

TEMA 2 – MATRICES

OPERACIONES CON MATRICES

EJERCICIO 1 : Halla todas las matrices X , no nulas, de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = X$

EJERCICIO 2 : Halla los valores de “a” y “b” en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 3 : Calcula los valores de x para que la matriz: $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación

$A^2 - 6A + 9I = O$, donde I y O son respectivamente las matrices identidad y nula de orden tres.

EJERCICIO 4 : Halla una matriz B , sabiendo que su primera fila es $(1, 0)$, y que verifica

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMAS CON MATRICES

EJERCICIO 5 : En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

- Lote A : 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote B : 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote C : 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A , B y C .

EJERCICIO 6 : Una empresa produce tres bienes A , B , y C . Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	FACTORÍA 2	FACTORÍA 3
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

- a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes A , B y C que fabrica la empresa.
- b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes A , B y C .

EJERCICIO 7 : Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B , en tres terminaciones: N , L y S . Produce del modelo A : 400 unidades en la terminación N , 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S . Produce del modelo B : 300 unidades en la terminación N , 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S . La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

- Representa la información en dos matrices.
- Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

EJERCICIO 8 : Un constructor construye chalés de lujo (C.L.), chalés adosados (C.A.) y viviendas de protección oficial (V.P.O.). Se sabe que cada C.L. tiene 3 cuartos de baño, 2 aseos y 2 cocinas; cada C.A. tiene 1 cuarto de baño, 1 aseo y una cocina; y cada V.P.O. tiene 1 aseo y una cocina. Por otra parte, cada cuarto de baño tiene una ventana grande y una pequeña; cada aseo tiene una ventana pequeña y cada cocina tiene dos grandes y una pequeña.

- Halla la matriz A que expresa el número de habitáculos (cocinas, cuartos de baño y aseos) en función de cada tipo de vivienda.
- Halla la matriz B que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función del tipo de habitáculo.
- Halla la matriz C que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función del tipo de vivienda. ¿Puede calcularse C como resultado de una operación matricial entre A y B ?

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 9 : Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CALCULAR LA POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 10 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2 , A^4 y A^{33}

EJERCICIO 11 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcula A^2 , A^3 , A^4 y A^5
- Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

EJERCICIO 12 :

- Calcula una matriz X que verifique la igualdad:

$$A \cdot X = B, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

Ejercicio 13 : Halla una matriz, X , tal que $X \cdot A = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14 : Halla una matriz, X , tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 15 : Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$,

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

SISTEMAS CON MATRICES

EJERCICIO 16 : Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Halla } X \text{ e } Y, \text{ y calcula, si tiene sentido, } X^{-1} \text{ e } Y^{-1}$$

EJERCICIO 17 : Resuelve el sistema (donde X e Y son matrices de dimensión 2×3)

$$\begin{cases} 5X - 7Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

HALLAR MATRICES QUE CONMUTEN CON UNA DADA

EJERCICIO 18 : Halla todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 19 : Calcular las matrices cuadradas de dimensión 2 que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

COMBINACIÓN LINEAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

EJERCICIO 20 : Estudiar si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes $u_1 = (2, 1, -4, 3)$, $u_2 = (-1, 2, 0, -3)$, $u_3 = (7, -4, -8, 15)$, $u_4 = (-6, 7, 4, -15)$

EJERCICIO 21 : Estudiar la dependencia o independencia de los vectores: $u_1(1, 2, 3)$, $u_2(-1, 0, 2)$, $u_3(3, 4, 4)$. Expresa el vector $u(2, -3, 4)$ como combinación lineal de ellos.

RANGO DE UNA MATRIZ**EJERCICIO 22** : Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 23 : Dados los vectores: $\vec{u}_1 = (3, -1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$ Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1 , u_2 , u_3 **EJERCICIO 24** : Halla el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas

$$\text{linealmente independientes: } m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 25 :

$$\text{a) Calcula el rango de la siguiente matriz: } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Cuántas filas hay en la matriz A que sean linealmente independientes? Razona tu respuesta.

Ejercicio 26 : Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores del parámetro:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$