2 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

La vista de los edificios de la foto invita a la comparación de sus alturas entre las que existen grandes diferencias. En matemáticas las desigualdades juegan un papel fundamental; existen tratados completos dedicados a su estudio y algunas son tan importantes que hasta tienen nombre: desigualdad triangular, desigualdad de Cauchy-Schwarz etc. En diversas ciencias aparecen problemas que precisan con frecuencia de las desigualdades; por este motivo conviene estar familiarizado con varias de ellas y con las técnicas generales para su manejo.

Comienza la Unidad con la presentación de los signos de desigualdad, mayor o menor que, para establecer desigualdades e inecuaciones que reflejan situaciones en las que se sobrepasa o no se llega a un cierto valor conocido.

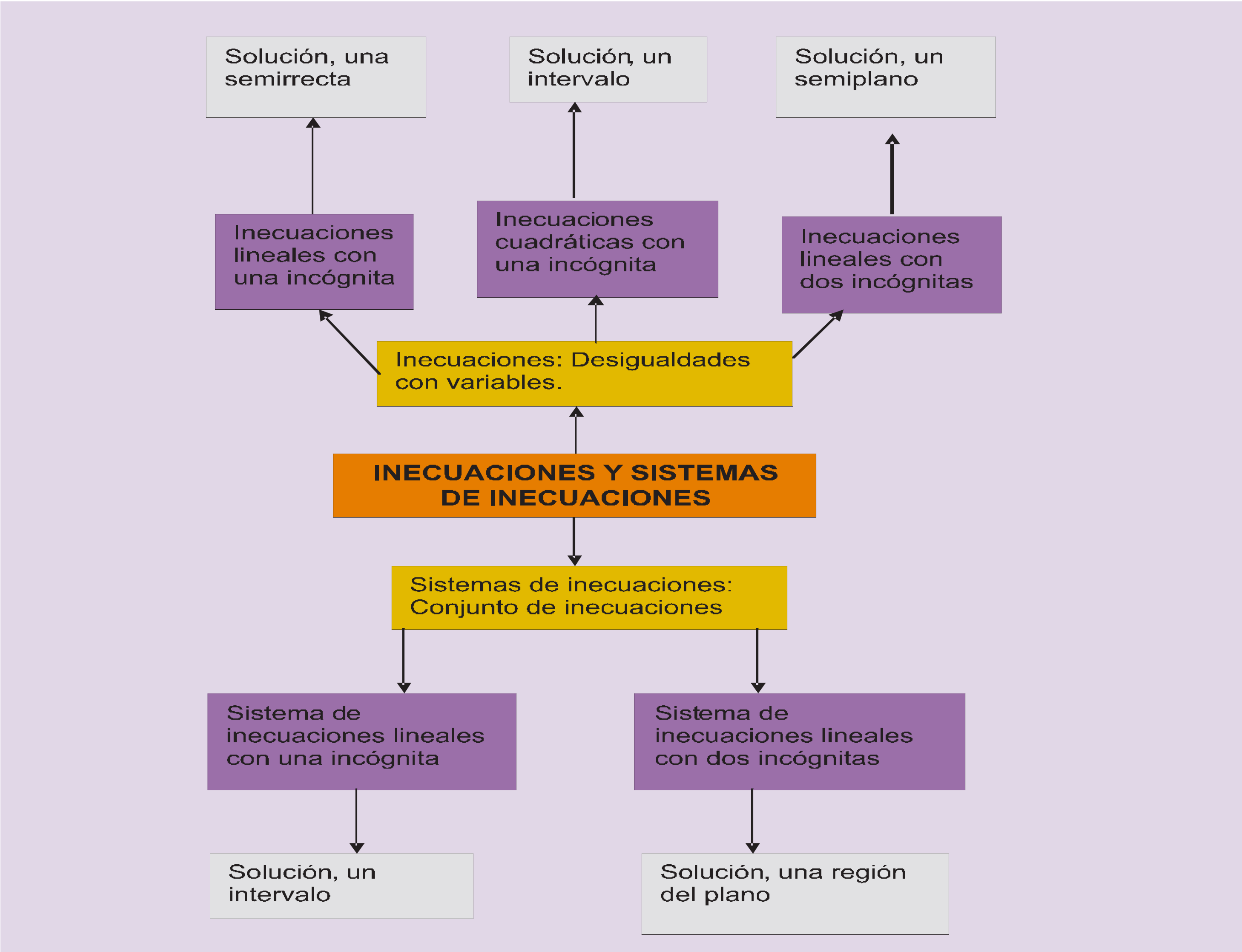
Se estudian a continuación inecuaciones lineales con una y dos incógnitas, así como inecuaciones cuadráticas de una incógnita.

Se introducen los sistemas de inecuaciones de una y dos incógnitas; estos últimos desempeñan un importante papel en diversos problemas que se presentan en matemática, entre ellos en matemática aplicada, tales como la búsqueda de máximos o mínimos (problemas de optimización). Las desigualdades que dichos problemas plantean y que se tratarán en la Unidad siguiente, expresan el hecho de que la variable que se considera es menor (o mayor) o a lo sumo igual al valor máximo (o mínimo) que proporciona la solución.

