10 Representación de funciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

El cálculo de derivadas, que hemos estudiado en la unidad anterior, tiene multitud de aplicaciones a diversos campos científicos. No obstante, una de las aplicaciones inmediatas es el estudio de la gráfica de una función. Esto es lo que vamos a ver en esta unidad, cómo se puede realizar un estudio cualitativo de los aspectos fundamentales de la gráfica de una función utilizando la derivada.

1. Monotonía: máximos y mínimos

De las ideas que se han estudiado en la unidad anterior, la más importante, es la de que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Utilizando esta idea vamos a estudiar cómo crece o decrece una función (monotonía) y cómo se pueden localizar sus máximos y sus mínimos.

1.1. Crecimiento y decrecimiento

En la gráfica de la figura 10.1 hemos representado una función **creciente**. Una función es creciente si, a medida que aumenta la x aumenta la y. De manera más precisa:

Una función es creciente si para cualesquiera a y b, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$, como podemos apreciar en la figura.

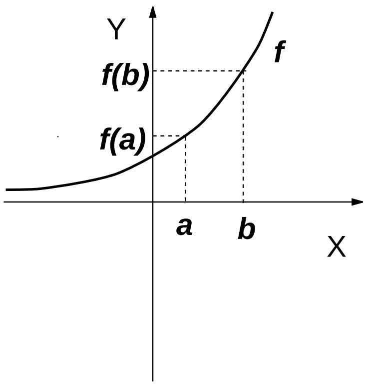


Figura 10.1: Función creciente

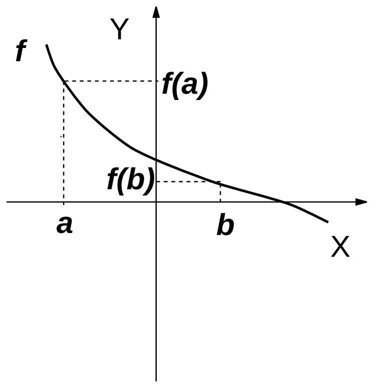


Figura 10.2: Función decreciente

Por otra parte, en la gráfica de la figura 10.2, hemos representado una función **decreciente**, es decir, una función en la que, a medida que aumenta la x disminuye la y. En otras palabras:

Una función es decreciente si para cualesquiera a y b, tales que $a < b$, se cumple que $f(a) \geq f(b)$.

Cuando una función es creciente en todo su dominio, o decreciente en todo el dominio, se dice que es **monótona**. Así, la función de la figura 10.1 es *monótona creciente*, y la función de la figura 10.2 es *monótona decreciente*.

Una función puede no ser monótona, cuando sea creciente en unos intervalos y decreciente en otros. Por ejemplo, la función de la figura 10.3 no es monótona, debido a que es creciente en el intervalo $(-\infty, p)$, decreciente en el intervalo (p, q), y vuelve a ser creciente en el intervalo $(q, +\infty)$.

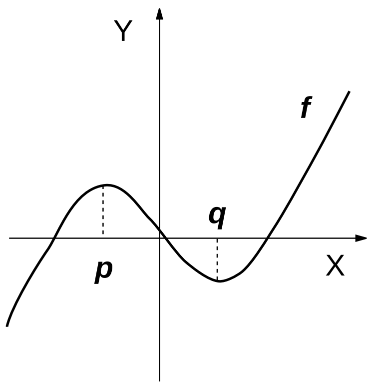
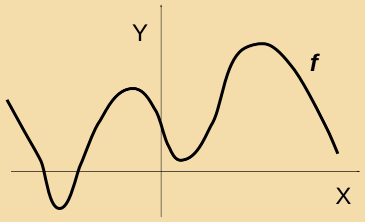


Figura 10.3: Función no monótona

ACTIVIDADES

1. Indicar los intervalos en los que la función de la gráfica adjunta es creciente y en cuáles es decreciente.



¿Qué ocurre con la derivada de una función creciente o decreciente?

En las gráficas de las figuras 10.4 y 10.5 hemos dibujado la recta tangente en un punto de una función creciente y una decreciente, respectivamente. En el caso de la función creciente, vemos que la inclinación de la recta tangente hace que ésta tenga pendiente positiva, ya que la tangente del ángulo que forma con el eje OX es positiva, por tanto, su derivada en cualquier punto también lo será. Analogamente, en el caso de la función decreciente, la inclinación de la recta tangente hace que tenga pendiente negativa y, este mismo signo tendrá su derivada. Entonces, estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función mediante su derivada, consiste en estudiar su signo, según el siguiente criterio:

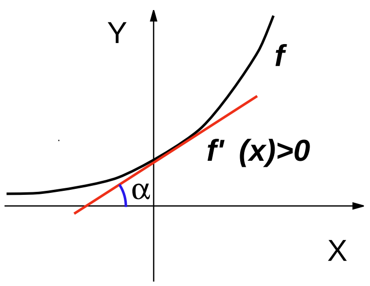


Figura 10.4: Función creciente

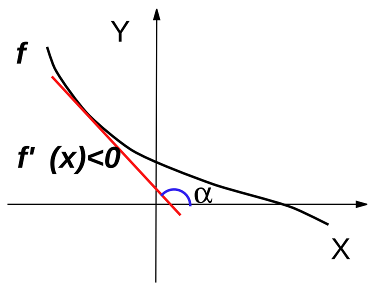


Figura 10.5: Función decreciente

Sea f una función derivable en los puntos del intervalo abierto (a, b):
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

Por ejemplo, si queremos saber cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$.

