \dfrac{z+5}{3}$.

Tres puntos, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$, están alineados (o son colineales) si pertenecen a la misma recta. Esto se traduce en que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección y, por tanto, son proporcionales, es decir,



$$rango\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \quad o \quad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - x_1}$$

Ejemplo

8. Comprobar si los puntos $A(7,-16, 1)$, $B(-5,14,-8)$ y $C(3,-6,-2)$ están alineados.

Solución:
Como $\overrightarrow{AB} = (-5-7, 14-(-16), -8-1) = (-12, 30, -9)$, $\overrightarrow{AC} = (3-7, -6-(-16), -2-1) = (-4, 10, -3)$, entonces tenemos:

$$rango\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = rango \begin{pmatrix} -12 & 30 & -9 \\ -4 & 10 & -3 \end{pmatrix} = 1,$$

ya que las dos filas son proporcionales o, de otro modo, $\dfrac{-12}{-4} = \dfrac{30}{10} = \dfrac{-9}{-3} = 3.$

Luego los tres puntos están alineados.

3.3. Segmento de recta

La recta r, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 0$, $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$, alcanzamos el punto A.

Cuando $\lambda = 1$, $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (x_2, y_2, z_2)$, el punto alcanzado es B. Luego el segmento de extremos A y B es el conjunto de puntos:

$$\{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), 0 \le \lambda \le 1\}$$

Las coordenadas del punto que divide al segmento AB en dos partes iguales, el punto medio, se hallan tomando $\lambda = 1/2$ y son:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Si en la fórmula anterior hacemos que λ tome los valores $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, determinamos $n-1$ puntos que dividen al segmento AB en n partes iguales.

Ejemplos

9. Halla las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(1, 2, 4)$ y $B(4, 3, 2)$.

Solución:

El punto medio del segmento AB es $M_{AB}=\left(\frac{1+4}{2},\frac{2+3}{2},\frac{4+2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},3\right)$.

10. Halla las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB anterior en tres partes iguales.

Solución:

Las coordenadas de los puntos N_1 y N_2 que dividen al segmento AB en tres partes iguales se obtienen dando a λ, en $(x, y, z) =(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, los valores de $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Entonces tenemos:

$$N_1 = (1, 2, 4) + \frac{1}{3}(4-1, 3-2, 2-4) = (1, 2, 4) + (1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = (2, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}),$$

$$N_2 = (1, 2, 4) + \frac{2}{3}(4-1, 3-2, 2-4) = (1, 2, 4) + (2, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) = (3, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}).$$

Actividades

7. En el segmento de extremos $A(1,-2, 3)$ y $B(4, 2,-1)$ halla las coordenadas del punto C que divide al segmento en dos partes, la primera 3 veces mayor que la otra.

8. Halla las ecuaciones paramétricas y continuas de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos: **a)** $A(-3, 4,-2)$ y $B(0,-1, 5)$; **b)** $C(4,-1,-1)$ y $D(0, 0-3)$; **c)** $M(1, 0,-1)$ y $N(0, 3,-9)$.

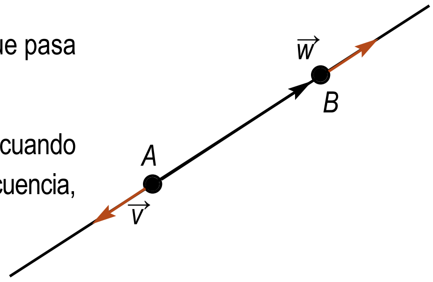
9. Dada la recta r: $\begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=4-10\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases}$, averigua si los puntos $A(0,-1, 1)$, $B(-3, 2,-5)$, $C(3,-4, 7)$ y $D(-6, 3, 8)$ pertenecen o no a la recta.

10. Comprueba si los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(9, 4,-1)$ y $C(-3, 1, 2)$ están alineados o no.

11. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(-1, 2, 3)$ y son paralelas al eje OX y al eje OZ.

12. Halla las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que pasa por $A(4,-2, 3)$ y es paralela a la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{6}$.

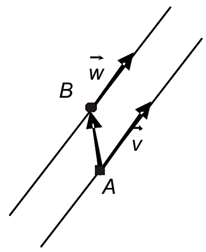
4. Posiciones relativas de dos rectas



Supongamos dos rectas: *r*, que pasa por *A* tiene como vector director $\vec{v}$, y *s*, que pasa por *B* tiene como vector director $\vec{w}$. Las posiciones que pueden adoptar *r* y *s* son:

Coincidentes. Se trata de dos ecuaciones distintas de la misma recta. Esto ocurre cuando los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$ son proporcionales, poseen todos la misma dirección. En consecuencia, son coincidentes si:

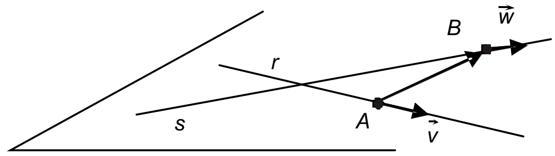
$$\text{rango }(\vec{v}, \vec{w}) = 1 \text{ y rango }(\vec{v}, \vec{w} \text{ y } \overrightarrow{AB}) = 1.$$



Paralelas. Cuando las rectas son paralelas, los vectores de dirección son también paralelos, es decir, proporcionales y por tanto:

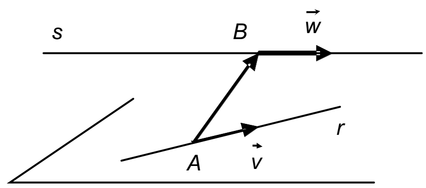
$$\text{rango }(\vec{v}, \vec{w}) = 1 \text{ y rango }(\vec{v}, \vec{w} \text{ y } \overrightarrow{AB}) = 2$$

Incidentes. Se cortan en un punto. Esto sucede cuando los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen distinta dirección, pero $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$ están en el mismo plano. En este caso, los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes y su rango será 2. Por tanto, son incidentes si:



$$\text{rango }(\vec{v}, \vec{w}) = 2 \text{ y rango }(\vec{v}, \vec{w} \text{ y } \overrightarrow{AB}) = 2$$

Se cruzan. No tienen ningún punto en común, pero no son paralelas. Cuando esto sucede, los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$, ni tienen la misma dirección ni son coplanarios; son linealmente independientes, luego:



$$\text{rango }(\vec{v}, \vec{w}) = 2 \text{ y rango }(\vec{v}, \vec{w} \text{ y } \overrightarrow{AB}) = 3$$

Resumiendo, tenemos:

Rectas *r* y *s*	coinciden	paralelas	se cortan	se cruzan
rango $(\vec{v}, \vec{w})$	1	1	2	2
rango$(\vec{v}, \vec{w}$ y $\overrightarrow{AB})$	1	2	2	3

Ejemplos

11. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

i) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-4}$ y $\frac{x}{-4} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+7}{8}$;

ii) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}$ y $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-4}{8}$;

iii) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ y $(x, y, z) = (3+\lambda, -2, -5-\lambda)$;

iv) $(x, y, z) = (1, 1+\lambda, 3-2\lambda)$ y $(x, y, z) = (3+2\mu, 4, -\mu)$.

