6 Aplicaciones de la derivada (II)

¿Quién no está interesado en obtener el beneficio máximo con el mínimo coste? No se trata de un *producto milagro*, sino de algo que puede calcularse matemáticamente, usando la derivada ideada por Leibniz y Newton (1643 – 1727) en el siglo XVII.

Isaac Newton (Wikipedia org. Dominio público)

Así, aparte de las aplicaciones de la derivada puramente *mecánicas*, como son el estudio del crecimiento (signo de la derivada primera) o de la curvatura (signo de la derivada segunda), aparece otro más *artístico*, como es el de la optimización de funciones. Aquí hay que construir la función que debemos optimizar, lo que pone a prueba nuestros conocimientos matemáticos, pero también nos permite referirnos a casos concretos que pueden aplicarse a la vida diaria.

Si repasamos lo hecho hasta ahora con las funciones, vemos que podemos conocer prácticamente todo lo que interesa sobre ella. ¿Seremos capaces de representarla gráficamente? Juntando la información que se obtiene directamente de la función (dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, signo de la función, asíntotas), con la que procede de la derivada primera (monotonía, puntos críticos) y de la segunda (curvatura, puntos de inflexión) podemos esbozar una gráfica (habitualmente no a escala: no se puede tener en la misma gráfica el infinito, el menos infinito y el cero) que nos permite, de un vistazo, conocer el comportamiento de la función.

Por lo tanto, esta Unidad tiene como **objetivos** los siguientes:

1. Optimizar funciones, hallando los valores que hacen que la función sea máxima o mínima.

2. Estudiar y representar gráficamente una función.

Aplicaciones de la derivada (II)

Optimización de funciones

Estudio y representación de funciones

Información obtenida de la función:

1. Dominio
2. Simetría
3. Puntos de corte con los ejes
4. Signo de la función
5. Asíntotas

Información obtenida de la derivada primera:

6. Monotonía (crecimiento y decrecimiento)
7. Puntos críticos (máximos y mínimos)

Información obtenida de la derivada segunda:

7. Puntos críticos (máximos y mínimos)
8. Curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de reflexión

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Optimización de funciones

Optimizar una función consiste en buscar sus extremos relativos. Lógicamente se trata de hacer exactamente lo mismo que en la Unidad anterior. ¿Por qué lo separamos entonces? La razón es que cuando hablamos de calcular los máximos y mínimos damos por hecho que nos dan la función que debemos optimizar, mientras que si decimos optimizar sobreentendemos que hemos de construir la función que se ha de optimizar, que es el paso realmente complicado, y diferente al de la Unidad 5.

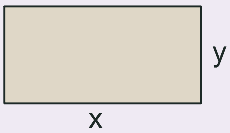
El tipo de problemas al que se le puede aplicar la técnica de **optimización de funciones** es extensísimo, por lo que no se pueden dar unas pautas fijas, sino unas orientaciones que ayuden a resolverlo. Habitualmente nos tendremos que apoyar en conocimientos aritméticos, algebraicos o geométricos previos y una lectura detallada, que nos permita averiguar cuál será y qué forma tendrá la función que hemos de optimizar.

A la hora de encarar el problema, conviene identificar aquella función que hay que optimizar. Habrá que nombrar a las variables de la función para poder escribirla matemáticamente y poder aplicarle nuestras herramientas.

Ejemplos

1. Halla las dimensiones del rectángulo que teniendo 28 m de perímetro tenga área máxima.

Solución: Podemos hacer un pequeño gráfico, donde escribamos las variables que vamos a usar. A partir de dichas variables podemos seguir la siguiente estrategia: escribimos primero la **función que tenemos que optimizar**, que en este caso es el área y que constará de dos variables: $A(x, y) = x \cdot y$.



Como sólo sabemos manejar funciones de una variable, tenemos que encontrar una **relación entre las variables**. En este caso, dicha relación la proporciona el perímetro: $2x + 2y = 28 \Rightarrow x + y = 14$.

Ahora despejamos una de las variables en función de la otra en nuestra relación; la sustituimos en la función que hay que optimizar y queda una función con una única variable, a la que aplicamos el método habitual para el cálculo de los extremos relativos: $y = 14 - x \Rightarrow A(x) = x \cdot (14 - x) = 14x - x^2$.

Antes de derivar podemos detenernos un momento en la función: se trata de una función cuadrática (parábola) cuyo vértice es un máximo (pues el coeficiente de x^2 es negativo), que es lo que buscamos. La función está bien construida.

$A'(x) = 14 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow A''(x) = -2 \Rightarrow A''(7) = -2 < 0 \Rightarrow$ A(x, y) es máxima para $x = 7\ cm$, $y = 14 - 7 = 7\ cm$. Por lo tanto, el rectángulo de área máxima y perímetro 28 cm es un cuadrado de lado 7 cm y área 49 cm^2.

Conviene finalizar dando el valor no sólo de las variables que optimizan la función, sino también el valor optimizado de dicha función, y una somera explicación del resultado obtenido.

2. Descomponer el número 81 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución: Se trata de un problema aritmético. Llamamos x a uno de los sumandos e y al otro. Siguiendo los pasos del ejemplo 1 escribimos:

Función que se debe optimizar: $P(x,y) = x \cdot y^2$.

Relación entre las variables: $x + y = 81$.

Por comodidad despejamos x: $x = 81 - y$. Sustituimos en $P(x, y)$ obteniendo $P(y) = y^2 \cdot (81 - y) = 81y^2 - y^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow P'(y) = 162y - 3y^2 \Rightarrow P'(y) = 0 \Rightarrow y = 0\,(absurda), 54 \Rightarrow P''(y) = 162 - 6y \Rightarrow P''(0) = 162 > 0\,(mínimo)$;
$P''(54) = -162 \Rightarrow$ *máximo para* $y = 54, x = 27$. El producto es máximo $(P_{máx} = 78732)$ cuando un sumando es igual a la mitad del que está elevado al cuadrado.

Observa que manejamos la variable *y* igual que la *x*, porque ahora ambas son variables independientes, siendo las dependientes el producto y la suma.

Además aparece una solución que podemos calificar directamente de absurda, pues si un número valiese cero, el producto sería cero. Sin embargo, conviene reforzar nuestra opinión con el cálculo posterior, que debe corroborar nuestra afirmación, pues en caso contrario deberíamos pensar que nos hemos confundido. Si al repasar los cálculos vemos que no hay confusión, habrá que concluir que el problema planteado no tiene solución, aunque no es éste el presente caso.

3. Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

b) ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución: Se trata de construir tres lados de un rectángulo (el cuarto será el suelo donde se apoya la portería) de modo que su superficie sea máxima. Llamando *x* a la base e *y* a la altura queda:

Función que se debe optimizar: $A(x, y) = x \cdot y$

Relación entre las variables: $x + 2y = 10$

Por comodidad despejamos x obteniendo: $x = 10 - 2y \Rightarrow$ La función a optimizar es $A(y) = (10-2y)\cdot y = 10y - 2y^2$ (parábola con máximo); $A'(y) = 10 - 4y \Rightarrow A'(y) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2} \Rightarrow A''(y) = -4 \Rightarrow A''\left(\dfrac{5}{2}\right) = -4 < 0 \Rightarrow$ **a)** máximo para $y = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ m$; $x = 5\ m$. **b)** $A_{máx} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5\ m^2$.

4. La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución: En este ejercicio verás la diferencia entre la optimización de funciones y la programación lineal. Recuerda que ambas persiguen el mismo objetivo, pero se aplican a diferentes situaciones: la programación lineal sólo puede usarse con funciones lineales, es decir, con funciones en las que las variables tienen como exponente 1 (polinomios de 1er grado) y no hay producto de dichas variables, mientras que la optimización es aplicable a todo tipo de funciones.

Llamando a los números *x*, *y*, *z*, respectivamente, podemos escribir:

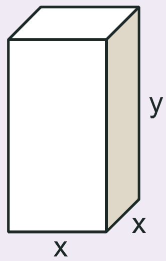
Función a optimizar: $P(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$

Relaciones entre las variables: $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x+2y+3z=120 \end{cases}$

Fíjate que al tener 3 variables han de aparecer 2 relaciones para poder despejar dos de las variables (*y*, *z*) en función de la otra (*x*). Planteamos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que resolvemos por reducción:

$\left.\begin{array}{l} y+z=60-x \\ 2y+3z=120-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2y-2z=-120+2x \\ 2y+3z=120-x \end{array}\right\} \Rightarrow z = x;\ y = 60-2x$. La función queda: $P(x) = x\cdot(60-2x)\cdot x =$ $= 60x^2 - 2x^3 \Rightarrow P'(x) = 120x - 6x^2 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow 6x(20-x) = 0 \Rightarrow x = 0\ (absurda), 20.$ $P''(x) = 120 - 12x \Rightarrow$ $\Rightarrow P''(0) = 120 > 0 \Rightarrow mínimo$; $P''(20) = -120 < 0 \Rightarrow máximo$. El producto es máximo para $x = 20$, $y = 60 - 40 = 20$, $z = 20$, valiendo $P_{máx} = 8000$.

5. Se desea construir cajas de embalaje en forma de prisma cuadrangular de modo que la suma de las tres dimensiones sea 72. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la capacidad de las cajas sea máxima?



Solución: Parece que volvemos a tener un problema con 3 variables, puesto que un prisma tiene volumen (ésa es su capacidad). Sin embargo, al ser cuadrangular (su base es un cuadrado), se reduce a 2 variables. Recordando cómo es un prisma y cómo se calcula su volumen podemos escribir:

Función a optimizar: $V(x,y) = A_{base} \cdot h = x^2 y$

Relación entre las variables: $2x + y = 72$

Despejamos y (si es x hay que desarrollar innecesariamente un binomio al cuadrado):

$$y = 72 - 2x \Rightarrow V(x) = x^2(72-2x) = 72x^2 - 2x^3 \rightarrow V'(x) = 144x - 6x^2 \Rightarrow V'(x) = 0 \Rightarrow 6x(24-x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0\,(absurda),\ x = 24 \rightarrow V''(x) = 144 - 12x \Rightarrow V''(0) = 144 < 0 \Rightarrow mínimo\,;\ V''(24) = -144\ (máximo) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La caja tendrá capacidad máxima para $x = 24\ u$; $y = 72 - 2 \cdot 24 = 24\ u$, valiendo $V_{máx} = 13824\ u^3$.

Escribimos u como unidad de longitud y u^3 como la de volumen al no especificarse ninguna unidad de medida. Observa la regularidad: si queremos rectángulos de área máxima aparecen cuadrados, y si queremos prismas cuadrangulares de volumen máximo aparecen hexaedros regulares (cubos).

6. La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \frac{x^3}{100} + 8x + 20$.

a) Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$. ¿Cuántas unidades x_0 son necesarias producir para que sea mínimo el coste medio por unidad?

b) ¿Qué relación existe entre $Q(x_0)$ y $C'(x_0)$?

Solución: Se trata de optimizar una función de la que ya conocemos su expresión. Podíamos haber incluido el ejercicio en el la Unidad anterior, pero, como hay que efectuar una pequeña manipulación para averiguar la forma de la función que se debe optimizar, que no es $C(x)$ sino $Q(x)$, preferimos dejarlo para este apartado:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2}{100} + 8 + \frac{20}{x} \Rightarrow Q'(x) = \frac{x}{50} - \frac{20}{x^2} \Rightarrow Q'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{50} = \frac{20}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q''(x) = \frac{1}{50} + \frac{40}{x^3} \Rightarrow Q''(10) = \frac{1}{50} + \frac{40}{1000} = \frac{3}{50} > 0$$

a) El coste medio por unidad es mínimo para $x_0 = 10$ unidades, $Q_{mín} = 11$.

b) No nos preguntan por una relación numérica, sino funcional. Observa que si despejamos $C(x)$ tendremos:

$C(x) = x \cdot Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x) + x \cdot Q'(x) \Rightarrow C'(x_0) = Q(x_0) + x_0 \cdot Q'(x_0) = Q(x_0)$, pues $Q'(x_0) = 0$ por tener un mínimo en x_0. Por lo tanto, ambos valores son iguales.

7. Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros diarios (N) depende del precio del billete (p) según la expresión $N(p) = 300 - 6p$.

a) Da la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.

b) ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros?
c) ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?
d) ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Solución:

Los ingresos vendrán dados por el producto del número de viajeros y el importe del billete que han de abonar (todo ello diario). Teniendo en cuenta el nombre que se da a cada una de las variables queda:

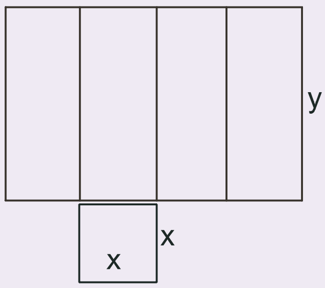
a) $I(p) = N(p)\cdot p = 300p - 6p^2$; **b)** $I(15) = 300\cdot 15 - 6\cdot 15^2 = 3150$ €;

c) $I'(p) = 300 - 12p \Rightarrow I'(p) = 0 \Rightarrow p = 25 \Rightarrow I''(p) = -12 \Rightarrow I''(25) = -12 < 0 \Rightarrow$ máximo para $p = 25$ €, con lo que

d) $I_{máx} = 300\cdot 25 - 6\cdot 25^2 = 3750$ €.