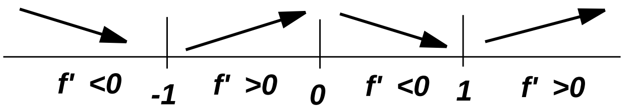
En primer lugar, calculamos su derivada,

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Queremos estudiar el signo de la derivada primera, por esta razón hemos factorizado la derivada. Como $f'(x)$ es un polinomio, es una función continua en todo $\mathbb{R}$, luego $f'(x)$ sólo puede cambiar de signo en los puntos en los que se anula, es decir,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = 1$$

Para ver entonces cuál es el signo, utilizamos el siguiente esquema, en el que se han representado los tres puntos anteriores (la línea horizontal representa el eje X):



Como $f'(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, en estos intervalos la función resulta decreciente. Como $f'(x) > 0$ en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. El signo en cada intervalo se decide sustituyendo un número cualquiera de ese intervalo en $f'(x)$. (Por ejemplo, para ver el signo en el intervalo $(0, 1)$, probamos con $x = 0'5$: $f'(0'5) = 4{\cdot}0'5{\cdot}(0'5-1)(0'5+1) = 4{\cdot}0'5{\cdot}(-0'5){\cdot}1'5 < 0$, y así sucesivamente).

ACTIVIDADES

2. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x$.

1.2. Máximos y mínimos

Una función alcanza en un punto un **máximo relativo** cuando en ese punto toma el valor más alto de todos los que se encuentran cerca de él. De la misma manera, una función alcanza en un punto un **mínimo relativo** cuando en ese punto toma el

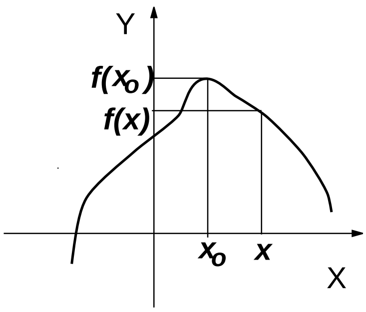


Figura 10.6: Máximo

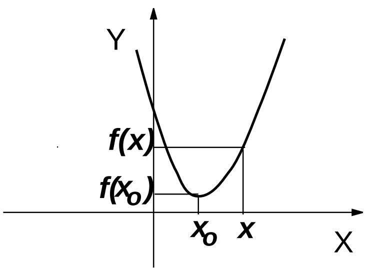


Figura 10.7: Mínimo

valor más bajo de todos los que se encuentran cerca de él. En las gráficas de las figuras 10.6 y 10.7 hemos dibujado sendas funciones con un máximo y un mínimo relativo, respectivamente. Por ejemplo, en la figura 10.6 el máximo se alcanza en el punto x_0, porque para cualquier otro punto x cerca de x_0 el valor $f(x_0)$ es mayor (o igual) que el valor $f(x)$. Análogamente con el mínimo.

Para precisar la idea de *cercanía* lo que hacemos es pensar en algún intervalo (a, b) en el que esté incluido el punto x_0. Resumiendo,

f tiene en x_0 un máximo relativo si existe un intervalo (a, b) que contiene a x_0, tal que para todo $x \in (a, b)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$.

(Lo importante aquí, más que recordar definiciones más o menos formales, es que la idea geométrica de máximo y de mínimo quede clara, a partir de aquí intentar escribir la definición consistirá en intentar describir lo que vemos en la gráfica).

ACTIVIDADES

3. Escribir la definición de mínimo relativo de una función.

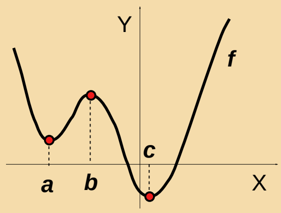
A los máximos y mínimos relativos también se les denomina a veces máximos y mínimo *locales*. Usaremos a veces la expresión **extremos relativos** o *extremos locales*, para referirnos a ambos, máximos y mínimos.

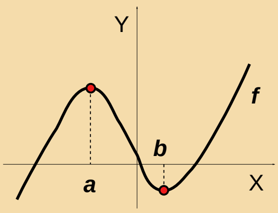
Además de extremos locales, una función también puede tener **extremos absolutos** cuando, en lugar de tener en cuenta sólo un intervalo, tenemos en cuenta todo el dominio de la función.

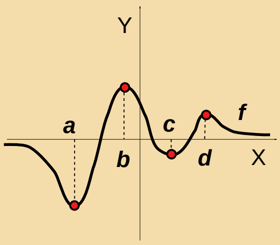
Una función tiene en x_0 un **máximo absoluto** si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.
Una función tiene en x_0 un **mínimo absoluto** si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.

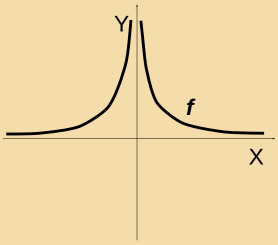
ACTIVIDADES

4. Indicar, en las gráficas siguientes, cuáles son los extremos locales y absolutos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Como hemos hecho con el crecimiento y decrecimiento, ahora nos preguntamos qué ocurre con la derivada en un máximo o en un mínimo. Y para saber la respuesta, una vez más, acudimos a las gráficas. En la gráfica de la figura 10.8 hemos dibujado una función con tresextremos relativos en los puntos a, b y c.

En el punto $x = a$ hay un mínimo relativo y en $x = b$ hay un máximo relativo. En ambos puntos la recta tangente es horizontal y, por tanto, de pendiente nula, luego en estos puntos la derivada es 0, $f'(a) = 0$ y $f'(b) = 0$. El punto $x = c$ también es un mínimo relativo, pero además es un punto anguloso, entonces no existe la derivada (para indicar que la derivada primera no existe en este punto utilizamos el símbolo $\nexists$, que significa precisamente *no existe*, que ya ha sido utilizado a lo largo del texto.) Estas son pues las situaciones que se pueden presentar: la derivada es nula o la derivada no existe. De hecho, se puede demostrar que:

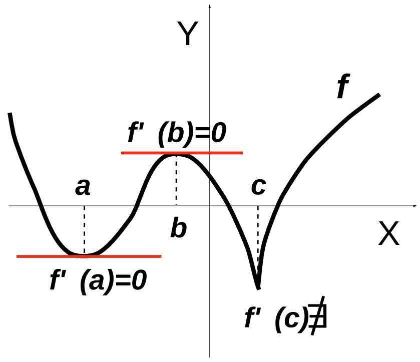


Figura 10.8: Extremos y derivada

Siendo f es derivable en los puntos del intervalo abierto (a, b), si f alcanza un máximo o mínimo relativo en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.