12. Halla las coordenadas del punto de corte cuando el par de rectas sean incidentes.

Solución:

a) i) rango $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} = 1$, rango $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ 4 & 6 & -8 \end{pmatrix} = 1$, las rectas son coincidentes.

ii) rango $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} = 1$, rango $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, las rectas son paralelas.

iii) rango $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$, rango $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$, las rectas son incidentes.

iv) rango $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$, rango $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3$, las rectas se cruzan.

b) Las rectas $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ y $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -2 \\ z = -5-\lambda \end{cases}$ se cortan en un punto, son incidentes.

Ponemos la primera en paramétricas utilizando la letra μ para el parámetro

$$\begin{cases} x = 1+3\mu \\ y = -2-\mu \\ z = -3+2\mu \end{cases}$$

Si las rectas se cortan, compartirán un punto; luego existirá un valor para μ y otro para λ, que puestos en las ecuaciones paramétricas respectivas nos darán las coordenadas de ese punto. Esto equivale a que tenga solución el sistema:

$$\begin{cases} 1+3\mu = 3+\lambda \\ -2-\mu = -2 \\ -3+2\mu = -5-\lambda \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 3\mu - \lambda = 2 \\ -\mu = 0 \\ 2\mu + \lambda = -2 \end{cases}$$

En este caso es fácil ver que $\mu = 0$ y que, sustituyendo en las otras ecuaciones, obtenemos $\lambda = -2$ El punto de corte se consigue al poner $\mu = 0$ y $\lambda = -2$ en las ecuaciones paramétricas y resulta ser (1,–2, -3).

Actividades

13. Estudia la posición relativa de las rectas: $(x, y, z) = (4,-2,3) + \lambda(1,-1,2)$ y $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{2}$.

14. Determina el valor de m para que las rectas se corten en un punto y halla las coordenadas del punto de corte:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{5} \text{ y } \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-m}{1}.$$

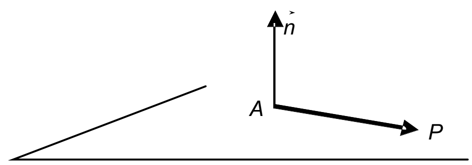
5. Ecuaciones de un plano

5.1. Ecuación general del plano

Todos los puntos de un plano quedan inequívocamente determinados si conocemos un punto del plano y un vector perpendicular a él. Supongamos un plano π del que conocemos el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular al plano (o normal al plano). Para cualquier otro punto del plano $P(x, y, z)$ ocurre que los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{AP}$, como vemos en la figura, son ortogonales; en consecuencia, su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Poniendo los vectores en coordenadas, obtenemos:



$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Si simbolizamos el número $-ax_1 - by_1 - cz_1$ por d, entonces resulta:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

Esta ecuación se denomina **ecuación general del plano** π, y además, salvo el producto por un número, es única.

Es posible demostrar que toda ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$ corresponde a un plano de vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ y que pasa por un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ cuyas coordenadas son solución de la ecuación, es decir, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$.

Ejemplos

13. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A–1, 1, 3) y tiene como vector normal $\vec{n} = (2, 3, -4)$.

Solución:

Los tres primeros coeficientes de la ecuación general del plano son 2, 3 y –4, luego la ecuación será:

$$2x + 3y - 4z + d = 0$$

Como además pasa por el punto $A(-1,1,3)$ se cumplirá que:

$$2(-1) + 3\cdot 1 - 4\cdot 3 + d = 0$$

$$-11 + d = 0,\ d = 11$$

La ecuación del que buscamos es: $2x + 3y - 4z + 11 = 0$

14. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = y - 3 = z$ y que pasa por el punto $A(-1, 2, -3)$.

Solución:

A veces, cuando los denominadores de las ecuaciones continuas son la unidad no se ponen, como en las fracciones de denominador 1.

El plano buscado tiene como vector normal $\vec{n}$ = (2, 1, 1), el director de la recta, y pasa por el punto $A(-1, 2, -3)$, luego:

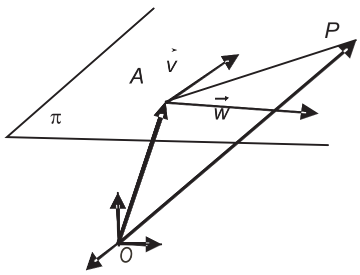
$$2x + y + z + d = 0$$

$$2(-1) + 2 - 3 + d = 0,\ \ d = 3$$

El plano que buscamos es: $2x + y + z + 3 = 0$.

5.2. Ecuaciones paramétricas del plano

También para el plano existe una determinación lineal. Para ello son necesarios un punto, digamos $A(x_1, y_1, z_1)$, y dos vectores contenidos o paralelos al plano, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, no paralelos entre sí ($\vec{w} \neq \lambda \vec{v}$), pues han de ser linealmente independientes para formar una base del plano π, de modo que todo vector de dicho plano se escriba como combinación lineal de ambos. Cualquier otro punto del plano, $P(x, y, z)$, puede determinarse, como se observa en la figura, de la ecuación vectorial:



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Pero al ser $\overrightarrow{AP}$ combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, podemos escribir:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$$

La igualdad anterior expresada en coordenadas queda así:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3)$$

Igualando las coordenadas del primer miembro con las el segundo miembro, resulta:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas del plano** π, y para cada valor que le demos a los parámetros λ y μ determinamos un punto del plano.