Foto: Augusto Sánchez

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Conocer la terminología de las desigualdades.
2. Manejar las transformaciones que permiten convertir una inecuación en otra equivalente.
3. Dominar las técnicas que permiten encontrar las soluciones de inecuaciones lineales de una y dos incógnitas.
4. Determinar las soluciones de inecuaciones cuadráticas.
5. Conocer la terminología usada en sistemas de inecuaciones lineales de una y dos incógnitas.
6. Manejar las transformaciones que permiten convertir un sistema de inecuaciones en otro equivalente y encontrar sus soluciones.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Inecuaciones

Las relaciones numéricas o algebraicas separadas por los signos < (menor), ≤ (menor o igual), > (mayor), ≥ (mayor o igual) se llaman desigualdades.

Las desigualdades en las que intervienen variables se llaman **inecuaciones**; las siguientes desigualdades son inecuaciones:

$$x > y;\ \ x \geq 18;\ 4y \geq 32.$$

Cada valor numérico de la variable, que convierte la desigualdad en verdadera, es una **solución particular de una inecuación**; por ejemplo, $x = 19$ e $y = 15$ son soluciones particulares de las desigualdades anteriores.

El conjunto de todas las soluciones particulares de una inecuación es la **solución general de la inecuación**.

Resolver una inecuación es encontrar su solución general.

Comprobar una solución particular consiste en sustituir el valor de la variables en la inecuación y ver que se establece una desigualdad numérica verdadera.

Ejemplo

1. Dada la inecuación $\frac{5x+5}{4x-2} \geq \frac{x-3}{2x+5}$, comprobar si los valores **a)** $x = -2$, **b)** $x = 0$, **c)** $x = 1$ son soluciones de la inecuación.

Solución:

Se sustituyen los valores de x en la inecuación y si se obtienen desigualdades numéricas verdaderas será solución, en caso contrario no lo será.

a) $\frac{5\cdot(-2)+5}{4\cdot(-2)-2} \geq \frac{-2-3}{2\cdot(-2)+5} \Rightarrow \frac{-5}{-10} \geq \frac{-5}{1} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq -5$, desigualdad verdadera, $x = -2$ es solución.

b) $\frac{5\cdot 0+5}{4\cdot 0-2} \geq \frac{0-3}{2\cdot 0+5} \Rightarrow \frac{5}{-2} \geq \frac{-3}{5} \Rightarrow -\frac{5}{2} \geq -\frac{3}{5}$, desigualdad falsa, $x = 0$ no es solución.

c) $\frac{5\cdot 1+5}{4\cdot 1-2} \geq \frac{1-3}{2\cdot 1+5} \Rightarrow \frac{10}{2} \geq \frac{-2}{7} \Rightarrow 5 \geq -\frac{2}{7}$, desigualdad verdadera, $x = 1$ es solución.

Actividades

1. Comprueba si los valores $x = 2$; $x = 3$ son soluciones particulares de las inecuaciones siguientes: **a)** $3x^2 + 7 > 12$; **b)** $(x + 3)(x - 2) \geq 0$.

2. Dada la inecuación $\frac{2x+3}{3x-5} \leq 2$, de los siguientes valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$ indica los que son soluciones.

2. Inecuaciones equivalentes

Las **inecuaciones equivalentes** tienen la misma solución general.

Las inecuaciones $x + 2 > 5$ y $x^2 + x > x^2 + 3$ son equivalentes, ambas tienen por solución los valores de x que superen a 3.

Resolver una inecuación consiste en transformarla en otra equivalente en la que sea sencillo hallar la solución, para lo que se aplican los siguientes principios de equivalencia.

- Si se suman o restan a los dos miembros de una inecuación la misma expresión algebraica, la inecuación que resulta es equivalente a la primera.

  $$p(x) < q(x) \iff p(x) + a(x) < q(x) + a(x)$$

  Por ejemplo, las inecuaciones $x^2 + 2x < 6 + x^2$ y $2x < 6$ son equivalentes; la segunda se obtiene al sumar $(-x^2)$ a los dos miembros de la inecuación; ambas tienen como solución general los número reales $x < 3$; o sea el intervalo $(-\infty, 3)$.

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número positivo, la inecuación que resulta es equivalente a la primera.

  $$\text{Si } a > 0 \text{ y } p(x) < q(x) \iff a\,p(x) < a\,q(x)$$

  Por ejemplo, las inecuaciones $6x + 12 \geq 18$ y $x + 2 \geq 3$ son equivalentes; ambas tienen como solución los números reales $x \geq 1$, o sea, el intervalo $[1, \infty)$.

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la inecuación cambiada de sentido es equivalente a la primera.

  $$\text{Si } a < 0 \text{ y } p(x) < q(x) \iff a\,p(x) > a\,q(x)$$

  Por ejemplo, las inecuaciones $-3x + 9 > 3$ y $3x - 9 < -3$ son equivalentes; ambas tienen como solución general los números reales $x < 2$, o sea, el intervalo $(-\infty, 2)$.

