3 Ecuaciones e inecuaciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

La resolución de ecuaciones constituye el problema central de la parte de las matemáticas que denominamos Álgebra. En este unidad repasaremos las técnicas para resolver las ecuaciones de primer y segundo grado, ya estudiadas en cursos anteriores, y aprenderemos a resolver otro tipo de ecuaciones: exponenciales y logarítmicas. También veremos cómo se pueden resolver inecuaciones, que son otro tipo de problemas en los que, en lugar de una igualdad como ocurre en las ecuaciones, tenemos una desigualdad. Para acabar, repasaremos las técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales (de primer grado) y estudiaremos una técnica nueva, útil cuando el número de ecuaciones e incógnitas del sistema es superior a dos, el llamado método de Gauss.

1. Ecuaciones de primer y segundo grado

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparece una letra que representa un número que queremos calcular, llamada incógnita. Por ejemplo, en la ecuación

$$x + 3 = 4$$

la incógnita es x. Esta ecuación nos dice que x es un número que, sumado con 3, es igual a 4.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita.

1.1. Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es cualquier ecuación que se puede reducir a la forma

$$ax = b$$

En otras palabras, es una ecuación en la que la incógnita aparece elevada a 1. Por ejemplo, son ecuaciones de primer grado las siguientes:

$$3x + 5 = 7; \qquad 3(x+2) - 3 = 5x + 7; \qquad \frac{x}{2} + 3 = -2(x-2)$$

Vamos a ir recordando mediante ejemplos cómo se pueden resolver las ecuaciones de primer grado:

- Por ejemplo, la ecuación

  $$2x - 4 = -3x + x + 10$$

  Agrupamos los términos en x en uno de los miembros y los que no llevan x en el otro,

  $$2x + 3x - x = 10 + 4,$$

  entonces,

  $$4x = 14$$

  La solución es un número que multiplicado por 4, dé 14, que se obtiene dividiendo 14 entre 4,

  $$x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

- Si la ecuación contiene paréntesis, quitaremos éstos en primer lugar, para tener una ecuación como la anterior. Por ejemplo,

  $$2(x-2) - 3(x+1) = 2 + 3(x-1),$$

  quitamos los paréntesis,

  $$2x - 4 - 3x - 3 = 2 + 3x - 3,$$

separamos los términos en x y los independientes,

$$2x - 3x - 3x = 2 - 3 + 4 + 3 \Leftrightarrow -4x = 6,$$

ahora, podemos cambiar de signo a la ecuación para que la x quede positiva (aunque no es imprescindible) y despejamos el valor de x,

$$4x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

- Si la ecuación contiene denominadores, éstos se eliminan utilizando el *mínimo común múltiplo*. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{5} = 3 + \frac{2x-1}{30}$$

El mínimo común múltiplo de 3, 5 y 30 es 30. Dividimos 30 entre cada denominador y multiplicamos el resultado por el numerador. Cuando algún término no lleve denominador, consideramos que es 1.

$$10(x+2) - 6(x-2) = 90 + 2x - 1,$$

y ya estamos en la situación del ejemplo anterior. Eliminamos los paréntesis, agrupamos términos y despejamos x,

$$10x + 20 - 6x + 12 = 90 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = 57 \Leftrightarrow x = \frac{57}{2}$$

ACTIVIDADES

1. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $2x + 1 = 5$ b) $2x + 3 = 5 - 2x$ c) $3(2x - 3) + 4x = 5(x + 4) - 9$

d) $5(x - 2) = 5x + 9$ e) $5(x - 2) = 5x - 10$ f) $\frac{x}{2} + 3 = 5x$

g) $2(x - 1) + \frac{x+1}{2} = \frac{2x-7}{4}$ h) $\frac{3x+5}{6} - \frac{5x+4}{9} = 1 - \frac{x}{18}$

Una de las aplicaciones inmediatas de las ecuaciones de primer grado es la de resolver problemas. La resolución de problemas mediante ecuaciones, y la resolución de problemas en general, son la parte más complicada de las matemáticas. No hay reglas que sirvan para todos los casos. El único secreto está en intentar resolver muchos, aun de esta forma siempre tropezaremos con alguno que, simplemente no salga.

Empecemos con un ejemplo de los clásicos: *Un padre tiene 37 años, y las edades de sus tres hijos suman 25 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que las edades de los hijos sumen como la edad del padre?*

Nos preguntan por los años que han de transcurrir para que ocurra alguna cosa. Esta va a ser la incógnita, $x =$ años que han de transcurrir.

