UNIDAD

9 Cálculo de derivadas

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad vamos a estudiar un problema geométrico: el de calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. La solución a este problema da lugar al cálculo de derivadas, que es un conjunto de técnicas que tienen aplicaciones en multitud de campos de la ciencia. Dadas dos magnitudes, por ejemplo el tiempo y el espacio recorrido en ese tiempo por un móvil, la derivada nos indica cuál es la razón (proporción) de cambio del espacio con respecto del tiempo, es decir, la velocidad.

1. Concepto de derivada

1.1. Tasa de Variación Media

La **pendiente** de una recta es un número que mide la inclinación de esa recta. Por ejemplo, en la figura 9.1 hemos representado una recta en el plano, su pendiente la podemos calcular con la fórmula

$$m = \frac{d-c}{b-a}$$

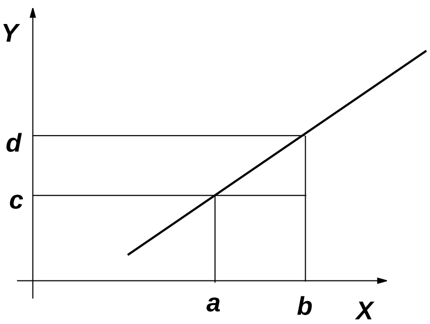

Figura 9.1: Pendiente de una recta

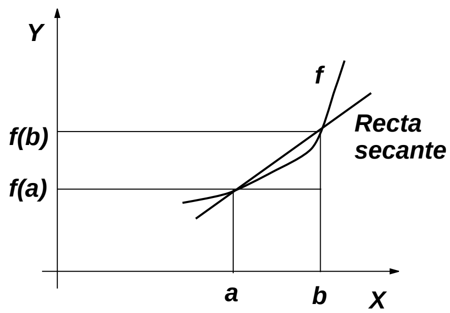

Figura 9.2: Recta secante

Supongamos ahora que tenemos una función que no es una recta. Si consideramos el intervalo $[a, b]$, el número equivalente a la pendiente en este intervalo (ver la figura 9.2) es

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Como se puede apreciar en la figura 9.2, este número es la pendiente de la recta **secante** a la gráfica de la función en este intervalo, es decir, la recta que corta a la gráfica de la función en los extremos del intervalo $[a, b]$. Este número, que mide la variación media de la función en el intervalo $[a, b]$ se llama **Tasa de Variación Media** de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo, para la función $f(x) = 2x^2$, su Tasa de Variación Media en el intervalo $[1, 2]$ es

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{8-2}{1} = 6$$

lo que nos indica que la función ha aumentado 6 unidades en el intervalo $[1, 2]$.

ACTIVIDADES

1. Sea $f(x) = -2x^2 + 1$. Calcular su Tasa de Variación Media en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 3]$.

1.2. Derivada en un punto. Tasa de Variación Instantánea

Dada una función f, su **derivada** en un punto a, si existe, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Veamos cómo podemos llegar a calcular este número:

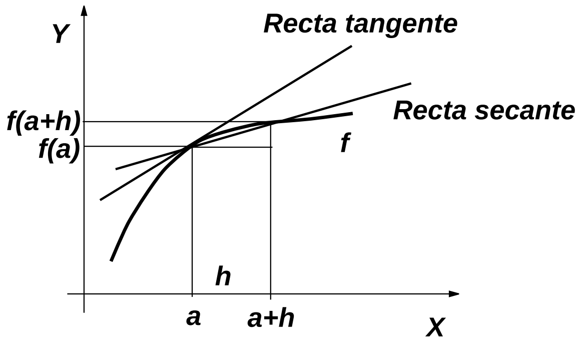

Figura 9.3: Derivada

Observemos la figura 9.3. Queremos calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = a$. En el intervalo $[a, a+h]$ (en la gráfica se ha dibujado con $h > 0$, pero sería igual con h negativo) hemos dibujado la recta secante a la gráfica. Su pendiente viene dada por la Tasa de Variación Media en ese intervalo, es decir,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Por otra parte, según vemos en la figura 9.3, si h se va haciendo cada vez más pequeño, llegará un momento en el que la recta secante se habrá convertido en la recta tangente. Por tanto, si h se hace pequeño, **la pendiente de la recta secante se convierte en la pendiente de la recta tangente**. Es decir,

$$\boxed{\text{Pendiente de la recta secante}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \boxed{\text{Pendiente de la recta tangente}}$$

Pero para hacer que h sea pequeño, es decir, que h tienda a 0, tenemos que calcular un límite.

Por tanto, si f es una función, llamamos **derivada de la función** f en $x = a$ al límite siguiente, si existe,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Calcular la derivada de una función en un punto supone entonces el cálculo de un límite. Si este límite existe, se dice que la función es **derivable**.

Por ejemplo, queremos calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ para $x = 1$, es decir, queremos calcular $f'(1)$.