Actividades

3. Escribe dos inecuaciones equivalentes a las inecuaciones siguientes:

a) $3x - 12 \leq 6$; **b)** $2x + 8 > -4$; **c)** $5x + 3 < 2x - 4$.

4. Demuestra que las siguientes inecuaciones son equivalentes:

$$x - \frac{5}{3}x + 8 < 2 \quad \text{y} \quad 2x > 18.$$

5. ¿Son equivalentes las inecuaciones $3x - \frac{3}{2}x + 8 \leq 2 + \frac{1}{3}x$ y $x + 4 \leq \frac{2x}{9}$?

3. Inecuaciones lineales

Se llaman inecuaciones lineales aquellas en las que las variables son todas de primer grado; la inecuaciones siguientes son lineales:

$$3x + 5 \leq 17; \quad 2x - y \geq 5.$$

La primera tiene una incógnita, la segunda dos, pero todas de primer grado.

3.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Una **inecuación lineal con una incógnita** o de primer grado es toda desigualdad que si se simplifica resulta equivale a la siguiente: $ax + b > 0$, con $a \neq 0$.

Es evidente que en la expresión $ax + b > 0$ puede aparecer cualquiera de los cuatro signos de desigualdad: $<, \leq, >$ o $\geq$.

Solución general de una inecuación con una incógnita son los puntos de un intervalo.

La solución general de una inecuación se interpreta con facilidad si se realiza una representación gráfica de la misma.

Ejemplo

2. Resuelve la inecuación: $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} - 1 \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$.

Solución:

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 12

Se multiplican los dos miembros por 12: $12\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6} - 1\right) \leq 12\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

Se quitan paréntesis y se simplifica: $3x + 2x - 12 \leq 8x + 6$

Transponemos términos: $3x + 2x - 8x \leq 12 + 6$

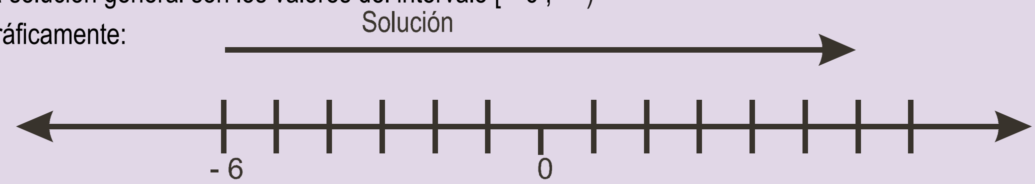
Se simplifica: $-3x \leq 18$

Se dividen los dos miembros por (-3): $x \geq \frac{18}{-3}$

Se realiza la división: $x \geq -6$

La solución general son los valores del intervalo $[-6, \infty)$

Gráficamente:



3.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Si una desigualdad, después de transformaciones equivalentes entre desigualdades, se expresa simplificada bajo la forma $y > ax + b$ con $a \neq 0$; la desigualdad puede aparecer con cualquiera de los signos ($\geq$, $<$, $\leq$) estamos ante una **inecuación lineal con dos incógnitas**.

Resolver una inecuación con dos incógnitas es encontrar los valores (x, y) que satisfacen la desigualdad; estos valores se visualizan con facilidad sobre un plano cartesiano.

La recta $y = a\,x + b$ divide al plano en dos semiplanos; los puntos del semiplano que hacen verdadera la desigualdad $y > a\,x + b$ forman la **solución general** de dicha inecuación. Una solución particular será cualquier punto que satisfaga la inecuación.

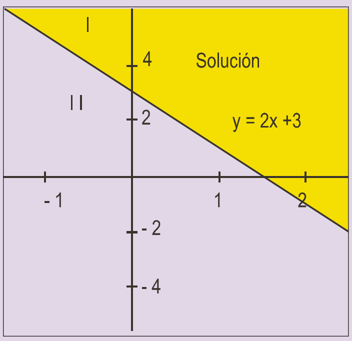
La recta $y = ax + b$ de división de los semiplanos se llama **frontera**; sus puntos pertenecen a la solución general en el caso de desigualdades en sentido amplio (**≤** o **≥**), y no pertenecen si se trata de desigualdades en sentido estricto (**<** o **>**)

Ejemplos

3. Resolver la inecuación $2x + y \geq 3$.

Solución:

Se transforma la inecuación: $y \geq -2x + 3$.

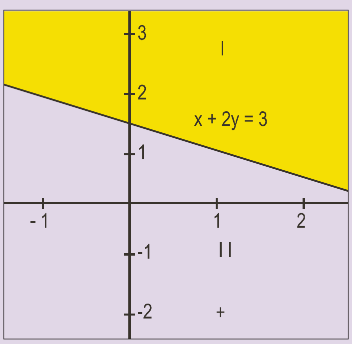


La recta $y = -2x + 3$ divide al plano en los semiplanos: **I** y **II** , uno de ellos es la solución.

