2 Determinantes

El número que asociaremos a cada matriz cuadrada A y que llamaremos su determinante det(A), aparece en los libros actuales a continuación de las matrices, aunque históricamente surge antes que ellas. Los primeros en utilizar determinantes como algoritmos para resolver sistemas lineales fueron, entre otros, los matemáticos Leibniz (1646 -1716) y Vandermonde (1735 -1796).

• *Gotfriel – Wilhelm Leibniz* (Wikipedia.org. Dominio público)

La formulación actual de los determinantes se debe al francés Cauchy (1789-1857) quien, en una memoria publicada en 1812, estableció la terminología de los determinantes tal como la utilizamos en la actualidad.

En esta Unidad veremos la importancia de los valores de los determinantes de las matrices cuadradas; si el determinante asociado a una matriz es nulo, las filas y columnas de la matriz son linealmente dependientes, por lo que la matriz no tendrá inversa. Por el contrario, si el determinante es distinto de cero, las filas de la matriz serán linealmente independientes y la matriz tendrá inversa, que calcularemos usando otra vez determinantes.

En el caso de matrices rectangulares, los determinantes de las matrices cuadradas que se pueden formar al suprimir filas o columnas en la matriz dada nos informarán del número de filas y columnas linealmente independientes de la matriz rectangular; este número será su rango. El método de Gauss proporciona el rango de una matriz, sin más que contar las filas o columnas no nulas de la matriz reducida de la dada. Finalmente, la combinación de los dos métodos facilitará el cálculo del rango de una matriz, que es fundamental para el estudio de los sistemas lineales.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

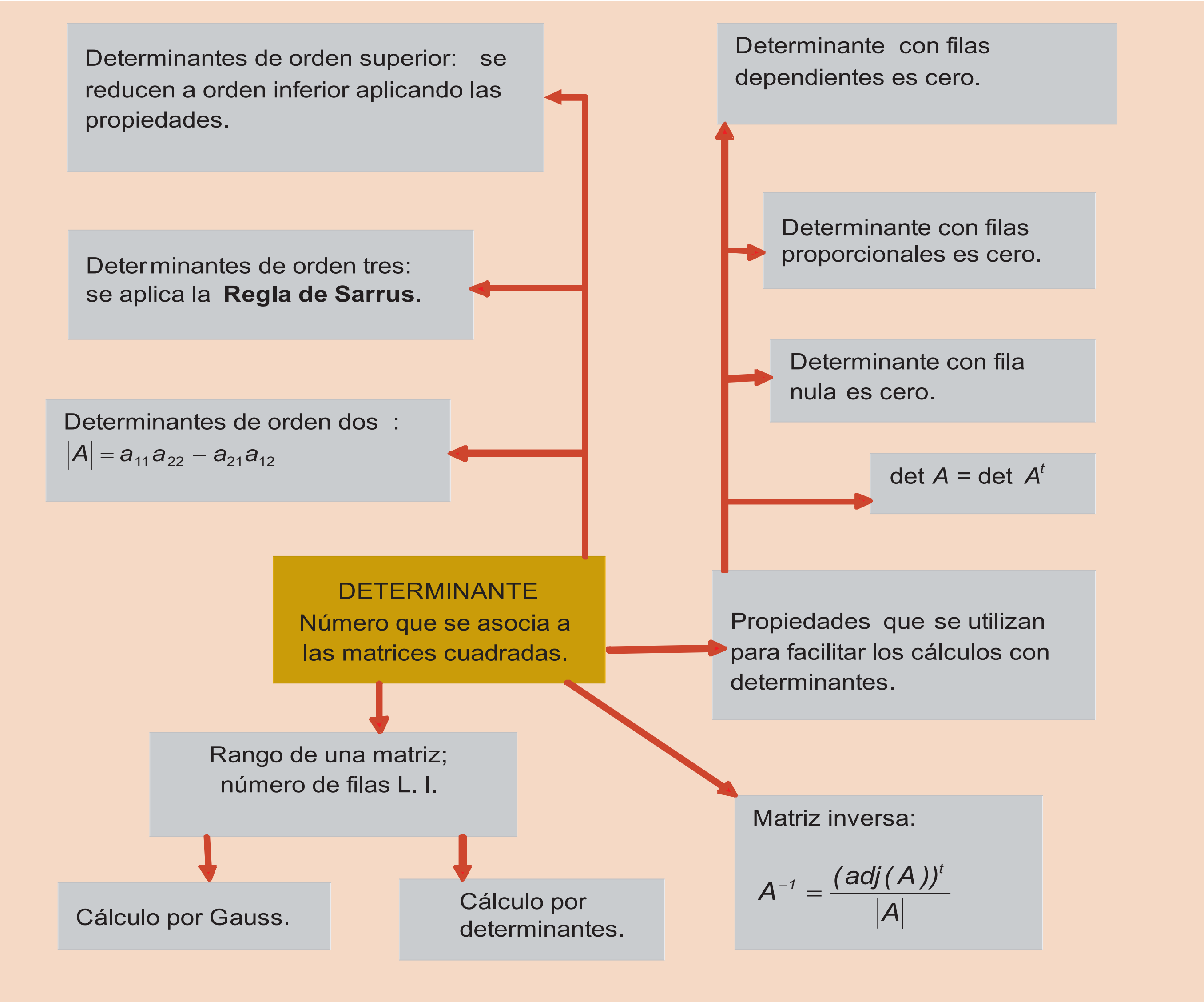
1. Encontrar el valor de determinantes de orden dos.