Aplicamos la fórmula anterior,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

simplificando en el numerador y sacando h factor común, que se simplifica con la h del denominador,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x)=x^2$ para $x=1$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$ es $f'(1)=2$.

ACTIVIDADES

2. Dada la función $f(x)=2x^2-1$, calcular $f'(3)$.

Debido a que la derivada de una función en un punto es el límite de la Tasa de Variación Media, también se llama a veces a la derivada, **Tasa de Variación Instantánea.**

Además de la notación $f'(a)$ para la derivada de una función en el punto $x=a$, a veces también se utiliza esta otra notación, debida a Leibniz, $\frac{df}{dx}(a)$.

1.3. Recta tangente y recta normal

Una de las formas de calcular la ecuación de una recta es la de utilizar la ecuación de la forma punto-pendiente, ya estudiada antes. Conociendo un punto por el que pase la recta, (x_0, y_0) y su pendiente m, la ecuación en la forma punto-pendiente es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

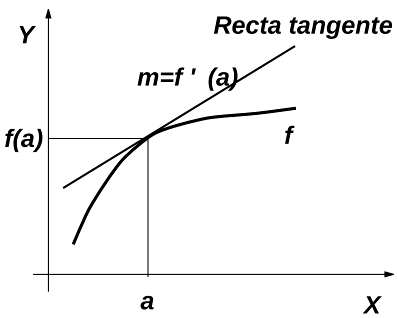

Figura 9.4: Recta tangente

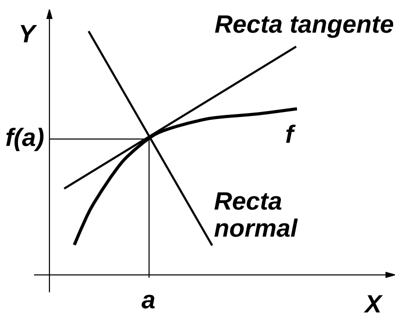

Figura 9.5: Rectas tangente y normal

En el caso de la **recta tangente**, según vemos en la figura 9.4, la recta pasa por el punto de coordenadas $(a, f(a))$ y, como hemos visto antes, su pendiente es $m = f'(a)$. Entonces su ecuación se calcula mediante la expresión

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Por otra parte, si tenemos una recta de pendiente m, sabemos que la pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es $m' = \frac{-1}{m}$, si $m \neq 0$. Utilizando esta idea, podemos calcular la ecuación de la recta que pasa por el mismo punto, $(a, f(a))$ y que es perpendicular a la recta tangente. A esta recta se le llama **recta normal** (ver figura 9.5), y su ecuación es

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

ACTIVIDADES

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto $x = 1$. Hacer una gráfica aproximada.

1.4. Derivada y velocidad instantánea

Supongamos que un objeto se mueve según la función $e(t) = 0'5t + 2$, donde t es el tiempo, medido en segundos, y $e(t)$ es el espacio que recorre, medido en metros. Se trata de lo que en Física se denomina un movimiento rectilíneo uniforme. La gráfica de la función es la de la figura 9.6.

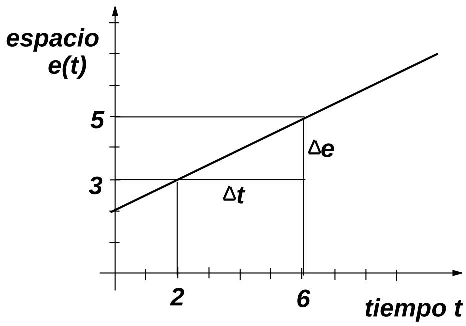

Figura 9.6: Movimiento rectilíneo

Para calcular la velocidad hay que dividir el espacio recorrido entre el tiempo que se tarda en recorrerlo,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

(Δt es la variación del tiempo y Δe es la variación del espacio).

En el intervalo que se ha señalado en la figura 9.6 el valor de la velocidad es

$$\text{velocidad} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = 0'5 \text{ metros/segundo}$$

Hay que observar que la velocidad habría sido la misma si se hubiese considerado cualquier otro intervalo. La razón es que se trata de una recta. En realidad lo que hemos hecho al calcular la velocidad, es calcular la pendiente de la recta. Desde el punto de vista físico esto significa que la velocidad es la misma en cualquier instante de tiempo.

Supongamos ahora que el objeto se mueve según la función $e(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3$. Ahora la gráfica es la de la figura 9.7.