8. Una empresa fabrica latas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

Solución:



La figura es la misma que en el ejemplo 5, por lo que vamos a usar las mismas variables. Ahora vemos que la relación la proporciona el volumen (que es fijo) y la función a optimizar es el gasto en latón. ¿En qué consiste el gasto en latón? Si despiezamos la caja vemos que necesitamos 4 rectángulos de base x y altura y, y 1 cuadrado de lado x para su construcción. Por lo tanto, el gasto en latón nos lo proporciona la superficie total de la caja (Superficie de la base + Superficie lateral):

Función a optimizar: $S(x,y) = 4xy + x^2$

Relación entre las variables: $x^2 y = 500\ cm^3$

$$\text{Despejamos } y: y = \frac{500}{x^2}. \text{ Sustituyendo tenemos}: S(x) = 4x\cdot\frac{500}{x^2} + x^2 = \frac{2000}{x} + x^2 \Rightarrow S'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow S''(x) = \frac{4000}{x^3} + 2 \Rightarrow S''(10) = 6 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ El gasto de latón es mínimo para $x = 10\ cm$; $y = \frac{500}{100} = 5\ cm$, es decir, la caja ha de tener el lado de la base doble que la altura. El gasto mínimo será $S_{mín} = 300\ cm^2$.

Date cuenta de que los resultados cambiarían si la caja tuviera tapa que, para que encaje, ha de tener igual superficie que la base. Intenta repetir este ejercicio en este caso y verás que la caja ha de ser un cubo de arista

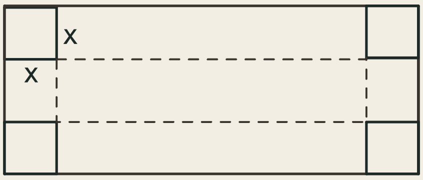
$\sqrt[3]{500}\ cm$ (has de racionalizar la fracción que aparece para y: $y = \frac{500}{\sqrt[3]{500^2}} = \frac{500\cdot\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{500^2}\cdot\sqrt[3]{500}} = \frac{500\cdot\sqrt[3]{500}}{500} = \sqrt[3]{500}$).

No estaría de más que el alumnado repasase sus conocimientos geométricos adquiridos en cursos anteriores, pues le serán de ayuda para la resolución de este tipo de problemas.

Actividades

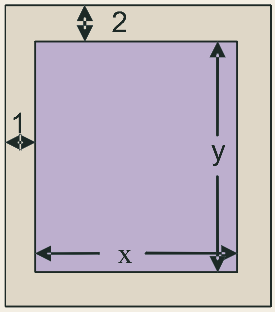
1. Dada la función $y = |x^2 - 7|$,
   a) represéntala gráficamente;
   b) halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$;
   c) averigua sus máximos y mínimos relativos.

2. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente se construye una caja (ver figura adjunta). Calcula x para que el volumen de dicha caja sea máximo.



3. Halla a y b para que $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (1,1).

4. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta x, en euros, por medio de la expresión $R(x) = -0{,}001x^2 + 3x + 2{,}5$.
   a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.
   b) ¿Qué rentabilidad obtendría?



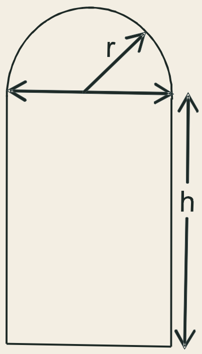
5. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

6. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de x gramos y $2 - x$ gramos, de forma que la suma de los valores de los dos rubíes sea mínima.

7. El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto es $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una de ellas es $50 - \frac{x}{4}$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

8. **a)** La segunda derivada de un polinomio de 2º orden que pasa por el punto (1,17) es 4. Halla el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en x = -1. **b)** Obtén las zonas en las que crece y las zonas en las que decrece.

9. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m.



10. a) Determina razonadamente a y b en la función $y = \dfrac{ax}{x^2 + b}$ sabiendo que tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.
    b) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en el caso $a = b = 1$.

11. Durante 31 días consecutivos las acciones de la compañía A y B han tenido unas cotizaciones dadas por las funciones $C_A = 0{,}02x^3 - 0{,}9x^2 + 7{,}5x + 100$ y $C_B = 0{,}1x^2 - 3x + 100$, donde x es el número de días transcurridos.

a) Halla las cotizaciones máxima y mínima de cada compañía y los días en que se han conseguido.

b) Halla los días en que las respectivas acciones estuvieron en alza (subiendo de precio) y los que estuvieron a la baja.

12. La temperatura T de una reacción química viene dada, en función del tiempo t (medido en horas) por la expresión $T(t) = 2t - t^2$, *para* $0 \le t \le 2$ *horas*. ¿Qué temperatura habrá a los 15 minutos? ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura? Halla las temperaturas máxima y mínima y los momentos en los que se producen.

13. Encuentra las funciones polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea $x - 1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$?

14. De dos funciones, f y g, se sabe que la representación gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos (0,2) y (2,0) (para la derivada de f) y una parábola que corta al eje OX en (0,0) y (4,0) y tiene por vértice (2,1) (para la derivada de g). Utilizando las gráficas de tales derivadas:

a) estudia el crecimiento y decrecimiento de f y g;

b) determina, si existen, máximos y mínimos de f y g.

15. Un granjero dispone de 3 000 € para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río, usando a éste como un lado del área cercada, es decir, construirá 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los dos lados restantes es de 3 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

16. La función del coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$.

Define la función del coste medio por unidad con $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. ¿A qué nivel de producción será mínimo el coste medio por unidad?

17. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m². El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 €, mientras que el metro lineal de tramo vertical cuesta 5 €. Determina: **a)** las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo; **b)** ¿cuánto cuesta el marco?

18. De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que tiene un mínimo en $x = 2$ y que su gráfica pasa por el punto (2, 2). ¿Cuánto vale la función en $x = -1$?

2. Estudio y representación de funciones

Como puede observarse, las funciones que van apareciendo presentan una complejidad cada vez mayor, por lo que requieren de métodos más sofisticados para su estudio. Ya no podemos conocer su comportamiento mediante una tabla de valores, como con las lineales, o a través de algunos puntos característicos de las funciones, como con las cuadráticas o las de proporcionalidad inversa más sencillas.

