12 Variables aleatorias: Binomial y Normal

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Probabilidad . . . 261
- 1.1. Experimentos aleatorios. Sucesos . . . 261
- 1.2. Frecuencia y probabilidad . . . 263
- 1.3. Probabilidad condicionada . . . 265

2. Variables aleatorias . . . 267

3. Variables aleatorias discretas: la distribución Binomial . . . 269
- 3.1. Características de una variable aleatoria discreta . . . 269
- 3.2. Distribución Binomial . . . 271

4. Variables aleatorias continuas: la distribución Normal . . . 274
- 4.1. Función de distribución de una variable aleatoria continua . . . 274
- 4.2. Función de densidad de una variable aleatoria continua . . . 276
- 4.3. Distribución Normal . . . 278
- 4.4. Tabla de la normal estándar $\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ . . . 282

La probabilidad es la parte de las matemáticas que conecta la estadística descriptiva con la estadística inferencial. Esta última, la estadística inferencial, hace uso de una herramienta fundamental, la variable aleatoria. En esta unidad didáctica haremos en primer lugar, un repaso de los elementos básicos de la teoría de la probabilidad que nos permitan entender la idea de variable aleatoria. A continuación introduciremos la idea de variable aleatoria y estudiaremos los dos ejemplos de variables aleatorias más importantes: la binomial y la normal.

1. Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios. Sucesos

Si dejamos caer un objeto desde una altura de 10 metros, es posible, con unos conocimientos básicos de Física, determinar lo que ocurrirá a continuación: tiempo que tardará el objeto en caer al suelo y velocidad con la que llegará. Lo mismo ocurre si ponemos a calentar agua en el fuego, se puede predecir en qué momento comenzará a hervir, se podría calcular el tiempo que tardará en evaporarse todo el agua, etc. Estos experimentos en los que, siempre que se repitan en las mismas condiciones, se puede predecir cuál será el resultado, se llaman **experimentos deterministas**.

Hay otros experimentos en los que no se puede predecir el resultado. Por ejemplo, tiramos un dado con seis caras numeradas del uno al seis. Seguro que sale un número del uno al seis, pero no podemos predecir cuál será. Lo mismo ocurre si tiramos una moneda, no podemos predecir si saldrá cara o cruz. Estos son los experimentos de los que se ocupa la probabilidad, se llaman **experimentos aleatorios**. Son experimentos cuyo resultado no se puede predecir, depende del *azar*. (Una definición precisa del azar, incluso del azar matemático, pertenece al campo de la Filosofía, aunque todos tenemos una idea intuitiva de su significado).

Si tiramos un dado, puede salir el 1, puede salir el 5, puede salir un número par, puede salir un número impar, puede salir un número mayor que 3, puede salir un número, etc. Cada una de estas posibilidades asociadas a un experimento aleatorio, en este caso el de tirar un dado, se le llama **suceso**. A los sucesos los representaremos mediante letras mayúsculas. Por ejemplo, para el lanzamiento del dado, algunos de los sucesos son

$$A = \{1\}; \quad B = \{\text{número par}\}; \quad C = \{\text{mayor que 3}\}; \quad \text{etc.}$$

El suceso $B = \{\text{número par}\}$ es un **suceso compuesto**, porque puede descomponerse en otros sucesos, ya que el hecho de que salga un número par al tirar un dado es lo mismo que decir que salga el 2, el 4 o el 6. Es decir, $B = \{\text{número par}\} = \{2, 4, 6\}$. Sin embargo, no es posible descomponer el suceso $A = \{1\}$, por esta razón se le llama **suceso elemental**.

Dado un experimento aleatorio, a la colección de todos sus sucesos elementales se le llama **espacio muestral**, y lo representaremos por la letra E. Por ejemplo, si tiramos un dado, su espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si tiramos una moneda, sólo hay dos posibilidades, por tanto, su espacio muestral es

$$E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$$

Al espacio muestral también se le llama **suceso seguro**, E, ya que incluye todas las posibilidades del experimento y, con toda seguridad, una de ellas ocurrirá, con lo que el suceso se verifica siempre. También hablaremos del **suceso imposible**, como el suceso que nunca ocurre, y lo representaremos por el símbolo $\emptyset$, que también se utiliza para representar al conjunto que no posee elementos, el conjunto vacío.

ACTIVIDADES

1. Describir el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos aleatorios:
a) Extraemos una carta al azar de una baraja española y anotamos el palo al que pertenece la carta.
b) Abrimos al azar un libro de 200 páginas y anotamos el número de la página de la derecha.
c) Tiramos tres monedas y anotamos el número de caras.
d) Sacamos al azar una bola de una bolsa que contiene dos bolas rojas, una verde y dos azules.
e) Lanzamos una moneda tantas veces como sea necesario hasta obtener por primera vez cara.

Se llama **unión** de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A, ocurre B o ambos. Se llama **intersección** de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente.

Por ejemplo, en el experimento de extraer una carta de una baraja española, si llamamos A al suceso que consiste en extraer una carta de oros y B al suceso que consiste en elegir un as, entonces, $A \cup B$ se verifica si la carta elegida es un oro, o un as, o ambas cosas, es decir, el as de oros. Por otra parte, $A \cap B$ se verificará únicamente cuando la carta sea el as de oros.

Llamaremos suceso **contrario** de A, y lo representaremos mediante $\overline{A}$, al que ocurre cuando no ocurre A.

Se puede comprobar que se dan las siguientes propiedades con respecto de las operaciones entre sucesos que acabamos de definir:

- $A \cup \overline{A} = E$, ya que siempre ocurre o bien A o bien el contrario $\overline{A}$, por tanto es el suceso seguro.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$, ya que A y su contrario $\overline{A}$, nunca pueden ocurrir simultáneamente.
- $\overline{\overline{A}} = A$, el contrario del contrario de A es el propio A.
- $\overline{E} = \emptyset$, es decir, el contrario del suceso seguro es el suceso imposible, y por lo tanto, $\overline{\emptyset} = E$.
- $A \cap E = A$; $A \cup \emptyset = A$.
- $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$. Estas dos propiedades, que se denominan *Leyes de De Morgan*, nos dicen que el contrario de una unión es la intersección de contrarios, y el contrario de una intersección es la unión de contrarios.