El padre tiene ahora, 37 años. Dentro de x años tendrá

$$37 + x$$

Los hijos tienen ahora, entre los tres, 25 años. Dentro de x años tendrán

$$25 + 3x$$

ya que pasan x años para cada uno de ellos.

Entonces, queremos que las dos expresiones anteriores sean iguales. Ya tenemos la ecuación,

$$37 + x = 25 + 3x$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos que $x = 6$ años. En efecto, dentro de 6 años el padre tendrá $37 + 6 = 43$ años. Y la suma de las edades de los hijos será $25 + 3 \cdot 6 = 43$ años también.

Otro ejemplo: *En un hotel hay habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 80 camas. ¿Cuántas de las habitaciones son sencillas y cuántas son dobles?*

Llamemos x al número de habitaciones sencillas. Entonces debe haber $50 - x$ habitaciones dobles. Para calcular el número de camas habrá que sumar el número de habitaciones sencillas, ya que en cada una hay una cama; más dos veces el número de habitaciones dobles,

$$x + 2(50 - x) = 80$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos $x = 20$. Por tanto, hay 20 habitaciones sencillas y $50 - 20 = 30$ habitaciones dobles.

En los dos ejemplos que acabamos de ver se pone de manifiesto la importancia de elegir cuál va a ser la incógnita, es decir, el número que queremos conocer, el que nos preguntan. El resto de la resolución del problema consiste en releer el enunciado e ir traduciendo el texto al una ecuación por medio de x.

ACTIVIDADES

2. La suma de tres números enteros consecutivos es 66. Calcular los tres números.

3. Una persona ha invertido 1000 euros en dos tipos de acciones. Una parte de la inversión le ha reportado unos beneficios del 2 %, mientras que con la otra parte ha ganado un 3 %. Calcular qué parte de los 1000 euros ha invertido al 2 % y qué parte al 3 %, sabiendo que ha ganado 28 euros en total.

4. *Un camión sale de una ciudad a una velocidad de* 100*km/h. Una hora después sale un coche en la misma dirección a* 120*km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar al camión?*

Dado que la resolución de problemas mediante ecuaciones se ha estudiado ampliamente en cursos anteriores no le dedicaremos más espacio, ya que no es el objetivo fundamental de esta unidad. Sin embargo, si no se domina la técnica, es recomendable que el alumno repase estos conocimientos.

1.2. Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** es cualquier ecuación que se puede reducir a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado completa, porque contiene todos los términos posibles. Si falta alguno, (bx o c ya que si faltase ax^2, no sería de segundo grado) entonces es una ecuación de segundo grado incompleta. Vamos a empezar resolviendo las ecuaciones incompletas.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$2x^2 - 32 = 0$$

Despejamos x^2,

$$x^2 = \frac{32}{2} = 16$$

Entonces, x es un número que, elevado al cuadrado, es 16. Hay dos posibilidades,

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

En este caso, tenemos dos soluciones $x = +4$ y $x = -4$.

Otro ejemplo,

$$x^2 + 1 = 0$$

Este ejemplo ya ha apareció cuando estudiamos los números complejos. Si despejamos x como antes, llegamos a

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Ya sabemos que estos números sólo existen en el conjunto de los números complejos, en cuyo caso las soluciones son $x = \pm i$. Sin embargo, en esta unidad sólo consideraremos como válidas las soluciones reales. Por tanto, cuando obtengamos una raíz cuadrada de un número negativo, diremos que la ecuación no tiene solución.

Seguimos con las ecuaciones de segundo grado incompletas, pero ahora supongamos que falta el término independiente, es decir, el que no contiene x. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 3x = 0$$

Sacamos x factor común,

$$x(x-3) = 0$$

Entonces, razonamos de la siguiente manera: lo anterior es un producto que es igual a 0, por lo tanto, necesariamente uno de los dos factores ha de ser nulo,

o bien $x = 0$, o bien $x - 3 = 0$,

las soluciones son $x = 0$ y $x = 3$.

ACTIVIDADES

5. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:
a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $x^2 = 4$ c) $2x^2 + 6 = 0$ d) $5x^2 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:
a) $2x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 = 2x$ d) $-x^2 - 4x = 0$

Recordemos ahora cómo se resuelve una ecuación de segundo grado que contenga todos los términos, es decir,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En primer lugar, vamos a obtener la fórmula. No es preciso recordar de memoria el modo de obtener la fórmula, aunque sí puede resultar un buen ejercicio intentar comprenderla. Lo que resultará importante será recordar la fórmula y aprender a utilizarla.