Debemos desechar la pretensión de conocer exactamente lo que hace una función punto a punto y tenemos que centrarnos en aquellos puntos que realmente caracterizan a la función. Ya hemos visto algunos, como los puntos críticos y los de inflexión. Estos puntos nos permiten averiguar el comportamiento de la función. Éste puede ser completado con el estudio de las asíntotas, del signo de la función, etc. Por lo tanto, nuestra pregunta es: ¿qué necesitamos estudiar de la función para conocerla con detalle? Después nos tocará el proceso de ajustar convenientemente toda la información obtenida, de modo que el puzzle encaje y no aparezcan resultados contradictorios.

Los pasos para efectuar el estudio y la representación gráfica de una función son los siguientes:

1. Cálculo del dominio de la función.
2. Estudio de la simetría y de la periodicidad.
3. Cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.
4. Estudio del signo de la función.
5. Cálculo de las asíntotas y de la forma en la que la función se acerca a ella.
6. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento).
7. Cálculo de los puntos críticos (máximos y mínimos relativos).
8. Estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y cálculo de los puntos de inflexión.

Los 5 primeros pasos se sacan directamente de la función; 6º y 7º de la derivada primera; 8º de la derivada segunda (también en el 7º podemos necesitar esta derivada). Habitualmente, el colofón de este estudio es el esbozo de una gráfica de la función, esto es, su representación gráfica.

Lógicamente, las informaciones obtenidas en los distintos pasos deben ser coherentes las unas con las otras y no entrar en contradicción. Si ocurriera esto último, hay que pensar que nos habremos confundido en algún punto y repetir los cálculos pertinentes hasta que desaparezcan las incongruencias. Repasemos cómo se efectúan cada uno de los cálculos anteriores.

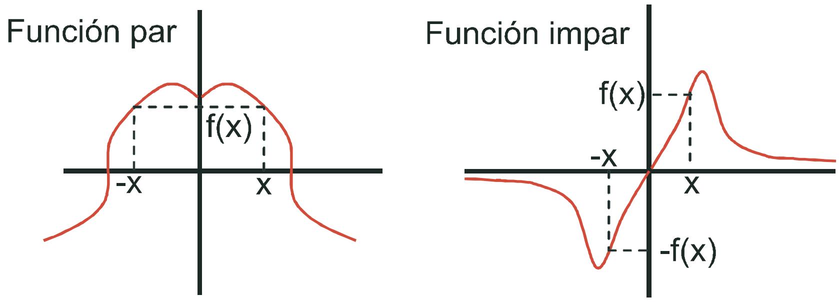
1. Dominio de la función.

Los casos en los que el dominio es distinto a $\Re$ son los siguientes:

Función	**Cálculo del dominio**
$f(x)=\dfrac{NUM(x)}{DEN(x)}$	$DEN(X)=0 \Rightarrow Dom\ f=\Re-\{x\in\Re\ /\ DEN(x)=0\}$
$f(x)=\sqrt{RADICANDO(x)}$	$RAD(x)\geq 0 \Rightarrow Dom\ f=\{x\in\Re\ /\ RAD(x)\geq 0\}$
$f(x)=\log ARGUMENTO(x)$	$ARG(X)>0 \Rightarrow Dom\ f=\{x\in\Re\ /\ ARG(x)>0\}$

2. **Simetría y periodicidad:**

   f es par si $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es simétrica respecto al eje *OY*.
   f es impar si $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.



   La función par coincide al doblarla respecto al eje *OY*. La impar coincide si trazamos rectas que pasen por el origen de coordenadas, o bien, doblando primero por el eje *OY* y después por el *OX*. Si no se verifica ninguna de las igualdades anteriores, decimos que la función no es simétrica.

   La periodicidad sólo se estudia para las funciones trigonométricas, por lo que prescindiremos de su estudio.

3. **Puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas:**

   Para averiguar las coordenadas de los puntos de corte de la función con el eje *OX* hay que igualar la función a cero. Escribimos abreviadamente: $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$. Tendremos tantos puntos de corte como soluciones tenga la ecuación $f(x) = 0$.

   Para hallar el punto de corte de la función con el eje *OY* hay que sustituir en la función la *x* por 0 (cero). Escribimos abreviadamente $f \cap OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, f(0))$. Tendremos uno o ningún punto de corte, dependiendo de la existencia de $f(0)$. Si al resolver la ecuación $f(x) = 0$ apareciera la solución $x = 0$, el punto de corte con el eje *OY* es el origen de coordenadas (0,0).

4. **Signo de la función**

   Para estudiarlo hay que resolver la inecuación $f(x) \geq 0$. Para hacerlo usaremos distintas estrategias dependiendo del tipo de función, aunque las dos fundamentales son las siguientes:

   I. Si la función es polinómica, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, descomponiéndose la recta real en intervalos dados por las soluciones de dicha ecuación.

   II. Si la función es un cociente de polinomios, se igualan numerador y denominador a cero por separado $\left.\begin{cases} NUM(X) = 0 \\ DEN(X) = 0 \end{cases}\right\}$ y se descompone la recta real en intervalos dados por las soluciones de ambas ecuaciones.

   Los demás puntos (asíntotas, monotonía, puntos críticos, curvatura y puntos de inflexión) ya han sido tratados en la lección anterior y en la presente, por lo que no repetiremos lo ya dicho.

   Para la representación se suele proceder de la forma siguiente:

   1. Marcamos los puntos de corte y los críticos. En estos últimos hacemos un arco: $\cap$ para un máximo y $\cup$ para un mínimo.
   2. Representamos las asíntotas y el comportamiento de la función en sus proximidades.
   3. Unimos los puntos y las líneas ya representadas.

Habitualmente las representaciones no suelen hacerse estrictamente a escala, ya que lo que interesa es destacar las propiedades más relevantes de la función, que pueden ser desvirtuadas por dicha escala.

Ejemplos

9. Estudia y representa la función $y = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Solución:

1) Dominio: como es un polinomio, $Dom\ y = \Re$.

2) Simetría: $y(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ No es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes:

$f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 2(doble) \Rightarrow (0,\ 0); (2,\ 0) \to f \cap OY \Rightarrow (0,\ 0)$.

4) Signo: $y = x(x-2)^2$. Como $x = 2$ es solución doble, no influye en el signo, puesto que el factor está elevado al cuadrado, siendo siempre positivo (salvo en $x = 2$ que sería cero). Hay que descomponer la recta real en dos trozos.