Se dice que dos sucesos A y B son **sucesos incompatibles** si su intersección es el suceso imposible, es decir, $A \cap B = \emptyset$. Por ejemplo, la segunda propiedad de la lista anterior indica que un suceso y su contrario siempre son incompatibles.

1.2. Frecuencia y probabilidad

Tiramos un dado de seis caras n veces y anotamos los resultados obtenidos, si llamamos A al suceso “salir 2", el número de veces de las n que se obtiene el número 2 se llama **frecuencia absoluta** del suceso A, lo vamos a denominar n_A. El cociente entre el número de veces que se obtiene el 2 y el y el número de veces que se tira el dado, se llama **frecuencia relativa** del suceso A, que representaremos por $f_r(A)$, es decir,

$$\boldsymbol{f_r(A) = \frac{n_A}{n}}$$

Necesariamente $f_r(A)$ es un número comprendido entre 0 y 1 (pudiendo ser 0 o 1,) ya que $n_A \leq n$.

¿Qué ocurrirá con el número $f_r(A)$, cuando el número de veces que tiramos el dado sea muy grande? Suponiendo que el dado está bien equilibrado, es razonable pensar que el número de veces que se obtiene 2 será el mismo que el número de veces que se obtiene 1, igual que el número de veces que se obtiene 3, etc. Por tanto, el número de veces que se obtiene 2, tenderá a ser una sexta parte del número de veces que se tira el dado. En otras palabras, el límite de la frecuencia relativa, cuando n tiende a infinito será $\frac{1}{6}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_r(A) = \frac{1}{6}$$

Este hecho no se puede demostrar, sino que es un hecho empírico, experimental, siempre que se comprueba ocurre. De la misma manera que si tiramos una moneda equilibrada un gran número de veces, esperamos que más o menos la mitad de las veces se obtenga cara, y la otra mitad se obtenga cruz.

Este límite ideal de la frecuencia relativa de un suceso cuando el número de veces que se repite el experimento tiende a infinito es lo que podríamos llamar *probabilidad*, porque mide la mayor o menor disposición de un suceso a verificarse.

ACTIVIDADES

2. Si repetimos un experimento aleatorio n veces, ¿cuál es la frecuencia relativa del suceso seguro E y la del suceso imposible $\emptyset$?

Basándonos en las características de las *frecuencias relativas*, podemos definir la **probabilidad** como cualquier función P que hace corresponder un número real a cada suceso y que verifique las siguientes propiedades:

- $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
- $P(E) = 1$, es decir, la probablidad del suceso seguro es 1.
- Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A estas propiedades se les llama *axiomas de la probabilidad* y a partir de ellas se pueden deducir las siguientes propiedades, que también verifica la probabilidad:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, que nos permite calcular la probabilidad de un suceso conocida la de su contrario.
- $P(\emptyset) = 0$, es decir, la probabilidad del suceso imposible es 0.
- Si A y B son sucesos cualesquiera, compatibles, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por lo general trabajaremos con experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales estarán compuestos por sucesos simples igualmente probables. Para estos casos, el problema práctico del cálculo de probabilidades es bastante sencillo.

Por ejemplo, en el caso del dado, el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, está compuesto por seis sucesos elementales, todos ellos con las mismas posibilidades de ocurrir, es decir, hay la misma probabilidad de que salga 1, que de que salga 2, que de que salga 3, etc. Como $P(E) = 1$, y

$$E = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\};$$

entonces,

$$1 = P(E) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\});$$

porque los sucesos son incompatibles dos a dos (no pueden darse dos de ellos simultáneamente.) Por tanto, necesariamente la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{6}$, para que la suma anterior sea 1.

Si queremos calcular la probabilidad de que el resultado de tirar el dado sea par,

$$P(\text{par}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Lo que hemos hecho al final es dividir el número de casos favorables a que salga par, 3, entre el número de casos posibles, que eran 6. A esta regla, que permite calcular probabilidades fácilmente, se le llama **regla de Laplace**, y se puede generalizar de la forma siguiente:

Si E es un espacio muestral compuesto por sucesos simples igualmente probables, entonces, para cualquier suceso A,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de la regla de Laplace:

- Tiramos una moneda, ¿cuál es la probablidad de obtener cara?

Hay dos casos posibles: cara y cruz; y uno favorable, entonces $P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$.

- Sacamos una carta de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de sacar un rey?

Hay 40 casos posibles, de los cuales 4 son reyes, entonces $P(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

- Tiramos dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara y una cruz?

Si llamamos cara $= c$ y cruz $= +$, hay cuatro casos con las mismas posibilidades: $\{cc, c+, +c, ++\}$; de los cuales, dos son favorables, que son, $c+$ y $+c$. Por lo tanto,

$$P(\text{cara y cruz}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ACTIVIDADES

3. Tiramos dos dados numerados del 1 al 6, y sumamos las puntuaciones obtenidas. Calcular la probabilidad de que la suma sea 10.

4. De una baraja española extraemos dos cartas consecutivamente y sin devolución, en otras palabras, sacamos la primera y, sin devolverla a la baraja, sacamos la segunda. Calcular la probabilidad de que las dos cartas extraídas sean reyes.

1.3. Probabilidad condicionada

Pensemos en el ejemplo de la actividad anterior. Tenemos una baraja española de la que extraemos dos cartas consecutivamente, sin reemplazamiento. Vamos a plantear la experiencia ahora desde otro punto de vista. Sacamos la primera carta y resulta ser un rey, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también un rey?

Como la primera ha sido un rey y no la hemos devuelto, antes de la segunda extracción hay 39 cartas, de las cuales 3 son reyes. Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda sea un rey es $\frac{3}{39}$.

Supongamos que la primera carta no ha sido un rey, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda lo sea?

Si la primera no ha sido un rey, antes de la segunda extracción hay 39 cartas, entre las cuales se encuentran los 4 reyes. Por tanto, la probabilidad ahora es $\frac{4}{39}$.

Lo que hemos hecho en ambos casos es calcular una **probabilidad condicionada**, es decir, hemos calculado la probabilidad de un suceso, condicionado a que otro suceso ha ocurrido. De manera más precisa, dados dos sucesos A y B, la *probabilidad de B condicionada a A*, que vamos a denotar B/A es

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

siempre que $P(A) \neq 0$.