2. Calcular, sin dificultad, determinantes de tercer orden, tanto si se realiza mediante el desarrollo por los elementos de una línea, como si es por la regla de Sarrus.

3. Conocer las propiedades de los determinantes de orden tres.

4. Determinar el rango de una matriz.

5. Caracterizar las matrices cuadradas regulares y calcular su inversa.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Determinantes de orden dos

A cada matriz cuadrada de orden dos $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ le asociamos un número real, llamado **determinante de orden dos**, de la forma siguiente:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El **determinante de una matriz cuadrada de orden dos** es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Al determinante de la matriz A lo simbolizaremos por $det\,(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Dado que una matriz está definida bien por sus vectores fila, bien por sus vectores columna, el determinante dependerá de sus filas o de sus columnas. Por este motivo, con frecuencia escribimos:

$|A|$ = det (A) = det (f_1, f_2) ó, $|A|$ = det (A) = det (c_1, c_2), donde f_1, f_2 y c_1, c_2 indican las filas y columnas de la matriz A.

Nota: Observa que el número de sumandos de un determinante de orden dos que es dos, coincide con el valor de 2! = 1·2.

Ejemplo

1. Calcula el determinante de cada una de las matrices siguientes, observa cada matriz, el valor de su determinante y enuncia la propiedad que dicta la intuición:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **d)** $N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución :

a) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-1)\cdot 3=11.$

Cuando los números que forman la matriz son enteros, el determinante también es un número entero.

b) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot(-1)=11.$

La matriz B es la matriz traspuesta de A, se representa por $A^t=B$.

El determinante de una matriz es el mismo que el de su traspuesta; det(A) = det(A^t) .

c) $|I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=1-0=1.$

La matriz I es la matriz unidad. El determinante de la matriz unidad es uno.

d) $|N|=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0\cdot 3-0\cdot 2=0-0=0.$

La matriz tiene una columna de ceros. El determinante de una matriz que tiene una columna o fila de ceros es cero.

Actividades

1. Calcular los determinantes de las matrices siguientes y de sus traspuestas:

a) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; **c)** $C=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; **d)** $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba: **a)** $|A+B| \neq |A|+|B|$; **b)** $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

2. Determinantes de orden tres

Antes de definir los determinantes de las matrices cuadradas de cualquier orden, vamos a calcular los determinantes de las matrices de orden tres, previo estudio de algunos conceptos desarrollados a partir de las mencionadas matrices y que se generalizan a las matrices de orden *n*, sin ninguna dificultad.

2.1. Menor complementario de un elemento

Dada una matriz cuadrada de orden tres, llamamos **menor complementario del elemento a_{ij}**, simbolizado por M_{ij}, al determinante de la matriz cuadrada de orden dos, que resulta de suprimir en *A* la fila *i* y la columna *j,* a las que pertenece el elemento a_{ij} .

Por ejemplo, en la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ los menores de los elementos a_{21} y a_{31}, M_{21} y M_{31}, serán:

- $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinante que se ha conseguido al suprimir la segunda fila y primera columna en la matriz *A*.
- $M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ determinante que se ha conseguido al suprimir la tercera fila y primera columna en la matriz *A.*

2.2. Adjunto de un elemento

Llamamos **adjunto del elemento a_{ij}**, y lo representamos por A_{ij}, al menor complementario de a_{ij} precedido del signo + o –, según que la suma de los subíndices *i* + *j* sea par o impar, respectivamente. Se puede expresar de la siguiente forma:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

Por ejemplo, los adjuntos A_{21} y A_{31} de los elementos a_{21} y a_{31} serán:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

a) Simbolizar los menores y los adjuntos de a_{13} y a_{23}.

b) Calcular sus valores.