Para determinar cuál de ellos es la solución tomamos un punto sencillo de uno de ellos, por ejemplo (0, 0), y los sustituimos en la inecuación: $0 + 0 \geq 3$. Como la desigualdad que resulta es falsa, el punto (0, 0) no es solución; la solución serán los de la región que no contiene el punto mencionado; esto es, los puntos del semiplano **I**.

4. Encontrar la solución general de la inecuación $x + 2y > 3$. Indicar si la frontera forma parte de la solución.

Solución:

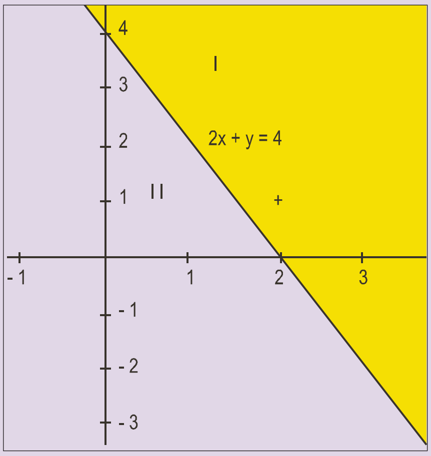


La recta $x + 2y = 3$ divide al plano en los semiplanos **I** y **II**.

Se elige un punto del semiplano **II**; el más sencillo es (0, 0) y se sustituye en la inecuación $0 + 2 \cdot 0 > 3$; la desigualdad es falsa, por lo que el origen y todos los puntos del semiplano **II** no son solución; la solución general la forman los puntos del semiplano **I**.

Los puntos de la frontera no son solución; la desigualdad es estricta; por ejemplo, el punto (1, 1) de la recta, al sustituirlo en la inecuación $1 + 2 \cdot 1 > 3$, proporciona una desigualdad falsa.

5. Encontrar la solución general de la inecuación: $-x-3y \geq -\frac{5}{2}y-2$.



Solución:

Sumar a los dos miembros: $\frac{5}{2}y$; queda $-x-3y+\frac{5}{2}y \geq -2$

Multiplicar por (–2) los dos miembros: $2x + 6y - 5y \leq 4$

Operar: $2x + y \leq 4$.

Sustituir (0, 0) en la inecuación; $2 \cdot 0 + 0 \leq 4$, desigualdad verdadera. La solución general está formada por los puntos del semiplano **II**, sin colorear.

Actividades

6 (a,b,c)

6 (d,e,f)

6. Resuelve y representa las soluciones de las inecuaciones.

a) $\frac{3x+4}{5} > 8$; **b)** $\frac{x+3}{3} < \frac{x+1}{5}$; **c)** $\frac{x-2}{4} \geq \frac{2x-4}{3}$; **d)** $\frac{x+2}{3} \geq \frac{9+x}{24} - \frac{x+1}{4}$; **e)** $\frac{x+2}{6} - \frac{x}{24} \leq \frac{x+1}{3} - \frac{x+1}{4}$;

f) $\frac{1+x}{2} < \frac{1+3x}{5}$.

7. Mandar un paquete por una empresa de transportes cuesta 3 euros más 0,10 euros por cada 100 g. Por el servicio de urgencia cuesta 4,50 euros más 0,06 euros por cada 100 g. ¿A partir de qué peso son más baratos los envíos por urgencias?

8. Encontrar gráficamente las soluciones de las inecuaciones lineales con dos incógnitas: **a)** $x \geq 0$; **b)** $y \geq 0$; **c)** $x \geq 1$; **d)** $x + y \leq 3$; **e)** $2x - 4y > 0$.

9. Representa las soluciones de las inecuaciones: **a)** $4x - 2y \leq 6$; **b)** $-6x + 3y \geq 9$; **c)** $x - y \leq 3$; **d)** $4x - 2y \geq 12$.

10. Encontrar la solución general de la inecuación: $-\frac{3}{2}x - \frac{3}{5}y > x - y - 2$.

11. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x-5 > \frac{x}{2}$; **b)** $6x-7 < 3(x-1)$; **c)** $6x-12 \leq \frac{3x}{2}+6$; **d)** $3x-6-\frac{x}{2} \geq 3-2x$.

12. Resuelve analítica y gráficamente las inecuaciones siguientes:

a) $3x+4y \leq 12$; **b)** $x-3y \geq 0$; **c)** $4x+3y \leq 6$; **d)** $3x+4y \geq 24$.

4. Inecuaciones de segundo grado

Las **inecuaciones de segundo grado** en su forma reducida son expresiones como $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$; pueden aparecer con cualquiera de los otros signos de desigualdad ($<$, $\leq$, $\geq$).

El estudio de este tipo de inecuaciones se puede realizar para $a > 0$; si a es menor que cero, se multiplica el trinomio por -1, para estar en el caso anterior.

Las soluciones de estas inecuaciones están íntimamente ligadas al número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; conforme veremos en siguientes ejemplos.