De la fórmula anterior, si despejamos la probabilidad de la instersección, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

Esta fórmula resulta muy útil para calcular la probabilidad de un suceso compuesto por dos sucesos consecutivos. Por ejemplo, el problema de calcular la probabilidad de que dos cartas extraídas de la baraja española sin reemplazamiento sean reyes, se puede replantear de la siguiente forma:

Sea R_1 el suceso *salir rey en la primera extracción* y R_2 el suceso *salir rey en la segunda extracción*. Queremos calcular la probabilidad de que salga rey en la primera y en la segunda extracción, es decir,

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1).P(R_2/R_1)$$

Esta fórmula nos dice que la probabilidad de sacar rey en la primera y en la segunda extracción es igual a la probabilidad de que salga rey en la primera, multiplicada por la probabilidad de que salga rey en la segunda, sabiendo que la primera ha sido un rey. Entonces,

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}.$$

Si bien para ciertos sucesos el hecho de saber que ha ocurrido previamente algún otro puede ser importante, en otros casos esta información es irrelevante. Por ejemplo, en el caso anterior, supongamos que las dos cartas se extraen con reemplazamiento, esto es, después de sacada y anotada la primera carta se devuelve al mazo. Es decir, ahora al sacar la segunda carta hay 40 en la baraja, incluidos los 4 reyes. El hecho de saber que la primera carta ha sido rey o as no condiciona en modo alguno el resultado de la segunda extracción. Cuando tenemos dos sucesos para los que la verificación de uno no condiciona la del otro, decimos que los dos sucesos son *independientes*. En términos de probabilidad condicionada, se dice que A y B son dos **sucesos independientes** si

$$P(B/A) = P(B) \text{ o bien } P(A/B) = P(A)$$

Como consecuencia, si dos sucesos son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La misma fórmula se puede aplicar cuando en lugar de dos son más los sucesos independientes dos a dos. Por ejemplo, tiramos una moneda 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 10 caras?

El resultado de cada lanzamiento es independiente de los demás. Por tanto, la probabilidad de que salgan 10 caras será el producto de las probabilidades de obtener cara en cada lanzamiento, es decir,

$$P(\text{10 caras}) = P(\text{cara en la } 1^a) \cdot P(\text{cara en la } 2^a) \ldots P(\text{cara en la } 10^a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

ACTIVIDADES

5. Tiramos un dado numerado del 1 al 6 tres veces. Calcular la probabilidad de obtener, al menos, un 3.
(Sugerencia: calcular primero la probabilidad del suceso contrario).

Recuerda

- ✓ Un *experimento determinista* es aquel del que se puede predecir el resultado final, siempre que se repita en las mismas condiciones. Un *experimento aleatorio* es aquel en el que no se puede predecir su resultado final, porque depende del azar.
- ✓ Un *suceso* es un posible resultado de un experimento aleatorio. Un *suceso elemental* es el suceso más simple posible de un experimento aleatorio.

  \- El *espacio muestral* es el conjunto de todos los sucesos simples de un experimento aleatorio.
- ✓ Dados dos sucesos A y B, se llama *unión de* A *y* B y se denota $A \cup B$ al suceso que se verifica si se verifica A o B o ambos. Dados dos sucesos A y B, se llama *intersección de* A *y* B y se denota $A \cap B$ al suceso que se verifica si se verifican A y B simultáneamente. Se llama *contrario de* A, y se denota $\overline{A}$ al suceso que se verifica cuando no lo hace A.
- ✓ La *probabilidad* de un suceso A es el límite de su frecuencia relativa, cuando el número de veces que se repite el experimento tiende a infinito. También se puede definir como cualquier función P que hace corresponder un número real a cada suceso y que verifica las propiedades
  - $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
  - $P(E) = 1$, es decir, la probablidad del suceso seguro es 1.
  - Si A y B son dos sucesos *incompatibles*, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ✓ *Regla de Laplace*. Si E es un espacio muestral compuesto por sucesos simples igualmente probables, entonces, para cualquier suceso A,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

- ✓ La *probabilidad de* B *condicionada a* A es $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, si $P(A) \neq 0$. Es la probablidad de que se verifique un suceso, condicionado a que ha ocurrido otro.
- ✓ Dos sucesos A y B son *independientes* si $P(B/A) = P(B)$ o bien $P(A/B) = P(A)$. Si dos sucesos son independientes, se verifica

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2. Variables aleatorias

Tiramos dos monedas y contamos el número de caras, este número puede ser 0, 1 o 2. Hemos repetido la experiencia 5000 veces (en realidad, hemos simulado la experiencia con un ordenador) y en la tabla siguiente hemos anotado la cantidad de veces que ha salido cada uno de los resultados, es decir, la frecuencia absoluta de cada suceso:

número de caras	0	1	2
frec. absoluta	1222	2509	1269

Como la experiencia se ha repetido 5000 veces, dividiendo las frecuencias absolutas por este número, obtenemos las frecuencias relativas, y la nueva tabla es

número de caras	0	1	2
frec. relativa	$0'2444$	$0'5018$	$0'2538$

Este es un ejemplo de **distribución de frecuencias** (relativas en este caso.) Obsérvese que la suma de las frecuencias relativas es 1, que es la frecuencia relativa del suceso seguro,

$$f_r(0) + f_r(1) + f_r(2) = 0'2444 + 0'5018 + 0'2538 = 1$$

Según vimos en la sección anterior, si aumentamos indefinidamente el número de veces que repetimos el experimento, las frecuencias relativas acabarán tendiendo a la probabilidad de cada uno de los sucesos. Dado que el espacio muestral que se obtiene al tirar dos monedas es

$$E = \{cc, c+, +c, ++\},$$

las probabilidades de los diferentes números de caras son:

$$P(0) = 0'25 \qquad P(1) = 0'5 \qquad P(2) = 0'25$$

Tenemos ahora, una **distribución de probabilidad**, que es el límite de la distribución de frecuencias relativas cuando el número de veces que se repite la experiencia tiende a infinito.

número de caras	0	1	2
probabilidad	$0'25$	$0'5$	$0'25$

También la suma de todas las probabilidades es 1.

Tanto la distribución de frecuencias, como la distribución de probabilidad están asociadas a una **variable aleatoria**, que en este caso es $X =$ *número de caras*. En general, una *variable aleatoria* es una ley o función que toma valores asociados a un cierto experimento aleatorio.