A estos puntos, a los puntos en los que la derivada es 0 o no existe, se les llama **puntos críticos** o *puntos singulares.* Y, como acabamos de ver, son puntos en los que puede haber máximos o mínimos.

Las observaciones anteriores proporcionan un procedimiento para estudiar, de manera conjunta, crecimiento, decrecimiento y posibles extremos de una función:

- En primer lugar, calculamos la derivada primera y con ella, igualando a 0, o viendo en qué puntos no existe, los puntos críticos.

- En segundo lugar, estudiamos el crecimiento y decrecimiento, mediante el signo de la derivada primera.

- Por último, decidimos dónde hay máximo o mínimo, de acuerdo con los esquemas de las figuras 10.9 y 10.10.

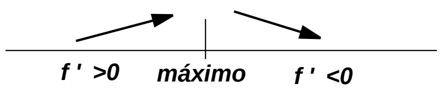


Figura 10.9: Máximo

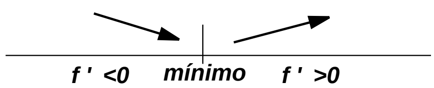


Figura 10.10: Mínimo

Por ejemplo, queremos estudiar los puntos críticos de la función $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Como es un polinomio, es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces sus puntos críticos sólo van a ser aquellos que anulen la derivada.

Calculamos la derivada primera y la igualamos a 0 para calcular los puntos críticos,

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$$

Entonces, en estos tres puntos críticos, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ es donde puede haber máximos, mínimos o ninguna de las dos cosas.

Estudiamos ahora el crecimiento y decrecimiento mediante el signo de la derivada en los intervalos que determinan los anteriores puntos críticos:

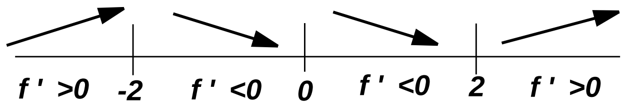


Figura 10.11: Crecimiento y decrecimiento

A la vista del esquema de la figura 10.11, podemos concluir que en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo, mientras que en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo.

Si este cálculo lo hacemos para después dibujar la gráfica de la función, será necesario conocer las coordenadas de los máximos y mínimos para situarlos sobre la gráfica. Para calcular la segunda coordenada (la y), que es la que nos falta, hay que sustituir la x en la función original $f(x)$ (no en la derivada, que saldría 0). Entonces, el máximo se encuentra en $(-2, 64)$ y el mínimo en el punto de coordenadas $(2, -64)$.

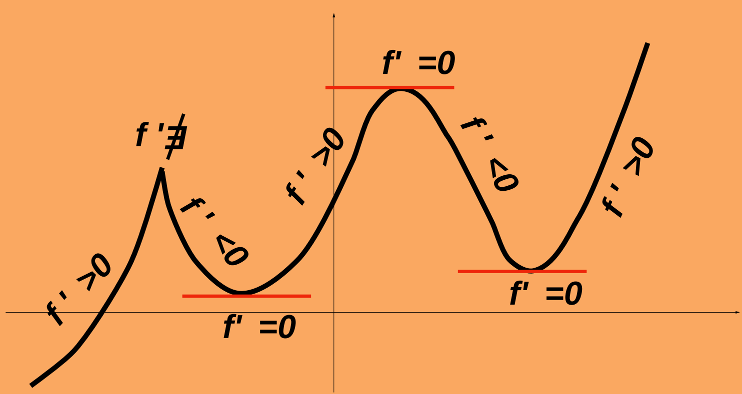
Por último, hay que señalar que este cálculo no nos permite conocer si los máximos y mínimos son absolutos o no, para saber esto, necesitaríamos saber algo más acerca de la forma de la gráfica de la función.

ACTIVIDADES

5. Estudiar los puntos críticos y el crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes: a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

Recuerda

✓ El crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función se pueden estudiar utilizando la derivada primera. Las diferentes situaciones que se pueden presentar están resumidas en la gráfica siguiente:



2. Curvatura

2.1. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Los conceptos de concavidad y convexidad de una función son difíciles de precisar formalmente, pero muy fáciles de comprender mediante un dibujo, y esto es lo que vamos a hacer, intentar entenderlos mediante las gráficas.

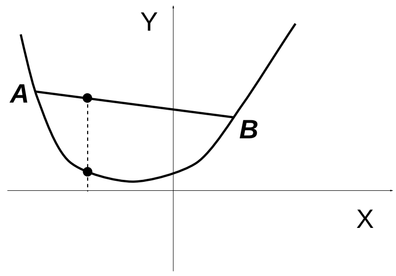


Figura 10.12: Función convexa

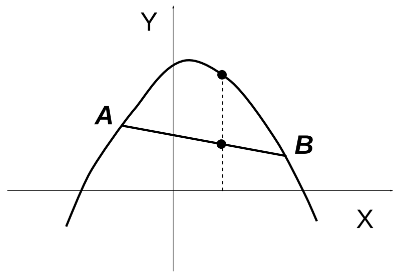


Figura 10.13: Función cóncava

En la figura 10.12 tenemos la gráfica de una función **convexa**. Para tener una función convexa debe ocurrir que, cada vez que dibujemos una cuerda que una dos puntos A y B de la gráfica de la función, los puntos de esta cuerda siempre deben quedar por encima de los puntos de la gráfica de la función. Vemos entonces que la gráfica se curva hacia arriba.

En la figura 10.13 tenemos la gráfica de una función **cóncava**. Para que una función sea cóncava debe ocurrir que, cada vez que dibujemos una cuerda que una dos puntos A y B de la gráfica de la función, los puntos de esta cuerda siempre deben quedar por debajo de los puntos de la gráfica de la función. Vemos entonces que la gráfica se curva hacia abajo.

