UNIDAD

3 Sistemas de ecuaciones lineales

• *Carl Friedrich Gauss* (Wikipendia.org.Domino público)

Los sistemas de ecuaciones lineales se comenzaron a resolver el curso pasado mediante la introducción del método de Gauss. En esta Unidad profundizaremos en el estudio de sistemas lineales de *m* ecuaciones con *n* incógnitas utilizando el mencionado método, los clasificaremos en compatibles (sistemas con solución) e incompatibles (sistemas sin solución) y resolveremos naturalmente los sistemas que localicemos como compatibles.

El estudio de las matrices y de los determinantes en las dos unidades anteriores nos permitirán expresar las soluciones de los sistemas compatibles en función de los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes; los determinantes mediante la expresión de la matriz inversa nos darán las pautas para llegar a la regla de Cramer, que resuelve los sistemas compatibles de igual número de ecuaciones que de incógnitas.

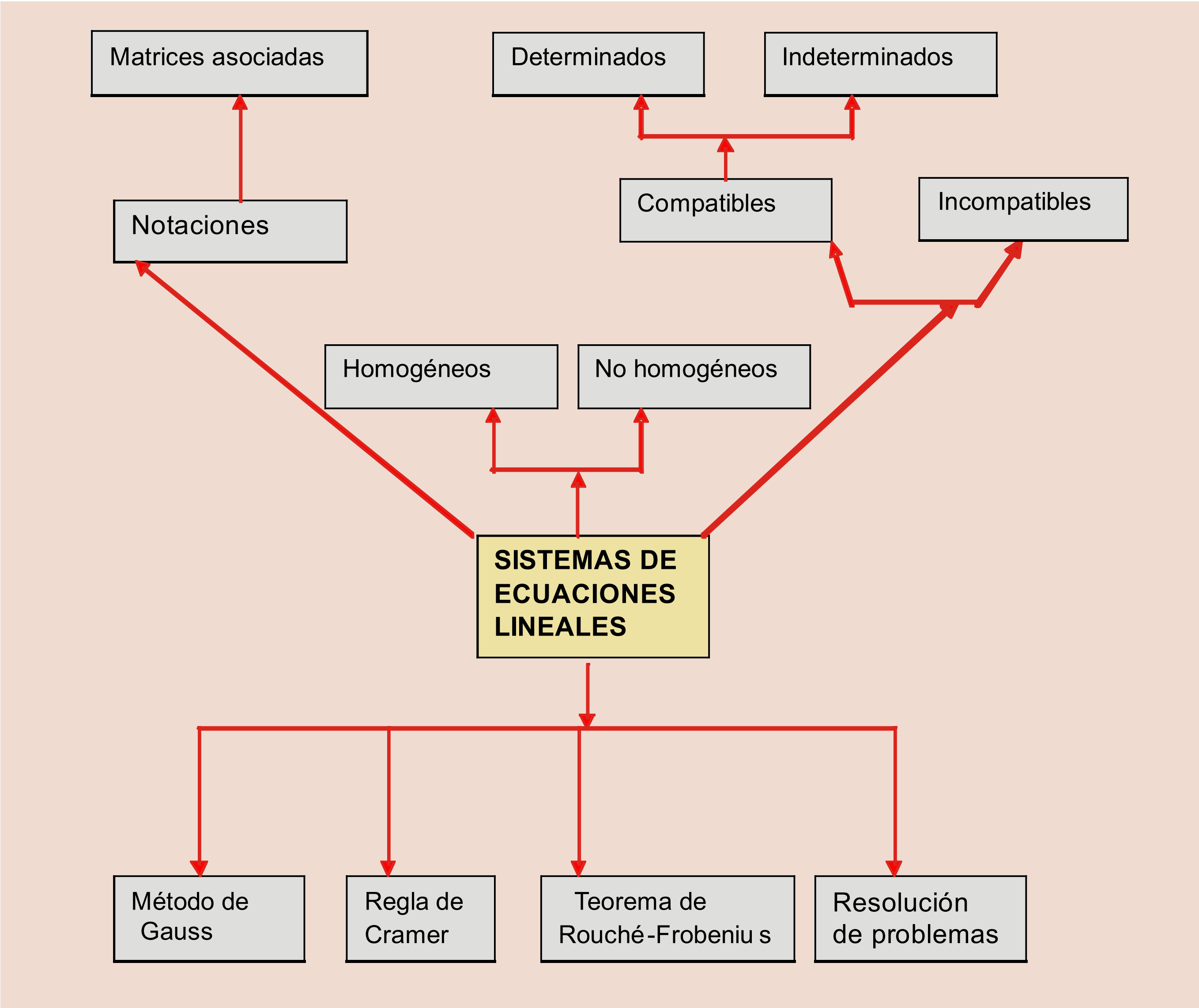
El estudio del teorema de Rouché-Frobenius enunciado en términos matriciales nos proporcionará otro método para clasificar los sistemas, y en el caso de tener solución, nos indicará los que tienen solución única o infinitas soluciones.

Una parte importante de la Unidad la dedicaremos a discutir, y en su caso resolver, sistemas lineales con parámetros. En realidad, se trata del estudio simultáneo de infinitos sistemas de ecuaciones, uno para cada valor numérico que asignemos a cada uno de los parámetros; trataremos de averiguar los valores de los parámetros que forman sistemas con solución y sin solución. Entre los valores de los parámetros que forman sistemas compatibles distinguiremos los de solución única de los que tienen infinitas soluciones y finalmente calcularemos su solución o soluciones. Todo este estudio sobre sistemas es el objetivo fundamental del Álgebra Lineal.

Por último, presentaremos problemas cuya solución requerirá el planteo y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Conocer la terminología usada en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales.
2. Manejar transformaciones que permiten convertir un sistema en otro equivalente escalonado mas simple de resolver.
3. Dominar el método de Gauss para discutir y resolver en su caso los sistemas de ecuaciones lineales con solución.
4. Resolver sistemas mediante la regla de Cramer.
5. Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius para discutir sistemas lineales.
6. Discutir y en su caso resolver sistemas de ecuaciones lineales que dependan de parámetros.
7. Resolver problemas que precisen del planteo y solución de sistemas de ecuaciones lineales.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con n incógnitas, es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

En la igualdad anterior las a_i son números reales llamados coeficientes, que multiplican a las x_i incógnitas, $i = 1, 2, \ldots, n$, el número real b es el término independiente.

Se llama solución de una ecuación lineal a la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de números reales que al sustituirlos en las incógnitas de la ecuación la convierten en una igualdad numérica verdadera.