El ejemplo anterior, la variable $X =$ *número de caras*, es un ejemplo de **variable aleatoria discreta**. Se llama así a las variables aleatorias que sólo pueden tomar un cierto número de valores, bien finito, $X = 0, 1, 2$, como el ejemplo anterior, o si el número es infinito, de manera que entre cada dos no haya posibilidad de encontrar un tercero, por ejemplo, si los valores de la variable son $X = 0, 1, 2, 3, \ldots$ No obstante, los ejemplos de variables aleatorias discretas que estudiaremos serán siempre del primer tipo, es decir, con un número de valores posibles finito.

Cuando la variable puede tomar todos los valores de un cierto intervalo de números reales, entonces se dice que es una **variable aleatoria continua**. Por ejemplo, si elegimos una judía verde al azar y medimos su longitud en centímetros, la variable $X =$ *longitud en cm*, es una variable aleatoria continua.

ACTIVIDADES

6. De las siguientes variables aleatorias, indicar cuál es discreta y cuál es continua:
a) El número de llamadas telefónicas que recibe una determinada centralita entre las 9 y las 10 horas de un día elegido al azar.
b) Tiramos dos dados y sumamos sus puntuaciones.
c) La hora a la que llega el autobús a una parada, de la que sabemos que está comprendida entre las 5 y las 5 y media de la tarde.
d) El peso de una persona elegida al azar.
e) La cuantía del primer premio de un sorteo de lotería primitiva en euros.
f) El número de coches de una familia escogida al azar.

Recuerda

- ✓ Una *distribución de frecuencias* es el recuento de frecuencias de cada resultado cuando se ha realizado un experimento aleatorio varias veces.
- ✓ Una *distribución de probabilidad* es un recuento de probabilidad de cada resultado posible asociado a un cierto experimento aleatorio.
- ✓ Una *variable aleatoria* es una ley o función que toma valores asociados a los resultados de un experimento aleatorio.
- ✓ Una variable aleatoria es *discreta* cuando sólo puede tomar un cierto número de valores, o bien cuando, aunque esos valores sean infinitos, entre cada dos, no se puede encontrar un tercero.
- ✓ Una variable aleatoria es *continua* cuando puede tomar valores en un cierto intervalo de números reales.

3. Variables aleatorias discretas: la distribución Binomial

Ya hemos visto lo que es una variable aleatoria discreta. En esta sección vamos a estudiar sus características principales y el ejemplo más importante de variable discreta, la distribución Binomial.

3.1. Características de una variable aleatoria discreta

Volvamos al ejemplo del lanzamiento de dos monedas. Si consideramos la variable aleatoria X = *número de caras*, esta variable aleatoria discreta podía tomar los valores $X = 0, 1, 2$. La función que asigna a cada valor de la variable su probabilidad correspondiente se llama **función de probabilidad**. En este caso, como hemos visto antes,

$$P(X=0)=0'25 \qquad P(X=1)=0'5 \qquad P(X=2)=0'25$$

Si denotamos por x_i los valores que puede tomar la variable, y p_i las probablidades respectivas de cada uno de los valores, es decir, $P(X=x_i)=p_i$; la función de probabilidad se puede representar en la tabla siguiente:

x_i	p_i
0	$0'25$
1	$0'5$
2	$0'25$

Para que una función de probablidad de una variable aleatoria discreta esté bien definida es preciso que la suma de todas las probablidades sea 1, es decir,

$$\sum p_i = 1.$$

Al igual que las variables estadísticas, las variables aleatorias también tienen asociados ciertos parámetros que permiten describirlas. Los vamos a estudiar a continuación.

Se llama **media**, *esperanza matemática* o *valor esperado* de una variable aleatoria discreta X al número

$$\boldsymbol{\mu = \sum x_i . p_i}$$

Es decir, la suma de los productos de los valores de la variable x_i por sus probabilidades correspondientes p_i. En nuestro ejemplo,

$$\mu = \sum x_i . p_i = 0 \cdot 0'25 + 1 \cdot 0'5 + 2 \cdot 0'25 = 1.$$

Este valor es el análogo a la media $\overline{x}$ de una variable estadística unidimensional. Es el valor que esperamos obtener como promedio si el experimento aleatorio se repite un número de veces muy alto.

Se llama **varianza** de una variable aleatoria discreta X al número

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 . p_i}$$

La varianza de una variable aleatoria es análoga a la varianza de una variable estadística. También se puede simplificar su cálculo mediante la fórmula

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \sum x_i^2 . p_i - \mu^2}$$

En nuestro ejemplo,

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 . p_i - \mu^2 = 0^2 \cdot 0'25 + 1^2 \cdot 0'5 + 2^2 \cdot 0'25 - 1^2 = 0'5.$$

Por último, se llama **desviación típica** de una variable aleatoria discreta X a la raíz cuadrada de su varianza, es decir,

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 . p_i - \mu^2}}$$

Que en nuestro ejemplo es $\sigma = \sqrt{0'5} = 0'707$.

ACTIVIDADES

7. Consideramos la siguiente tabla, que es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta:

x_i	1	2	3	4
p_i	$0'2$	$0'1$	$0'3$	p

a) Calcular el valor de p para que la función de probabilidad esté bien definida.
b) Calcular su media, varianza y desviación típica.

3.2. Distribución Binomial

Tenemos un experimento aleatorio que sólo produce dos posibilidades que vamos a llamar *éxito* y *fracaso*. La probabilidad de *éxito* es p y la de *fracaso* es $1-p=q$. Repetimos la experiencia n veces, cada vez que se repite el resultado es independiente del anterior. Si llamamos $X =$ *número de éxitos de los* n, entonces se dice que X es una variable aleatoria que sigue una **distribución Binomial**, lo que indicaremos de la forma $X \sim B(n,p)$, donde n es el número de veces que se repite la experiencia y p es la probabilidad de obtener *éxito* cada vez que se repite. Es evidente que la Binomial es una variable aleatoria discreta, ya que los valores que puede tomar son $X = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Quizá la situación más sencilla en la que aparece la *Binomial* sea en el lanzamiento de una moneda. Por ejemplo, lanzamos una moneda $n = 4$ veces. Cada vez que la lanzamos puede salir cara con probabilidad $p = \dfrac{1}{2}$, o cruz con probablidad $q = 1-p = \dfrac{1}{2}$. Si consideramos *éxito* al hecho de salir cara, la variable aleatoria $X =$ *número de caras* sigue una binomial $B(4, \frac{1}{2})$.