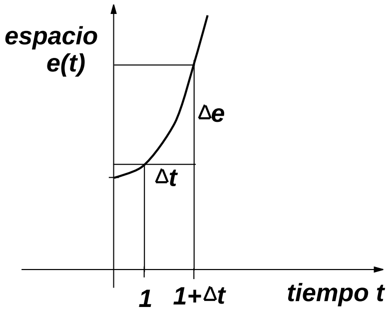

Figura 9.7: Movimiento no uniforme

Es evidente que ahora la velocidad no es la misma en todos los instantes de tiempo, sino que va aumentando a medida que transcurre éste. Si ahora queremos calcular la velocidad en un instante de tiempo determinado, la **velocidad instantánea**, en $t = 1$ por ejemplo. El cociente anterior $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, es sólo una aproximación al número que queremos calcular, que será tanto más exacta cuanto más pequeño sea Δt. Una vez más necesitamos calcular un límite:

$$v(1) = (\text{velocidad en } t = 1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(1+\Delta t) - e(1)}{\Delta t}$$

como $e(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 = \frac{7}{2}$ y $e(1+\Delta t) = \frac{1}{2}(1+\Delta t)^2 + 3 = \frac{1}{2}\Delta t^2 + \Delta t + \frac{7}{2}$, sustituyendo y simplificando,

$$v(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(\frac{1}{2}\Delta t + 1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{1}{2}\Delta t + 1) = 1 \text{ metro/segundo}$$

En realidad, lo que hemos hecho, con otra notación, es calcular la derivada de la función $e(t)$ en $t = 1$, es decir, $e'(1)$.

En general, si $e(t)$ es el espacio recorrido por un objeto, su **velocidad instantánea** en el instante de tiempo $t = t_0$ es la derivada de la función $e(t)$ en ese instante de tiempo, es decir,

$$\boldsymbol{v(t_0) = e'(t_0) = \frac{de}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t_0 + \Delta t) - e(t_0)}{\Delta t}}$$

ACTIVIDADES

4. Un objeto se mueve según la función $e(t) = 2t^2 - 1$ metros, donde t es el tiempo, medido en segundos. Calcular su velocidad instantánea para $t = 2$ segundos, es decir, calcular $v(2) = e'(2)$.

5. Un objeto se mueve según la función $e(t) = 3t + 5$ metros, con t medido en segundos. Calcular su velocidad para los instantes de tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. ¿A qué se debe el resultado?

Recuerda

✓ La Tasa de Variación Media de la función f en el intervalo $[a, b]$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

✓ La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Se calcula mediante el límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función es derivable.

✓ La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en $x = a$ se calcula mediante la expresión

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

✓ La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en $x = a$ se calcula mediante la expresión

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

✓ Si $e(t)$ es el espacio recorrido por un objeto en el tiempo t, su velocidad instantánea en t_0 es la derivada de la función $e(t)$ para $t = t_0$, es decir, $v(t_0) = e'(t_0)$.

2. Derivabilidad y continuidad

Según hemos visto, para que una función f sea derivable es necesario que exista el límite siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si en esta expresión hacemos $x = a + h$, entonces decir que $h \to 0$ equivale a decir que $x \to a$. Por tanto, el límite se puede reescribir de la forma equivalente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Utilizando esta definición alternativa de derivabilidad, vamos a ver que existe una relación importante entre continuidad y derivabilidad.

Sabemos, porque ya lo hemos estudiado en la unidad anterior, que para que una función f sea continua en $x = a$ el límite de la función en ese punto debe coincidir con su imagen en el mismo punto, es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Supongamos que f es derivable en $x = a$, entonces,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pero esto es equivalente a

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] = 0.$$

Hacemos operaciones,

$$0 = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right] = \frac{\lim_{x \to a} [f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)]}{\lim_{x \to a} (x - a)}$$

Por tanto,

$$0 = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)] = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] - \lim_{x \to a} [f'(a)(x - a)] = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]$$

Pero, si $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; y esto significa que f es continua en $x = a$. Esto prueba que

Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

No es preciso aprender de memoria la deducción anterior, ni otras que aparecerán en esta unidad, pero sí que puede resultar un buen ejercicio intentar comprenderla y animamos al alumno a ello.

Lo que sí es muy importante es la consecuencia de los cálculos, es decir, el hecho de que si una función es derivable en un punto, entonces siempre será continua en ese punto. Ahora bien, cabe la pregunta inversa,

Si una función es continua en un punto, ¿será también derivable en ese punto?

La respuesta es negativa. Veamos un ejemplo clásico de que una función puede ser continua sin ser derivable:

La función valor absoluto, ya estudiada antes, se podía definir de la forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

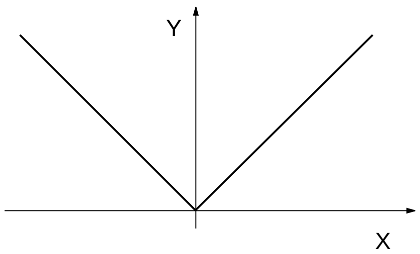

Figura 9.8: Función valor absoluto

Su gráfica es la de la figura 9.8. En la figura podemos apreciar que la función en $x=0$ es continua, sin embargo, ¿es derivable?