NOTA: Los términos de concavidad y convexidad aplicados a cualquier objeto dependen del punto de vista desde el que se mira. Esto también es así en matemáticas, por esta razón, la denominación por la que se ha optado aquí, llamando convexa a la gráfi ca “abierta hacia arriba” y cóncava a la “abierta hacia abajo”, no es estándar. Si uno consulta diez textos distintos de matemáticas, puede encontrar en cinco de ellos esta denominación y en los otros cinco la contraria. Lo importante, no obstante, no es cómo se llame a las cosas sino lo que uno quiera decir con estos nombres. El lector puede adoptar su propia denominación con tal de que no se confunda. En algunos libros, a lo que nosotros llamamos convexa, se le llama “cóncava hacia arriba", y a lo que nosotros llamamos cóncava, le llaman “cóncava hacia abajo". Hay nombres para todos los gustos, pero insistimos, ni en esta ni en otras situaciones los nombres son lo importante.

Una función puede ser cóncava o convexa en todo su dominio, pero en muchas ocasiones habrá intervalos en los que la función sea cóncava, y otros intervalos en los que la función sea convexa. Esto es lo que ocurre en las gráficas de las figuras 10.14 y 10.15. En estas gráficas hemos señalado, en rojo, el punto en el que, aproximadamente, la función cambia de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava. A estos puntos en los que la función cambia su curvatura, se les llama **puntos de inflexión**. Además de ser el lugar en el que cambia la curvatura de la función, en un

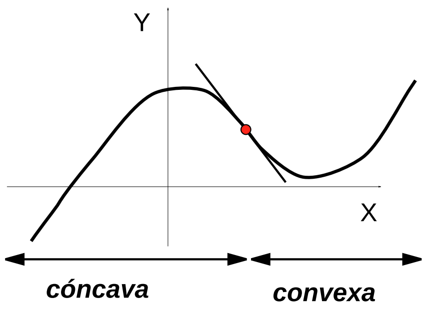


Figura 10.14: De cóncava a convexa

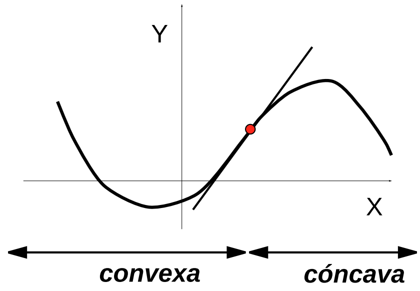
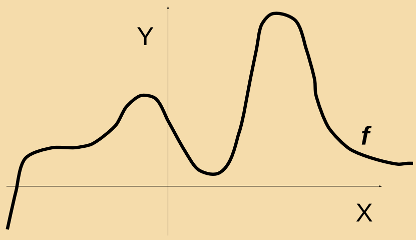


Figura 10.15: De convexa a cóncava

punto de inflexión se da produce un fenómeno especial, que hemos señalado en las gráficas, y es que la recta tangente en el punto *atraviesa* a la gráfica de la función.

ACTIVIDADES

6. Señalar en la gráfica de la figura adjunta dónde se encuentran aproximadamente los puntos de inflexión y cuáles son los intervalos de concavidad y convexidad.



2.2. La derivada segunda para estudiar la curvatura

En la figura 10.16 hemos representado una función cóncava. También se han dibujado las rectas tangentes en cuatro puntos distintos, p, q, r y s. Las pendientes de las rectas tangentes en estos puntos son los valores de la derivada primera en los mismos puntos, es decir, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$ y $f'(s)$. En la parte inferior de la gráfica, sobre una recta paralela al eje X, hemos dibujado rectas con las mismas pendientes que las rectas tangentes.

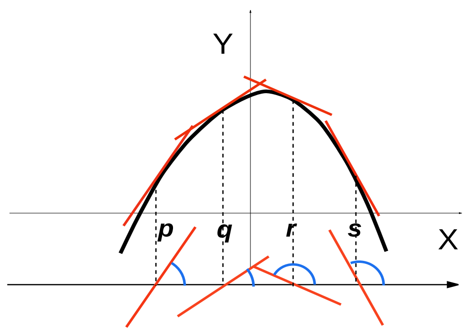


Figura 10.16: Función cóncava

Recorramos ahora, de izquierda a derecha, estas rectas. La pendiente de cada una de ellas es la tangente trigonométrica del ángulo que forman con la horizontal,

que también se ha dibujado. Es fácil apreciar que este valor va *decreciendo*, de izquierda a derecha. Por tanto, se puede asegurar que los valores de la derivada tienen el siguiente orden: $f'(p) > f'(q) > f'(r) > f'(s)$.
Si hubiésemos dibujado muchos más puntos, ocurriría lo mismo, es decir, la función $f'(x)$ es *decreciente*, pero entonces, su derivada, que es la derivada segunda $f''(x)$ debe ser negativa.

De la misma manera se podría comprobar que si la función de partida fuese convexa, su derivada primera $f'(x)$ sería creciente y, por tanto, su derivada segunda $f''(x)$ sería positiva.

Esto nos proporciona un criterio para determinar dónde una función es cóncava y dónde convexa, sin más que estudiar el signo de su derivada segunda:

Sea f una función cuya derivada segunda existe en un intervalo (a, b):
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).
- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b).

¿Qué ocurrirá entonces en un punto de inflexión? En un punto de inflexión hay un cambio de curvatura: de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava. Por tanto, el signo de $f''(x)$ cambia de negativo a positivo o viceversa. En cualquiera de los dos casos, para cambiar de signo, hemos de pasar por cero. Y esto es lo que ocurre en un punto de inflexión, que la derivada segunda se anula. Con más precisión:

Si f tiene en x_0 un *punto de inflexión*, y existe la derivada segunda, entonces $f''(x_0) = 0$.

Es importante señalar que el hecho de que $f''(x_0) = 0$ no es suficiente para que en este punto haya un punto de inflexión, lo que hemos dicho es que si lo hay, entonces la derivada segunda se anula. En definitiva, para que haya punto de inflexión, hace falta que haya cambio de curvatura y esto puede ocurrir incluso en el caso de que la derivada segunda no exista en el punto.