Vamos a calcular su función de probabilidad:

- $P(X=0) = P(4 \text{ cruces}) = P(++++) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; ya que las cuatro pruebas son independientes.

- $P(X=1) = P(1 \text{ cara y } 4 \text{ cruces}) = P(c+++) + P(+c++) + P(++c+) + P(+++c)$
  $= 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; donde $c+++$; $+c++$; $++c+$ $+++c$ son los diferentes órdenes en que pueden aparecer la cara y las cruces.

- $P(X=2) = P(2 \text{ caras y } 2 \text{ cruces})$
  $= P(cc++) + P(+c+c) + P(c+c+) + P(++cc) + P(c++c) + P(+cc+)$

$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; también aquí hemos considerado las diferentes formas de ordenar las dos caras y las dos cruces, que son seis en total.

- $P(X = 3) = P($3 caras y 1 cruz$) = P($1 cara y 3 cruces$) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$.
- $P(X = 4) = P($4 caras$) = P($4 cruces$) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Por una parte, se puede comprobar que la suma de estas probabilidades es 1, con lo que la función de probabilidad está bien definida; y por otra, los factores por los que aparece multiplicado $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ en cada caso son

$$1, 4, 6, 4, 1$$

que es la cuarta fila del *triángulo de Tartaglia*, ya estudiado en el curso anterior.

Recordemos que el triángulo de Tartaglia es el siguiente, en el que cada número se obtiene mediante la suma de los dos que están inmediatamente sobre él.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

Por otra parte, también se ha estudiado que los elementos de cualquier fila enésima de este triángulo se pueden calcular mediante los *números combinatorios*

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \dots \binom{n}{n}$$

donde cada número combinatorio se calcula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

($n!$ es n factorial. Por ejemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.)

En general, se puede comprobar que la función de probabilidad de la Binomial $B(n, p)$ viene dada por

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

que es la probabilidad de que se produzcan k éxitos, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

La dificultad a la hora de resolver un problema asociado a la Binomial no está en la utilización de la fórmula, sino en la identificación de la Binomial adecuada. Veamos un par de ejemplos:

- En un examen de tipo test hay 10 preguntas de respuesta alternativa. Cada una de ellas tiene 4 posibles opciones, de las cuales hay que elegir una. Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de responder correctamente a dos de ellas?

Cada vez que respondemos a una pregunta del examen, podemos acertar con probabilidad $p = \frac{1}{4}$, o fallar con probabilidad $q = 1 - p = \frac{3}{4}$. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ *número de respuestas correctas*, la variable X sigue una Binomial $B(10, \frac{1}{2})$.

Entonces, queremos calcular la probabilidad $P(X = 2)$, aplicando la fórmula anterior

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0'2816.$$

- En una biblioteca el 10 % de los libros son de matemáticas. Elegimos 5 libros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos cogido más de 3 libros de matemáticas?

Cada vez que escogemos un libro tenemos una probabilidad $p = 0'10$ de elegir uno de matemáticas, y una probabilidad $q = 1 - p = 0'90$ de elegir un libro que no sea de matemáticas. Si consideramos la variable aleatoria
$X =$ *número de libros de matemáticas elegidos*, la variable X sigue una binomial $B(5, 0'1)$.

Queremos calcular la probabilidad de que haya más de 3 de matemáticas, es decir, $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)$. Por tanto, hay que utilizar la fórmula de la función de probabilidad de la Binomial dos veces,

$$\begin{aligned} P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) &= \binom{5}{4} \cdot 0'1^4 \cdot 0'9^1 + \binom{5}{5} \cdot 0'1^5 \cdot 0'9^0 \\ &= 0'00045 + 0'00001 = 0'00046. \end{aligned}$$

Como cabía esperar, una probabilidad muy baja. Pues ya era muy difícil, con sólo un 10 %, elegir un sólo libro de matemáticas.

La deducción de las fórmulas para el cálculo de la media, varianza y desviación típica de una binomial no es difícil pero sí bastante laboriosa, por lo que no la vamos a describir aquí. Diremos simplemente cuáles son las fórmulas:

Si $X \sim B(n, p)$, su media es

$$\boldsymbol{\mu = n \cdot p}$$

Su varianza es

$$\boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q}$$

Y su desviación típica

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

ACTIVIDADES

8. Tiramos cinco veces un dado numerado del 1 al 6:
a) Calcular la probabilidad de obtener sólo un 6.
b) Calcular la probabilidad de obtener al menos un 6.
c) Calcular la probabilidad de que salga 6 en los cinco lanzamientos.

9. Un examen de tipo test consta de 20 preguntas, cada una de ellas con 4 opciones, de las cuales sólo una es la correcta. Un estudiante que no se ha preparado el examen responde al azar. ¿Cuántas respuestas cabe esperar que acertará?

Recuerda

- ✓ Se dice que X sigue una distribución Binomial y se escribe $X \sim B(n,p)$, si repitiendo un experimento aleatorio n veces, de manera que cada vez sólo hay dos posibilidades: *éxito* con probabilidad p y su contrario, *fracaso* con probabilidad $1-p=q$; X representa el *número de éxitos de los* n.
- ✓ La función de probabilidad de la Binomial viene dada por

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

que es la probabilidad de que se produzcan k éxitos, con $k=0,1,2,\ldots,n$.
- ✓ Su media es $\mu=n\cdot p$; su varianza es $\sigma^2=n\cdot p\cdot q$; y su desviación típica $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$.

4. Variables aleatorias continuas: la distribución Normal

Una variable aleatoria continua es una variable que toma sus valores entre cualquiera de los contenidos en un intervalo de números reales. Mientras que la probabilidad en una variable discreta viene determinada por su función de probabilidad, en las variables continuas la probabilidad viene determinada por la llamada función de densidad, que estudiaremos a continuación. La más importante de las variables aleatorias continuas es la distribución Normal, que también estudiaremos aquí.