Para responder a la pregunta, intentamos calcular la derivada en $x=0$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

Como la función está definida en dos trozos, que son distintos a la izquierda y a la derecha del 0, tenemos que calcular los límites laterales.

Por la izquierda,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Por la derecha,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

Por lo tanto, no existe el límite, dado que los límites laterales existen pero son distintos, y por tanto, no existe la derivada $f'(0)$.

Este ejemplo prueba un importante hecho, el hecho de que una función puede ser continua sin ser derivable.

ACTIVIDADES

6. Sea la función $f(x)=|x-2|=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<2\\ x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$. Dibujar la gráfica de la función. A partir de la gráfica, ¿es continua en $x=2$? Estudiar su derivabilidad en el mismo punto.

7. Una función derivable es continua. Una función puede ser continua sin ser derivable. Pero, si una función no es continua, ¿puede ser derivable?

2.1. Derivadas laterales

En el ejemplo del valor absoluto ha sido necesario calcular los límites laterales en la definición de derivada. A estos límites se les llama **derivadas laterales** y se denominan, para un caso cualquiera,

Derivada a la izquierda $f'(a-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada a la derecha $f'(a+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Por tanto, para que una función sea derivable en un punto, es preciso que en ese punto existan las derivadas laterales y sean iguales. Es decir,

$$\boldsymbol{f} \text{ es derivable en } \boldsymbol{x = a \Leftrightarrow f'(a-) = f'(a+)}$$

ACTIVIDADES

8. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad en $x = 0$ utilizando las derivadas laterales.

2.2. Funciones derivables

Como acabamos de ver para que una función sea derivable en un punto es preciso que existan las derivadas laterales y sean iguales. Esto tiene una implicación geométrica importante, ya que supone que la recta tangente dibujada desde la izquierda o desde la derecha del punto en cuestión debe coincidir. Esto ocurre siempre que la función tenga en ese punto una variación “suave”, o lo que es lo mismo, en ese punto no puede haber un punto como el que aparece en la función valor absoluto. A estos puntos se les llama **puntos angulosos** (ver figura 9.8).

Estos son los puntos en los que una función no es derivable, aun siendo continua.

Cuando decimos que una función es derivable, sin especificar en qué punto, entendemos que es derivable en todos los puntos de su dominio de definición.

La mayoría de las funciones que hemos estudiado hasta ahora son derivables. En particular, las funciones polinómicas, las trigonométricas y las funciones exponenciales y logarítmicas.

Además, si f y g son funciones derivables, también lo son: $f \pm g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ si $g \neq 0$ y las composiciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

Recuerda

- ✓ Si una función es derivable, entonces es continua.
- ✓ Una función puede ser continua sin ser derivable.
- ✓ Las derivadas laterales son los límites laterales de la definición de derivada. Para que una función sea derivable, las derivadas laterales deben existir y ser iguales.
- ✓ Una función es derivable en un punto cuando en este punto su variación es “suave", es decir, no tiene un punto anguloso.

3. Función derivada

Dada la función $f(x) = x^2$, podemos calcular su derivada en un punto concreto, por ejemplo, $f'(1)$. Sin embargo, también podemos calcular su derivada en un punto genérico x, de la misma forma que lo haríamos en 1:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h))}{h} = 2x$$

Por tanto, $f'(x) = 2x$. Esta fórmula la podemos utilizar ahora para calcular la derivada en $x = 1$, sin más que sustituir, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, o en cualquier otro punto.

A esta nueva función, a la obtenida con la fórmula

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

la llamaremos **función derivada** de f, o bien, simplemente **derivada** de f.

ACTIVIDADES

9. Calcular la derivada (función derivada) de la función $f(x) = x^3$.
(Indicación: será necesario utilizar la fómula del desarrollo del cubo de una suma que es $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).

3.1. Derivadas de orden superior

Dada la función $f(x)$, de la forma descrita antes, podemos calcular su derivada, $f'(x)$ que es a su vez una nueva función. Como es una nueva función, quizá (si existe) se pueda calcular su derivada. A esta nueva función, a la derivada de la derivada, la llamaremos **derivada segunda** y se denotará $f''(x)$. Y así sucesivamente, la derivada de la derivada segunda, será la **derivada tercera** y se denotará $f'''(x)$, etc.

Ya comentamos en su momento que la derivada $f'(x)$ se podía denotar $\frac{df}{dx}$. La derivada segunda $f''(x)$ también se puede denotar $\frac{d^2f}{dx^2}$, la derivada tercera $f'''(x)$ también se puede denotar $\frac{d^3f}{dx^3}$, y así sucesivamente.