Solución :

a) $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;

$M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

b) $M_{13} = 1 \cdot 3 - (-1)(-4) = 3 - 4 = -1$, $\quad A_{13} = (-1)^4 (-1) = -1$;

$M_{23} = (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 3 = -6 + 3 = -3$, $\quad A_{23} = (-1)^5 (-3) = 3$.

2.3. Determinantes de orden tres

A cada matriz cuadrada A de orden tres le asociamos un número, llamado **determinante de orden tres,** de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

El **determinante de una matriz cuadrada de orden tres** es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados por los adjuntos correspondientes.

En la fórmula anterior, el determinante se ha expresado como producto de la primera fila por sus adjuntos; se puede comprobar que el valor del determinante es independiente de la fila o columna que se elija para su cálculo.

Si se opera sobre la definición anterior, aparece la expresión desarrollada del determinante de orden tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

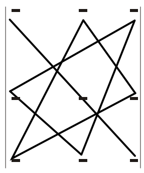
$$= +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Se ordenan las sumas y diferencias:

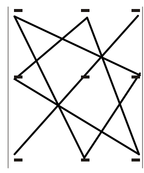
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Nota: Los seis productos anteriores coinciden con el número 3! = 1·2·.3 = 6 y se obtienen con sencillez mediante la llamada **Regla de Sarrus**:

Productos con signo +



Productos con signo –



Los productos con signo (+) los forman los elementos de la diagonal principal y los otros dos los paralelos a ella por los de los vértices opuestos.

Los productos con signo (-) los forman los elementos de la diagonal secundaria y los otros dos los paralelos a ella por los de los vértices opuestos.

Ejemplo

3. Calcular el determinante de la matriz $(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

a) Mediante el desarrollo por los elementos de una línea.

b) Aplicando la Regla de Sarrus.

Solución :

a) Desarrollamos por la segunda fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(6-6) + 0(12-3) - 5(4-1) = -15.$$

b) Por la Regla de Sarrus:

Productos con signo más: $+2 \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3.$

Productos con signo menos: $-1 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 6.$

$|A| = 0 + 5 + 24 - 0 - 20 - 24 = -15.$

Nota: Observa que los números por los que se multiplican los menores van cambiando el signo; –, +, –.

Actividades

3. Simbolizar y calcular los menores y los adjuntos de los elementos a_{21}, a_{23} y a_{32} de la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 6\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}$

4. Calcula: $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}$; $|B|=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}$; $|C|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}$; $|D|=\begin{vmatrix}0 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 7 & 2\end{vmatrix}$

5. Calcula el determinante de las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & 0 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}$;

$D=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

6. Calcular el valor de a para que el determinante de la matriz A sea cero: $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$

7. Calcular todas las raíces de la siguiente ecuación en la incógnita x: $\begin{vmatrix}x & -1 & 2\\ -1 & x & 2\\ -1 & 2 & x\end{vmatrix}=0$

3. Propiedades de los determinantes de orden tres

En este apartado se desarrollan algunas propiedades para los determinantes de orden tres, que son válidas para los determinantes de cualquier orden. Dichas propiedades sirven para facilitar el cálculo de determinantes.

1. El valor del determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta:

$$\det(A)=\det(A^t)$$

Por ejemplo:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=|A^t|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 4\end{vmatrix}=2$$

Esta propiedad permite hacer extensiva las propiedades de las filas a las columnas.

2. Si en una matriz cuadrada se permutan entre sí dos filas, su determinante cambia de signo.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}; \ -15 = -15.$$

3. Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales, el determinante asociado es cero. Se puede razonar, si se cambiaran entre sí las dos filas iguales, resultaría el mismo determinante y, por la propiedad anterior, el valor del determinante sería un número que debe coincidir con su opuesto y este es el cero.

Por ejemplo:

.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Si una matriz tiene nulos los elementos de una fila o columna su determinante es cero.

Por ejemplo:

.
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Si los elementos de una fila o columna se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

La igualdad se comprueba al desarrollar los dos miembros de la igualdad.