4.1. Función de distribución de una variable aleatoria continua

Supongamos que tenemos un grupo muy numeroso de alumnos que han conocido la nota final de una determinada asignatura. Supongamos también que esta nota se ha determinado teniendo en consideración muchos factores, y no únicamente un examen, por ejemplo, la entrega de trabajos, la participación en clase, la realización de varios controles, etc. Todo ello hará que, si la calificación está comprendida entre 0 y 10 como suele ser habitual, la nota final de un alumno concreto pueda ser casi cualquier número real del intervalo $[0, 10]$. Si elegimos un alumno al azar y consideramos su nota, la variable aleatoria $X =$ *nota final* es un ejemplo de variable aleatoria continua. Los posibles valores que puede tomar la variable X son todos los números reales del intervalo $[0, 10]$ (al menos, teóricamente.)

Ahora bien, ¿cómo son las probabilidades asociadas a esta variable? En primer lugar, dadas las posibilidades, no parece que tenga mucho sentido preguntarse por la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya obtenido, por ejemplo, un 4'589 de nota final. Tendrá sentido más bien, preguntarse por un determinado rango de posibilidades, es decir, tendrá sentido preguntarse por la probabilidad de que un alumno haya obtenido una nota superior a 5, o entre 2 y 8, o menor que 8, etc. Esto es una característica de las variables aleatorias continuas, *las probabilidades puntuales son nulas*, es decir, $P(X = 4'589) = 0$, y lo mismo para cualquier otro valor.

Por todo lo anterior, en las variables aleatorias continuas, estaremos más interesados en cómo está *distribuida* la probabilidad a lo largo del intervalo en el que toma valores, que en las probabilidades de valores concretos, que son todas nulas. Esta distribución de la probabilidad viene determinada por lo que se denomina precisamente **función de distribución**, que se define:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}}$$

En otras palabras, $F(x)$ es la probabilidad de que la variable X tome un valor inferior o igual a x.

Para entender mejor el significado de la función de distribución, vamos a intentar imaginar cómo es la función de distribución de la variable aleatoria del ejemplo de la nota final del examen.

En primer lugar, hay unos valores evidentes,

$$F(10) = P(X \leq 10) = 1$$

ya que, con toda seguridad la nota de cualquier alumno será menor o igual que 10. Y lo mismo ocurrirá para valores mayores que 10, es decir, también la probabilidad de que alguien saque una nota inferior a 11 será 1.

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0$$

ya que, nadie sacará una nota inferior a 0, y teóricamente nadie obtendrá 0, por lo que comentamos antes de las probabilidades puntuales (aunque lamentablemente sabemos que algunas veces ocurre.) Lo que sí ocurre, con toda seguridad, es que $F(-1) = P(X \leq -1) = 0$, y lo mismo para cualquier otro valor negativo.

Ya sabemos entonces que la función $F(x)$ vale 0 en $x = 0$ y vale 1 en $x = 10$. Sólo falta ver qué ocurre entre 0 y 10.

Aunque no tengamos datos de la probabilidad de obtener una calificación menor o igual que 3, por ejemplo, seguro que es más probable obtener una nota menor o igual que 4, y esto a su vez menos probable que obtener una nota menor o igual que 5, etc.

En otras palabras, a medida que aumentemos las posibilidades de nota, aumentará la probabilidad. Esto hace que la función de distribución verifique

$$F(1) \leq F(2) \leq F(3) \leq F(4) \leq \text{etc.},$$

y lo mismo para cualquier otro valor. Y, como bien sabemos, esto significa que la función de distribución es *creciente*. Concluyendo, la función de distribución es creciente y crece desde el 0 al 10. Entonces, una posible gráfica sería la de la figura 12.1.

El hecho de que la función sea continua se deduce precisamente del hecho de que la variable aleatoria también sea continua. Si no lo fuese, la variable podría no tomar todos los valores del intervalo $[0, 10]$. (Aunque no lo hemos estudiado, por su escaso interés en este curso, las variables aleatorias discretas también tienen una función de distribución, que se define exactamente de la misma forma, pero en aquel caso la función de distribución no es continua).

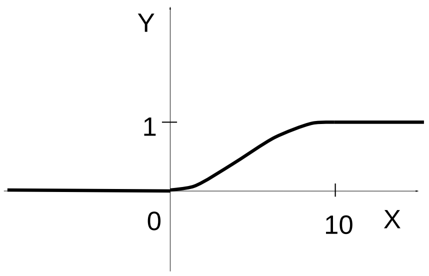


Figura 12.1: Gráfica de $F(x)$

Salvo lo del intervalo $[0, 10]$, que puede ser cualquier otro, todo lo anterior se puede aplicar a cualquier función de distribución de cualquier variable aleatoria continua:

La función de distribución $F(x)$ asociada a una variable aleatoria continua X es una función continua, creciente, no nula (ya que es una probabilidad) y su gráfica crece desde 0 a 1.

ACTIVIDADES

10. Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica y calcular las siguientes probabilidades, bien con la fórmula de la función, bien con la gráfica:

a) $P(X \leq \frac{1}{2})$, b) $P(X > \frac{1}{4})$, (utilizar el contrario) c) $P(X = \frac{3}{4})$.

4.2. Función de densidad de una variable aleatoria continua

En las variables aleatorias discretas utilizábamos la *función de probabilidad* para calcular las probabilidades asociadas a la variable. Para las variables aleatorias continuas disponemos de la *función de distribución*, aunque utilizaremos más a menudo el equivalente a la función de probabilidad de las discretas, que aquí se llama **función de densidad** de probabilidad.

La *función de densidad* de una variable aleatoria continua X no es más que la derivada de su función de distribución, la denotaremos por $f(x)$. Entonces,

$$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$$

Veamos las características y propiedades de esta nueva función:

- Dado que la función de distribución $F(x)$ es creciente, $f(x) \geq 0$, ya que la derivada de una función creciente siempre es mayor o igual que 0. Esto hace que su gráfica siempre se encuentre por encima del eje de abscisas.

- Se puede demostrar que las probabilidades asociadas a la variable X son las áreas por debajo de la gráfica de $f(x)$, de hecho se verifica que la probabilidad $P(a < X \leq b)$ es el área que hay entre el eje $0X$ y la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (ver figura 12.2). Lo expresaremos de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{P(a < X \leq b) = \text{Área}(f(x), [a, b])}$$

(Con los conocimientos de este curso no podemos justificar esta propiedad, que es la más importante, se deriva de un importante teorema del Cálculo Integral, que será estudiado en el próximo curso, de hecho, el área que hemos mencionado antes se calcula mediante una *integral*).