3.2. Derivada de algunas funciones elementales

El cálculo de la derivada de una función o de la derivada en un punto se hace mediante un límite. La mayoría de las veces este cálculo no es muy complicado, pero sí que puede resultar tedioso. Sin embargo, se puede automatizar, tanto es así que existen programas de ordenador capaces de hacerlo. Aunque no vamos a llegar a hacerlo, ni es necesario, con la rapidez de un ordenador, sí que vamos a ir viendo cómo se pueden obtener las derivadas de algunas funciones elementales. Estas fórmulas las vamos a ir aprendiendo, de manera que, recordando unas pocas y algunas reglas sencillas podamos obtener, casi automáticamente, la derivada de cualquier función sin necesidad de recurrir continuamente a la definición de derivada.

Las fórmulas que vamos a obtener se han puesto todas juntas en una **Tabla de Derivadas** que se encuentra en la sección 7, con el objeto de que sea más cómoda su utilización y aprendizaje, sobre todo al principio.

Empezamos pues con la obtención de las derivadas de algunas funciones elementales. (A partir de ahora, por comodidad, utilizaremos la notación $y = 5x$ en lugar de $f(x) = 5x$, en cuyo caso, la derivada se denotará y'):

• **Derivada de la función constante** $y = k$

La función constante $y = k$ tiene por gráfica una recta horizontal, como vimos en su momento. Por tanto, su pendiente, es decir, su derivada es nula en cualquier punto. Entonces,

$$\boldsymbol{y = k \qquad y' = 0}$$

• **Derivada de la función** $y = x$

También $y = x$ es una recta, y sabemos que tiene pendiente 1 en cualquier punto, así que éste es el valor de la derivada. Entonces,

$$\boldsymbol{y = x \qquad y' = 1}$$

• **Derivada de la función** $y = x^n$

Ahora ya no tenemos una recta, así que no nos sirve el argumento de las dos anteriores. Supongamos que n es un número entero positivo, es decir, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Para $n = 1$. Si $y = x$, hemos visto que $y' = 1$.

Para $n = 2$. Si $y = x^2$, también ha aparecido antes en un ejemplo resuelto, tenemos que $y = 2x$.

Si $y = x^3$, se puede comprobar o se habrá comprobado si se ha resuelto la actividad 9, que la derivada es $y' = 3x^2$.

Si hacemos el cálculo para $y = x^4$, (pero no lo vamos a hacer) obtenemos $y' = 4x^3$. Para $y = x^5$, $y' = 5x^4$.

Seguro que nos imaginamos ya qué ocurre en general. En efecto,

$$\boldsymbol{y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}}$$

Pues bien, esta misma fórmula también es válida si n es un número real cualquiera: una fracción, un número irracional, el 0... Aunque la deducción de este hecho escapa a las intenciones de esta introducción.

• **Derivada de la raíz cuadrada** $y = \sqrt{x}$

Esta función se puede escribir como una potencia, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Entonces, para calcular su derivada, no hay más que aplicar la fórmula anterior. Aunque aparece con tanta frecuencia que es conveniente aprenderla por separado. La calculamos:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

• **Derivada de** $y = \dfrac{1}{x}$

También esta función se puede escribir como una potencia: $y = x^{-1}$. Se puede comprobar que su derivada es

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{-1}{x^2}}$$

ACTIVIDADES

10. Calcular la derivada de la función $f(x) = 5$ utilizando la definición de derivada. Comprobar que el resultado coincide con lo deducido en el texto para la función constante en general.

11. Utilizando la fórmula de la derivada de $y = x^n$, calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ y comprobar que se obtiene la fórmula anterior.

Recuerda

✓ La derivada o función derivada se obtiene aplicando la definición de derivada a un punto genérico x.

✓ La derivada se puede volver a derivar y se obtiene la derivada segunda, después la tercera, y así sucesivamente.

✓ Derivadas de algunas funciones elementales:

- $y = k \qquad y' = 0$
- $y = x \qquad y' = 1$
- $y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}$
- $y = \sqrt{x} \qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = \dfrac{1}{x} \qquad y' = \dfrac{-1}{x^2}$

4. Reglas de derivación

Ya conocemos las derivadas de algunas funciones elementales. Ahora vamos a estudiar algunas reglas de derivación que nos van a permitir poder calcular la derivada de un número mayor de funciones. En primer lugar, veremos las correspondientes a las operaciones básicas entre funciones. Estas fórmulas que vamos a ver a continuación se pueden deducir a partir de la definición, sin embargo, nos vamos a centrar más en su utilización que en su deducción.