	$(-\infty, 0)$	$(0,\infty)-\{2\}$
sgn y	–	+

5) Asíntotas: AV: como se trata de una función polinómica no tiene asíntotas verticales.

$$\text{AH}: \lim_{x\to\pm\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) \approx \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \begin{cases} -\infty, \text{ cuando } x \to -\infty \\ \infty, \text{ cuando } x \to \infty \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

$$\text{A Ob}: m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Al ser una función polinómica de grado superior al primero, no tiene asíntotas de ningún tipo. Los límites en el infinito permiten averiguar hacia dónde va la función.

6) Monotonía: $y' = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ 2$.

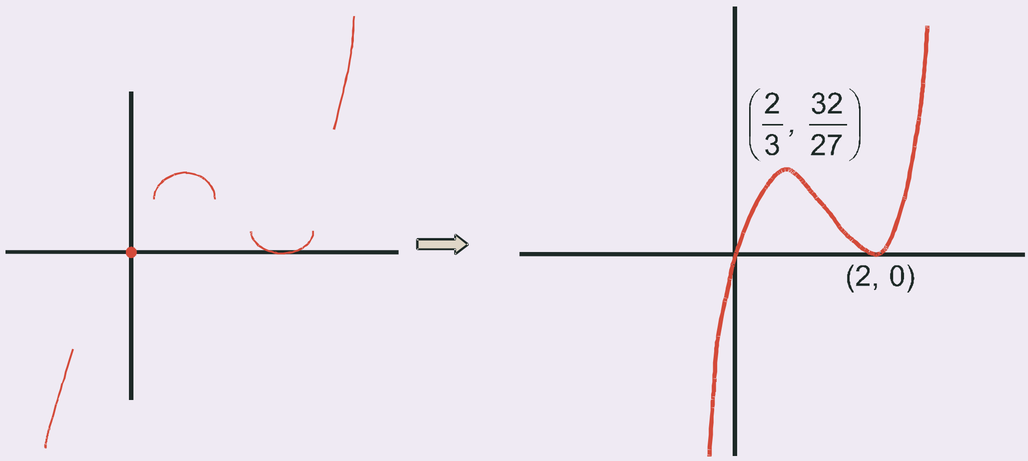
	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2,\infty)$
sgn y'	+	–	+
y	C↑	D↓	C↑

7) Puntos Críticos: máximo en el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo en (2,0).

8) Curvatura: $y'' = 6x - 8 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Punto de inflexión $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$.

Te recordamos que todas las ordenadas de los puntos se calculan en la función, no en sus derivadas.

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
sgn y''	–	+
y	$\cap$	$\cup$



10. Estudia y representa la función $y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5$.

Solución:

1) Dominio: como es un polinomio, *Dom y* = $\mathfrak{R}$.

2) Simetría: $y(-x)=\frac{(-x)^4}{12}-\frac{(-x)^3}{6}-(-x)^2+5=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2+5\begin{cases}\neq y(x)\\ \neq -y(x)\end{cases}\Rightarrow$ No es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f\cap OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \textit{No se pueden hallar} \\ f\cap OY \Rightarrow y(0)=5 \Rightarrow (0,\ 5)\end{cases}$.

Aunque usemos la Regla de Ruffini para resolver la ecuación *y = 0*, no obtenemos los puntos de corte. Sólo puede hacerse con métodos numéricos, procedimientos que superan el nivel de este curso. Debemos esperar y ver si con el resto de los datos podemos esbozar la gráfica de la función.

4) Signo: no puede estudiarse.

5) Asíntotas:

AV: no tiene asíntotas verticales por ser un polinomio.

$$\text{AH}: \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5\right)\approx \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{12}=\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

$$\text{A Ob}: m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5}{x}\approx \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{12}=\pm\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

6) Monotonía: $y'=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-2\right)=0 \Rightarrow x=x_1,\ 0,\ x_2.$

$$\text{con } x_1=\frac{3-\sqrt{105}}{4}\cong -1{,}81;\ x_2=\frac{3+\sqrt{105}}{4}\cong 3{,}31.$$

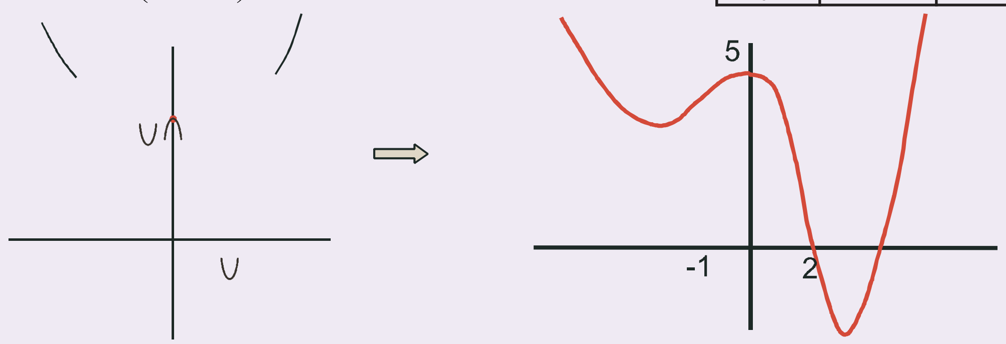
7) Puntos críticos: mínimos en $(x_1,\ y(x_1))$ y $(x_2,\ y(x_2))$ y máximo en $(0,\ 5)$, con $y(x_1)\cong 3{,}61$; $y(x_2)\cong -1{,}997$.

	$(-\infty,\ x_1)$	$(x_1,\ 0)$	$(0,\ x_2)$	(x_2,∞)
sgn y'	–	+	–	+
y	*D*↓	*C*↑	*D*↓	*C*↑

8) Curvatura: $y''=x^2-x-2 \Rightarrow y''=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1,\ 2.$

Puntos de inflexión: $\left(-1,\ \frac{17}{4}\right);(2,\ 1)$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\ 2)$	$(2,\infty)$
sgn y''	+	–	+
y	∪	∩	∪



A la vista de la gráfica, observamos que la función corta al eje *OX*, en dos puntos ambos con abscisas positivas mayores que dos.

11. Estudia y representa la función $y = \dfrac{x-7}{x+2}$.

Solución:

1) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow Dom\ y = \Re - \{-2\}$.

2) Simetría: $y(-x) = \dfrac{-x-7}{-x+2} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ no es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7,\ 0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \dfrac{-7}{2} \Rightarrow \left(0,\ -\dfrac{7}{2}\right) \end{cases}$.

4) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 7)$	$(7, \infty)$
$sgn\ y$	$\dfrac{-}{-} = +$	$\dfrac{-}{+} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$

5) Asíntotas:

$AV: x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-7}{x+2} = \dfrac{-9}{0^-} = \infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-7}{x+2} = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty \end{cases}$; AH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-7}{x+2} \approx \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1$ No tiene A Ob por tener horizontal.

$y - y_H = \dfrac{x-7}{x+2} - 1 = \dfrac{-9}{x+2} = \begin{cases} > 0, \text{cuando } x \to -\infty \Rightarrow y > y_H \\ < 0, \text{cuando } x \to \infty \Rightarrow y < y_H \end{cases}$.

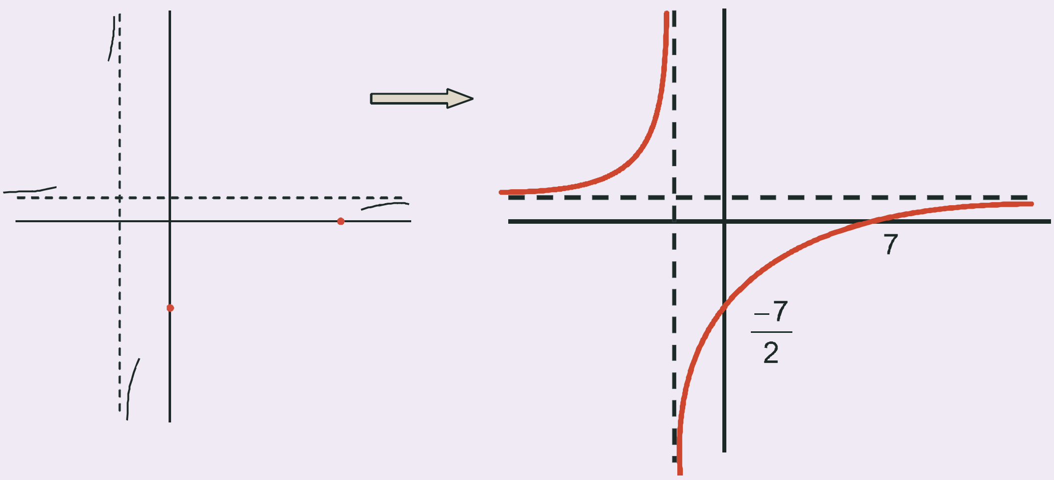
6) Monotonía: $y' = \dfrac{9}{(x+2)^2} \Rightarrow y' > 0 \text{ en } \Re - \{-2\} \Rightarrow$ y es creciente en todo su dominio.

7) No tiene puntos críticos, porque $y' \neq 0$.

8) Curvatura: $y'' = \dfrac{-18}{(x+2)^3} \begin{cases} NUM < 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$sgn\ y''$	+	–
y	$\cup$	$\cap$

No tiene puntos de inflexión, pues $y'' \neq 0$.



12. Estudia y representa la función $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$.

Solución:

1) Dominio : $DEN=0\Rightarrow x=5\Rightarrow Dom\ y=\Re-\{5\}$.

2) Simetría : $y(-x)=\dfrac{(-x)^2-5(-x)+4}{-x-5}=\dfrac{x^2+5x+4}{-x-5}\begin{cases}\neq y(x)\\ \neq -y(x)\end{cases}\Rightarrow$ no es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes : $\begin{cases} f\cap OX\Rightarrow y=0\Rightarrow x=1,4\Rightarrow(1,0);(4,0)\\ f\cap OY\Rightarrow y(0)=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow\left(0,-\dfrac{4}{5}\right)\end{cases}$

4) Signo : $\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=1,4\\ DEN=0\Rightarrow x=5\end{cases}$

	$(-\infty,1)$	$(1,4)$	$(4,5)$	$(5,\infty)$
sgn y	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{+}=+$

5) Asíntotas: AV: $x=5\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}==\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}=\dfrac{4}{0^+}=\infty\end{cases}$. AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\Rightarrow$ no tiene AH.

AOb: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-5}=0\Rightarrow y_{Ob}=x$. Se acerca del modo siguiente: $y-y_{Ob}=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}-x=\dfrac{4}{x-5}\Rightarrow \mathrm{sgn}(y-y_{Ob})=\mathrm{sgn}\left(\dfrac{4}{x-5}\right)=\begin{cases}<0,\ cuando\ x\to-\infty\\ >0,\ cuando\ x\to\infty\end{cases}$

6) Monotonía: $y'=\dfrac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=3,7\\ DEN>0\ en\ \Re-\{5\}\end{cases}$

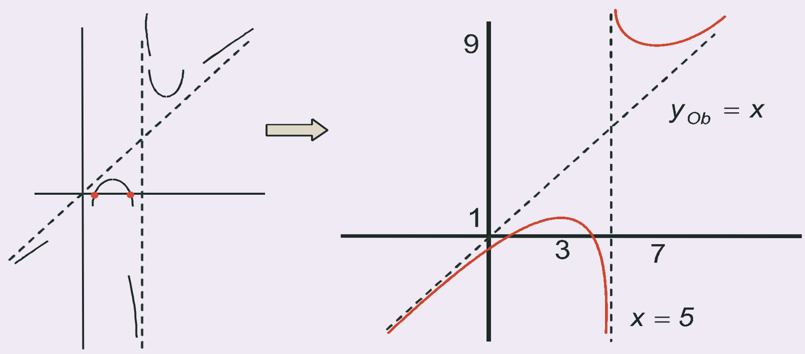
	$(-\infty,3)$	$(3,7)-\{5\}$	$(7,\infty)$
sgn y'	+	–	+
y	C↑	D↓	C↑

7) Puntos críticos: máximo en (3,1) y mínimo en (7,9).

8) Curvatura: $y''=\dfrac{8}{(x-5)^3}\begin{cases}NUM>0\\ DEN=0\Rightarrow x=5\end{cases}$

	$(-\infty,5)$	$(5,\infty)$
sgn y''	–	+
y	∩	∪

No tiene puntos de inflexión.



13. Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$.

Solución:

1) Dominio: $DEN=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow Dom\, f=\Re-\{-3,3\}$.

2) Simetría: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+9}{(-x)^2-9}=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto al eje OY.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f\cap OX \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2+9\neq 0 \Rightarrow No\ corta\ al\ eje\ OX \\ f\cap OY \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow (0,-1) \end{cases}$

4) Signo: $\begin{cases} NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
sgn f	+	–	+

5) Asíntotas: AA VV: $x=-3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{18}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{18}{0^-}=-\infty \end{cases}$; $x=3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{9}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{9}{0^+}=\infty \end{cases}$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}\approx \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1 \Rightarrow y_H=1$; $f-y_H=\dfrac{18}{x^2-9}>0$ *cuando* $x\to\pm\infty$. No tiene AOb por tener AH.