Ejemplos

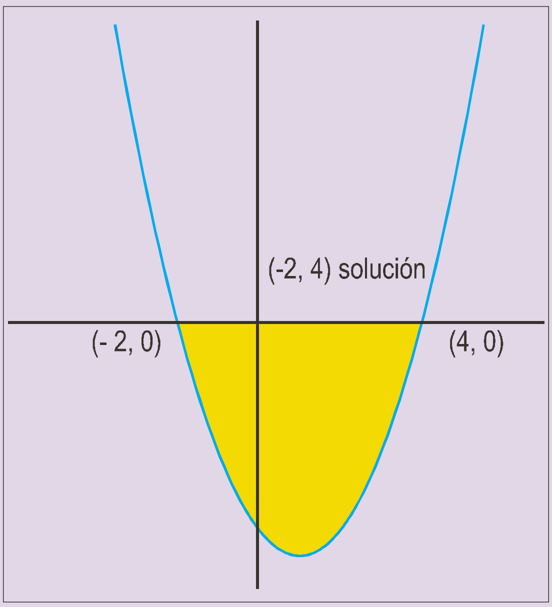
6. Resuelve la inecuación $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

Solución:

Se resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Las soluciones son: $x = -2$ y $x = 4$.

Se factoriza el trinomio: $(x + 2)(x - 4) \leq 0$.



Se divide la recta en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, \infty)$

Se toma un valor de x del primer intervalo; por ejemplo $x = -3$ y se sustituye en trinomio factorizado:

$(-3 + 2)(-3 - 4) = 7 > 0$, no cumple la desigualdad propuesta; luego el primer intervalo no es la solución.

Se repite el mismo proceso con un valor de x del segundo intervalo, por ejemplo $x = 0$; $(0 + 2)(0 - 4) = -8 < 0$ cumple la desigualdad propuesta, luego el intervalo $(-2, 4)$ es solución.

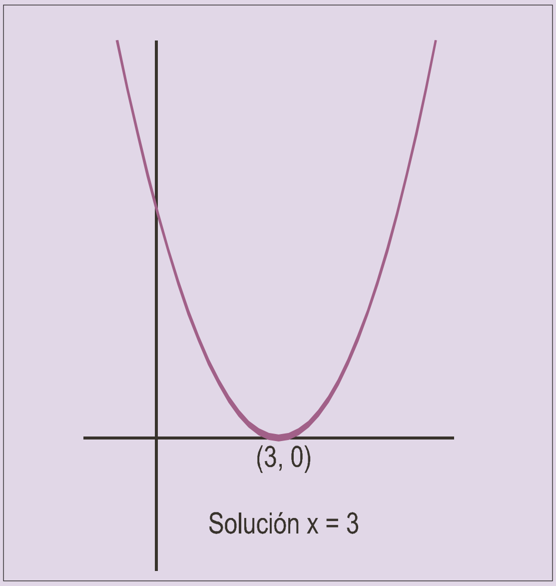
Se repite el proceso con un valor para x del tercer intervalo, por ejemplo $x = 5$; $(5 + 2)(5 - 4) = 7 > 0$, no cumple la desigualdad propuesta, luego el tercer intervalo no es solución.

La solución general será el intervalo $[-2, 4]$

Gráficamente la solución se encuentra con facilidad.

Si representas la función $y = x^2 - 2x - 8$, la solución de la inecuación sobre la gráfica se localiza de inmediato.

7. Resuelve la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$.



Solución:

Se resuelve la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$; tiene solución única $x = 3$.

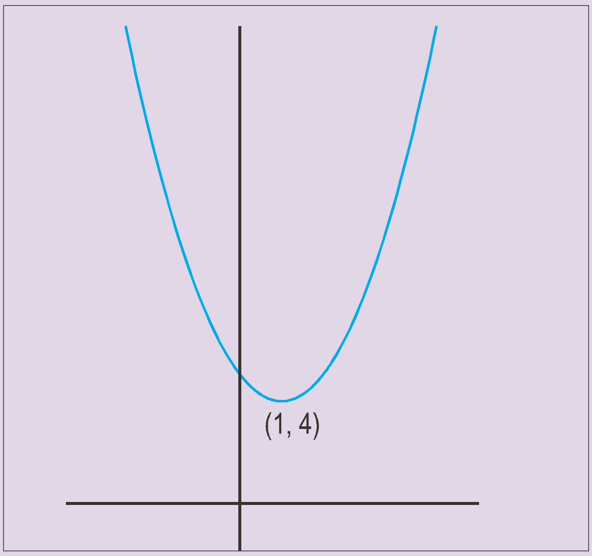
Se factoriza el trinomio $(x - 3)^2 \leq 0$.

Se divide la recta en dos intervalos $(-\infty, 3]$, y $[3, \infty)$

El único valor de x que sustituido en el binomio da cero es 3; por eso 3 es la única solución de la inecuación.

Se representa la función $y = x^2 - 6x + 9$, y sobre la gráfica se ve que la solución de la inecuación es $x = 3$.

8. Resuelve la inecuación $x^2 - 2x + 5 \leq 0$.



Solución:

La ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene solución; no se puede factorizar y se tiene solo el intervalo $(-\infty, \infty)$

Se sustituye el valor de x = 0 en el trinomio y resulta $0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 > 0$; que no cumple la desigualdad propuesta; por lo que la inecuación no tienen solución.