Veamos un ejemplo de aplicación del criterio de la derivada segunda para el estudio de la curvatura: la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero para determinar los posibles puntos de inflexión,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x; \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Tal como hacíamos con f' para estudiar el crecimiento y decrecimiento, ahora hacemos lo mismo con f'' para estudiar la concavidad y convexidad. Es decir, estudiamos el signo de f'' en los intervalos que $x = 2$ determina en el eje X,

Entonces, hay un punto de inflexión en $x = 2$, ya que hay cambio de curvatura. Las coordenadas del punto sobre la gráfica son $(2, -16)$ (para calcular la segunda coordenada, hay que sustituir en la función original $f(2) = -16$.)

Figura 10.17: Concavidad y convexidad de $f(x) = x^3 - 6x^2$

ACTIVIDADES

7. Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las funciones siguientes: a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^{1/3}$ c) $f(x) = x^4$

2.3. Criterio de la derivada segunda para máximos y mínimos

El hecho de que la derivada segunda sirva para estudiar la concavidad y convexidad de una función hace que también se pueda utilizar para determinar si un punto crítico es máximo o mínimo.

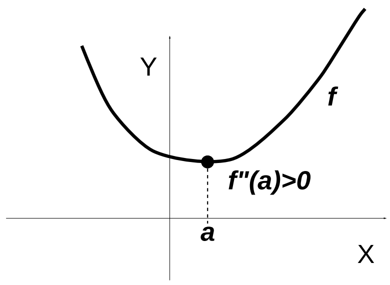


Figura 10.18: Mínimo/convexa

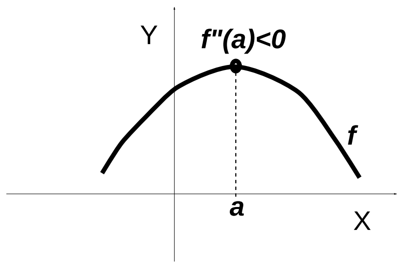


Figura 10.19: Máximo/cóncava

En la gráfica de la figura 10.18, la función f tiene un mínimo en $x = a$, así que necesariamente debe ser convexa. De igual forma, en la gráfica de la figura 10.19, la función f tiene un máximo en $x = a$, entonces ha de ser cóncava. Esto nos proporciona el siguiente criterio, para determinar máximos y mínimos con la derivada segunda:

Sea f una función con un punto crítico en $x = a$, tal que $f'(a) = 0$:
- Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene en $x = a$ un mínimo, con coordenadas $(a, f(a))$.
- Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene en $x = a$ un máximo, con coordenadas $(a, f(a))$.

El hecho de que sólo necesitemos saber el signo de la derivada segunda en el punto crítico hace que este criterio sea fácil de aplicar. Sin embargo, existe un problema, si resulta $f''(a) = 0$, el criterio no nos proporciona ninguna información sobre si el punto es máximo o mínimo. En este caso, habría que acudir al estudio del crecimiento y decrecimiento con la derivada primera.

Por ejemplo, queremos estudiar los puntos críticos de la función $f(x) = x(6-2x)^2$ utilizando la derivada segunda.

Calculamos primero los puntos críticos, utilizando la derivada primera,

$$f'(x) = (6-2x)(6-6x) = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 1.$$

Ahora calculamos la derivada segunda

$$f''(x) = 24x - 48,$$

y sustituimos en ella los puntos críticos:

$f''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0$, entonces en $x = 3$ hay un mínimo.

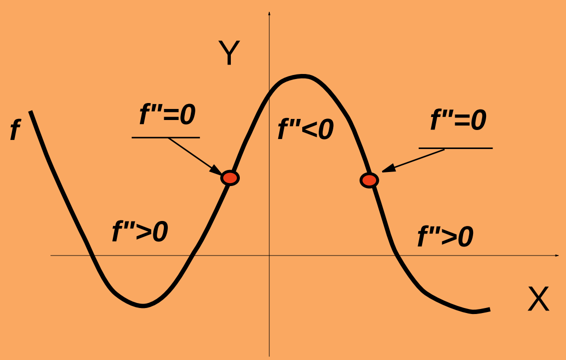
$f''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0$, entonces en $x = 1$ hay un máximo.

ACTIVIDADES

8. Estudiar los puntos críticos de las siguientes funciones, utilizando la derivada segunda: a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3$.

Recuerda

- ✓ Una función es *convexa* cuando cualquier cuerda que una dos puntos de su gráfica siempre queda por encima de la gráfica.
- ✓ Una función es *cóncava* cuando la cuerda quede siempre por debajo de la gráfica.
- ✓ Un *punto de inflexión* es un punto de la gráfica de la función en el que hay un cambio de curvatura, de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava.
- ✓ La curvatura y los puntos de inflexión están relacionados con el valor de la derivada segunda de una función según el siguiente esquema gráfico que lo resume:



3. Asíntotas

Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas aparecieron al estudiar los límites de funciones. Resultan de enorme utilidad para dibujar con precisión la gráfica de una función. Vamos a ir viendo, mediante ejemplos, cómo se pueden calcular e interpretar con más detalle del que se vió en la parte correspondiente al cálculo de límites.

3.1. Asíntotas verticales

Para que una función $f(x)$ tenga una **asíntota vertical** en un punto $x = a$, es preciso que, por lo menos uno de sus límites laterales sea infinito. Las asíntotas verticales se producen en los puntos en los que hay discontinuidades de salto infinito. Y a la hora de representar la gráfica de una función nos interesa precisamente cuál es el signo de estos límites laterales, si es $+\infty$ o $-\infty$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tiene por dominio de definición dom$(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Entonces, en $x = 3$ puede haber una asíntota vertical. Estudiamos sus límites laterales:

Por la izquierda, $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ (para calcular el signo sustituimos en x un valor próximo a 3, a su izquierda; por ejemplo, $x = 2'99$ y calculamos el signo del resultado).

Por la derecha, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ (en este caso, sustituimos en x un valor próximo a 3, a su derecha; por ejemplo, $x = 3'01$ y calculamos el signo del resultado.)