Las siguientes ecuaciones son lineales: $2x_1 + 3\,x_2 - \sqrt{5}x_3 = 6$, $3x - 5y + \sqrt[3]{2}z = 15$.

Las siguientes ecuaciones no son lineales: $x^2 - 5x + y - 3z = 2$, $e^x - y + 3z = 7$.

Ejemplos

1. Dada la ecuación lineal $2x - 3y + 4z = 2$, comprueba que las ternas $(3, 0, -1)$, $(3, 2, \frac{1}{2})$ y $(-2\ -2, 0)$ son algunas de sus soluciones.

Solución:

Sustituimos las ternas en la ecuación para comprobar que cumplen la igualdad.

$2\cdot3 - 3\cdot0 + 4\cdot(-1) = 2$, $(3, 0, -1)$ es solución.

$2\cdot3 - 3\cdot2 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$, $(3, 2, \frac{1}{2})$ es solución.

$2\cdot(-2) - 3\cdot(-2) + 4\cdot0 = 2$, $(-2, -2, 0)$ es solución.

2. De la siguientes cuaternas $(0, 1, 0, 0)$, $(2, -1, -4, 1)$ y $(1, 2, 0, -2)$, indicar las que son soluciones de la ecuación lineal $-2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$.

Solución:

Sustituimos las cuaternas en la ecuación para comprobar si cumplen o no la ecuación.

$-2\cdot0 + 3\cdot1 - 0 + 0 = 3$, $(0, 1, 0, 0)$ es solución.

$-2\cdot2 + 3\cdot(-1) - (-4) + 1 = 0$, $(2, 1, -4, 1)$ no es solución.

$-2\cdot(1) + 3\cdot2 - 0 + (-2) = 2$, $(1, 2, 0, -2)$ no es solución.

Actividades

1. Dadas las ecuaciones siguientes, indica las que son lineales:

a) $2x + 3x^2 + 7y - 5z = 4$; **b)** $3x - 5y + 6z - 6u = 1$; **c)** $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10$; **d)** $2x + \sqrt{y} - 3z = 6$.

2. Dada la ecuación $x - 2y + 5z = 5$, comprueba que las siguientes ternas son algunas de sus soluciones:

a) $(2, 1, 1)$; **b)** $(1, -2, 0)$; **c)** $(-5, 0, 2)$; **d)** $(4, 2, 1)$

2. Sistemas de ecuaciones lineales: notaciones

Un **sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas** es un conjunto formado por *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas se escribe de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A los números reales a_{ij} los llamamos coeficientes del sistema, a los b_i términos independientes y a las x_j incógnitas del sistema.

Se llama solución del sistema a las n-uplas $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ de números reales que sustituidos en las incógnitas de las ecuaciones del sistemas las convierten a todas en identidades numéricas verdaderas.

Discutir un sistema es determinar si tiene solución, soluciones o carece de ellas.

Resolver un sistema es encontrar su solución o soluciones.

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

Las matrices nos dan la posibilidad de expresar un sistema en forma matricial como se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

En esta igualdad matricial aparecen la **matriz de los coeficientes del sistema** que designamos por *A,* multiplicada por la matriz de las incógnitas *X*, y el resultado es la matriz de los términos independientes *B*, la igualdad anterior se simboliza así:

$$A \cdot X = B$$

Además de las matrices mencionadas en el estudio de las sistemas lineales utilizaremos la **matriz ampliada del sistema**, que resulta de agregar a la matriz de los coeficientes una última columna formada por los términos independientes; todas las matrices antes mencionadas formarán las matrices asociadas al sistema objeto de estudio.

$$\text{Matriz ampliada:} M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Las propiedades de las matrices asociadas al sistema nos permitirán conocer el sistema ante el que nos encontramos, como veremos a lo largo del desarrollo de esta Unidad.

Por último, los sistemas se pueden expresar en la llamada forma vectorial como combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes, para obtener la columna de los términos independientes así:

Ejemplos

3. Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+4z=5 \\ 5x+2y-3z=7 \end{cases}$, expresarlo en forma matricial y vectorial.

Solución :

Forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Forma vectorial: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}z=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. Dado el sistema $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, expresarlo mediante conjunto de ecuaciones lineales.

Solución :

Para expresarlo mediante ecuaciones, realizamos el producto de la matriz de los coeficientes por la matriz de las incógnitas, y a continuación identificamos la matriz producto con la matriz de los términos independientes.

$$\begin{pmatrix} x_1-2x_2+4x_3 \\ 3x_1+2x_2-x_3 \\ 4x_1+2x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-4 \\ 4x_1 \qquad +2x_3=6 \end{cases}$$

2.1. Sistemas equivalentes

Los sistemas $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$ tienen por solución única (2, 1); decimos que son equivalentes.

En general, **sistemas equivalentes** son aquellos que teniendo el mismo número de incógnitas (el número de ecuaciones puede ser distinto) tienen la misma solución.

Las siguientes transformaciones realizadas sobre un sistema dan lugar a sistemas equivalentes.

a) Cambiar el orden de las ecuaciones.

Ejemplo: los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ son equivalentes; ambos tienen por solución $x = 3$ e $y = 2$.

b) Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplo: los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} \lambda(2x-y)=\lambda 4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ con $\lambda \neq 0$ son equivalentes.

c) Sustituir una ecuación por la suma de ella con otras ecuaciones multiplicadas por números distintos de cero.

Ejemplo: los sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ (x+3y) + 3(2x-y) = 9 + 3\cdot 4 \end{cases}$ son equivalentes.

Se opera en la segunda ecuación del segundo sistema y se obtiene: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 7x \qquad = 21 \end{cases}$; que es un sistema más sencillo que el primero.

d) Suprimir una de las ecuaciones del sistema que sea combinación lineal de otras ecuaciones del sistema.

Ejemplo: los sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ son equivalentes. El segundo sistema resulta de suprimir la tercera ecuación del primero, que es suma de las otras dos.

2.2. Clasificación de los sistemas lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a los términos independientes se llaman:

- **Homogéneos**, cuando los términos independientes b_i son todos ceros.
- **No homogéneos**, si alguno de los términos independientes b_i son distintos de cero.

Según las soluciones los sistemas pueden ser:

- **Incompatibles**, si no tienen solución.
- **Compatibles**, si tienen solución.
  - **Determinados**, si únicamente tienen una solución.
  - **Indeterminados**, si tienen infinitas soluciones.