Empezamos pasando el término independiente al miembro derecho de la ecuación,

$$ax^2 + bx = -c,$$

multiplicamos toda la ecuación por $4a$,

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac,$$

sumamos b^2 a la izquierda y la derecha, de esta forma los dos miembros seguirán siendo iguales,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Recordemos que el cuadrado de una suma es

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Si observamos el miembro izquierdo de la nuestra ecuación, vemos que se trata del desarrollo del cuadrado de una suma, en la que A es $2ax$, y B es b. Entonces, la ecuación se puede escribir de la forma

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ahora, quitando el cuadrado del miembro izquierdo, obtenemos

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

despejando x,

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

pasamos ahora el factor $2a$ dividiendo a la derecha,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En definitiva, para resolver la ecuación de segundo grado

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$$

se utiliza la fórmula

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son

$$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -6,$$

sustituimos en la fórmula,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

y separamos las soluciones,

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

ACTIVIDADES

7. Resolver las ecuaciones de segundo grado siguientes:
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $2x^2 + x + 5 = 0$

En la actividad anterior hemos visto las tres posibilidades que pueden darse a la hora de resolver una ecuación de segundo grado: obtener dos soluciones reales distintas, una solución real y ninguna solución. A las soluciones de una ecuación de segundo grado, y de una ecuación en general, también se les llama a veces **raíces**.

También hemos podido comprobar que el número de soluciones no depende más que del valor del número que aparece dentro de la raíz cuadrada. A este número se le llama **discriminante**, que vamos a denotar por Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

A partir de las soluciones de una ecuación, se puede reconstruir la ecuación de la que provienen. Por ejemplo, si una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, entonces se puede escribir de la forma

$$(x-4)(x-5) = 0$$

Es evidente que esta ecuación tiene soluciones 4 y 5, ya que para que el producto sea nulo, debe serlo alguno de los dos factores $x - 4$ o $x - 5$, de donde se obtienen las soluciones.

Si multiplicamos la expresión anterior,

$$x^2 - 5x - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

El coeficiente de la x es la suma de las dos soluciones cambiada de signo, y el término independiente es el producto de las dos soluciones. Entonces, en general, si

$S = x_1 + x_2$ es la suma de las soluciones y $P = x_1 \cdot x_2$ es el producto, la ecuación de segundo grado de la que provienen es

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ACTIVIDADES

8. Indicar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones sin resolverlas, utilizando el discriminante:
a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

9. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:
a) 2 y 3 b) 3 y -5 c) 4, doble, es decir $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$

Recuerda

✓ Una ecuación de primer grado es una ecuación que se puede reducir a la forma $ax = b$. Para resolver una ecuación de primer grado conviene hacer las siguientes transformaciones en este orden:

- Quitar los paréntesis.
- Quitar los denominadores y los nuevos paréntesis que pudieran aparecer.
- Agrupar los términos, los que llevan x en un miembro y los independientes en el otro.
- Sumar los términos en cada miembro y despejar x.

✓ Una ecuación de segundo grado es cualquier ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se resuelve utilizando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aunque hay algunos casos en los que falta el término bx o el término c en los que se puede prescindir de la fórmula anterior.

✓ El número de soluciones de la ecuación de segundo grado depende del discriminante de la ecuación, que es el número $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

✓ Si $S = x_1 + x_2$ es la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado y $P = x_1 \cdot x_2$ es el producto, la ecuación de de la que provienen es

$$x^2 - Sx + P = 0$$

2. Otras ecuaciones algebraicas

En este apartado vamos a estudiar otras ecuaciones algebraicas, es decir, otras ecuaciones en las que aparecen involucradas operaciones como sumas, productos, cocientes y raíces.

2.1. Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Es fácil darse cuenta de que una ecuación bicuadrada no es más que una ecuación de segundo grado, en la que se ha cambiado x por x^2.

La forma de resolverla es entonces convertirla en una ecuación de segundo grado mediante un cambio de variable que consiste en llamar $x^2 = t$, por lo que $x^4 = t^2$.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación bicuadrada

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Hacemos el cambio de variable $x^2 = t$, $x^4 = t^2$. Esto convierte la ecuación anterior en la ecuación de segundo grado

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

Resolvemos la ecuación mediante la fórmula correspondiente,

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

y separamos las dos soluciones $t_1 = 9 \qquad t_2 = 1$.

Sin embargo, lo que nosotros queremos calcular son las soluciones de la ecuación original, es decir, la x. Por esta razón ahora tenemos que deshacer el cambio de variable. Como $x^2 = t$, $x = \pm\sqrt{t}$. Aplicamos esto a las dos soluciones obtenidas para t,

$$t_1 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$
$$t_2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

En este caso, se obtienen cuatro soluciones distintas: $-1, +1, -3, +3$. Sin embargo, es evidente que no siempre será así. Por ejemplo, si una de las soluciones de t es negativa, la solución correspondiente para x no existe, ya que hay que calcular su raíz cuadrada.