Concluimos que $x = 3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Los signos que hemos obtenido en los límites laterales nos indican que, en las cercanías de la asíntota, el comportamiento de la gráfica de la función es como el que se indica en la figura 10.20. No hay que olvidar que la asíntota *no forma parte de la función*,

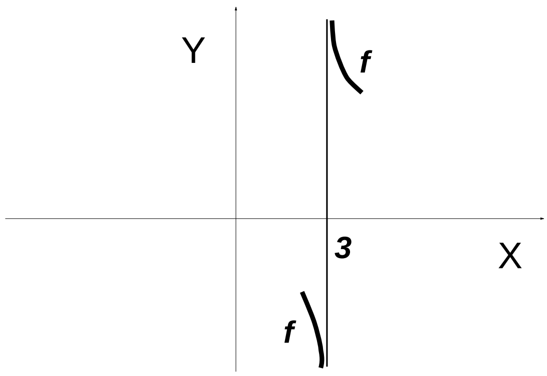


Figura 10.20: Asíntota vertical en $x = 3$

sino que es una recta a la que la función se aproxima.

3.2. Asíntotas horizontales

Una **asíntota horizontal** aparece cuando la función se aproxima a alguna recta horizontal cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Para ello alguno de los límites (o los dos) en el infinito debe ser finito.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, los límites en el infinito son:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)}{(-x)+1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Entonces, tanto a la derecha como a la izquierda, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Su gráfica es la de la figura 10.21.

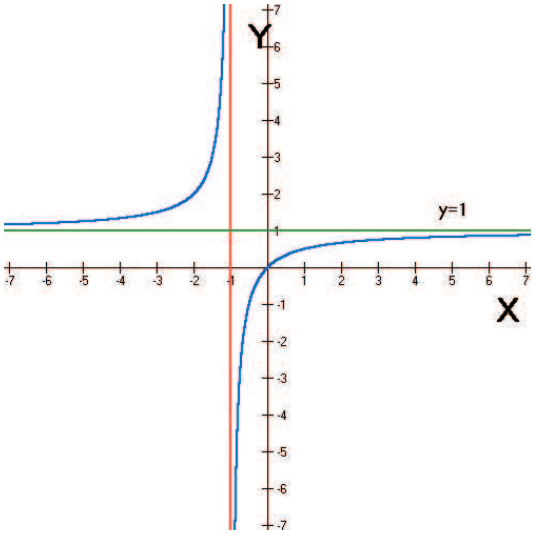


Figura 10.21: Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

La gráfica de la figura 10.21 muestra que una función puede tener simultáneamente una asíntota vertical y una horizontal.

ACTIVIDADES

9. ¿Puede tener una misma función dos asíntotas verticales distintas? ¿Y más de dos?
¿Puede tener una misma función dos asíntotas horizontales distintas? ¿Y más de dos?

10. Estudiar las asíntotas verticales y horizontales de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

3.3. Asíntotas oblicuas

La función $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ no es una recta, sin embargo, para valores muy grandes de x, su comportamiento es muy parecido al de una recta. En efecto, si damos a x valores muy grandes, el término $\dfrac{1}{x^2}$ es prácticamente 0 y, por tanto, $f(x)$ toma valores próximos a los que toma la recta $y = x$. En la figura 10.22 hemos representado la

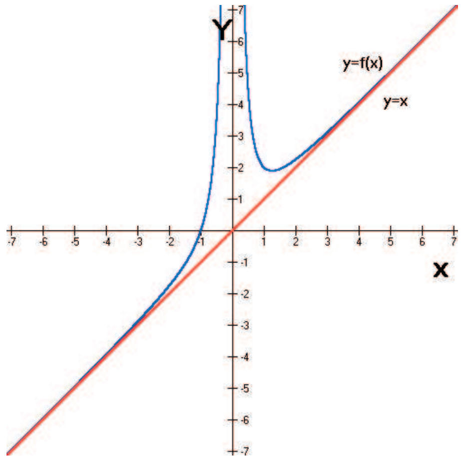


Figura 10.22: Gráfica de $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

función $f(x)$ y la recta $y = x$. Como se puede observar en la figura, cuando los valores de x son muy grandes, la recta y la curva tienden a confundirse. Se dice entonces que $y = x$ es una **asíntota oblicua** de la función $f(x)$.

En general, si $f(x)$ es una función, una asíntota oblicua de $f(x)$ es una recta de la forma $y = mx + n$ (con $m \neq 0$, ya que de otra forma, sería horizontal) a la que la gráfica de la función se aproxima, cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Entonces, para calcular una asíntota oblicua hay que determinar los valores de m y de n.

Para calcular m, si $x \to +\infty$ entonces la recta y la curva son aproximadamente iguales,

$$f(x) \approx mx + n$$

($\approx$ quiere decir, aproximadamente igual).

Dividimos entre x,

$$\frac{f(x)}{x} \approx m + \frac{n}{x} \approx m$$

es decir, si x es muy grande, $m \approx \dfrac{f(x)}{x}$. Formalmente,

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Por otra parte, como $f(x) \approx mx + n$, despejando n, tenemos que, para valores grandes de x, se tiene

$$n \approx f(x) - mx$$

Entonces,

$$\boxed{n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

En el ejemplo que comentábamos al principio, $f(x) = x + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3+1}{x^2}$, utilizando las fórmulas que acabamos de ver,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^3+1}{x^2} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Luego, la asíntota oblicua es $y = 1.x + 0$, es decir, $y = x$.

Estos cálculos realmente lo que prueban es que $y = x$ es la asíntota oblicua a la derecha. Para calcular la asíntota a la izquierda habría que repetirlos haciendo $x \to -\infty$, aunque para las funciones con las que vamos a trabajar en este curso, siempre ocurrirá que se tiene la misma asíntota oblicua (podría ocurrir otra cosa en una función definida a trozos.)

ACTIVIDADES

11. ¿Puede tener una misma función una asíntota vertical y una oblicua? ¿Puede tener una misma función una asíntota horizontal y una oblicua?