4.1. Reglas para derivar sumas, productos y cocientes

• **Derivada de una constante por una función** $y = k{\cdot}f(x)$

Para derivar el producto de una constante por una función, sólo es necesario derivar la función, la constante se queda tal cual. Por ejemplo, queremos derivar

$$y = 5x^7$$

Dejamos la constante como está y derivamos la función, es decir,

$$y' = 5{\cdot}7x^6 = 35x^6$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = k{\cdot}f(x) \qquad y' = k{\cdot}f'(x)}$$

• **Derivada de una suma o una diferencia de funciones** $y = f(x) \pm g(x)$

Para derivar una suma o una diferencia de funciones, hay que derivar cada uno de las funciones que se intevienen en la suma o diferencia. Por ejemplo, para derivar la suma

$$y = x^3 + \sqrt{x}$$

derivamos cada uno de los sumandos,

$$y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boldsymbol{y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

• **Derivada de un producto de dos funciones** $y = f(x){\cdot}g(x)$

La derivada de un producto no es tan inmediata como la de una suma, ya que la derivada de un producto **no** es el producto de las derivadas, como se podría esperar. La fórmula correcta es

$$\boldsymbol{y = f(x){\cdot}g(x) \qquad y' = f'(x){\cdot}g(x) + f(x){\cdot}g'(x)}$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la derivada de $y = (x^2+1)\sqrt{x}$. Aplicando la fórmula anterior,

$$y' = (2x)\sqrt{x} + (x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

Es importante acostumbrarse, desde el principio, a simplificar al máximo el resultado de una derivada. La razón por la que es importante aprender a calcular derivadas es porque se trata de una herramienta que después utilizaremos, y para utilizarla de manera más eficiente es necesario que tenga la forma más cómoda posible. Por esta razón la simplificación de una derivada es tan importante como su obtención.

• **Derivada de un cociente de dos funciones** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

La derivada de un cociente se puede obtener utilizando la definición de derivada (al igual que la de un producto). Sin embargo, también se puede obtener fácilmente a partir de la fórmula de la derivada de un producto. Vamos a deducirla de esta forma, para así realizar un ejercicio de uso de la derivada de un producto.

Queremos calcular la derivada de un cociente de dos funciones. Lo escribimos de la forma

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Nuestro objetivo es entonces calcular $h'(x)$, para ello, despejamos de la expresión anterior la función $f(x)$.

$$f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

y calculamos la derivada de $f(x)$, utilizando la fórmula de la derivada de un producto,

$$f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Como queríamos calcular $h'(x)$, la despejamos de la expresión anterior,

$$h'(x) = \frac{f'(x) - h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

pero $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Entonces, sustituyendo $h(x)$ en la expresión anterior y operando, se obtiene

$$h'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}.g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Por ejemplo, para calcular la derivada de $y = \dfrac{x+1}{x-3}$, hacemos

$$y' = \frac{1 \cdot (x-3) - (x+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$$

4.2. Regla de la cadena

La **regla de la cadena** es sin duda la regla más importante de las derivadas. Esto es así porque se utiliza en todas aquellas situaciones en las que aparece una función dentro de otra, es decir, cuando tenemos una composición de funciones.

Por ejemplo, $y = (2x^3+x)^8$. En este caso, tenemos la función $g(x) = 2x^3+x$ dentro de la función $f(x) = x^8$. De manera que $y = f(g(x))$. La regla de la cadena nos va a permitir calcular la derivada de $y = f(g(x))$ a partir de las derivadas de $f(x)$ y de $g(x)$.

Veamos de qué forma:

Para derivar una composición de funciones de la forma $y = f(g(x))$ hay que derivar la función f en $g(x)$ y multiplicar por la derivada $g'(x)$. Es decir,

$$\boldsymbol{y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)).g'(x)}$$

En el ejemplo $y = (2x^3 + x)^8$. Como $f(x) = x^8$, entonces $f'(x) = 8x^7$. Por otra parte, como $g(x) = 2x^3 + x$, $g'(x) = 6x^2 + 1$. Entonces, aplicando la fórmula anterior,

$$y' = f'(g(x)).g'(x) = 8(2x^3 + x)^7.(6x^2 + 1)$$

Realmente a efectos prácticos no es necesario utilizar la fórmula textualmente, basta con darse cuenta de cuál es la función que hay dentro y de la que hay fuera. Veamos otro caso. Por ejemplo, $y = \sqrt{4x+5}$.

La primera función que aparece, la de fuera, es $\sqrt{x}$. La derivada de esta función es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, aunque en este caso, lo que hay dentro no es x sino otra función que pondremos en su lugar. Por tanto, en nuestro caso como la función que tenemos es $y = \sqrt{g(x)}$, su derivada será $y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$. Así, $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x+5}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

ACTIVIDADES

12. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 2x$ b) $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ c) $y = \frac{5}{x}$

13. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 3x)\sqrt{x}$ b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

14. Calcular las derivadas de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena:

a) $y = (x^2 + 1)^{20}$ b) $y = \sqrt{5x^2 - 1}$

Recuerda

- ✓ Derivada de una constante por una función

$$y = k \cdot f(x) \qquad y' = k \cdot f'(x)$$

- ✓ Derivada de una suma de funciones

$$y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

- ✓ Derivada de un producto de dos funciones

$$y = f(x) \cdot g(x) \qquad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- ✓ Derivada de un cociente de dos funciones

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- ✓ Regla de la Cadena

$$y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5. Derivada de las funciones logarítmica y exponencial

5.1. Derivada de la función logarítmica

En primer lugar, es conveniente recordar aquí las propiedades de los logaritmos ya estudiadas en una unidad anterior.

