TEMA 4 – RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolución de sistemas: Regla de Cramer y Teorema de Rouché-Frobenius

EJERCICIO 1 : Resuelve, aplicando el método de Cramer, si es posible, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & - & 2z & = & -2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$ b) $\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ 2x-3y-z=-5 \\ x-5z=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-3y+5z=5 \\ -6x+2y-z=-5 \\ 2x-2y+3z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-z=4 \\ -4x+4y+z=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-z=4 \\ -4x+4y+z=7 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

EJERCICIO 2 : Clasificar y resolver en función de los valores los parámetro los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

a) $\begin{cases} kx+y+z=5 \\ 2x+y-kz=-7 \\ kx+y+2z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+y/2=-2 \\ x+ky=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2z=1 \\ x+(a+1)y+3z=1 \\ x+az=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} mx+y=2-2m \\ x+my=m-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax+y-z=a-2 \\ 3x+ay+z=a-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ kx+y+3z=6 \\ x-2z=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ (a+1)x+y-az=0 \\ 2x+y-z=1-a \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x-4z=0 \\ x-y+az=0 \\ -x-ay-z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} kx+y+z=4 \\ x-ky+z=1 \\ x+y+z=k+2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 2y+2z=-4+k \\ 2x+4y+k^2z=k+2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ x+y+2z=2 \\ ax-2y+z=3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x+3y+mz=0 \\ my-z=2 \\ mx+my+mz=m \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} x+y-az=1 \\ ax+y-z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$

EJERCICIO 3 : Discutir y resolver en los casos en que sea compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} (2+a)x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ 2x-3y-z=a-2 \end{cases}$

EJERCICIO 4 : Dado $\begin{array}{r} (a+1)x+y+z=3 \\ x+2y+az=4 \\ x+ay+2z=2a \end{array}$

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro a.
b) Resolverlo para a = 2

Cálculo de la inversa de una matriz por determinantes

<u>EJERCICIO 5</u> : ¿ Tiene inversa la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

<u>EJERCICIO 6</u> : Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 7</u> :¿Para qué valores del parámetro a tiene inversa la matriz A? Calcula la inversa para a = 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 8</u> : Estudia para qué valores de a no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & a+1 & a-1 \\ -2a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 9</u> :¿Para qué valores de “k” existe la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ k & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcularla para k = 1 si es posible.

<u>EJERCICIO 10</u> : Averiguar para que valores del parámetro k la matriz A tiene inversa. Calcularla, si es posible, para k = 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 11</u> : Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de "t" para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcular la inversa de A para t = 1
c) Tomando la matriz A para t = 1, resolver el siguiente sistema matricial : $A.X + B^t = 2.C$

siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 12</u>: Hallar los valores de k para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & k+1 & k \\ -k & -2k & 0 & k^2 \end{pmatrix}$

a) No tiene inversa b) Tiene rango 3

EJERCICIO 13 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores de a, la matriz no tiene inversa. Calcular la inversa de A cuando a = 2.

EJERCICIO 14 : ¿ Para que valores de t existe la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$? Calcularla para t = 2.

EJERCICIO 15 : Halla los valores del parámetro "t" para los cuales no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$. Calcula, si es posible, A^{-1} cuando t = 1

EJERCICIO 16 : Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores reales de x para los que A tiene inversa.
b) Halla la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial AY + B = I siendo A la matriz anterior para x =3, I la matriz identidad de orden 3 y B la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sistemas en forma matricial

Ejercicio 17 : Expresa y resuelve los siguientes sistemas de forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-3 \\ 3x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\}$ b) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 3x+2y=1 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right.$ c) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=1 \\ 3x-y+2z=-4 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=7 \\ x+y-2z=5 \\ y+2z=0 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ 2x-y+z=8 \\ x-2y+z=7 \end{array}\right\}$ f) $\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=-5 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+z=3 \end{array}\right.$ g) $\left\{\begin{array}{l} 4x+2y-z=6 \\ x+z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{array}\right.$