6. Si una matriz tiene dos filas proporcionales, el determinante asociado es cero.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3\cdot 0 = 0.$$

Se han aplicado las propiedades 5 y 3.

7. Si todos los elementos de una fila de una matriz pueden descomponerse en suma de dos sumandos, su determinante puede descomponerse en la suma de dos determinantes del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

La igualdad se comprueba al desarrollar los dos miembros de la igualdad.

8. Si una fila de una matriz es suma de otras dos multiplicadas por números distintos de cero, el determinante asociado es cero.
Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \alpha d+\beta g & \alpha e+\beta h & \alpha f+\beta i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Se han aplicado las propiedades 7, 5 y 3.

9. Si a una fila de una matriz se le suma otra fila multiplicada por cualquier número distinto de cero, el determinante de la matriz resultante no varía.
Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ma & e+mb & f+mc \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Aplicar al segundo miembro las propiedades 8 y 6.

Esta propiedad se aplicará para anular todos los elementos de una fila menos uno, y de este modo facilitar el cálculo del determinante mediante el desarrollo por los elementos de esa fila.

10. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Comprobar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 10 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}.$$

Primer miembro -10·17, igual al segundo miembro -170.

Actividades

8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$, calcular $\begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_3 & 2c_2 \\ 2c_1 & 2c_3 & 2c_2 \\ 2a_1 & 2a_3 & 2a_2 \end{vmatrix}$.

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 7x & 7y & 7z \\ 1 & 0 & 2/7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+7 & 2y & 2z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 3x & +3y & +3z \\ 4x+7 & 4y & 4z+2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

10. Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$

11. Prueba sin desarrollar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & c+b \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$; **b)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

12. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ = 1, calcular $\begin{vmatrix} c & b & a \\ k & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix}$.

13. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$ = 1, calcular $\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 2p & r & 3q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix}$.

4. Determinantes de orden *n*

El cálculo de determinantes mediante desarrollo directo termina en los de orden tres, para los que se precisan 3! = 6 sumandos de tres factores cada uno; de todas formas, los seis sumandos se forman fácilmente mediante la **Regla de Sarrus**. El cálculo de determinantes de orden cuatro necesita de 4! = 24 sumandos de 4 factores cada uno, lo que hace complicado su cálculo por este procedimiento.

La definición de determinante dada en el apartado 2.3 de esta Unidad para los determinantes de orden tres generalizada dice: un **determinante de orden *n*** es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera por sus adjuntos correspondientes, que serán determinantes de orden ***n* – 1**. En concreto, un determinante de orden cuatro se calcula mediante la suma de los productos de los cuatro números de una fila por los cuatro adjuntos correspondientes de orden tres; el cálculo se simplifica si se aplican las propiedades de los determinantes para transformar el determinante dado en otro de igual valor en el que una de las filas tenga el mayor número de ceros posible.

Ejemplo

4. Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{3^a F - 1^a F \text{ por } 3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} \text{por la } 1^a C = 1. \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 2^o F + 1^a F =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} \text{por la } 1^a C = -3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -3(-48-16) - 4(-2-16) = 264.$$

Actividades

14. Halla el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

15. Resolver los determinantes de Vandermonde:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & (\ln 2)^2 & (\ln 2)^3 \\ 1 & \ln 4 & (\ln 4)^2 & (\ln 4)^3 \\ 1 & \ln 8 & (\ln 8)^2 & (\ln 8)^3 \\ 1 & \ln 16 & (\ln 16)^2 & (\ln 16)^3 \end{vmatrix}$

5. Rango de una matriz

En un sistema de ecuaciones lineales con solución, los términos independientes se obtienen mediante combinación lineal de los coeficientes de las incógnitas; por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

se puede escribir en forma vectorial así:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Su solución $x = 2$ e $y = 1$ permite obtener los términos independientes como combinación lineal de los coeficientes de las incógnitas.

Si formamos la matriz de los coeficientes del sistema $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y su ampliada con los términos independientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$, decimos que la columna de los términos independientes es combinación lineal de las columnas que forman los coeficientes.

En este apartado profundizaremos en la dependencia e independencia lineal de los vectores filas y columnas que forman las matrices; conceptos necesarios para determinar el rango de las matrices, que a su vez será la idea fundamental para el estudio de los sistemas lineales que es el objetivo fundamental del Álgebra Lineal.