Actividades

3. Indica si el siguiente conjunto de valores $(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 2)$ son solución de alguno de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. Expresa en forma matricial y vectorial el sistema: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 3x - y \qquad = 7 \end{cases}$

5. Escribir en forma de conjunto de ecuaciones y en forma matricial el sistema: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Trasformar los sistemas siguientes en sistemas equivalentes con dos ecuaciones:

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 2x + 4y = 4 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -2x + 3y + z = 5 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$

3. Discusión y solución de sistemas por Gauss

El curso pasado vimos el **método de Gauss** basado en el método de reducción para tratar de resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método consiste en aplicar de forma adecuada las trasformaciones **a)**, **b)**, **c)** y **d)** a un sistema de partida, para obtener otro equivalente escalonado sencillo de clasificar y resolver si tiene solución.

Un **sistema escalonado de *m* ecuaciones con *n* incógnitas** tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los ejemplos siguientes aclararán los pasos a seguir para trasformar sistemas en sistemas escalonados equivalentes, a partir de los que estudiaremos y resolveremos en su caso los sistemas de partida.

Ejemplos

5. Trasformar el sistema $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$ en escalonado.

Solución:

Sustituimos la segunda ecuación por la suma de ella menos el doble de la primera y resulta el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ \quad 7y - 7z = -8 \end{cases}$$

6. Trasformar el sistema $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$ en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y, en su caso, resolverlo.

Solución:

Restamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por dos y restamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por cinco. Obtenemos así un sistema equivalente al dado.

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 & E_2 - 2E_1 \\ 5x - y + 3z = 16 & E_3 - 5E_1 \end{cases} \cong \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 \end{cases}$$

Sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por cuatro. Obtenemos de esta forma un sistema equivalente al de partida.

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 & E_3 + 4E_2 \end{cases} \cong \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$$

La tercera ecuación tiene solución y permite afirmar que el sistema es **compatible, determinado**.

$$z = \frac{45}{45} = 1; \quad -y + 8 = 6; \quad y = 2\ ; \quad x - 2 - 2 = -1; \quad x = 3.$$

La solución se expresa así: $(x, y, z) = (3, 2, 1)$

El nombre propuesto a las variables del sistema no es fundamental para su discusión y solución caso de tenerla; podemos prescindir del nombre de las variables del sistema y trabajar con su matriz ampliada. Sobre esta matriz se aplican de forma adecuada las transformaciones elementales estudiadas para matrices, hasta obtener una matriz escalonada que será la matriz ampliada del sistema escalonado equivalente al dado.

En el ejemplo anterior se parte de su matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$, para trabajar como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 5f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 + 4f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la matriz ampliada del sistema escalonado siguiente equivalente al de partida:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ \quad -y + 8z = 6 \\ \qquad 45z = 45 \end{cases}$$

Empezamos resolviendo la última ecuación, a continuación la penúltima, hasta llegar a la primera: z = 1.

Segunda ecuación: –y + 8 = 6, y = 2.

Primera ecuación: x – 2 – 2 = –1, x = 3.

Solución: (*x, y, z*) = (3, 2, 1), coincide con la calculada anteriormente.

Ejemplos

7. Transformar el sistema $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$ en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y, en su caso, resolverlo.

Solución:

Utilizando la notación matricial los pasos serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ \quad y - 7z = -2 \\ \qquad 0z = 0 \end{cases}$

Empezamos resolviendo la tercera ecuación, 0*z* = 0, cualquier valor de *z* cumple la ecuación, por lo que tiene infinitas soluciones, que serán las infinitas soluciones del sistema; se trata de un sistema **compatible, indeterminado**.

El sistema que resulta es: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ \quad y - 7z = -2 \end{cases}$

Se toma como parámetro $z = \lambda$ y se sustituye en la segunda ecuación: $y = -2 + 7\lambda$.

Se sustituyen los valores anteriores en la primera ecuación:

$x + 2 - 7\lambda + 3\lambda = 4$; $x = 4 - 2 + 7\lambda - 3\lambda$; $x = 2 + 4\lambda$.

La solución será: $(x, y, z) = (2 + 4\lambda, -2 + 7\lambda, \lambda)$

Se trata de un sistema compatible, indeterminado uniparamétrico.

8. Transformar el sistema $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 9 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y en su caso resolverlo.

Solución:

Utilizando la notación matricial los pasos serían:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 2f_1 \Rightarrow \\ f_3 - 4f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz ampliada asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 0z = -3 \end{cases}$

La tercera ecuación, $0z = -3$, no tiene solución; cualquier número multiplicado por cero es cero. Se trata de un sistema **incompatible**.

Discusión de un sistema por el método de Gauss.

Sea un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

a) Si al reducirlo a la forma escalonada aparece alguna ecuación del tipo $0x_n = b$ con $b \neq 0$, el **sistema es incompatible**, no tiene solución.

b) Si no sucede lo anterior el **sistema es compatible**, tiene solución.

Sea *r* el número de ecuaciones no triviales (eliminadas las de la forma $0x_i = 0$, si las hubiera) una vez escrito en forma escalonada.

- Si $r = n$ el sistema tiene solución única. **Sistema compatible, determinado**.
- Si $r < n$ el sistema tiene infinitas soluciones. **Sistema compatible, indeterminado**.

Ejemplo

9. Discutir y resolver en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$

Solución:

Se parte de la matriz ampliada del sistema y se opera para conseguir una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ f_3-2f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz ampliada asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ \quad -y-z=4 \\ \qquad -2z=0 \end{cases}$

La tercera ecuación tiene solución única, por lo tanto el sistema es **compatible, determinado**.

Tercera ecuación: $z = \frac{0}{2} = 0$.

Se sustituye en la segunda: $-y-0 = 4$, $y = -4$.

Se trabaja con la primera ecuación: $x + 2\cdot 4 + 0 = 3$, $x = -5$.

La solución es: $(x, y, z) = (-5, -4, 0)$

Sistemas homogéneos

Recuerda que un sistema es homogéneo si todos los términos independientes son cero.

Ejemplo: el sistema $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases}$ es homogéneo.

Los sistemas homogéneos tienen la particularidad de que todos son **compatibles**, al menos tienen la solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, llamada **solución impropia o trivial**.

Al discutir un sistema homogéneo por el método de Gauss, si en el sistema escalonado equivalente es r el número de ecuaciones no triviales, puede ocurrir:

- Que sea $r = n$, en este caso el sistema tiene solución única. **Sistema compatible, determinado**.
- O bien, que sea $r < n$, el sistema tiene infinitas soluciones. **Sistema compatible, indeterminado**.

Ejemplo

10. Transformar el sistema homogéneo $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ -x+5y-3z=0 \end{cases}$ en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y, en su caso, resolverlo.