Ejemplos

15. Halla las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto $A\,(2,-4,3)$ y los vectores paralelos $\vec{v} = (1,-1,2)$ y $\vec{w} = (3,1,-3)$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas del plano pedido son:

$$(x,\ y,\ z) = (2,-4,\ 3) + \lambda(1,-1,\ 2) + \mu(3,\ 1,-3) \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x = 2 + \lambda + 3\mu \\ y = -4 - \lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

16. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y tiene como vectores paralelos $\vec{i} = (1,0,0)$ y $\vec{j} = (0,1,0)$.

Solución:

Se trata del plano *0XY*, que determinan el eje *X* y el eje *Y*, sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$.

5.3. Paso de las ecuaciones paramétricas a la general y viceversa

Si $\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$

son las ecuaciones paramétricas de un plano que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y tiene como vectores paralelos al plano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, con $\vec{w} \neq \lambda \vec{v}$, entonces un punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano si existen valores de λ y μ que satisfacen las igualdades anteriores. Esto equivale a decir que $P(x, y, z)$ pertenece al plano, si el sistema

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y - y_1 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z - z_1 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

tiene solución para las incógnitas λ y μ. Claro que este sistema tendrá solución, según el teorema de Rouché-Frobenius, si el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada valen 2:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - y_1 \\ v_3 & w_3 & z - z_1 \end{pmatrix} = 2$$

Si el rango de la matriz ampliada vale 2, su determinante será cero:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - y_1 \\ v_3 & w_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante por los elementos de última columna, tenemos:

$$(x - x_1)\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - (y - y_1)\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + (z - z_1)\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - x_1\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - z_1\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

En la última igualdad, observamos que los coeficientes de x, y, z son las coordenadas del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$, luego se trata de un vector perpendicular al plano; llamando $a = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ y $d = -x_1\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - z_1\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$, obtenemos la ecuación general del plano que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y tiene como vectores paralelos al plano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Ecuación que, como sabemos, es única, salvo un factor de proporcionalidad.

El paso de la ecuación general a las paramétricas es más sencillo. Si en la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ despejamos x, resulta:

$$x = -\frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$$

Igualando $y = \lambda$ y $z = \mu$ se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} x = -\dfrac{d}{a} - \dfrac{b}{a}\lambda - \dfrac{c}{a}\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Que son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(-d/a, 0, 0)$ y tiene como vectores paralelos a él: $\vec{v} = (-b/a, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-c/a, 0, 1)$. Hay que tener presente que las ecuaciones paramétricas de un plano no son únicas.

Ejemplos

17. Hallar las ecuaciones paramétricas y general del plano que contiene al punto $A(-1, 2, -1)$ y tiene como vectores paralelos $\vec{v} = (2, 0, -3)$ y $\vec{w} = (1, -3, 3)$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2 - 3\mu \\ z = -1 - 3\lambda + 3\mu \end{cases}$

La ecuación general sale del determinante nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 0 & -3 & y-2 \\ -3 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0$

Al desarrollar resulta: $-9x - 9y - 6z + 3 = 0$; dividiendo por -3, queda:

$$3x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

18. Dado el plano $x - 3y + 2z + 5 = 0$, encuentra un punto por donde pasa y dos vectores paralelos a él.

Solución:

Escribimos las ecuaciones paramétricas de este plano, para ello despejamos x y llamamos λ a y y μ a z:

$$\begin{cases} x = -5 + 3\lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(-5, 0, 0)$ y tiene como vectores paralelos $\vec{v} = (3,1,0)$ y $\vec{w} = (-2,0,1)$.

5.4. Otras determinaciones del plano

Hay varias situaciones que conducen a una determinación lineal del plano.

- **Plano que pasa por tres puntos**. El que por tres puntos pase un plano tiene una comprobación experimental sencilla en el hecho de que una silla o una banqueta con tres patas nunca baila; y la razón es porque las tres patas se adaptan perfectamente al plano del suelo. Por lo tanto, un plano determinado por tres puntos *A*, *B* y *C* es el mismo que el que determina un punto, por ejemplo, *A*, y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

- **Plano que determina una recta y un punto**. Una recta *r*, que pasa por *A* tiene como vector director $\vec{v}$, y un punto *B*, exterior a ella, también determinan un plano; para ello tomamos el punto *A* de la recta *r* y como vectores paralelos al plano $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$.

- **Plano que contiene a dos rectas paralelas**. Si una recta *r*, que pasa por *A* y con vector director $\vec{v}$, y otra *s*, contiene a *B* y con vector director $\vec{w}$, son paralelas ambas, configuran un plano cuyas ecuaciones paramétricas podemos hallar tomando, por ejemplo, el punto *A* y como vectores paralelos al plano $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$.

- **Plano determinado por dos rectas que se cortan**. Si una recta *r*, que pasa por *A* y con vector director $\vec{v}$, y otra *s*, que contiene a *B* y con vector director $\vec{w}$, son incidentes, entonces con uno de los puntos, *A* o *B*, y tomando como vectores paralelos al plano $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tenemos una determinación lineal de la que hallar la ecuación del plano.

Actividades

15. Halla las ecuaciones paramétricas y general de plano que pasa por los puntos (1, 1 ,1), (3, 2, 0) y (0, 1, 2).

16. Halla las ecuaciones paramétricas y general del plano que determinan el punto (2, 0, – 1) y la recta $(x, y, z) = (1 - 3\lambda, -4 + 2\lambda, 2 + \lambda)$.

17. Halla la ecuación general del plano que determinan las rectas paralelas:

$$\frac{x}{2} = y = z + 3 \text{ y } (x,\ y,\ z) = (1 - 4\lambda,\ 4 - 2\lambda,\ 1 - 2\lambda).$$

18. Estudia la posición relativa de las rectas

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1} \text{ y } (x,\ y,\ z) = (4+\lambda,\ 2-\lambda, -1+2\lambda)$$

Si se cortan, halla el punto de corte y las ecuaciones paramétricas y general del plano que determinan.

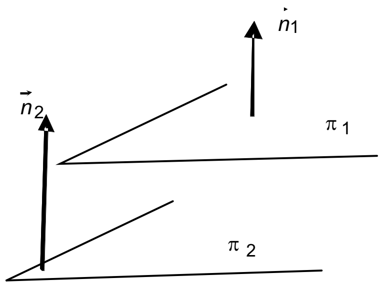
19. Halla la ecuación del plano que contiene al punto *A* (3, 4, – 1) y es perpendicular a la recta que pasa por *B*(1, – 1, 1) y *C*(3, -5, 3).