Vectores fila y vectores columnas de una matriz

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudio de sus filas:

La segunda fila de la matriz se obtiene al multiplicar la primera por dos, $f_2 = 2f_1$; decimos que f_1 y f_2 son **linealmente dependientes**; los número que las forman son proporcionales:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$$

La primera y tercera fila no son linealmente dependientes; se dice que son **linealmente independientes**.

Estudio de sus columnas:

La tercera columna es suma de la primera y segunda, $c_3 = c_1 + c_2$; depende linealmente de ellas.

La cuarta columna se puede obtener por combinación lineal de la primera y segunda $c_4 = \alpha c_1 + \beta c_2$; igualdad que da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Se desarrolla y resuelve:

$$\begin{cases}4=\alpha+2\beta\\8=2\alpha+4\beta\\0=6\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=\alpha+2\beta\\0=6\alpha+\beta\end{cases}\Rightarrow\alpha=-\frac{4}{11};\quad\beta=\frac{24}{11}.$$

En general una fila (columna) L de una matriz es combinación lineal o **linealmente dependiente** de sus paralelas $L_1, L_2, \ldots, L_n$, si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reales, con los que se obtiene la igualdad:

$$L = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_n L_n$$

Las filas (columnas) no dependientes se dicen **linealmente independientes**.

En el ejemplo anterior el número de filas y columnas linealmente independientes de la matriz coinciden; son dos. En general esto es siempre cierto, por lo que podemos enunciar el teorema siguiente.

Teorema: En toda matriz el número de filas y de columnas linealmente independientes coinciden.

Demostración: La demostración la realizamos sin perder generalidad para el caso de una matriz de orden tres en la que la tercera columna depende linealmente de las dos primeras, que son linealmente independientes.

Sea la matriz $P=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$

Supongamos que la tercera columna depende linealmente de las dos primeras:

$$C = \alpha A + \beta B$$

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \alpha a_1+\beta b_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha a_2+\beta b_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha a_3+\beta b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &1^{a}\ \textit{fila}\ (a_1 \quad b_1 \quad \alpha a_1+\beta b_1)=a_1(1,\ \ 0,\ \ \alpha)+b_1(0,\ \ 1,\ \ \beta) \\ &2^{a}\ \textit{fila}\ (a_2 \quad b_2 \quad \alpha a_2+\beta b_2)=a_2(1,\ \ 0,\ \ \alpha)+b_2(0,\ \ 1,\ \ \beta) \\ &3^{a}\ \textit{fila}\ (a_3 \quad b_3 \quad \alpha a_1+\beta b_3)=a_3(1,\ \ 0,\ \ \alpha)+b_3(0,\ \ 1,\ \ \beta) \end{aligned}$$

Las tres filas se obtienen como combinación lineal de (1, 0, α) y (0, 1, β) lo que indica que solo dos filas son linealmente independientes.

> Estamos en condiciones de definir el **rango de una matriz**, como el número de sus filas o de sus columnas linealmente independientes.
>
> Si la matriz es A de orden n y su rango es h, se escribe rango(A) = h.

La determinación del rango de una matriz es complicado si se hace a partir de la definición de dependencia; por este motivo estudiáremos dos métodos que facilitan su cálculo y que combinados resultan sumamente eficaces.

5.1. Cálculo del rango por el método de Gauss

Consiste en aplicar a la matriz una serie de transformaciones elementales, que dejan invariante el rango, hasta conseguir una matriz reducida o escalonada en la cual el rango se determina de inmediato.

Transformaciones que dejan invariante el rango.

- Intercambiar las posiciones de las filas entre sí.
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un número distinto de cero.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, veamos la forma de calcular su matriz reducida aplicando las trasformaciones anteriores.

Primero: Conviene que el elemento a_{11} sea uno para facilitar el resto de los cálculos; en este caso una de las formas de hacerlo consiste en intercambiar las columnas primera y segunda entre sí.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Segundo. Se anulan todos los elementos de la primera columna, salvo el primero, aplicando la tercera trasformación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \\ f_3-3f \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Tercero: Se anulan los elementos de la segunda columna situados debajo del su segundo elemento aplicando de nuevo la tercera trasformación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - f_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es cero, depende linealmente de las otras dos; la primera y la segunda son linealmente independientes, por lo que el rango de A es dos.

El rango de una matriz por el método de Gauss es el número de filas de su matriz reducida o escalonada no nulas.