Propiedades de los logaritmos

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n\log(a) \qquad \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Aplicando estas propiedades y la definición de derivada, se puede comprobar que la derivada del logaritmo neperiano es

$$\boldsymbol{y = \ln(x) \qquad y' = \frac{1}{x}}$$

Entonces, por ejemplo, para calcular la derivada de $y = \ln(x^2 + 5x)$. Aplicando la regla de la cadena

$$y' = \frac{1}{x^2 + 5x}.(2x + 5) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

Para calcular la derivada de un logaritmo que no sea neperiano, podemos utilizar la fórmula del cambio de base, que es la última de las que recordamos antes.

Es decir, si $a \neq e$, $y = \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$. Como a es una constante,

$$y' = \frac{1}{\ln(a)}.\frac{1}{x}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = \log_a(x) \qquad y' = \frac{1}{\ln(a)}.\frac{1}{x}}$$

ACTIVIDADES

15. Calcular las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas utilizando la regla de la cadena:

a) $y = \ln(5x + 3)$ b) $y = \log_2(\sqrt{x} + 1)$

5.2. Derivada de la función exponencial

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$. Vamos a ver en primer lugar cómo se calcula la derivada de esta función cuando la base es el número e, para después generalizar la fórmula a una base cualquiera.

Queremos derivar $y = e^x$. Tomamos en esta expresión logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(e^x) = x\cdot \ln(e) = x\cdot 1 = x$$

donde hemos aplicado las propiedades de los logaritmos. Tenemos pues,

$$\ln(y) = x$$

Derivamos en los dos miembros de la igualdad anterior, teniendo en cuenta que y es una función, lo que hace que $\ln(y)$ haya que derivarlo utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1$$

Como queremos calcular y', despejamos de la igualdad anterior,

$$y' = y = e^x$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{y = e^x \qquad y' = e^x}$$

Además de la fórmula obtenida, también es importante el método por el que se ha obtenido, que vamos a utilizar más veces. Obsérvese que primero hemos tomado logaritmos neperianos y después hemos derivado la expresión resultante, $\ln(y) = x$, en la que la y no aparecía despejada explícitamente. A esta forma de derivar una función y se le llama **derivación implícita**, consiste en calcular la derivada de una función y definida implícitamente, es decir, sin que y esté despejada.

Un ejemplo sencillo de derivación implícita, por ejemplo, queremos calcular la derivada de y definida implícitamente en la expresión

$$x^2 + 5y = 1$$

Aunque podríamos despejar y, vamos a hacerlo sin despejarla. Derivamos los dos miembros de la expresión, interpretando que y es una función y x es la variable, entonces, $2x + 5y' = 0$. Ahora despejamos y', con lo que obtenemos $y' = \frac{-2x}{5}$.

Cuando la base de la función exponencial no es el número e, por ejemplo $y = 4^x$, se puede aplicar el mismo procedimiento que antes.

Tomamos logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(4^x) = x.\ln(4) = \ln(4).x.$$

Ahora derivamos implícitamente. Hay que tener en cuenta, para derivar el miembro derecho, que $\ln(4)$ es una constante. Entonces, $\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(4)$, despejando y', tenemos $y' = y\cdot \ln(4) = 4^x\cdot \ln(4)$.

En general,

$$\boldsymbol{y = a^x \qquad y' = a^x.\ln(a)}$$

ACTIVIDADES

16. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
a) $y = e^{3x+5}$ b) $y = 5e^{x+2}$ c) $y = xe^{x}$

17. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:
a) $y = 5^{x^3+2}$ b) $y = \dfrac{1}{2^x}$ c) $y = \pi^{\sqrt{x}}$

5.3. Derivada de funciones $y = f(x)^{g(x)}$

El procedimiento que hemos utilizado anteriormente se puede utilizar también para calcular la derivada de funciones como $y = x^x$. Es importante observar que la derivada de esta función no se puede hacer utilizando la fórmula para derivar potencias de la forma x^n, ya que esta fórmula sólo es válida cuando n es una constante, no una función que contenga x.

Veamos cómo se puede derivar $y = x^x$ y este procedimiento será válido para cualquier función de la forma $y = f(x)^{g(x)}$.

Tomamos logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(x^x) = x.\ln(x)$$

y derivamos implícitamente. Ahora en el miembro derecho aparece un producto de dos funciones, hay que utilizar por tanto, la regla de la derivada de un producto,

$$\frac{1}{y}.y' = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Despejamos y' y sustiuimos y por su valor inicial,

$$y' = y.[\ln(x) + 1] = x^x[\ln(x) + 1].$$

ACTIVIDADES

18. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
a) $y = (x+3)^x$ b) $y = (5x)^{x^2+1}$

Recuerda

- Derivada de las funciones logarítmicas

$$y = \ln(x) \qquad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a(x)x \qquad y' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de las funciones exponenciales

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$

$$y = a^x \qquad y' = a^x . \ln(a)$$

- Para derivar funciones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$, tomar logaritmos neperianos, derivar implícitamente y despejar y'.