6) Monotonía: $f'(x)=\dfrac{-36x}{\left(x^2-9\right)^2} \begin{cases} NUM=0 \Rightarrow x=0 \\ DEN>0\ en\ \Re-\{\pm 3\} \end{cases}$

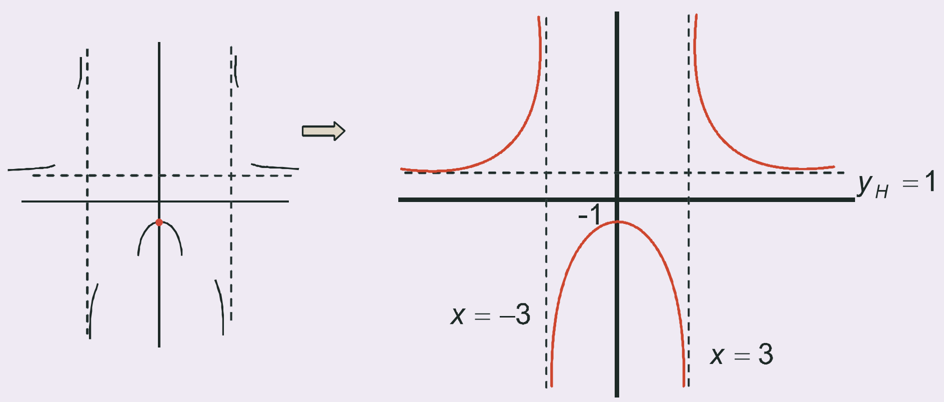
	$(-\infty,0)$-{-3}	$(0,\infty)$-{3}
sgn f'	+	–
f	C↑	D↓

7) Puntos críticos: máximo en $(0,-1)$.

8) Curvatura: $f''(x)=\dfrac{108x^2+324}{\left(x^2-9\right)^3} \begin{cases} NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$

No tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
sgn f''	+	–	+
f	∪	∩	∪



14. Estudia y representa la función $y = \dfrac{x}{x^2+9}$.

Solución:

1) Dominio : $DEN > 0 \Rightarrow Dom\ y = \Re$.

2) Simetría : $y(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+9} = -\dfrac{x}{x^2+9} = -y(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

3) Puntos de corte con los ejes : $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$. Corta a ambos ejes en el origen de coordenadas.

4) Signo : $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y	–	+

5) Asíntotas : No tiene AV; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+9} \approx \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\leftarrow\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow y_H = 0$;

$y - y_H = \dfrac{x}{x^2+9} \begin{cases} < 0, \text{cuando } x \to -\infty \Rightarrow y < y_H \\ > 0, \text{cuando } x \to \infty \Rightarrow y > y_H \end{cases}$. No tiene AOb por tener AH.

6) Monotonía: $y' = \dfrac{9-x^2}{(x^2+9)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ DEN > 0 \end{cases}$

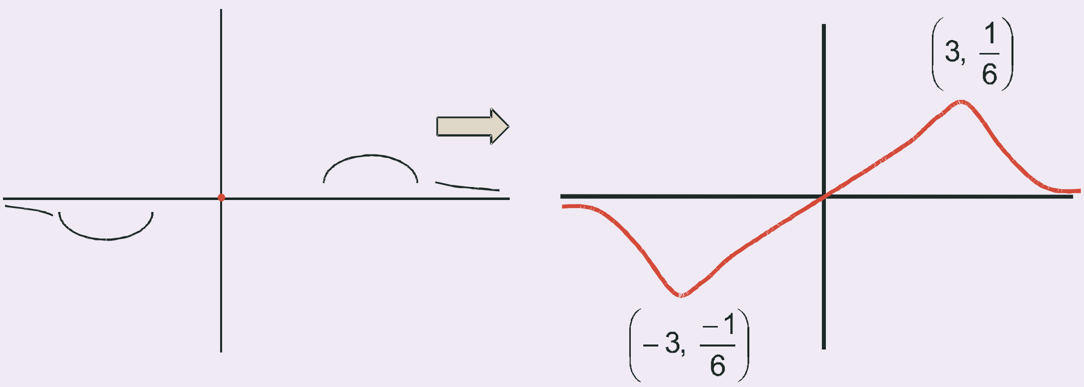
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
sgn y'	–	+	–
y	*D*↓	*C*↑	*D*↓

7) Puntos críticos: mínimo en $\left(-3, -\dfrac{1}{6}\right)$ y máximo en $\left(3, \dfrac{1}{6}\right)$.

8) Curvatura: $y'' = \dfrac{2x(x^2-27)}{(x^2+9)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{27}, 0, \sqrt{27} \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, -\sqrt{27})$	$(-\sqrt{27}, 0)$	$(0, \sqrt{27})$	$(\sqrt{27}, \infty)$
sgn y''	–	+	–	+
y	∩	∪	∩	∪

Puntos de inflexión: $\left(-3\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{12}\right)$; $(0, 0)$; $\left(3\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)$.



15. Estudia y representa la función $y = e^{-x^2}$.

Solución:

1) Dominio: *Dom* $y = \Re$.

2) Simetría: $y(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = y(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje *OY*.

3) Puntos de corte: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \textit{No corta al eje OX} \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0,\ 1) \end{cases}$

4) Signo: la función es siempre positiva.

5) Asíntotas: no tiene AV; AH: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow y_H = 0$. La función va siempre por encima de la asíntota horizontal, por ser positiva. No tiene A Ob por tener horizontal.

6) Monotonía: $y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
sgn y'	+	–
y	C↑	D↓

7) Puntos críticos: máximo en $(0,1)$.

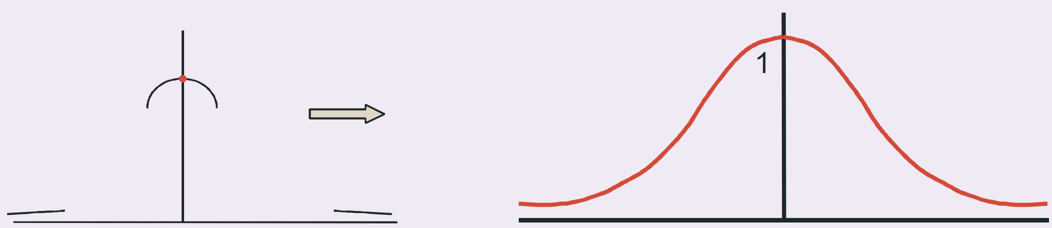
8) Curvatura:

$$y'' = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$
sgn y''	+	–	+
y	∪	∩	∪

Puntos de inflexión:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-1/2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$



16. Estudia y representa la función $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Solución:

1) Dominio: *DEN* > 0 ⇒ *Dom* $y = \Re$.