12. Estudia las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Recuerda

- ✓ Las *asíntotas verticales* aparecen en los puntos de discontinuidades de salto finito. Se estudian mediante los límites laterales en el punto de discontinuidad.
- ✓ Las *asíntotas horizontales* aparecen cuando los límites en el infinito son finitos.
- ✓ Las *asíntotas oblicuas* son rectas de la forma $y = mx + n$ a las que se aproxima la función. Los parámetros m y n se calculan con las fórmulas siguientes:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

4. Estudio de la gráfica de una función

Hemos ido estudiando, en esta y en la unidad anterior, conceptos que resultan útiles para analizar la gráfica de una función. Vamos a poner ahora todas estas herramientas a trabajar juntas.

El estudio completo de la gráfica de una función requiere recopilar una gran cantidad de información, que nos va a permitir tener una imagen de los aspectos más significativos de la gráfica. Conviene recoger esta información en un orden adecuado. Existen varias posibilidades, que dependen fundamentalmente de los gustos de quien lo hace. A continuación exponemos un posible guión para este estudio:

4.1. Guión para el análisis de la gráfica de una función

1. **Propiedades globales de la función.**

   Estudiamos en primer lugar el dominio de definición de la función. Los puntos de corte con los ejes, simetrías y periodicidad (si hubiera lugar a ello).

   También puede resultar útil el estudio del signo de la función, lo que nos indicará cuáles son los intervalos del eje X en los cuales la función está por encima o por debajo del eje horizontal. Para hacerlo; consideramos, tanto los puntos de corte en el eje X, como los puntos en los que la función no existe (o es discontinua); todos estos son los puntos donde puede haber cambio de signo. A continuación, determinamos el signo de $f(x)$ en cada intervalo, utilizando algún valor de prueba. Veremos cómo se hace a continuación en unos ejemplos.

2. **Derivada primera.**

   En este apartado estudiamos y clasificamos los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para el estudio de los intervalos, habrá que tener en cuenta los que determinan los puntos críticos, y también, aquellos puntos no incluidos en el dominio, si los hubiera.

3. **Derivada segunda.**

   Aquí se estudian los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión. Para los intervalos de concavidad y convexidad habrá que tener en cuenta, los posibles puntos de inflexión, es decir, los que anulan $f''(x)$ y aquellos puntos no incluidos en el dominio.

4. **Asíntotas.**

   Estudiamos ahora la existencia de cada uno de los tres tipos posibles de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas. Para el caso particular de las funciones polinómicas, este punto no es necesario, ya que no tienen asíntotas.

5. **Representación gráfica.**

   Se trata ahora de llevar a la gráfica todo lo que se ha obtenido en los puntos anteriores. Este último paso, es el más delicado, ya que supone encajar toda la información que se ha recopilado en un dibujo y, en algunos casos, puede resultar complicado, como encajar todas las piezas de un rompecabezas. Una manera de intentar paliar esta dificultad, consiste en ir pasando a la gráfica la información a medida que vaya apareciendo, sin esperar al final. De esta forma se pueden ir detectando y corrigiendo errores. Sin embargo, hay que decir que al principio la cosa no es nada fácil. Aprender a representar gráficas de funciones es un proceso que lleva un cierto tiempo y requiere mucha práctica.

El estudio de las asíntotas puede hacerse perfectamente en segundo lugar, ya que, como hemos visto, no se precisa la información que proporcionan las derivadas.

Vamos a hacer con detalle un par de ejemplos, siguiendo el guión propuesto.

4.2. Ejemplos

Una función polinómica.
Estudiar y representar la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2)$$

1. Su dominio es dom$(f) = \mathbb{R}$, por ser un polinomio; además, es continua en todo el dominio.

   - Puntos de corte con los ejes:

   Eje Y; $x = 0$, $y = 0$; $(0, 0)$.

   Eje X; $y = 0$, $0 = x^2(x+2)(x-2) \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$. Entonces corta en los puntos $(0, 0)$, $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

   - Simetrías. Es una función par, porque $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$. Esto quiere decir que su gráfica es simétrica con respecto del eje Y.

   - Signo de f(x). Los únicos cambios de signo se pueden producir en los puntos de corte con el eje X, entonces el signo de la función en cada intervalo se indica en el siguiente esquema:

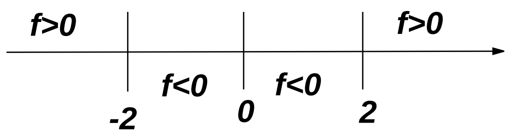
   

   Figura 10.23: Signo de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$

   Saber qué signo tiene una función en un intervalo nos permite saber si, en ese intervalo, la gráfica de la función está por encima o por debajo del eje X. Esto lo hemos indicado en la figura 10.24, en la que se han rayado las regiones del plano sobre las cuales **no** hay que dibujar función. Utilizando este dibujo y los puntos de corte, ya se podría hacer un dibujo bastante aproximado de la gráfica.

2. Derivada primera. $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.

   Calculamos los puntos críticos,

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{2}$$

   Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los intervalos determinados por estos puntos.

   Entonces, a partir del esquema de la figura 10.25, concluimos que hay un máximo en el punto $(0, 0)$ y hay mínimos en los puntos $(-\sqrt{2}, -4)$ y $(\sqrt{2}, -4)$.

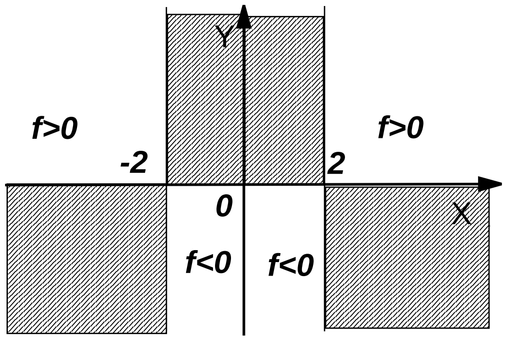


Figura 10.24: Regiones de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$

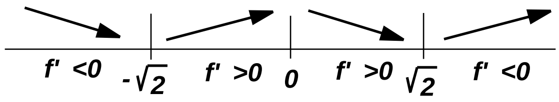


Figura 10.25: Crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^4 - 4x^2$

3. Derivada segunda. $f''(x) = 12x^2 - 8$. Entonces los posibles puntos de inflexión,

$$f''(x) = 12x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad en los intervalos determinados por estos puntos.