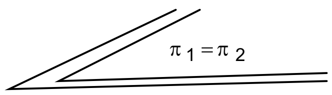
20. Dado el plano π: $2x - y + z + 1 = 0$, la recta $s : x = y = \frac{z+1}{3}$ y el punto *A*(4, 0, – 1). Halla el plano que pasa por *A*, es paralelo a la recta *s* y perpendicular al plano π.

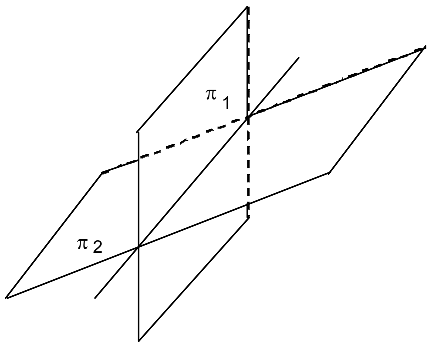
21. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos *A*(0, 1, 5) y *B*(3, 4, 3) y es paralelo a la recta de ecuaciones $x - 2 = \frac{y}{3} = z + 1$.

22. El plano que pasa por *A* (1, –3, –3) y *B* (–2, 4, –4) y es perpendicular al plano $6x + 5y + 4z - 2 = 0$.

6. Posiciones relativas de dos planos







Sean π_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y π_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ dos planos, cuyos vectores normales son $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. Las posiciones que pueden adoptar en el espacio son las siguientes:

Paralelos: los vectores normales, $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, también son paralelos y, por lo tanto, sus coordenadas proporcionales; eso quiere decir que

$$\text{rango}\,(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 \quad \text{o} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$

Coincidentes: se trata del mismo plano. Los coeficientes de las dos ecuaciones, incluyendo los términos independientes son proporcionales; en consecuencia, tenemos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Secantes: se cortan determinando una recta común. Los vectores $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ no tienen la misma dirección, por lo tanto, rango$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2$.

Además la recta común a los dos planos tiene como ecuaciones paramétricas las soluciones del sistema formado por los dos planos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + cz_1 + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + cz_2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Como en este sistema el rango de la matriz de los coeficientes es 2, rango$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2$, y hay tres incógnitas, entonces las soluciones dependerán de un parámetro. Es decir, relegando una incógnita al segundo miembro de las ecuaciones, por ejemplo z, las soluciones tendrán este aspecto:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

y que podemos identificar como la recta que pasa por el punto $(x_0.\ y_0, 0)$ y tiene como vector director $(v_1, v_2, 1)$. Cuando una recta viene dada por las ecuaciones de dos planos se dice que estas son las **ecuaciones implícitas de la recta**.

De las ecuaciones continuas de una recta es muy fácil encontrar dos ecuaciones implícitas de esa recta. Las ecuaciones continuas de una recta r, de la que conocemos un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y un vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, son:

$$\frac{x_1 - x}{v_1} = \frac{y_1 - y}{v_2} = \frac{z_1 - z}{v_3}.$$

De las tres igualdades, si cogemos dos, por ejemplo, la primera fracción con la segunda y primera con la tercera, obtenemos las ecuaciones de dos planos que constituyen un par de ecuaciones implícitas de esa recta. Es decir, de

$$\frac{x_1 - x}{v_1} = \frac{y_1 - y}{v_2} \quad \text{y} \quad \frac{x_1 - x}{v_1} = \frac{z_1 - z}{v_3}$$

obtenemos las ecuaciones de los planos $\begin{cases} -v_2x + v_1y + v_2x_1 - v_1y_1 = 0 \\ -v_3x + v_1z + v_3x_1 - v_1z_1 = 0 \end{cases}$

Obviamente una recta tiene una infinidad de ecuaciones implícitas.

Ejemplos

19. Estudia las posiciones relativas de los pares de planos siguientes:

a) $3x - y + 2z - 1 = 0$ y $-6x + 2y - 4z + 5 = 0$;

b) $x - 2y + 3z + 2 = 0$ y $-3x + 6y - 9z - 6 = 0$;

c) $3x - y + 2z - 1 = 0$ y $x + y - 3z + 4 = 0$.

Solución:

a) Como $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{1}{5}$, podemos afirmar que los plano son paralelos.

b) Como $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{3}{-9} = \frac{2}{-6}$, se trata de dos ecuaciones diferentes del mismo plano. Son coincidentes.

c) Es evidente que $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \neq \frac{1}{4}$ o rango $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$.

Luego se trata de dos planos secantes.

20. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos:

$$3x - y + 2z - 1 = 0 \quad y \quad x + y - 3z + 4 = 0.$$

Solución:

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ obtenemos las ecuaciones paramétricas. Relegando una incógnita al 2º miembro, el sistema queda así: $\begin{cases} 3x - y = 1 - 2z \\ x + y = -4 + 3z \end{cases}$

Las soluciones son: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ -4+3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3+z}{4}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2z \\ 1 & -4+3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-13+12z}{4}$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\lambda \\ y = -\frac{13}{4} + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

A veces puede resultar cómodo hallar el vector director como producto vectorial de los vectores normales a los planos. Luego en el sistema, dar valor cero a una incógnita y resolverlo para las otras dos; así obtenemos un punto y, con el vector director calculado, podemos escribir unas ecuaciones paramétricas de la recta.

Actividades

23. Halla la ecuación del plano que pasa por $A(2, -3, 4)$ y es paralelo al plano $x - 3y + z - 2 = 0$.

24. Determina m y n para que los planos $x - my + 2z + 9 = 0$ y $3x - 3y + nz - n = 0$ sean paralelos.

Haz de planos

Se llama **haz de planos** de eje r al conjunto de todos los planos que contienen a la recta r. Si de r conocemos sus ecuaciones implícitas:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

entonces el haz de eje r viene dado por:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Para cada valor que demos a α y β se obtiene la ecuación de un plano que, se puede demostrar, contiene a la recta r.

Dividiendo la ecuación anterior por α, obtenemos $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \delta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ en donde $\delta = \beta/\alpha$. Esta ecuación, dando valores δ, describe todos los planos del haz excepto $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ y tiene la ventaja de emplear un único coeficiente.