2) Simetría: $y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = y(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto del eje *OY*.

3) Puntos de corte con los ejes: $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = 0(doble) \Rightarrow$ la función corta a los ejes en el origen de coordenadas (0, 0).

4) Signo: la función es siempre positiva.

5) Asíntotas: no tiene AV; AH: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y_H = 1$. La función se acerca a la asíntota como:

$$y - y_H = \frac{x^2}{x^2+1} - 1 = \frac{-1}{x^2+1} < 0 \Rightarrow y < y_H$$. No tiene AOb.

6) Monotonía: $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases}$

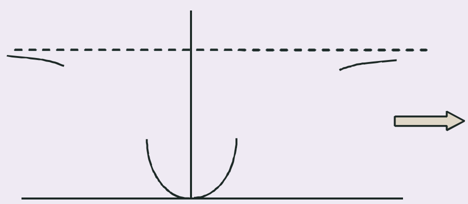
	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$sgn\ y'$	–	+
y	D↓	C↑

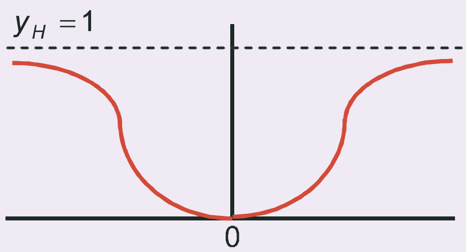
7) Puntos críticos: mínimo en (0, 0).

8) Curvatura: $y'' = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$sgn\ y''$	–	+	–
y	∩	∪	∩

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$





17. Estudia y representa la función $y = \frac{1-x^2}{(x+2)^2}$.

Solución:

1) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = -2$ doble $\Rightarrow Dom\ y = \Re - \{-2\}$.

2) Simetría: $y(-x) = \frac{1-(-x)^2}{(-x+2)^2} = \frac{1-x^2}{(2-x)^2} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ no es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1,\ 0); (-1,\ 0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(0,\ \frac{1}{4}\right) \end{cases}$.

4) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ DEN > 0 \text{ en } \Re - \{-2\} \end{cases}$

	$(-\infty, -1)-\{-2\}$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$sgn\ y$	–	+	–

5)

Asíntotas: AV: $x=-2 \Rightarrow \lim_{x\to -2} \dfrac{1-x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x^2}{(x+2)^2} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y_H = -1$. Se acerca como:

$y - y_H = \dfrac{1-x^2}{(x+2)^2} + 1 = \dfrac{4x+5}{(x+2)^2} \approx \dfrac{4}{x} \begin{cases} <0, \text{ cuando } x \to -\infty \\ >0, \text{ cuando } x \to \infty \end{cases}$. No tiene AOb por tener AH.

6) Monotonía: $y' = \dfrac{-2(2x+1)}{(x+2)^3}$

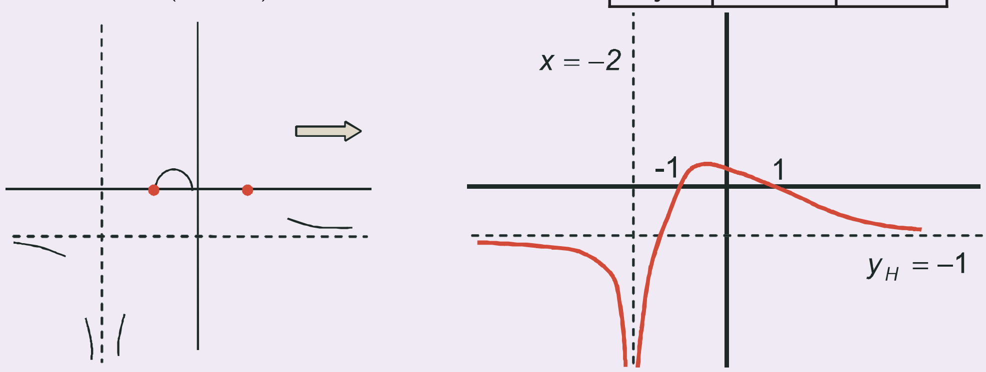
	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
sgn y'	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$
y	D↓	C↑	D↓

7) Puntos críticos: Máximo en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

8) Curvatura: $y'' = \dfrac{2(4x-1)}{(x+2)^4} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ DEN > 0 \text{ en } \Re - \{-2\} \end{cases}$

	$(-\infty, 1/4)$	$(1/4, \infty)$
sgn y''	–	+
y	∩	∪

Punto de inflexión: $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{27}\right)$.



Actividades

19. Estudia y representa la función $y = x^3 - 3x$.

20. Construye la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

21. Estudia y representa la función $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

22. Construye la curva $y = \dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

23. Representa la función $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

24. Construye la curva $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

25. Estudia y representa la función $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$.

26. Estudia y representa la función $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$.

RECUERDA

✓ Optimización de funciones

- Optimizar una función consiste en buscar sus extremos relativos.
- El problema habitual es construir la función a optimizar, para lo que no hay regla fija. Conviene efectuar una lectura detallada del problema. Si es de índole geométrica, no viene mal hacer un esbozo gráfico, para identificar las variables.
- Aparte de la estrategia función a optimizar y relación entre variables, cuando procede, es habitual tener que minimizar el coste unitario conocido el coste por x unidades. La función a optimizar se obtiene dividiendo el coste por x unidades entre x:

$$\text{Coste unitario} = \frac{\text{Coste por } x \text{ unidades}}{x}.$$

✓ Estudio y representación de funciones

- El estudio que nos permite representar cualquier función sigue los siguientes pasos:

  1. Cálculo del dominio de la función.
  2. Estudio de la simetría y de la periodicidad.
  3. Cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.
  4. Estudio del signo de la función.
  5. Cálculo de las asíntotas y de la forma en la que la función se acerca a ella.
  6. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento).
  7. Cálculo de los puntos críticos (máximos y mínimos relativos).
  8. Estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y cálculo de los puntos de inflexión.

- Las funciones que tienen asíntotas están muy determinadas por éstas, por lo que casi pueden representarse con los 5 primeros puntos. Los otros 3 restantes sirven para verificar nuestras suposiciones. Por supuesto, la información obtenida en uno de los pasos anteriores no puede estar en contradicción con otra procedente de otro paso distinto.