Solución:

Se parte de matriz asociada al sistema y se opera para conseguir una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \\ f_3+f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz ampliada asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x + \quad y - \quad z = 0 \\ \qquad -6y + 4z = 0 \\ \qquad\qquad 0z = 0 \end{cases}$

Como el número de ecuaciones no triviales es dos, menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible**, **indeterminado**.

De la segunda ecuación , para evitar que las soluciones se expresen como fracciones expresamos *z* como producto de 3 por el parámetro λ, esto es, $z = 3\lambda$; $x + 2\lambda - 3v = 0$ $x = \lambda$.

La solución del sistema es: $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$

Actividades

7. Indicar de que tipo es cada uno de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ -4x + 8y + 2z = 6 \\ -7x + 8y + 3z = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 8 \\ x + y - 2z = 4 \\ 4x - 2y - 9z = 16 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x - 6y + 8z = 3 \\ 4x - y + 2z = 15 \\ 5x - 7y + 10z = 8 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$

8. Estudiar y resolver en su caso los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x \quad - y = 1 \\ -y \quad - z = -1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -x + y - 4z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 4x - 6y + 2z = 10 \end{cases}$

9. Estudiar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 2x - y \qquad = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ -3z + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

4. Resolución de algunos sistemas

Sea el sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matriz de los coeficientes de estos sistemas es cuadrada; si su determinante es distinto de cero (matriz regular), los sistemas son compatibles y determinados como veremos en el subapartado siguiente. Su solución la calcularemos por el **método de la matriz inversa** y por la **regla de Cramer**.

4.1. Método de la matriz inversa

La expresión resumida del sistema anterior es la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Si la matriz A es regular tiene inversa única, el sistema es compatible, determinado y la solución del sistema es:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Ejemplo

11. Resolver el sistema de ecuaciones, $\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = -5 \\ 2x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$ mediante el método de la matriz inversa.

Solución:

Sistema en forma matricial: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Comprobamos que la matriz de los coeficientes A tiene inversa, para lo que calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

El determinante de la matriz A es distinto de cero, calculamos su matriz inversa para despejar X en la expresión $A \cdot X = B$; $X = A^{-1} \cdot B$.

Para hallar la matriz inversa de la matriz *A* calculamos la matriz adjunta:

$$adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0\\ 1 & 10 & 6\\ -3 & -15 & -3\end{pmatrix}$$

Matriz inversa: $A^{-1}=\dfrac{1}{15}(adj(A))^t=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3\\ 5 & 10 & -15\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix}$

Sustituimos estos valores en la expresión $X = A^{-1}\cdot B$ desarrollada.

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3\\ 5 & 10 & -15\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ -5\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 30\\ 45\\ -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$$

La solución del sistema será: $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$.

4.2. Regla de Cramer

Dado el sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas $A\cdot X = B$ con las condiciones impuestas a la matriz *A* en el apartado anterior, la solución del sistema es:

$$X = A^{-1}\cdot B$$

Si tenemos en cuenta que el cálculo de la matriz inversa por determinantes es $A^{-1}=\dfrac{(adj(A))^t}{|A|}$, sustituimos este valor en la expresión anterior y queda:

$$\boxed{X=\frac{(adj(A))^t}{|A|}B}$$

Desarrollamos para el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y sin pérdida de generalidad queda:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3\\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3\end{pmatrix}$$

Se igualan los elementos de las matrices

$$x_1=\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}}{|A|}\ ;\ x_2=\frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}}{|A|}\ ;\ x_3=\frac{b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}}{|A|}$$

Se observa que el denominador de todas la incógnitas es el determinante de la matriz de los coeficientes, *A*. El numerador de cada incógnita es la suma de los productos de los términos independientes del sistema multiplicados por los adjuntos de las columnas primera, segunda y tercera respectivamente de la matriz *A*, por lo que el valor de las incógnitas se pueden simbolizar mediante los cocientes de los determinantes siguientes:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \ ; \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Las expresiones anteriores se conocen con el nombre de **regla de Cramer**, y dicen:

El valor de cada incógnita de un sistema de igual número *n* ecuaciones con *n* incógnitas, y matriz de los coeficientes *A* regular, es el cociente de dos determinantes, el numerador es el determinante que corresponde a la matriz que resulta de sustituir en la matriz *A* la columna de los coeficientes de la incógnita despejada por los términos independientes, y el denominador es el determinante de *A*. A estos sistemas se les llama sistemas de Cramer.

Ejemplo

12. Comprobar que el sistema siguiente es de Cramer y en caso afirmativo resolverlo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas; veamos el valor del determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 1 + 3 - 8 = -1 \neq 0$$, es distinto de cero. El sistema propuesto es de Cramer.

Resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1 \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

La solución es: (*x*, *y*, *z*) = (3, – 1, 0)

Actividades

10. Estudiar y resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-3y=-17 \\ 3x+4y=37 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 24x-15y=5 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y \quad\quad =0 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y \quad\quad = 1 \\ -y+z=-1 \end{cases}$.

11. Resolver los sistemas de Cramer siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+3z=14 \\ 7x+4y+6z=34 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y+2z=5 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3x+y+3z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x+y-z=9 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 3x+y+2z=-2 \\ 2x+y+3z=3 \\ x+3y+2z=-2 \end{cases}$.

12. Tres trabajadores Antonio, Bernardo y Carlos, para terminar un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y Km. de desplazamiento fijadas por cada uno de ellos.

	HORAS DE TRABAJO	DIETAS	KILÓMETROS
Antonio	40	10	150
Bernardo	60	15	250
Carlos	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores la misma retribución: *x* euros por hora trabajada, *y* euros por cada dieta y *z* euros por Km. de desplazamiento; y que paga ese mes un total de 924 euros a Antonio, 1390 euros a Bernardo y 646 euros a Carlos, calcular *x, y*, z.

5. Discusión de sistemas: teorema de Rouché-Frobenius

Sea el sistema $A \cdot X = B$ de *m* ecuaciones y *n* incógnitas, donde *A* es la matriz de los coeficientes y *M* la matriz ampliada con los términos independientes.

Teorema de Rouché-Frobenius: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes, *A*, coincida con el rango de la matriz ampliada, *M*.

Demostración:

Expresemos las matrices, *A* de los coeficientes y *M*, ampliada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \quad A \quad \longrightarrow \qquad\quad \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right. \left.\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{array}\right) \\ \longleftarrow \quad M \qquad\qquad \longrightarrow \end{array}$$

Veamos que si el sistema tiene solución entonces rango(A) = rango(M).