El **haz de planos** facilita la resolución de algunos problemas, aunque admitan también otros métodos de resolución. Particularmente resulta interesante para hallar la ecuación de un plano del que sabemos que contiene a una recta dada por sus ecuaciones implícitas.

Ejemplo

21. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z+1}{2}$ y pasa por el punto $(1, 2, -3)$.

Solución:

De las ecuaciones continuas obtenemos dos planos: $\frac{x}{2} = \frac{z+1}{2}$ y $y - 2 = \frac{z+1}{2}$

Es decir: $2x - 2z - 2 = 0$ y $2y - z - 5 = 0$

Consideramos el haz: $2x - 2z - 2 + \delta(2y - z - 5) = 0$.

Sustituyendo en la ecuación del haz las incógnitas por las coordenadas del punto (1, 2, -3), tenemos:

$$2\cdot 1 - 2(-3) - 2 + \delta(2\cdot 2 - 3(-3) - 5) = 0, \quad 6 + 8\delta = 0, \quad \delta = \frac{-3}{4}$$

El plano pedido será:

$$2x - 2z - 2 - \frac{-3}{4}(2y - z - 5) = 0$$

$$8x - 6y - 5z + 7 = 0$$

Actividades

25. De todos los planos que contienen a la recta $\begin{cases} x+2y-z=9 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$ halla el que pasa por el origen de coordenadas.

26. Determinar el plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x+2y+2z-7=0 \\ 3x-y-z+1=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano π: $x-y+2z-1=0$.

7. Posiciones relativas de tres planos

Tres planos en el espacio

$$\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$\pi_3: \ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

pueden adoptar varias posiciones que deduciremos del análisis del sistema formado por sus ecuaciones. Según el teorema de Rouché-Frobenius se pueden presentar distintas situaciones que vamos a interpretar geométricamente.

En el sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$$

llamaremos A a la matriz de los coeficientes y M a la matriz ampliada y pueden aparecer los siguientes casos:

1. Si rango(A) = rango(M) = 3, el sistema tiene solución única. Esto se interpreta como que los tres planos se cortan en un punto cuyas coordenadas son la solución del sistema.

2. Si rango(A) = 2 y rango(M) = 3, el sistema es incompatible, no tiene solución; y geométricamente lo interpretamos como que los tres planos no tienen puntos en común. Aunque se pueden dar dos situaciones:

a) Dos planos son paralelos y están cortados por el tercero.

b) Los planos se cortan de dos en dos, como las caras de una superficie prismática triangular, determinando tres rectas paralelas.

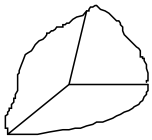
Estas dos situaciones se distinguen una de otra por los vectores normales a los planos. En el caso **a)** $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ son paralelos y por tanto proporcionales, pero $\vec{n_3}$ no es paralelo a los anteriores; es decir, en la matriz A hay dos filas proporcionales. En el caso **b)** cada dos planos definen una recta, por lo que los vectores normales no mantienen entre ellos ninguna relación de paralelismo, entonces en la matriz A no existen dos filas proporcionales.

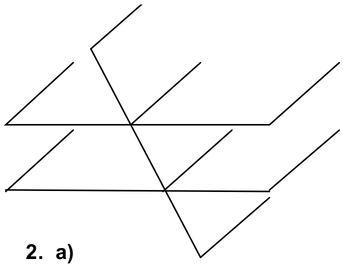
Si rango(A) = rango(M) = 2, el sistema posee infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Estas soluciones constituyen las ecuaciones paramétricas de una recta. Esta recta es el eje de un haz de planos al que pertenecen los planos dados.

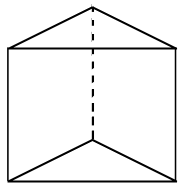
4. Si rango(A) = 1 y rango(M) = 2, el sistema vuelve a ser incompatible e interpretamos este hecho como que los tres planos son paralelos o que dos son coincidentes y el tercero paralelo a ellos. Hay dos planos coincidentes si en la matriz M aparecen dos filas proporcionales.

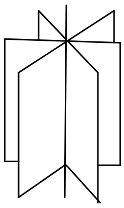
5. Si rango(A) = rango(M) = 1, los tres planos son coincidentes.

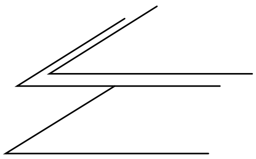
En las figuras hemos señalado los seis casos anteriores.

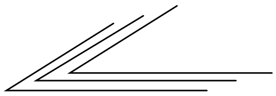

1.


2. a)


2. b)


3.


4.


5.

Resumiendo, tenemos:

Rango(A)	1	1	2	2	3
Rango(M)	1	2	2	3	3
Posición	Coincidentes	Paralelos o 2 coincidentes y el 3º paralelo	Pertenecen al mismo haz	Cada 2 determinan una recta o 2 son paralelos y el 3º los corta	Determinan un punto

Ejemplo

22. Dados los planos

$$\pi_1: mx + y + z = 1$$
$$\pi_2: x + my + z = 1$$
$$\pi_3: x + y + mz = 1,$$

estudiar su posición relativa para los diferentes valores de m.

Solución:

Discutimos el sistema para los diferentes valores de m:

$$mx + y + z = 1$$
$$x + my + z = 1$$
$$x + y + mz = 1$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2,\ \ m^3 - 3m + 2 = 0,\ \ m = 1 \text{ y } m = 2.$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$, rango(A) = rango (M) = 3, el sistema es compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

Si m =1, rango (A) = rango (M) = 1, sistema compatible e indeterminado. Los tres planos son coincidentes. En el caso de que m = 2, rango (A) = 2 y rango (M) = 3, sistema incompatible, examinamos la matriz A y no observamos en ella dos filas proporcionales; por tanto los 3 planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática triangular.

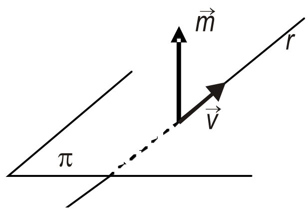
Actividades

27. Hallar la posición relativa de los siguientes planos: $2x - y + 2z = 5$; $x + y - 2z = 4$; $x - 5y + 4z = 3$.

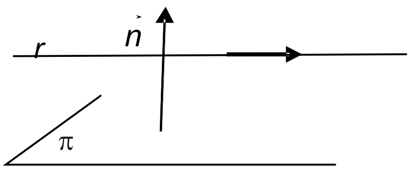
28. Halla el valor de m para que los planos $x + y + z = 2$, $2x + 3y + z = 3$ y $mx + 10y + 4z = 11$ tengan una recta en común.