Se representa la función $y = x^2 - 2x + 5$, y sobre la gráfica se ve que la inecuación no tiene solución.

Actividades

13. Resuelve analíticamente las inecuaciones: **a)** $x^2 - x - 6 \geq 0$; **b)** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; **c)** $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

14. Resuelve: **a)** $x^2 + x - 6 \leq 0$; **b)** $x^2 - 4x + 5 \geq 0$.

5. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones lineales con una incógnita** es el conjunto formado por dos o más inecuaciones lineales con una incógnita. Por ejemplo:

$$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\geq 0 \\ ex+f\leq 0 \end{cases}$$

La **solución general del sistema de inecuaciones lineales con una incógnita** serán las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.

Para calcular la solución de un sistema de inecuaciones, se calculan las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman el sistema; la intersección de todas las soluciones anteriores será la solución del sistema.

Ejemplo

9. Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x+8\geq 0 \end{cases}$

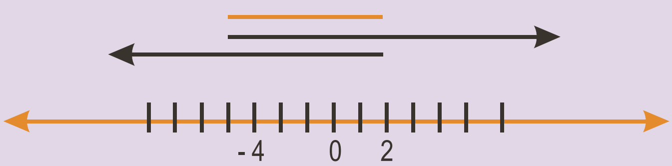
Solución:

$$\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<6 \\ 2x\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\geq -4 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son las comunes a las dos inecuaciones; los números mayores que –4 y menores que 2:

$$-4\leq x<2 \quad \text{ó} \quad [-4, 2).$$

La representación gráfica de las soluciones es:



Algunas inecuaciones de primer grado como, por ejemplo, las racionales, se resuelven con facilidad descomponiéndolas en sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

Ejemplo

10. Resolver la inecuación: $\dfrac{x-3}{x+2} > 6$.

Solución:

Como tenemos un cociente, al transponer al segundo miembro el denominador $x + 2$, y es una inecuación, hay que tener en cuenta el signo de lo que se traspone, por lo que se presentan dos situaciones; cada una de ellas es un sistema de inecuaciones.

a) Si $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$; se mantiene el signo de la desigualdad al pasar $x + 2$ al segundo miembro.

Se transpone $x + 2 > 0$ al segundo miembro: $x - 3 > 6(x + 2)$

Se quitan paréntesis: $x - 3 > 6x + 12$

Se transponen términos y se simplifica: $-5x > 15$

Se despeja x : $x < -3$

Esto no es posible ya que la solución obtenida $x < -3$ es incompatible con $x > +2$.

b) Si $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$; se cambia el signo de la desigualdad al pasar $x - 2$ al segundo miembro.

Se transpone $x + 2 < 0$ al segundo miembro: $x - 3 < 6(x + 2)$

Se quitan paréntesis: $x - 3 < 6x + 12$

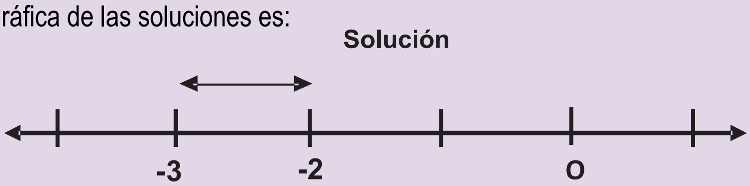
Se transponen términos y se simplifica: $-5x < 15$

Se despeja x : $x > -3$

En este caso las dos condiciones $x > -3$ y $x < -2$ se pueden expresar en una: $-3 < x < -2$ o bien mediante el intervalo $(-3, -2)$.

Las soluciones $x = -2$ y $x = -3$ no valen, puesto que la primera es una división por cero y la segunda daría origen a la igualdad $6 = 6$.

La representación gráfica de las soluciones es:



Actividades

15. Resuelve y representa gráficamente las soluciones de los sistemas:

a) $\begin{cases} 2(x+1)+3 \geq (4x+1) \\ 3(x-1) \leq 2x-7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{x-1}{6} \\ \dfrac{x+4}{2}+\dfrac{1}{5} \geq \dfrac{x+2}{10} \end{cases}$

16. Resolver las inecuaciones : **a)** $\dfrac{2x-4}{3x+6} \leq 2$; **b)** $\dfrac{x}{x-4} \leq 5$; **c)** $4 < \dfrac{3x-8}{2x+8}$; **d)** $\dfrac{2x+8}{x} > 4$.

6. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** es el conjunto formado por dos o más inecuaciones lineales con dos incógnitas; por ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \le b_2 \\ \ldots + \ldots \le \ldots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \le b_n \end{cases}$$

El signo ≤ que aparece en todas las inecuaciones del ejemplo, puede ser sustituido en cualquiera de ellas por los otros signos de desigualdad **<**, **>** o **≥**.

Se llama **solución general del sistema**, al conjunto de los puntos del plano $A(x, y)$ que cumplan simultáneamente todas las inecuaciones del sistema.

La solución general de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas se llama también **región factible**.