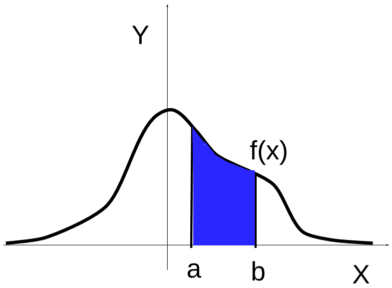


Figura 12.2: Función de densidad $f(x)$

- Admitiendo la propiedad anterior, se puede deducir otra característica de la función de densidad. Si la probabilidad es el área que hay por debajo de la curva, necesariamente

el área total por debajo de la función de densidad siempre es 1.

Por otra parte, como las probabilidades puntuales son nulas, es decir, $P(X = b) = 0$, a la hora de calcular la probabilidad $P(a < X \leq b)$ es indiferente que las desigualdades sean estrictas o no, es decir,

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Lo único que importa es el área que hay por debajo de la gráfica, no si los extremos están o no incluidos.

Todas las ideas anteriores son ciertamente complicadas de entender en una primera lectura. Sin embargo, las vamos a revisar en un caso práctico, que es el objeto de esta sección. Se trata del estudio del ejemplo más importante de variable aleatoria continua: la distribución Normal.

4.3. Distribución Normal

La **distribución Normal** es una variable aleatoria continua que aparece asociada a multitud de fenómenos. En un tiempo se pensó que prácticamente todos los fenómenos estadísticos se podían ajustar a esta distribución, de ahí el nombre que se le puso, “normal", de hecho, si un fenómeno no la verificaba, se decía que era un fenómeno “anormal". Hoy en día sabemos que, sobre todo aquellas variables en las que intervienen multitud de factores independientes, siguen una variable, si no normal, muy parecida. Entre los ejemplos que se pueden citar se encuentran: casi todas las características naturales de los seres vivos, como su longitud o su peso; multitud de fenómenos sociales y económicos como la tasa de natalidad, la distribución de la renta; etc. Todos son casos en los que intervienen multitud de factores independientes entre sí. Por ejemplo, en la estatura de una persona influyen factores genéticos, hábitos alimenticios, etc.

Vamos a describir su función de densidad y veremos cómo se pueden calcular probabilidades relacionadas con ella.

Se dice que X es una variable aleatoria continua que sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica σ, lo que denotaremos $X \sim N(\mu, \sigma)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En primer lugar, hay que señalar que no es preciso en absoluto aprender la fórmula que acabamos de ver. Lo importante es conocer su gráfica, que vamos a describir ahora. En la figura 12.3 hemos representado la gráfica de la función $f(x)$ para valores dados de μ y σ.

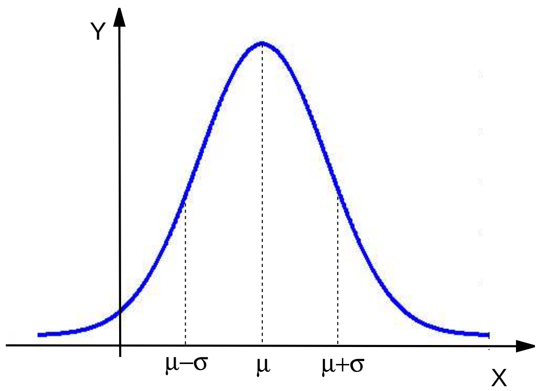


Figura 12.3: Función de densidad de la normal $N(\mu, \sigma)$

- La función cumple $f(x) \geq 0$, es decir, su gráfica siempre se encuentra por encima del eje $0X$.

- Tiene forma de campana, de hecho se le suele llamar *campana de Gauss*.

- Tiene un máximo absoluto en el punto $x = \mu$.
- Tiene dos puntos de inflexión que se encuentran en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
- La gráfica es simétrica con respecto de la recta vertical que pasa por su máximo.
- El eje X es asíntota horizontal de $f(x)$.
- El área por debajo de su gráfica es 1.

Según dijimos en el apartado anterior, para calcular probabilidades asociadas a una Normal, sería preciso calcular áreas sobre los intervalos correspondientes por debajo de la gráfica anterior. Sin embargo, esto no es sencillo, entre otras cosas porque la integral de la función de densidad de la Normal, que es la herramienta con la que habría que calcular el área, no se puede calcular de manera exacta. Lo único que se puede hacer es aproximarla numéricamente. Sin embargo, se puede comprobar que si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la variable

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

es una Normal $N(0,1)$, es decir, una Normal de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. A la Normal $N(0,1)$ se le llama **normal estándar** y para este caso particular los valores de las áreas, es decir, los valores de su función de distribución están tabulados, por lo que no es preciso calcularlos cada vez. El proceso mediante el cual pasamos de una Normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ a una Normal estándar $Z \sim N(0,1)$ se llama **tipificación de la variable**.

Resumiendo, para calcular probabilidades de una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$, primero hay que tipificar la variable, y después hay que utilizar la tabla de la Normal estándar para determinar los valores de la probabilidad. Veamos cómo se hacen las dos cosas.

Tipificación de la variable

Sea $X \sim N(3,2)$ y supongamos que queremos calcular $P(X \leq 4)$, entonces, en la expresión $X \leq 4$ restamos la media y dividimos por la desviación típica en ambos lados de la desigualdad:

$$P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{4-3}{2}\right) = P(Z \leq 0'5)$$

donde $Z \sim N(0,1)$ que al ser la Normal estándar se podrá calcular mediante los valores de la tabla como veremos después.

Si la probabilidad a calcular fuese de la forma $P(-2 < X < 3)$, por ejemplo, tendríamos que restar la media y dividir por la desviación típica en los tres miembros de la desigualdad, de la forma siguiente:

$$P(-2 < X < 3) = P\left(\frac{-2-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{3-3}{2}\right) = P(-2'5 < Z < 0)$$

donde, nuevamente, $Z \sim N(0,1)$.