Escribimos el sistema en forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Como el sistema tiene solución, existen n números reales s_1, s_2, …, s_n que cumplen la igualdad anterior, por tanto la columna de los términos independientes de la matriz M es combinación lineal de sus n primeras columnas, para el cálculo de su rango se suprime y queda la matriz A, esto es:

rango(A) = rango(M).

Veamos el recíproco: si rango(A) = rango(M) = r con $r \leq n$ y $r \leq m$, esto significa que existe un menor de orden r distinto de cero; suponemos sin pérdida de generalidad que es el formado por las r primeras filas y las r primera columnas. En este supuesto las $m - r$ últimas ecuaciones son combinación lineal de las r primeras y el sistema de partida será equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots. \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + \dots. + a_{rn}x_r = b_r \end{cases}$$

A las r primeras incógnitas las llamaremos **incógnitas principales** y a las $m - r$ últimas **incógnitas secundarias o parámetros**, las trasladamos a los segundos miembros de las ecuaciones y queda:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots \quad . \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots. \quad \dots \quad \dots. \quad \dots. \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots. - a_{rn}x_r + b_r \end{cases}$$

Este sistema tiene r ecuaciones y r incógnitas principales x_1, x_2, … x_r, admite solución única para cada valor numérico que asignemos a los parámetros x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n, puesto que el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas principales es distinto de cero. Dicho de otra forma, estamos ante un sistema de Cramer de r ecuaciones para cada valor que fijemos a los parámetros.

El teorema anterior permite discutir un sistema por el método de los rangos como sigue:

a) Un sistema lineal es **compatible** si rango(A) = rango(M) = r, se pueden presentar dos situaciones.

- Si $r = n$, todas las incógnitas son principales y el sistema es **compatible**, **determinado**.
- Si $r < n$, entonces $n - r$ incógnitas se convierten en parámetros y el sistema es **compatible**, **indeterminado**.

b) Un sistema lineal es **incompatible** si rango(A) $\neq$ rango(M).

Ejemplo

13. Discutir y si es posible resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \\ 2x - 2y \quad = 6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 8 \\ x + 7y - 8z = 1 \\ 5x - 3y - 2z = 17 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = 5 \\ -x + 3y + z = 8 \\ x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$.

Solución:

a) Formamos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \; A \; \longrightarrow \qquad \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right) \\ \longleftarrow \; M \; \longrightarrow \end{array}$$

Calculamos los rangos de las matrices A y M.

La matriz ampliada M es orden cuatro, su rango es menor o igual a cuatro, calculemos su determinante para ver si rango es cuatro.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada, M, es menor que cuatro, por tanto menor o igual a tres.

Formamos menores de orden dos.

El menor de orden dos de las dos matrices: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

El rango de las dos matrices es mayor o igual a dos.

Formemos menores de orden tres de las dos matrices: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de las dos matrices es tres, coincide con el número de incognitas. El sistema es **compatible**, **determinado**.

Elegimos como ecuaciones principales las tres primeras que forman las filas del menor de orden tres distinto de cero.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Aplicamos la regla de Cramer al sistema anterior:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 8 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ -.1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2}{2}=1\,;\;\; y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 8 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-4}{2}=-2\,;\;\; z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{6}{2}=3.$$

La solución es: $(x, y, z) = (1, -2, 3)$

b) Formamos la matriz de los coeficientes y la ampliada.

$$\begin{array}{c} \leftarrow \; A \; \rightarrow \\ \left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & -5 & 3\\ 1 & 7 & -8\\ 5 & -3 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{c} 8\\ 1\\ 17\end{array}\right) \\ \leftarrow \; M \; \rightarrow \end{array}$$

El máximo rango de las dos matrices es tres; calculamos sus rangos.

Comenzando por el de la matriz A.

Menor de orden dos de la matriz A: $\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 7\end{vmatrix}=19\neq 0\Rightarrow rango(A)\geq 2.$

Menor de orden tres de la matriz A: $\begin{vmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 7 & -8\\ 5 & -3 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow rango(A)=2.$

Estudio de la matriz ampliada M.

Su rango es mayor o igual a dos, el menor de orden dos anterior es también de la matriz M.

Menor de orden tres de la matriz M: $\begin{vmatrix}2 & -5 & 8\\ 1 & 7 & 1\\ 5 & -3 & 17\end{vmatrix}=0\Rightarrow rango(M)=2.$

Se cumple rango(A) = rango(M) = 2 < 3, sistema **compatible**, **indeterminado**.

Elegimos como ecuaciones principales las dos primeras que forman las filas del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{cases}2x-5y+3z=8\\ x+7y-8z=1\end{cases}$$

Las incógnitas principales serán x e y cuyos coeficientes forman las columnas del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{cases}2x-5y=8-3z\\ x+7y=1+8z\end{cases}$$

Aplicamos la regla de Cramer al sistema anterior:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8-3z & -5\\ 1+8z & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 7\end{vmatrix}}=\frac{61+19z}{19}=\frac{61}{19}+z\ ,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 8-3z\\ 1 & 1+8z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 7\end{vmatrix}}=-\frac{6}{19}+z.$$

Si hacemos z = λ, la solución se expresa así: $(x, y, z)=\left(\frac{61}{19}+\lambda, -\frac{6}{19}+\lambda, \lambda\right)$

c) Formamos la matriz de los coeficientes y la ampliada.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 7 & 5\\ -1 & 3 & 1 & 8\\ 1 & 4 & 9 & 1\end{array}\right)}^{A}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{M}$$

El máximo rango de las dos matrices es tres, calculamos sus rangos.

Comenzando por el de la matriz *A*.

Menor de orden dos de la matriz *A*: $\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0\Rightarrow rango(A)\geq 2.$

Menor de orden tres de la matriz *A*: $\begin{vmatrix}3 & -2 & 7\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang(A)=2.$

Estudio de la matriz ampliada *M*.

Su rango es mayor o igual a dos, el menor de orden dos anterior es también de la matriz *M*.

Menor de orden tres de la matriz *M*: $\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=-42\neq 0\Rightarrow rango(M)=3\neq 2=rango(A).$

Es un sistema **incompatible**.

5.1. Sistemas homogéneos

Recuerda que en un sistema homogéneo todos los términos independientes son cero.