Ejemplo

5. Calcular el rango de las matrices:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix};\quad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix};\quad \textbf{c)}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución :

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2f_1 + f_2 \\ -3f_1 + f_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1.$$

$$\textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2f_1 + f_2 \\ -3f_1 + f_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B) = 2.$$

$$\textbf{c)}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2f_1 + f_2 \\ f_1 + f_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -5f_2 + f_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(C) = 3.$$

5.2. Cálculo del rango por determinantes

Para definir y determinar el rango por determinantes es necesario dar algunos conceptos nuevos.

Menores de una matriz

Se llama **menor de orden *h* de la matriz *A*** de orden *m* x *n* al determinante de una matriz cuadrada de orden *h* formada por los elementos de *h* filas y *h* columnas de la matriz *A*.

Los menores de orden *h* se forman al suprimir de todas las formas posibles $m - h$ filas y $n - h$ columnas en la matriz *A*.

En la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

algunos menores de orden dos son:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \ldots; \ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Los menores de orden 3 serán:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Todos son nulos.

Rango de una matriz por determinantes es el orden del mayor menor no nulo.

El rango de la matriz anterior es dos; recuerda que su matriz reducida calculada por el método de Gauss anterior tenía una fila nula, por tanto su rango era dos; esta coincidencia se generaliza en el teorema siguiente que no demostramos.

Teorema: Si el rango de una matriz A es h y uno de sus menores no nulos es α; cada fila de la matriz A que no figura en él es combinación de sus h filas.

Cálculo práctico del rango

Como hemos dicho al principio de este apartado, el rango de una matriz es fundamental para el estudio de los sistemas lineales; por ello, dedicamos los párrafos siguientes a su cálculo combinando los dos métodos anteriores.

6. Calcular el rango de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Solución :

a) Se suprimen las líneas (filas o columnas) combinación lineal de otras que se aprecien a simple vista.
En la matriz P del ejemplo la tercera fila se obtiene al multiplicar la primera por menos dos; se suprime y se estudia el rango de la matriz P_1 que tiene una fila menos.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Se elige un elemento de la matriz P_1 distinto de cero; en esta caso el $a_{11} = 1$; este es un menor de orden uno al que llamaremos principal; el rango de P es mayor o igual que uno:

$$rango(P) \geq 1.$$

c) Formamos menores de orden dos orlando el menor principal seleccionado (rodear el elemento de partida):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 10 = 10.$$

Hemos encontrado un menor de orden dos distinto de cero, que pasará a ser el menor principal, el rango de P es mayor o igual que dos:

$$rango(P) \geq 2.$$

d) Se orla este menor, con las otras filas y columnas para formar menores de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Como se han formado todos los menores de orden tres a partir del menor principal y todos son nulos, el rango de la matriz es dos:

$$rango(P) = 2.$$

7. Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & \lambda & 2 & 15 & 21 \end{pmatrix}$, para los distintos valores del parámetro λ.

Solución :

Para cada valor real del parámetro λ se tiene una matriz; se trata de calcular el rango de cada una de las infinitas matrices A. Se toma el mayor menor posible que contenga λ, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Para $\lambda \neq 1$ el menor de tercer orden no se anula, luego rango(A) = 3.

Si $\lambda = 1$, se sustituye y queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 15 & 21 \end{pmatrix}$, el rango se calcula por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 15 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - 4f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -7f_2 + f_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A) = 2.$$

Actividades

16. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Halla el rango de cada una de las matrices siguientes: **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$; **c)** $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & 4\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 4 & 3\end{pmatrix}$; **d)** $D=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & -5 & 2\\ 5 & -3 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & -7 & -12 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 12 & 0\end{pmatrix}$.

18. Si el rango de *A* es 2, siendo *A* una matriz de orden n, ¿qué se puede decir del rango de su traspuesta?

19. Si una matriz *A* es una matriz de orden tres y $|A|\neq 0$, ¿cuál es el rango de *A*?. Si $|A| = 0$; ¿qué se puede afirmar del rango de *A*?

20. **a)** Escribe razonadamente una matriz cuadrada de orden 4 y rango 2 si sus dos primera filas son, respectivamente: (2 -1 3 4) y (1 -1 3 2); **b)** Escribe una matriz de rango 3 si sus dos primeras filas son las anteriores.

21. Hallar *a* y *b* para que los vectores filas de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 4 & a & b\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes y hallar su dependencia.