8. Posiciones relativas de recta y plano

Una recta r, que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, y un plano, π: $ax + by + cz + d = 0$, con vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$, pueden adoptar las posiciones siguientes:

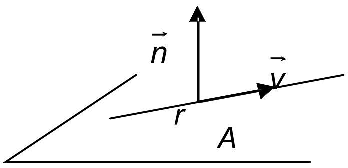


- **La recta corta al plano**: geométricamente supone que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ no son perpendiculares, como se aprecia en la figura, luego su producto escalar será distinto de cero, $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$.



- **La recta y el plano son paralelos**: entonces los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares y lógicamente su producto escalar será nulo: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

- **La recta está contenida en el plano**: en cuyo caso los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ siguen siendo perpendiculares, es decir, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, pero lo distinguimos del caso anterior porque todos los puntos de r pertenecen a π, en particular A.



Resumiendo, tenemos:

	$\neq 0$	$= 0$
$\vec{v} \cdot \vec{n}$	Se cortan en un punto	Si A no pertenece a π, entonces r es paralela a π
		Si pertenece A a π, entonces r está contenida en π

Cabe aún otro análisis si la recta está dada por sus ecuaciones implícitas, y consiste en formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Llamando *A* a la matriz de los coeficientes del sistema y *M* a la matriz ampliada, nos podemos encontrar con las siguientes posibilidades:

1. rango(*A*) = 3, rango(*M*) = 3. Cuando esto ocurre, se dice que la recta es secante al plano, lo corta en un punto. El punto de corte es la solución del sistema
2. rango(*A*) = 2, rango(*M*) = 3. Esto sucede cuando la recta es paralela al plano.
3. rango(*A*) = 2, rango(*M*) = 2. Entonces la recta está contenida en el plano.

Ejemplo

23. Estudiar la posición relativa de la recta $(x, y, z) = (-1+3\lambda, 2+\lambda, 2\lambda)$ y el plano determinado por los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0,1)$ y $C(1, 4, 3)$. Si se cortan halla el punto de corte.

Solución:

Hallamos la ecuación general del plano que pasa por $A\,(1, 3, 2)$ y tiene como vectores paralelos $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1)$ y, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$. Esta ecuación se obtiene igualando a cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -3 & 1 & y-3 \\ -1 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0$$

Y resulta el plano: $-2x - y + z + 3 = 0$.

Hallamos el producto escalar del vector normal al plano, $\vec{n} = (-2,-1,1)$, con el vector director de la recta, $\vec{v} = (3,1,2)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (-2,-1,1) \cdot (3,1,2) = 5 \neq 0$$

Luego recta y plano se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la del plano y calculamos el valor de λ:

$$-2\,(-1 + 3\lambda) - (2 + \lambda) + 2\lambda + 3 = 0, \quad -5\lambda + 3 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{5}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de la recta el valor de λ encontrado, conseguimos las coordenadas del punto de corte:

$$(x,y,z) = \left(-1+3\frac{3}{5}, 2+\frac{3}{5}, 2\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

Actividades

29. Del haz de planos que contiene a la recta $r: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+2z-5=0 \end{cases}$ halla uno que sea paralelo a la recta que pasa por $A(1,-1, 1)$ y $B(3, 3,-2)$.

30. Determinar la posición de la recta $r: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y+1}{a} = \dfrac{z-a}{4}$ y el plano π: $ax + 2y - 6z + 7 = 0$ para los diferentes valores de a. Halla el punto de corte de la recta y plano cuando $a = 5$.

31. Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 1, 0)$ y $D(1, 0, 0)$. Halla la ecuación del plano que contiene a A y B y no corta a la recta determinada por C y D.

9. Algunos problemas de rectas y planos

La variedad de problemas es muy amplia y muchos problemas de geometría analítica admiten más de una forma de resolución. No es nuestro interés hacer un estudio exhaustivo de todas las formas posibles de resolverlos, sino emplear la más sencilla e intuitiva y referir alguna indicación sobre otros modos de abordarlos.

Punto simétrico de otro respecto a un punto

Decimos que $P'(x, y, z)$ es simétrico de $P(x_1, y_1, z_1)$ con respecto a $M(m_1, m_2, m_3)$, si M es el punto medio del segmento PP'.

Luego $m_1 = \dfrac{x_1 + x}{2}$, $m_2 = \dfrac{y_1 + y}{2}$, $m_3 = \dfrac{z_1 + z}{2}$.

Ejemplo

24. Halla el punto simétrico de $P(4, 3, -1)$ con respecto a $M(2, 4, -3)$

Solución:

Llamamos $P'(x, y, z)$ al simétrico de P con respecto a M, entonces:

$$2 = \frac{4+x}{2}, \quad 4 = \frac{3+y}{2}, \quad -3 = \frac{-1+z}{2}$$

De donde obtenemos $x = 0$, $y = 5$, $z = -5$. Luego $P'(0, 5, -5)$.

Punto simétrico de otro con respecto a una recta

Decimos que P' es simétrico de P con respecto a la recta r, si hay un punto M de r que es el punto medio del segmento PP'.

Ejemplo

25. Halla el simétrico de $(2, 0, 3)$ respecto a la recta $x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-1}{2}$.

Solución:

Sea $P(2, 0, 3)$ y $P'(x, y, z)$ el simétrico con respecto a la recta dada. Sea M un punto de la recta que es el punto medio del segmento PP'. Procederemos con los siguientes pasos.

i) Si ponemos la recta en paramétricas $(x, y, z) = (1+\lambda, 2+\lambda, 1+2\lambda)$, el punto M tiene de coordenadas$(1+\lambda, 2+\lambda, 1+2\lambda)$. Además, el vector $\overrightarrow{PM} = (1+\lambda-2, 2+\lambda-0, 1+2\lambda-3) = (-1+\lambda, 2+\lambda, -2+2\lambda)$, es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v} = (1, 1, 2)$, luego $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{v} = 0$,

$$(-1+\lambda, 2+\lambda, -2+2\lambda) \cdot (1, 1, 2) = 0$$
$$-1+\lambda+2+\lambda-4+4\lambda = 0$$
$$-3+6\lambda = 0, \ \lambda = \frac{1}{2}$$

ii) Hallamos las coordenadas de $M\left(1+\frac{1}{2},2+\frac{1}{2},1+1\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2\right)$

iii) De la igualdad

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2\right)=\left(\frac{2+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{3+z}{2}\right),$$

obtenemos $x = 1$, $y = 5$ y $z = 1$. El punto buscado es $P'(1, 5, 1)$.