La solución general o región factible del sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas se forma con las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema. Para calcular la **región factible** de un sistema de inecuaciones, se calculan las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman el sistema; la intersección de todos los semiplanos soluciones será la región factible del sistema.

Para localizar la región factible o solución general del sistema, se realizan los pasos siguientes:

a) Se localizan los semiplanos solución de cada una de las inecuaciones del sistema.

b) Se realiza la intersección de todos los semiplanos y el recinto que resulta es la solución general o **región factible.**

Ejemplo

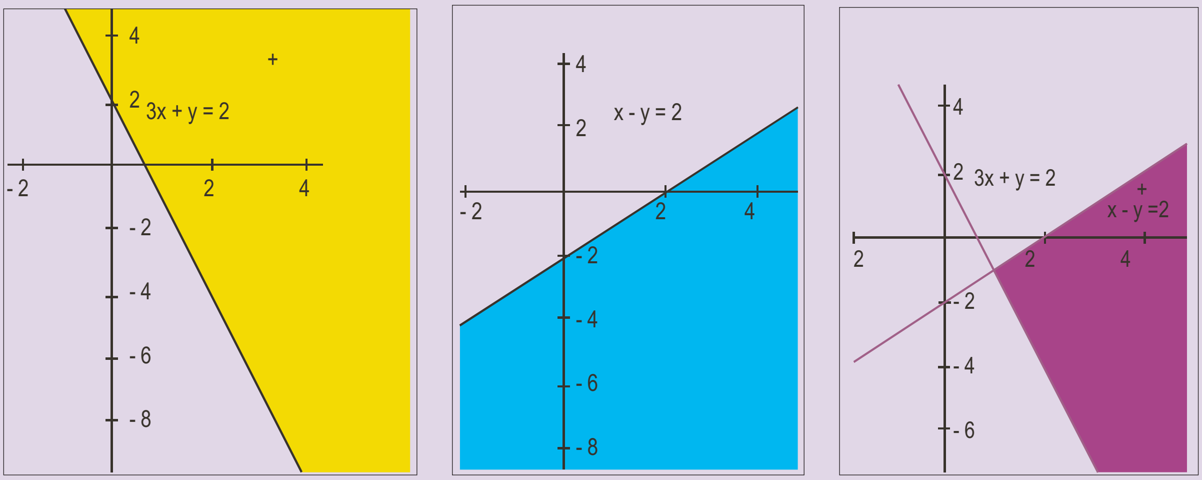
11. Resolver el sistema de inecuaciones siguiente: $\begin{cases} 3x + y \ge 2 \\ x - y > 2 \end{cases}$

Solución:

Se representa gráficamente la ecuación $3x + y = 2$. La solución de la inecuación la forman los puntos del semiplano de color amarillo. Los puntos de la recta son soluciones.

Se representa gráficamente la ecuación $x - y = 2$. La solución de la inecuación la forman los puntos del semiplano de color azul. Los puntos de la recta no son soluciones.

Se superponen las dos figuras anteriores; los puntos de la región angular formada por la intersección de las dos soluciones anteriores de color fucsia forman la solución del sistema.

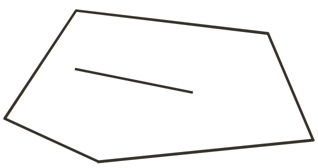


Los sistemas de inecuaciones lineales en cuanto a soluciones puede ocurrir como en el caso de los sistemas, que **no tengan solución**, la región factible es el conjunto vacío, o **que exista solución,** en cuyo caso la región factible puede ser acotada (área finita) o no acotada (área infinita).

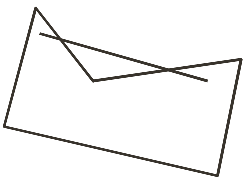
La frontera de la región factible pertenece a la solución general si las inecuaciones son desigualdades en sentido amplio (≤ *o* ≥) y no pertenece si las inecuaciones son desigualdades en sentido estricto (< *o* >).

Los vértices de la región factible serán los puntos de corte de las rectas fronteras y pertenecen a la solución del sistema si pertenece la frontera y no pertenecen en el caso contrario.

Si la región factible es un recinto acotado, sus puntos estarán encerrados en un polígono convexo; es decir, polígonos en los que los segmentos determinados por dos puntos interiores, están todos en el interior del polígono.



Polígono convexo



Polígono cóncavo

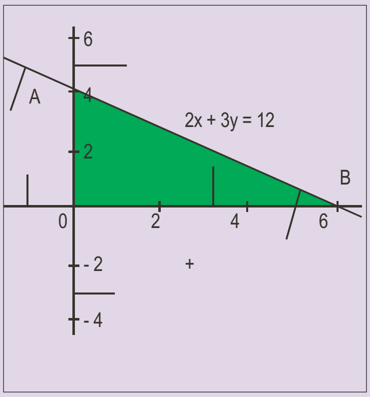
Ejemplo

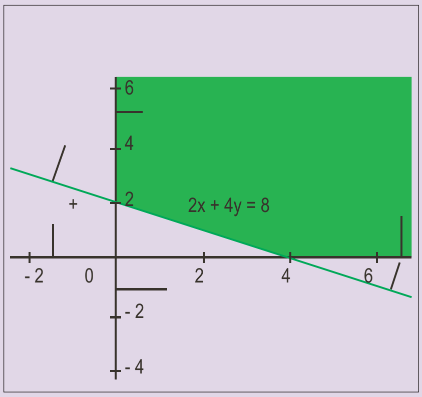
12. Encontrar la región factible (solución general) de los sistemas:

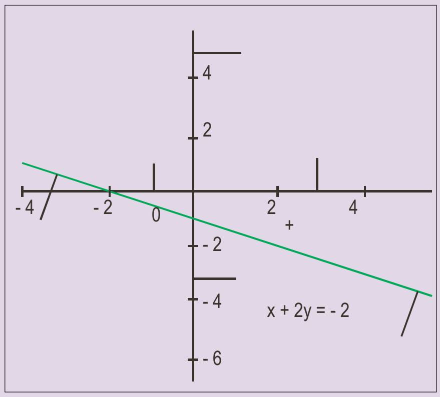
$$\textbf{a)} \begin{cases} 2x+3y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} ; \quad \textbf{b)} \begin{cases} 2x+4y \ge 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} ; \quad \textbf{c)} \begin{cases} x+2y \le -2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución:

Se localizan los tres semiplanos que corresponden a las soluciones de cada una de las tres inecuaciones que forman cada uno de los sistemas; la intersección de los mismos proporciona la región factible de cada sistema. Estas son:

a) 

b) 

c) 

Las regiones factibles obtenidas son:

a) Acotada: el triángulo AOB, en color verde.

b) No acotada: la región verde.

c) Conjunto vacío: sin solución.

Actividades

17. Resuelve los sistemas: **a)** $\begin{cases} x+2y \le 8 \\ 2x+y<10 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y \le 4 \\ x+y \ge -4 \\ x-y \ge -4 \\ x-y \le 4 \end{cases}$

18. Resuelve los sistemas: **a)** $\begin{cases} 2x+y \le 8 \\ 4x+y \le 12 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x-y \le 0 \\ 5x+4y \le 20 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

19. Representar el conjunto de puntos solución del sistema: $\begin{cases} x \le 3 \\ x \ge -3 \\ y \le 2 \end{cases}$

20. Dibujar las regiones factibles o soluciones de los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y\le 8 \\ x-2y\ge -10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+3y\le 15 \\ x+y\ge 3 \\ x\ge 7;\quad y\ge 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y\ge 5 \\ x-3y\le 5 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+4y\ge 8 \\ x-2y\le -6 \\ x\ge 0 \end{cases}$

21. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y\le 12 \\ -2x+3y\ge 11 \\ x\ge 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y\le 12 \\ -2x+3y\ge 11 \\ x\le 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y\ge 12 \\ -2x+3y\le 11 \\ x\le 3 \end{cases}$

22. Resuelve gráficamente los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+y>9 \\ 2x-y>7 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 4x+y\le 16 \\ 2x+y\le 8 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

23. Representa las soluciones de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x+y>4 \\ x-y>2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -x+y\ge 0 \\ 5x-4y\ge 0 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

RECUERDA

- **Inecuaciones.** Son desigualdades en las que intervienen variables.

- **Solución general de la inecuación.** Es el conjunto de todas las soluciones particulares de la inecuación. **Resolver** una inecuación es encontrar su solución general.

- **Inecuaciones equivalentes.** Dos inecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución general. Para resolver una inecuación se transforma en otra equivalente en la que sea sencillo hallar la solución; para ello se aplican los principios de equivalencia entre inecuaciones.

- **Inecuación lineal con una incógnita.** Desigualdad que si se simplifica resulta equivale a la siguiente $ax+b>0$; puede aparecer con cualquiera de los signos de desigualdad $\leq$, $<$, $>$ o $\geq$. **La solución general de una inecuación con una incógnita** son los puntos de un intervalo.

- **Inecuación lineal con dos incógnitas.** Desigualdad que si se simplifica resulta equivalente a $y>ax+b$, con $a \neq 0$; pueden aparecer cualquiera de los signos de desigualdad ($\leq$, $<$, $\geq$)

- **Resolver una inecuación** con dos incógnitas es encontrar los valores (x, y) que satisfacen la desigualdad; estos valores se visualizan con facilidad sobre un plano cartesiano. La solución general de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano.

- **Inecuaciones de segundo grado.** En su forma reducida son expresiones del tipo $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$; pueden aparecer con cualquiera de los otros signos de desigualdad ($\leq$, $<$, $\geq$). Las soluciones de estas inecuaciones están íntimamente ligadas al número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

- **Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.** Son conjuntos formados por dos o más inecuaciones lineales con una incógnita. **La solución general** está formada por las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.

- **Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.** Son conjuntos formados por dos o más inecuaciones lineales con dos incógnitas. **La solución general del sistema** está formada por el conjunto de los puntos del plano $A(x, y)$ que cumplen simultáneamente todas las inecuaciones del sistema. A la solución general de estos sistemas se la llama también **región factible**.