22. Calcula el rango de la matriz *M* según los valores de λ, siendo $M=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ \lambda & 0 & 2\end{pmatrix}$.

23. Calcular el rango de la matriz *A* para los distintos los valores de λ, siendo $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ \lambda+1 & 2 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda & 1 & -1\end{pmatrix}$.

24. Estudia, según los valores del parámetro λ el rango de la matriz *A*, con $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & \lambda & 5 & 2\\ 3 & \lambda-4 & \lambda+9 & -\lambda\end{pmatrix}$.

6. Matriz inversa por determinantes

Los determinantes serán una nueva herramienta para calcular la matriz inversa, como vernos a continuación.

6.1. Matriz adjunta

Dada una matriz cuadrada A se llama **matriz adjunta** de A y se representa por adj(A), a la matriz que resulta de sustituir cada elemento a_{ij} de la matriz A por su adjunto correspondiente A_{ij}.

Ejemplo

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ calcular su matriz adjunta.

Solución:

Calculemos en primer lugar el determinante de A; aunque para el cálculo de la matriz adjunta no se precisa su valor, lo utilizaremos en las propiedades de la matriz adjunta.

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0+18+8-24-12-0=-10.$$

Se calculan todos los adjuntos; para ello se coloca el signo que corresponde a la potencia $(-1)^{i+j}$ seguida del menor complementario del elemento.

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6;\; A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-9;\; A_{13}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=8;\; A_{22}=+\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-12;\; A_{32}=-\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-2.$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-2;\; A_{32}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-2;\; A_{33}=+\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2.$$

Por tanto, la matriz adjunta de A será,

$$adj(A)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9 & -4\\ 8 & -12 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

6.2. Propiedad de la matriz traspuesta de la adjunta

El producto de una matriz *A* por la traspuesta de su adjunta es una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal principal coinciden con el valor del determinante de *A*. Es decir, en el caso de una matriz de orden tres:

$$A \cdot (adj(A))^t = (adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}.$$

La demostración de esta propiedad se hace a partir de la definición de matrices adjunta traspuesta y las propiedades de los determinantes.

Ejemplo

9. Comprobar que se cumple la propiedad anterior para las matrices del ejemplo anterior.

Solución:

$$A \cdot (adj(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 & -4 \\ 8 & -12 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

6.3. Cálculo de la matriz inversa

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos a partir de la propiedad de la matriz transpuesta tendremos:

$$A \cdot (adj(A))^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I.$$

En el caso de $|A| \neq 0$, y únicamente en esta situación, se puede dividir los dos miembros por $|A|$ y queda:

$$A \cdot \left(\frac{(adj(A))^t}{|A|} \right) = I.$$

Por último, teniendo en cuenta la definición de matriz inversa I, identificando las dos igualdades se tiene la **matriz inversa por determinantes**, tendremos:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(adj(A))^t}{|A|}}$$

En el desarrollo del cálculo de la matriz inversa hemos obtenido los siguientes resultados:

- Únicamente tienen inversa aquellas matrices cuyo determinante es distinto de cero, es decir, las matrices regulares.

- La inversa de una matriz regular A es igual a la transpuesta de su adjunta, dividida por el determinante de A.

Como el proceso para llegar a la matriz inversa ha sido largo, se resume así:

- **Primero**: se calcula el determinante de la matriz dada, si este es distinto de cero, la matriz es regular y tiene inversa.
- **Segundo**: se calcula su matriz adjunta.
- **Tercero**: se traspone la matriz adjunta.
- **Cuarto**: se divide la matriz traspuesta de la adjunta obtenida por el determinante.

Ejemplo

10. Comprobar si las siguientes matrices tienen inversa y en caso afirmativo calcularlas: **a)** $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$;

b) $B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Solución :

a) $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=12-10=2$; como el determinante es distinto de cero, la matriz A tiene inversa.

$$adj(A)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Traspuesta de la adjunta: $(adj(A))^t=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

Inversa: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Comprobación: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) $|B|=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=-1$; como es distinto de cero, la matriz B tiene inversa.

Cálculo de la adjunta: $adj(B)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9 & -4\\ 8 & -12 & -5\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Traspuesta de la adjunta: $(adj(B))^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Inversa: $B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -1 \\ 9 & 12 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro λ.

a) Calcula el valor o los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.
b) Halla la inversa para λ = 2.