Punto simétrico con respecto a un plano

Decimos que *P'* es simétrico de *P* con respecto al plano π si hay un punto *M* de π que es el punto medio del segmento *PP'*.

Ejemplo

26. Halla el simétrico del punto $P(0, 1, 4)$ respecto al plano π: $x-2y + 3z + 4 = 0$.

Solución:

Llamamos $P'(x, y, z)$ al simétrico de $P(0, 1, 4)$ respecto a π y procedemos con los siguientes pasos.

i) Hallamos la ecuación de la recta *r* que pasa por *P* y es perpendicular a π. Las ecuaciones paramétricas de $r : (x, y, z) = (\lambda, 1-2\lambda, 4 + 3\lambda)$

ii) Hallamos, *M*, el punto de corte de *r* y π:

$$\lambda - 2(1 - 2\lambda) + 3(4 + 3\lambda) + 4 = 0$$
$$\lambda - 2 + 4\lambda + 12 + 9\lambda + 4 = 0$$
$$14\lambda + 14 = 0, \quad \lambda = -1$$

Entonces $M(-1, 3, 1)$.

iii) De la igualdad $(-1,3,1)=\left(\frac{x}{2},\frac{1+y}{2},\frac{4+z}{2}\right)$, obtenemos $x=-2, \quad y=5, \quad z=-2$

El punto *P'* tiene de coordenadas $(-2, 5,-2)$.

Recta que corta perpendicularmente a otras dos que se cruzan

Si *r* es una recta que corta perpendicularmente a otras dos, *s* y *t*, que se cruzan, tendrá el vector director ortogonal a los vectores de dirección de *s* y *t*. En el ejemplo exponemos un modo de resolver este problema, pero hay otra forma de hacerlo.

Ejemplo

27. Halla la recta r, perpendicular común a las rectas s: $x = y = z$ y t: $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$.

Solución:

Si escribimos s y t en paramétricas obtenemos:

$$s: (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda) \quad y \quad t: (x, y, z) = (\mu, 1+2\mu, -2+3\mu)$$

Buscamos un punto $S(\lambda,\lambda,\lambda)$ de s y otro $T(\mu, 1+2\mu, -2+3\mu)$ de t tales que el vector $\overrightarrow{ST} = (\mu-\lambda, 1+2\mu-\lambda, -2+3\mu-\lambda)$ sea ortogonal al vector director de s, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, y al de t, $\vec{w} = (1,2,3)$. Esto significa que:

$\overrightarrow{ST} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\mu-\lambda, 1+2\mu-\lambda, -2+3\mu-\lambda) \cdot (1, 1, 1) = 0$

$$\mu - \lambda + 1 + 2\mu - \lambda - 2 + 3\mu - \lambda = 0$$

$$-1 + 6\mu - 3\lambda = 0$$

$\overrightarrow{ST} \cdot \vec{w} = 0, (\mu-\lambda, 1+2\mu-\lambda, -2+3\mu-\lambda) \cdot (1, 2, 3) = 0$

$$\mu - \lambda + 1 + 2 + 4\mu - 2\lambda - 6 + 9\mu - 3\lambda = 0$$

$$-4 + 14\mu - 6\lambda = 0$$

Del sistema $\begin{cases} 6\mu - 3\lambda = 1 \\ 14\mu - 6\lambda = 4 \end{cases}$ obtenemos $\mu = 1$, $\lambda = 5/3$.

Luego S (5/3, 5/3, 5/3) y T (1, 3, 1). La recta que pasa por S y T es la recta buscada:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) + \lambda\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Otra solución puede hallarse como intersección de dos planos: uno, pasa por S y tiene como vectores paralelos $\vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$, y el otro, pasa por T y tiene como vectores paralelos $\vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.

Recta que pasa por un punto y corta perpendicularmente a otra

Dada una recta r y un punto P exterior a ella se trata de encontrar otra recta que pase por P y corte perpendicularmente a r.

Ejemplo

28. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,-1, 3)$ y corta perpendicularmente a r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Solución:

Escribimos r en paramétricas:

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(2,2,1) = (2 + 2\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)$$

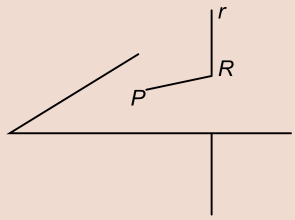
Nos interesa encontrar un punto de *r*, llamémosle $R(2 + 2\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)$, de modo que $\overrightarrow{PR} = (2+2\lambda-2, 1+2\lambda+1, \lambda-3) = (2\lambda, 2+2\lambda, \lambda-3)$ sea perpendicular al vector director de *r*, $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

Si $\overrightarrow{PR}\cdot\vec{v} = 0$, entonces tendremos:

$$(2\lambda, 2+2\lambda, \lambda-3)\cdot(2, 2, 1) = 4\lambda + 4 + 4\lambda + \lambda - 3 = 0,\quad \lambda = -\frac{1}{9}$$

Hallamos las coordenadas de *R*:

$$\left(2+2\cdot(-\frac{1}{9}), 1+2\cdot(-\frac{1}{9}), -\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{16}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{1}{9}\right)$$



La recta que pasa por *P* y *R* es la recta pedida

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda\left(-\frac{2}{9}, \frac{16}{9}, -\frac{28}{9}\right)$$

Otro modo de resolverlo es encontrar un plano que pasa por *P* y sea perpendicular a *r*. La intersección de este plano con la recta *r* nos da el punto *R*, y la recta pedida es la que une *P* y *R*.

Ecuación de una recta que es paralela a otra y corta a otras dos

A veces se dice simplemente, hallar la recta que es paralela a un vector y corta a otras dos; como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

29. Halla la ecuación de la recta que corta a las rectas $r: x - 1 = y = z$

y $s: \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ y es paralela al vector $\vec{u} = (-2, 3, -1)$.