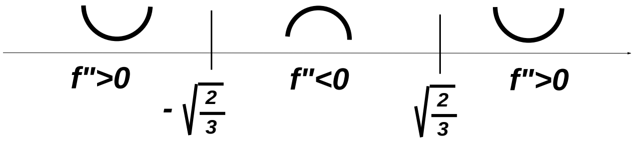


Figura 10.26: Concavidad y convexida de $f(x) = x^4 - 4x^2$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-20}{9}\right)$ y en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-20}{9}\right)$.

4. Lá función no tiene asíntotas porque es un polinomio, como ya hemos comentado.

5. Representación gráfica. Con toda la información que hemos ido recopilando, la gráfica de la función es la de la figura 10.27.

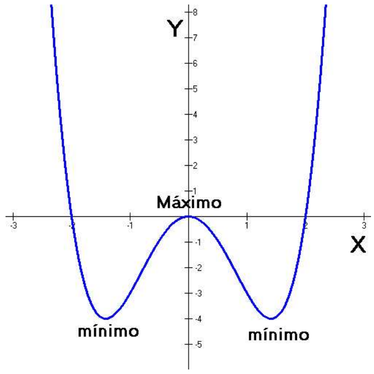


Figura 10.27: Gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$

Una función racional.
Estudiar y representar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

1. Su dominio es dom$(f) = \mathbb{R}$, debido a que su denominador no se anula nunca; además, es continua en todo el dominio, por ser cociente de dos funciones continuas.

   - Puntos de corte con los ejes:

   Eje Y; $x = 0$, $y = 0$; $(0, 0)$.

   Eje X; $y = 0$, $0 = \dfrac{4x}{x^2+4} \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Es decir, el mismo punto de corte que en el eje Y, $(0, 0)$.

   - Simetrías. Es una función impar, porque $f(-x) = \dfrac{4(-x)}{(-x)^2+4} = \dfrac{-4x}{x^2+4} = -f(x)$. Esto quiere decir que su gráfica es simétrica con respecto del origen.

   - Signo de f(x). El único cambio de signo se produce en el punto $x = 0$, entonces el signo de la función en cada intervalo se indica en el siguiente esquema:

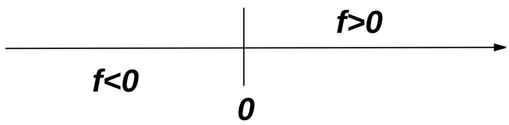
   

   Figura 10.28: Signo de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

   En la figura 10.29 hemos rayado las regiones por donde **no** hay función.

2. Derivada primera. $f'(x) = \dfrac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$.

   Calculamos los puntos críticos,

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

   Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los intervalos determinados por estos puntos.

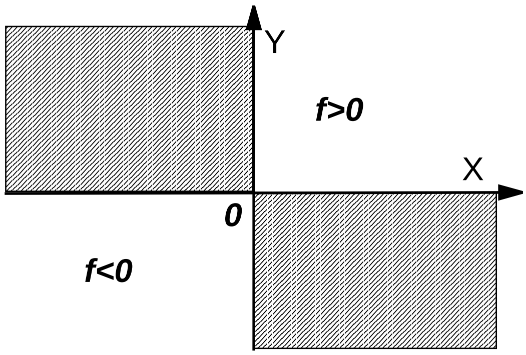


Figura 10.29: Regiones de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

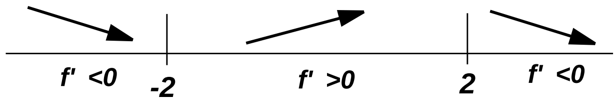


Figura 10.30: Crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

Entonces, a partir del esquema de la figura 10.30, se puede decir que hay un máximo en el punto $(2,1)$ y hay un mínimo en el punto $(-2,-1)$.

3. Derivada segunda. $f''(x) = \dfrac{8x^3-96x}{(x^2+4)^3}$. Entonces los posibles puntos de inflexión,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 96x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2\sqrt{3}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad en los intervalos determinados por estos puntos.

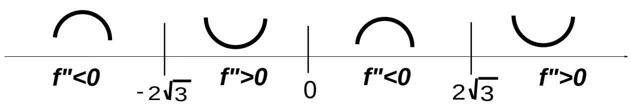


Figura 10.31: Concavidad y convexida de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $(0,0)$, $\left(-2\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y en $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Asíntotas verticales no hay porque la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

   Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2+4} = 0$$

Entonces, hay asíntota horizontal en $y=0$, a la derecha y a la izquierda, debido a la simetría impar de la función.

Asíntotas oblicuas no puede haber, ya que hay horizontal.

5. Representación gráfica. Con toda la información que hemos ido recopilando, la gráfica de la función es la de la figura 10.32.

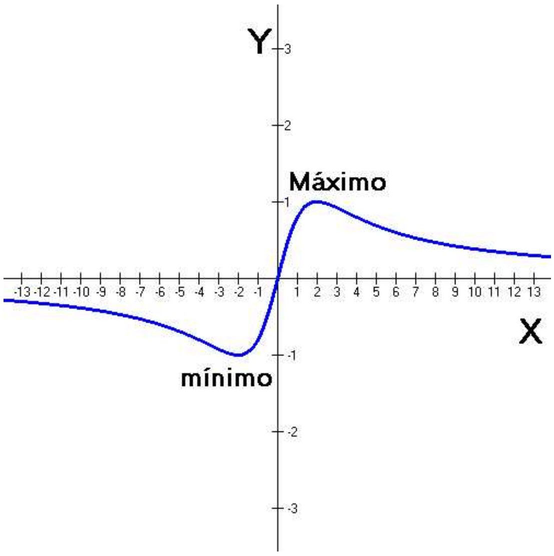


Figura 10.32: Gráfica de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

ACTIVIDADES

13. Estudiar y representar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Recuerda

✓ Pasos para el estudio de una gráfica:

1. Propiedades globales de la función: dominio, puntos de corte, simetrías, signo.
2. Derivada primera: puntos críticos, crecimiento y decrecimiento.
3. Derivada segunda: concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
4. Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.
5. Representación gráfica.