Solución :

a) Se calcula la expresión del determinante: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 1;$

los valores que le anulan son las soluciones de la ecuación $-\lambda^2 + 1 = 0$, dan lugar a matrices que no tienen inversa o matrices singulares, estos valores son:
$\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

b) Para λ = 2, se tiene la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; su determinante es: $1-4=-3$.

Matriz adjunta: $adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{(adj(A))^t}{|A|} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Propiedades de la matriz inversa

a) El producto de dos matrices invertibles es invertible y su inversa es igual al producto de la inversa del segundo factor por la inversa del primer factor.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

En efecto, multiplicamos por ($A \cdot B$) los dos miembros.

$$(A \cdot B)(A \cdot B)^{-1} = A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

b) La inversa de la traspuesta es igual a la traspuesta de la inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

En efecto, se multiplica A^t por $(A^{-1})^t$ y se opera:

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I.$$

De donde:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

Ejemplo

12. Si el determinante de la matriz A es 5 y el determinante de $A \cdot B$ es 15, calcula:

a) El determinante de la inversa de A.

b) El determinante de B y de su inversa.

Solución:

a) Se parte de $A \cdot A^{-1} = I$.

Aplicamos la propiedad de determinante de un producto de matrices $|A \cdot A^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I|$; $5|A^{-1}| = 1$; $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$.

b) Se parte de $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|; 15 = 5 \cdot |B|; |B| = \frac{15}{5} = 3;$ $|B^{-1}| = \frac{1}{3}$.

Actividades

25. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Comprobar si tienen inversa y en caso afirmativo calcularlas.

26. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$. Determínese si A y B se pueden invertir y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.

27. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$

a) Determinar los valores del parámetro real a para los cuales existe la inversa de la matriz A .

b) Obtener la inversa de A para a = 3.

28. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ y & 0\end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de y para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Calcular la inversa de A en estos casos.

29. **a)** Calcular los valores de λ para los que no tiene inversa la matriz:

$$\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa para λ = 1.

30. Para cada valor del número real t se considera la matriz:

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & t & 2t^2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Encontrar todos los valores de t para los que la matriz $A(t)$ no tiene inversa.

b) Hallar la inversa de $A(t)$ cuando $t=-1$.

31. Se consideran las matrices:

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde λ es cualquier número real.

a) Encontrar los valores de λ para los que AB es invertible.

b) Determinar los valores de λ para los que BA es invertible.

Recuerda

- **Determinante de orden dos**

  El determinante de una matriz cuadrada de orden dos es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria: **det (A)= $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$**.

- **Menor complementario de un elemento**

  Dada una matriz cuadrada de orden tres llamamos menor complementario del elemento a_{ij} y se simboliza por M_{ij} al determinante de la matriz cuadrada de orden dos que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j, a las que pertenece el elemento a_{ij}.

- **Adjunto de un elemento**

  Llamamos adjunto del elemento a_{ij}, y lo representamos por A_{ij}, al menor complementario de a_{ij} precedido del signo + o –, según que la suma de los subíndices $i + j$ sea par o impar, respectivamente; se expresa $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\ M_{ij}$.

- **Determinantes de orden tres**

  El determinante de una matriz cuadrada de orden tres es igual a la suma de los elementos de una fila multiplicados por los adjuntos correspondientes: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. El desarrollo directo del determinante se logra mediante la **Regla de Sarrus**.

- **Rango de una matriz**

  Rango de una matriz es el número de sus filas o de sus columnas **linealmente independientes**; si el rango de A es h, se escribe rango(A) = h.

- **Cálculo del rango por el método de Gauss**

  Este método permite afirmar que el rango de una matriz es el número de filas de su matriz reducida o escalonada no nulas.

- **Cálculo del rango por determinantes: menores de una matriz**

  Se llama menor de orden h de la matriz A de orden m x n al determinante de una matriz cuadrada de orden h formada por los elementos de h filas y h columnas de la matriz A. Rango de una matriz por determinantes es el orden del mayor menor no nulo.

- **Matriz inversa por determinantes**

  Únicamente tienen inversa las matrices cuyo determinante es distinto de cero.

- **Matriz adjunta**

  Dada una matriz cuadrada A, su **matriz adjunta** se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} de la matriz A por su adjunto correspondiente A_{ij}.

- **Matriz inversa**

  La inversa de una matriz regular A es igual a la traspuesta de la adjunta multiplicada por el inverso del determinante:

$$A^{-1} = \frac{(adj(A))^t}{|A|}$$