Estos sistemas son siempre compatibles, puesto que para determinar el rango de la matriz ampliada, *M*, se suprime la columna de ceros de los términos independientes y queda la matriz de los coeficientes, *A*; por tanto, siempre rango (*A*) = rango (*M*). Se pueden presentar do casos:

- El rango de las matrices *A* y *M* es igual a *n* número de incógnitas; el **sistema es compatible**, **determinado**; admite como solución única la trivial (0, 0, …, 0)
- El rango de las dos matrices *A* y *M* es menor que el número de incógnitas; el **sistema es compatible**, **indeterminado**; tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

14. Discutir y resolver en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + 2y - 3z + 2t = 0 \end{cases}$

Solución:

El sistema es homogéneo; calculamos el rango de la matriz de los coeficientes, puesto que su rango coincide con el de la ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

El orden de *A* es 2 x 4, el rango (A) ≤ 2.

El menor de orden dos de *A*, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2$, sistema **compatible, determinado, biparamétrico**.

Las incógnitas principales serán *x* e *y*, sus coeficientes forman las columnas del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{cases} x - y = -z - t \\ -x + 2y = 3z - 2t \end{cases}$$

Resolvemos por reducción, sumamos las dos ecuaciones $y = 2z - 3t$ y sustituimos en la primera,

$x - 2z + 3t = -z - t$; $x = z - 4t$.

Si hacemos $z = \lambda$ y $t = \mu$, la solución se expresa así: $(x, y, z, t) = (\lambda - 4\mu, 2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu)$

5.2. Sistemas con parámetros

Si en un sistema algunos coeficientes de las incógnitas o términos independientes se expresan mediante variables, estamos ante un **sistema con parámetros**. Como los parámetros pueden tomar valores reales cualesquiera nos encontramos en realidad ante el estudio de infinitos sistemas.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k - 1 \end{cases}$$

Observamos que tiene un parámetro, *k;* para cada valor que se asigne a *k* se obtiene un sistema distinto. En estos casos se trata de estudiar la compatibilidad o no de cada uno de los sistemas que se obtienen al sustituir el parámetro por un valor numérico.

Ejemplos

15. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de k y resolverlo cuando sea posible. $\begin{cases} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k-1 \end{cases}$

Solución:

Formamos las matrices de los coeficientes y la ampliada: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$

Calculemos los valores del parámetro k que anulan el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k-1=0 \Rightarrow k=1.$$

Primer caso: $k \neq 1 \Rightarrow rang(A)=rango(M)=3.$

Sistema **compatible**, **determinado.**

Aplicamos la regla de Cramer y se obtiene la solución en función del parámetro k.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{k^3-3k^2+3}{k-1}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=k^2-k-2=(k+1)(k-2), \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k-1 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{k-2}{k-1}.$$

La solución se expresa así: $(x,y,z)=\left(-\dfrac{k^3-3k^2+3}{k-1}, \quad (k+1)(k-2), \quad -\dfrac{k-2}{k-1}\right)$

Segundo caso: Para k = 1, formamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\quad z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

La primera y tercera ecuación no se pueden cumplir simultáneamente para ningún valor de las variables. El sistema es **incompatible**.

Podemos aplicar reducción: restar a la primera ecuación la tercera, y resuelta da 0 = 1; como la igualdad es falsa, llegamos a la conclusión anterior.

16. Discutir según los valores de a, el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

Solución:

Formamos las matrices de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores del parámetro *a* que anulan el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a+2=0$$

Aplicando la regla de Ruffini, obtenemos que $a = -1$ (raíz doble) y $a = -2$

Primer caso: .$a \neq 1$ *y* $a \neq -2 \Rightarrow rango(A)=rango(M)=3$.

Sistema **compatible**, **determinado**.

Aplicamos la regla de Cramer para obtener la solución en función del parámetro *a*.

$$x=\frac{1}{a+2},\quad y=\frac{1}{a+2},\quad z=\frac{1}{a+2}$$

Segundo caso: Para $a = 1$, formamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Las tres ecuaciones son iguales, por tanto el sistema queda reducido a la ecuación, $x+y+z=1 \Rightarrow rang(A)=rango(M)=1$; sistema **compatible**, **indeterminado, biparamétrico**.

Hacemos $y = \lambda$ y $z = \mu$, para expresar la solución: $(x, y, z) = (1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$

Tercer caso: Para $a = -2$, formamos el sistema: $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$

Formamos las matrices de los coeficientes y la ampliada: $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz *A*.

Menor de orden dos de la matriz *A*: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow rango(A)=2.$

Calculemos el rango de la matriz *M*.

Su rango es mayor o igual a dos, el menor de orden dos anterior es también de la matriz *M* y lo orlamos con la última columna.

Menor de orden tres de *M*: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0 \Rightarrow rango(M)=3\neq 2=rango(A).$

Se trata de un sistema **incompatible**.

17. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema, $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (a+2)x-12y+12z=\mathbf{0} \end{cases}$

Solución :

Formamos las matrices de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ a+2 & -12 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema homogéneo, es compatible para todo valor del parámetro *a*.

Calculemos los valores del parámetro *a* que anulan el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema.

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{vmatrix}=76(a-10)=0 \Rightarrow a=10.$$

Primer caso : Para $a \neq 10 \implies$ rango(A) = rango (M) = 3, por tanto sistema **compatible**, **determinado** de solución única la trivial, $(x,\ y,\ z)$ = (0, 0, 0)

Segundo caso : Para a =10, formamos el sistema: $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ 12x-12y+12z=0 \end{cases}$

Le discutimos por Gauss: Partimos de la matriz que resulta al dividir la primera ecuación por 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ 12 & -12 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_2 \\ f_3-12f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \div (-19) \\ f_3 \div (-48) + f_2 \div (19) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es **compatible**, **indeterminado**.

Sistema equivalente escalonado: $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ \quad\ y \qquad = 0 \end{cases}$

Para expresar las soluciones hacemos z = λ y queda: $(x,\ y,\ z)=(-\lambda,\ 0,\ \lambda)$.

18. Hallar para qué valores de a y b tiene más de una solución el sistema: $\begin{cases} ax-y+z=1 \\ x+by \quad =1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$; calcular las soluciones.

Solución :

Cambiamos entre sí las ecuaciones segunda y tercera: $\begin{cases} ax-y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+by \quad =1 \end{cases}$

Formamos las matrices de los coeficientes y la matriz ampliada. $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El rango de A es al menos 2 para valores cualesquiera de los parámetros, puesto que el menor: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Todos los menores de orden tres deben ser cero para que el rango de las matrices sea dos y el sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - b - 1 = 0 \Rightarrow b = -2 \text{ y } \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Para a = 2 y b = – 2, rango(A) = rango (M) = 2 < 3 número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

Para $a = 2$ y $b = -2$ el sistema es: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2y \quad = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Resolvemos por reducción:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2y \quad = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} E_1 \leftrightarrow E_3 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y \quad = 1 & E_2 - E_1 \\ 2x - y + z = 1 & E_3 - 2E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 1 \\ -3y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 1 \end{cases}$$

Tomamos $y = \lambda$ como parámetro para que en las soluciones los coeficientes del parámetro sean números enteros.