Uso de la tabla de la Normal estándar $N(0,1)$

Supongamos entonces que la variable ya está tipificada y tenemos que calcular una probabilidad que está en términos de Z, con $Z \sim N(0,1)$. La tabla de la normal estándar, que se ha incluido en el apartado siguiente tiene tabulados con cuatro decimales los valores de las probabilidades (o áreas, según la gráfica que se adjunta con la tabla) correspondientes a $P(Z \leq k)$ para valores de k comprendidos entre 0 y 3'89. Para valores de k mayores que 3'89, la probabilidad es prácticamente 1, por lo que no es preciso que estén en la tabla. Vamos a ir viendo con ejemplos las diferentes posibilidades:

$P(Z \leq 2'65)$
El área que queremos calcular es el que se ha coloreado en la figura 12.4. Este área se puede encontrar directamente en la tabla, para ello hay que buscar el número en el que coinciden la fila 2'6 y la columna 0'05, que es 0'9960. Por tanto, $P(Z \leq 2'65) = 0'9960$.

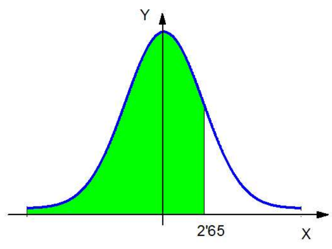


Figura 12.4: $P(Z \leq 2'65)$

$P(Z \leq -2'65)$
El área que queremos calcular es el que se ha coloreado en la figura 12.5. La tabla sólo nos ofrece valores del área a la derecha de $Z = 0$. Sin embargo, como la gráfica de la función de densidad es simétrica, el área desde $-\infty$ hasta -2'65 es igual que el área desde 2'65 hasta $+\infty$, y esta última la podemos calcular mediante el contrario:
$P(Z \leq -2'65) = P(Z > 2'65) = 1 - P(Z \leq 2'65) = 1 - 0'9960 = 0'0004$.

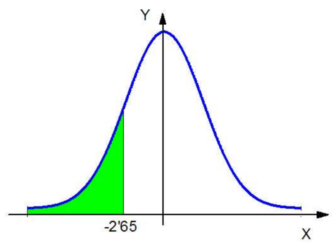


Figura 12.5: $P(Z \leq -2'65)$

(Recordemos que a la hora de calcular el área es indiferente que las desigualdades sean o no estrictas).

$P(2'21 < Z \leq 3'34)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.6, comprendido entre 2'21 y 3'34. Para calcular este área basta con restar al área hasta 3'34, el área hasta 2'21. Es decir,
$P(2'21 < Z \leq 3'34) = P(Z \leq 3'34) - P(Z \leq 2'21) = 0'9996 - 0'9864 = 0'0132$.

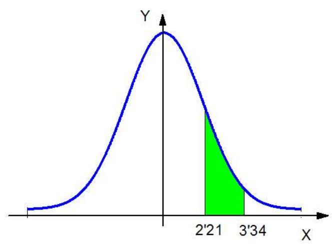


Figura 12.6: $P(2'21 < Z \leq 3'34)$

$P(-3'34 < Z \leq -2'21)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.7, y debido a la simetría de la función de densidad, este área es exactamente igual a la de la figura 12.6, que ya hemos calculado antes. Por tanto,
$P(-3'34 < Z \leq -2'21) = P(2'21 < Z \leq 3'34) = 0'0132$.

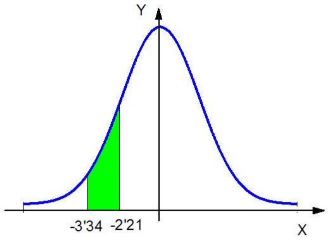


Figura 12.7: $P(-3'34 < Z \leq -2'21)$

Para acabar, veamos el caso en el que el área a calcular sea la comprendida entre un número negativo y uno positivo.

$P(-2'01 < Z \leq 3'14)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.8. Procedemos como en los casos anteriores,
$P(-2'01 < Z \leq 3'14) = P(Z \leq 3'14) - P(Z \leq -2'01)$
$= P(Z \leq 3'14) - P(Z > 2'01) =$
$= P(Z \leq 3'14) - (1 - P(Z \leq 2'01)) = 0'9970$.

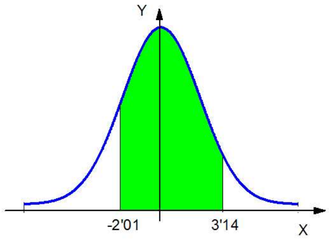


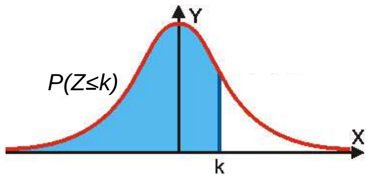
Figura 12.8: $P(-2'01 < Z \leq 3'14)$

ACTIVIDADES

11. La estatura de un grupo de personas sigue una normal $N(1'72, 0'3)$ medida en metros. Elegimos una persona al azar del grupo. Calcular la probabilidad de que:
a) su estatura sea mayor que 1’80.
b) su estatura esté comprendida entre 1’70 y 1’75.

12. Las notas finales de una asignatura en una universidad siguen una normal de media $\mu = 5'5$ y desviación típica $\sigma = 0'6$.
a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado la asignatura? ¿Qué porcentaje de alumnos aproximadamente han aprobado la asignatura?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya sacado una nota superior a 8?

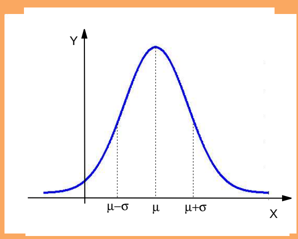
4.4. Tabla de la normal estándar $\mathbf{N(0,1)}$



k	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999

Recuerda

- ✓ Una *variable aleatoria continua* es aquella que puede tomar todos los valores de un intervalo de números reales.
- ✓ La *función de distribución* de una variable aleatoria continua es $F(x) = P(X \leq x)$. Su gráfica es no negativa, continua y crece desde el 0 al 1.
- ✓ La *función de densidad* de una variable aleatoria continua es la derivada de su función de distribución, $f(x) = F'(x)$. Sirve para calcular probabilidades asociadas a la variable, mediante el cálculo de áreas por debajo de su gráfica.
- ✓ La *distribución Normal* $N(\mu, \sigma)$ es el ejemplo más importante de variable aleatoria continua. Su función de densidad es la de la gráfica siguiente:



- ✓ El cálculo de probabilidades asociadas a la Normal se hace utilizando la tabla de la Normal estándar $N(0, 1)$, previa tipificación de la variable, mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.