Solución: La recta *r* pasa por *A*(1,0,0) y tiene vector director $\vec{v} = (1,1,1)$; y *s* puede escribirse en paramétricas despejando y e igualando *x* a μ:

$s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = 3 \end{cases}$, es decir, pasa por *B* (0, –1, 3) y tiene vector director $\vec{w} = (1, 2, 0)$.

Un punto genérico de *r* es $R(1+\lambda, \lambda, \lambda)$ y un punto genérico de *s* es $S(\mu, -1 + 2\mu, 3)$. El vector $\overrightarrow{RS} = (\mu - 1 - \lambda, -1 + 2\mu - \lambda, 3 - \lambda)$ es paralelo a $\vec{u} = (-2, 3, -1)$,

Luego

$$(\mu - 1 - \lambda, -1 + 2\mu - \lambda, 3 - \lambda) = \alpha(-2, 3, -1)$$

La igualdad anterior conduce al sistema:

$$\begin{cases}\mu-1-\lambda=-2\alpha\\-1+2\mu-\lambda=3\alpha\\3-\lambda=-\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-\lambda+\mu+2\alpha=1\\-\lambda+2\mu-3\alpha=1\\-\lambda+\alpha=-3\end{cases}$$ cuya solución es $\lambda=\frac{11}{3},\ \mu=\frac{10}{3},\ \alpha=\frac{2}{3}$

Por lo tanto, $R\left(\frac{14}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3}\right)$ y $S\left(\frac{10}{3},\frac{17}{3},3\right)$ y la recta que pasa por *R* y *S* satisface lo que nos piden:

$$(x,y,z)=\left(\frac{14}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3}\right)+\lambda\left(-\frac{4}{3},2,-\frac{2}{3}\right)$$

Es evidente que el vector $\left(-\frac{4}{3},2,-\frac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\vec{u}$ = (–2, 3, –1)

Hay otro modo de resolverlo con ayuda del haz de planos. Buscamos entre los planos del haz de eje *r* aquel que sea paralelo a $\vec{u}$. La intersección de este plano con *s* nos da un punto desde el cual, y con vector director $\vec{u}$, encontramos la recta pedida.

Ecuación de una recta que pasa por un punto y corta a otras dos

En ocasiones este enunciado se expresa diciendo: hallar la recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

30. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto *P*(1, 1, 1) y corta a las rectas

$$r:\begin{cases}x=1+\lambda\\y=2-\lambda\\z=1+2\lambda\end{cases}\quad y\quad s:\begin{cases}x=\mu\\y=3\mu\\z=2-\mu\end{cases}$$

Solución:

Pasamos *r* a continuas $x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$, igualando la primera fracción a la segunda y la segunda a la tercera obtenemos las ecuaciones de dos planos: $x + y - 3 = 0$ y $2y + z - 5 = 0$ que contienen a *r*.

El haz de planos de eje *r* tiene de ecuación: $x + y - 3 + \delta(2y + z - 5) = 0$

Buscamos uno en el haz que pase por *P*(1, 1, 1): $1 + 1 - 3 + \delta(2\cdot 1 + 1 - 5) = 0,\ \delta = -\frac{1}{2}$

Sustituyendo δ en el haz y operando, tenemos: $x + y - 3 + -\frac{1}{2}(2y + z - 5) = 0$

Obtenemos el plano: $2x - z - 1= 0$.

El punto de corte de este plano con la otra recta *s* resulta de sustituir sus ecuaciones paramétricas en este plano:

$$2\mu - (-2 - \mu) - 1 = 0,\quad 3\mu = 3,\ \mu = 1$$

Y ahora poniendo $\mu = 1$ descubrimos las coordenadas del punto de corte $S(1, 3, 1)$. La recta pedida pasa por P y S y es: $(x, y, z) = (1, 1 + 2\lambda, 1)$.

El plano que contiene a P y a r podemos hallarlo, sin recurrir al haz de planos, directamente; y es más sencillo.

También es posible resolver el problema hallando dos planos. Uno que contiene a P y a r y otro, a P y a s. La intersección de esos dos planos nos da la ecuación de la recta pedida.

Actividades

32. Halla la ecuación de la recta que corta a $r: \dfrac{x-1}{2} = y = z$ y $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$ y es paralela a la recta $(x, y, z) = (-\lambda, 3\lambda, -\lambda)$.

33. Halla el punto simétrico de $P(1,2,-1)$ con respecto al plano que pasa por los puntos $M(1,-8,-3)$, $N(2,0,-1)$ y $Q(3,8,1)$.

34. Encuentra las ecuaciones de la recta perpendicular común a las rectas: $x = y = z$ y $x = y = 3z - 1$ (Observa que la última recta tiene vector director $(1, 1, 1/3)$ y pasa por $(0, 0, 1/3)$.

35. Dada la recta r: $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P(1, 2, 1)$ hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

36. Dada la recta r: $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P(1, 2, 1)$ halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

37. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ halla otra recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las anteriores.

Recuerda

- **Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y con vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$**

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases}$$

- **Ecuaciones continuas de la recta que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y con vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$**

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

- **Ecuaciones implícitas**

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c z_1 + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c z_2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

- **Posiciones relativas de dos rectas, r y s, con vectores de dirección $\vec{v}$ y $\vec{w}$, respectivamente**

Rectas r y s	coinciden	paralelas	se cortan	se cruzan
rango $(\vec{v}, \vec{w})$	1	1	2	2
rango$(\vec{v}, \vec{w}$ y $\overrightarrow{AB})$	1	2	2	3

- **Ecuación general del plano**

$$ax + by + cz + d = 0$$

- **Ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(x_1, y_1, z_1)$ y tiene como vectores paralelos al plano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$**

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

- **Haz de planos**

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \delta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

- **Posiciones relativas de tres planos**

Rango(A)	1	1	2	2	3
Rango(M)	1	2	2	3	3
Posición	Coincidentes	Paralelos o 2 coincidentes y el 3º paralelo	Pertenecen al mismo haz	Cada 2 determinan una recta o 2 son paralelos y el 3º los corta	Determinan un punto

- **Posiciones relativas de la recta r con vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y un plano π con vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$,**

	$\neq 0$	$= 0$
$\vec{v} \cdot \vec{n}$	Se cortan en un punto	Si A no pertenece a π, entonces r es paralela a π
		Si pertenece A a π, entonces r está contenida en π