De la segunda ecuación: $z = -1 - 3\lambda$.

De la primera ecuación: $x + \lambda - 1 - 3\lambda = 0$, $x = 1 + 2\lambda$.

Solución: $(x,\ y,\ z) = (1 + 2\lambda,\ \lambda,\ 1 - 3\lambda)$

Actividades

13. Discutir y si es posible resolver los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ x - 3y + 2z = 6 \\ x - y + 4z = 2 \\ x - 4y + 2z = 8 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 4z = -3 \\ x + 4y - 6z = -8 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x + 3y \quad + t = 0 \\ 3x + y + z \quad = 0 \\ x - 3y + 2z \quad = 0 \\ -2x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$

14. Considérense los sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} ax + ay = 6 \\ x + (a - 1)y = 3 \end{cases}$

I) Discútanse por el método de Gauss, según los valores de a.

II) Resuélvanse el sistema para a = 2.

15. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a el sistema: $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$

16. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + \ \ y + 4z \ = 1 \\ -x + ay \ - 2z \ = 1 \\ \qquad y + \ \ z = a \end{cases}$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro a.

b) Resolverlo para los valores de a que tenga solución.

17. Dados los sistemas dependientes del parámetro a: **a)** $\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -\ \ y + \ \ z = 0 \\ ax \quad + \ \ z = a \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ \qquad y \quad - z = \ 0 \\ ax \qquad + 2z = 2 \end{cases}$

I) Discútanse dichos sistemas en función de los valores de a.

II) Encuéntrense todas sus soluciones.

18. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x + y - \ \ z = 2 \\ \ x + \ \ y + 2z = 5 \\ -x + (m+2)z = 3 \end{cases}$$

Discutir y resolver el sistema para los distintos valores de m.

19. Discutir y resolver, según los distintos valores de los parámetros λ y μ, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ \quad y - z = -1 \\ 2x - y + \lambda z = \mu \end{cases}$$

6. Problemas que se resuelven planteando sistemas de ecuaciones lineales

El lenguaje algebraico es, como sabemos, una potente herramienta para **resolver problemas**. En este apartado trataremos la resolución de problemas que precisan de los sistemas lineales estudiados en esta Unidad.

Recuerda que para resolver un problema mediante álgebra se deben seguir los pasos siguientes.

- **Lectura comprensiva del problema:** Requiere hacerse cargo de la situación que el problema plantea mediante lectura comprensiva.
- **Elección de incógnitas**: Una de las cuestiones que deben quedar claras de la lectura son los valores que el problema nos solicita; dichos valores serán las incógnitas del problema. Elegir el mínimo número de incógnitas, teniendo en cuenta que algunos de los valores solicitados suelen tener relaciones sencillas.
- **Planteo:** Consiste en traducir el enunciado escrito en un sistema de ecuaciones. Para ello se tendrán en cuenta las relaciones entre las incógnitas elegidas que el enunciado del problema nos indica.
- **Resolución:** Paso en el que se resuelve el sistema planteado.
- **Discusión:** Se comprueba que la solución obtenida al resolver el sistema cumple las ecuaciones del mismo, y que son válidas para las condiciones impuestas en el enunciado.

Ejemplos

19. Una multinacional de seguros tiene delegaciones en Madrid, Barcelona y Valencia. El número total de altos ejecutivos entre las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de altos ejecutivos de la delegación de Barcelona fuese igual al de Madrid, tendrían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Además, el número de los de Madrid excede en uno a la suma de los destinados en las otras dos ciudades. ¿Cuántos altos ejecutivos están destinados en cada ciudad?

Solución:

Sean *x, y, z* los altos ejecutivos de Madrid, Barcelona y Valencia.

Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=31 \\ x-y \quad\quad =6 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Formamos la matriz ampliada del sistema para resolver por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

El sistema triangular asociado a la matriz será: $\begin{cases} x+y+z=31 \\ -2y-z=-25 \\ -z=-5 \end{cases}$

Solución: $z = 5$; $-2y - 5 = -25$, $-2y = -20$, $y = 10$; $x + 10 + 5 = 31$; $x = 16$.

Los ejecutivos de la multinacional se encuentran: 16 en Madrid, 10 en Barcelona y 5 en Valencia.

20. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros. Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

Sean *x, y, z* los precios de los productos A, B y C antes de la oferta.

Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 0{,}96x+0{,}94\cdot 2y+0{,}95\cdot 3z=(135+y+2z)-16 \\ 0{,}92\cdot 3x+0{,}90y+0{,}94\cdot 5z=(135+2x+4z)-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=135 \\ 0{,}96x+0{,}88y+0{,}85z=119 \\ 0{,}76x+0{,}90y+0{,}70z=106 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=135 \\ 96x+88y+85z=11900 \\ 76x+90y+70z=10600 \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer.

Determinante de la matriz de los coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 96 & 88 & 85 \\ 76 & 90 & 70 \end{vmatrix} = 202$.

Valores de las variables: $x=\dfrac{5050}{202}=25,\quad y=\dfrac{10100}{202},\quad z=\dfrac{12120}{202}=60$.

Los precios iniciales serán: A = 25 euros, B = 50 euros y C = 60 euros.

21. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264.000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución:

Sean *x, y, z,* respectivamente los euros, dólares y libras esterlinas el dinero que la empresa desea disponer.

$$\begin{cases} x+1{,}1y+1{,}5z=264000 \\ x=2(1{,}1y) \\ \dfrac{x}{10}=1{,}5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+11y+15z=2640000 \\ 10x-22y=0 \\ x-15z=0 \end{cases}$$

Resolvemos por reducción, sustituir la primera ecuación por la que resulta de sumar con la tercera:

$$\begin{cases} 11x+11y=2640000 \\ 10x-22y=0 \end{cases}$$

Sumar la primera ecuación multiplicada por dos y la segunda, $32x = 5280000$,

$$x=\frac{5280000}{32}=165000,\quad y=\frac{10x}{22}=\frac{1650000}{22}=75000,\quad z=\frac{x}{15}=\frac{165000}{15}=11000.$$

La empresa dispone de 165000 euros, 75000 dólares y 11000 libras esterlinas.