6. Derivadas de las funciones trigonométricas

6.1. Derivada del seno, coseno y tangente

Empecemos calculando con la definición la derivada de la función seno. Se puede prescindir de esta deducción para el desarrollo posterior, su inclusión aquí hay que entenderla como un simple ejercicio de repaso.

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Aplicando la definición de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

utilizamos ahora la fórmula del seno de una suma: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$, y el límite queda,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

Ahora separamos adecuadamente en dos límites,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen}(x). \frac{\cos(h) - 1}{h}\right] + \lim_{h \to 0} \left[\cos(x). \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right]$$

Pero, se puede comprobar que $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ y que $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. Esto se puede hacer con una calculadora científica, poniéndola en radianes (posición RAD) y dando valores a h valores cada vez más próximos a 0. En el primer caso, observaremos que los resultados se aproximan cada vez más a 0, y en el segundo, que se aproximan cada vez más a 1.

Por tanto, la derivada que queríamos calcular queda,

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

Hemos obtenido, y esto es lo importante, que la derivada del seno es el coseno,

$$\boldsymbol{y = \operatorname{sen}(x) \qquad y' = \cos(x)}$$

La derivada del coseno se puede calcular a partir de la derivada del seno de varias formas. Quizá una de las más sencillas sea tener en cuenta la *relación fundamental de la trigonometría*, $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Si $y = cos(x)$, se verifica, por la relación anterior, $(\operatorname{sen}(x))^2 + y^2 = 1$. Derivando implícitamente,

$$2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + 2y\cdot y' = 0$$

(Hemos aplicado la regla de la cadena para derivar los dos cuadrados y tenido en cuenta que y es una función.)

Ahora despejamos y',

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}(x).\cos(x)}{y} = \frac{-\operatorname{sen}(x).\cos(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{sen}(x)$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{y = \cos(x) \qquad y' = -\operatorname{sen}(x)}$$

ACTIVIDADES

19. Calcular las derivadas siguientes, utilizando la regla de la cadena donde sea necesario: a) $y = \operatorname{sen}(x^3 + x)$ b) $y = x.\cos(x)$ c) $y = \cos(\sqrt{x})$

Para calcular la derivada de la tangente, basta tener en cuenta que se puede escribir como un cociente, $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Se propone como ejercicio en la actividad siguiente calcular su derivada utilizando la regla del cociente y comprobar que

$$\boldsymbol{y = \operatorname{tg}(x) \qquad y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)}$$

Las tres formas diferentes de escribir esta derivada provienen de las relaciones trigonométricas.

ACTIVIDADES

20. Utilizando la regla del cociente, calcular la derivada de la función tangente y comprobar que se obtienen los resultados anteriores.

6.2. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

Veamos por fin la derivada de las funciones trigonométricas inversas:
Derivada del arcoseno

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,sen}(x) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Derivada del arcocoseno

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,cos}(x) \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Derivada del arcotangente

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Vamos a deducir una de ellas, las otras dos se hacen de una manera completamente análoga. Por ejemplo, vamos a deducir la derivada de la función arcoseno, $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$.

Como la función arcoseno es la inversa de la función seno,

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = x$$

Derivamos esta expresión implícitamente, entonces,

$$\cos(y) \cdot y' = 1$$

Despejando y',

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En este último cálculo hemos utilizado la relación fundamental de la trigonometría $\operatorname{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, para poner el coseno en función del seno, y además el hecho de que $\operatorname{sen}(y) = x$.

ACTIVIDADES

21. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
a) $y = \operatorname{arc\,sen}(x-1)$ b) $y = x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)$ c) $y = \ln(\operatorname{arc\,cos}(x))$

Recuerda

- ✓ Fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$y = \operatorname{sen}(x) \qquad y' = \cos(x)$$

$$y = \cos(x) \qquad y' = -\operatorname{sen}(x)$$

$$y = \operatorname{tg}(x) \qquad y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

- ✓ Fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

$$y = \text{arcsen}(x) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arccos}(x) \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arctg}(x) \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

7. Tabla de derivadas

Funciones elementales	
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x . \ln(a)$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a(x)$	$y' = \dfrac{1}{\ln(a)} \dfrac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\operatorname{sen}(x)$
$y = \operatorname{tg}(x)$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
$y = \text{arcsen}(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \text{arccos}(x)$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \text{arctg}(x)$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
Reglas de derivación	
$y = k.f(x)$	$y' = k.f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x).g(x)$	$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)).g'(x)$