Actividades

20. Encontrar tres números *A*, *B* y *C*, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

21. La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. Calcula dicho número.

22. Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad α de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de α) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

23. Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.

24. Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2 kilómetros y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres, fue de 45 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió cada uno?

25. Juana y Mercedes tenían 2000 € cada una para invertir. Cada una de ellas distribuye su dinero de la misma forma en tres partes *P*, *Q* y *R* y las ingresan en una entidad financiera. Al cabo de un año, a Juana le han dado un 4% de interés por la parte *P*, un 5% por la parte *Q* y un 4% por la parte *R* y a Mercedes le han dado un 5% por la parte *P*, un 6% por la parte *Q* y un 4% por la parte *R*. Juana ha recibido en total 85 € de intereses, mientras que Mercedes ha recibido 95 €. ¿De qué cantidad de euros constaba cada una de las partes *P*, *Q* y *R*?

26. Tres hermanos tienen edades diferentes, pero sabemos que la suma de las edades de los 3 hermanos es de 37 años, y la suma de la edad del mayor más el doble de la edad del mediano más el triple de la edad del menor es de 69 años.

a) Expresa las edades de los tres hermanos en función de la edad del hermano menor.

b) ¿Es posible que el hermano menor tenga 5 años? ¿y 12 años? Razona la respuesta.

c) Calcula las edades de los tres hermanos.

27. Una fábrica de helados elabora tres tipos de helados, H_1, H_2 y H_3, a partir de tres ingredientes A, B y C. Se desea saber el precio unitario de cada ingrediente sabiendo que el helado H_1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidad de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0.9 euros. El helado H_2 se elabora con 1 unidad de A, 2 unidades de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0.8 euros. El helado H_3 se compone de 1 unidad de A, 1 unidad de B y 2 unidades de C y supone un coste de 0.7 euros.

28. En una casa rural tienen 10 aves entre gallinas, patos y pavos. Entre todas incuban 39 huevos. Sabiendo que las gallinas incuban 7 huevos cada una, los patos 5 y los pavos 2, ¿cuántas aves de cada clase tienen en la granja?

7. Sistemas matriciales

A los sistemas en los que las variables son matrices se los llama **sistemas de ecuaciones matriciales**. Estos sistemas se resuelven por los mismos métodos que los sistemas con coeficientes y variables reales, puesto que para resolverlos aplicamos las operaciones siguientes:

- Suma de ecuaciones para eliminar sumandos.
- Producto de una ecuación por un número para igualar coeficientes.

Estas operaciones son las mismas que las utilizadas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. A continuación resolvemos un sistema de ecuaciones matriciales.

Ejemplo

22. Calcular las matrices X e Y soluciones del sistema matricial: $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución :

Se suman las dos ecuaciones y se despeja la matriz X: $3X=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Se sustituye X en la primera ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Se despeja Y: $Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Actividades

29. Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X+Y=3A \\ 3X+2Y=2B \end{cases}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

30. Calcula la matriz $X+Y$, donde X e Y son las soluciones del sistema $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 4X+Y=B \end{cases}$, A y B son las matrices del apartado anterior.

31. Halla las matrices X e Y que satisfacen el sistema matricial $\begin{cases} 5X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 3X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$. Calcula si son posibles las matrices inversas de X e Y.

32. Resuelve el sistema $\begin{cases} X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$ y calcula la matriz $X-2Y$.

Recuerda

✓ **Sistemas lineales**

Es el conjunto formado por m ecuaciones lineales con n incógnitas.

✓ **Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales**.

Si A es la matriz de los coeficientes, X, la matriz de las incógnitas, y B es la matriz de los términos independientes, el sistema en forma matricial es $A \cdot X = B$.

✓ **Expresión vectorial de un sistema**

Los sistemas se pueden expresar en la llamada forma vectorial como combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes, para obtener la columna de los términos independientes así: $(a_{i1})x_1 + (a_{i2})x_2 + \ldots + (a_{in})x_n = b_i$, con $i = 1, 2 \ldots m$.

✓ **Sistemas equivalentes**

Son aquellos sistemas que teniendo el mismo número de incógnitas (el número de ecuaciones puede ser distinto) tienen la misma solución.

✓ **Clasificación de los sistemas lineales**

Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a los términos independientes pueden ser:

Homogéneos, cuando los términos independientes b_i son todos ceros, y *no homogéneos,* si algunos de los términos independientes b_i son distintos de cero.

Según las soluciones los sistemas pueden ser: *Incompatibles*, si no tienen solución, y *compatibles*, si tienen solución; estos a su vez los llamamos *determinados*, si únicamente tienen una solución, e *indeterminados*, si tienen infinitas soluciones.

✓ **Discusión de un sistema por el método de Gauss**

Si al reducir un sistema a forma escalonada aparece alguna ecuación del tipo $0x_n = b$ con $b \neq 0$, el sistema es *incompatible*. Si no sucede lo anterior, el sistema es *compatible*. Si siendo compatible el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, el sistema es *determinado*. Si siendo compatible el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas el sistema es *indeterminado*.

✓ **Resolución de algunos sistemas**

Los sistemas $A \cdot X = B$ con número de ecuaciones igual al de incógnitas que tienen la matriz de los coeficientes regular se resuelven mediante el método de la matriz inversa por la fórmula $X = A^{-1} \cdot B$ o mediante la regla de Cramer aplicando la fórmula: $x_i = \dfrac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}}{|A|}$

✓ **Teorema de Rouché-Frobenius**

Nos facilita la discusión de sistemas lineales mediante el estudio del rango de las matrices, A, de los coeficiente y, M, matriz ampliada; si el rango de ambas matrices coincide, el sistema es *compatible* rango (A) = Rango (M) = $r \leq n$; en caso contrario el sistema es *incompatible*. Si el sistema es compatible y $r = n$, el sistema tiene solución única o *determinado*; si $r < n$ el sistema tiene infinitas soluciones o *indeterminado*.

✓ **Sistemas homogéneos**

Los sistemas homogéneos son siempre *compatibles*. Si el rango $r = n$ el sistema tiene como solución la trivial (0, 0, ..., 0) y si $r < n$ el sistema tiene infinitas soluciones.

✓ **Sistemas con parámetros**

Si en un sistema algunos de los coeficientes de las incógnitas o términos independientes se expresan mediante variables, estamos ante un *sistema con parámetros.* En estos sistemas tratamos de estudiar la compatibilidad o no de cada uno de los sistemas que se obtienen al sustituir los parámetros por valores numéricos.