ACTIVIDADES

10. Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

2.2. Ecuaciones con radicales

Vamos a ver ahora cómo se pueden resolver algunos ejemplos de ecuaciones que contienen raíces cuadradas.

Por ejemplo, la ecuación

$$\sqrt{x-1} = x-7$$

Tenemos que conseguir que desaparezca la raíz para poder resolverla. Esto se consigue elevando al cuadrado en los dos miembros de la ecuación,

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-7)^2$$

En la parte de la izquierda se cancela la raíz con el cuadrado, y la parte de la derecha la desarrollamos con la fórmula del cuadrado de una diferencia $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$,

$$x-1 = x^2-14x+49$$

pasando todos los términos a la derecha,

$$0 = x^2-15x+50$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos las soluciones $x=5$ y $x=10$. Sin embargo, es posible que las dos no sean soluciones de la ecuación inicial, debido a que al elevar al cuadrado se han podido introducir soluciones extrañas. Para verificarlo, tenemos que sustituir las dos posibles soluciones en la ecuación inicial, para ver si la verifican:

$x=5$: $\sqrt{5-1} = 5-7$, lo cual no es cierto, por tanto, $x=5$ no es solución.

$x=10$: $\sqrt{10-1} = 10-7$, que sí es cierto, por tanto, $x=10$ es la solución de la ecuación.

En general, antes de elevar al cuadrado hay que aislar la raíz cuadrada. Por ejemplo, en la ecuación

$$\sqrt{x}+1 = x-3$$

Si elevamos al cuadrado directamente, como en el miembro izquierdo hay una suma, la raíz no desaparecería. Por tanto, primero aislamos la raíz en un miembro,

$$\sqrt{x} = x-4$$

y ya se puede elevar al cuadrado.

Veamos ahora un ejemplo de una ecuación con dos radicales,

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1} = 5$$

En este caso resulta conveniente, antes de elevar al cuadrado, aislar una de las raíces,

$$\sqrt{x+6} = 5-\sqrt{x+1}$$

ahora elevamos al cuadrado y utilizamos, en el miembro derecho, la fórmula del cuadrado de una diferencia, $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(5-\sqrt{x+1}\right)^2$$

entonces,

$$x + 6 = 25 - 2{\cdot}5{\cdot}\sqrt{x+1} + x + 1$$

Después de elevar al cuadrado sigue quedando una raíz cuadrada, entonces estamos en la situación de los ejemplos anteriores. Por lo que debemos aislar nuevamente la raíz y volver a elevar al cuadrado, la pasamos al miembro izquierdo para que tenga signo positivo,

$$10\sqrt{x+1} = 20$$

de donde,

$$\sqrt{x+1} = \frac{20}{10} = 2$$

Elevamos al cuadrado por última vez, y obtenemos $x + 1 = 4$, de donde, $x = 3$.

Se puede verificar que, en efecto, esta es la solución de la ecuación.

ACTIVIDADES

11. Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\sqrt{x} + 1 = x - 5$ b) $\sqrt{x+3} = 2$ c) $\sqrt{x+2} - x = 0$

2.3. Ecuaciones de grado superior a dos

Ya sabemos resolver ecuaciones de primer grado y de segundo. También sabemos resolver un caso particular de ecuación de cuarto grado, la ecuación bicuadrada. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado en general, hay fórmulas, del tipo de la utilizada para resolver la ecuación de segundo grado. No obstante, estas fórmulas para las ecuaciones de tercer y cuarto grado, son tan complejas que su utilidad es más bien escasa. A partir del quinto grado, no hay posibilidad de encontrar fórmulas con radicales que las resuelvan. En estos casos, en general, se utilizan técnicas de aproximación numérica para encontrar las soluciones. De todas formas, cuando las soluciones son números enteros, se pueden resolver de una manera elemental, utilizando la **regla de Ruffini** para la descomposición de polinomios, que recordaremos aquí.

Supongamos que tenemos una ecuación factorizada de la forma

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x-5) = 0$$

Si multiplicamos esta expresión, obtenemos una ecuación de cuarto grado. Pero para resolverla, no es preciso multiplicarla, sino que se pueden calcular sus soluciones directamente, igualando a cero cada uno de los factores, de esta forma llegamos a la conclusión de que las soluciones son

$$x = 1 \qquad x = 2 \qquad x = -3 \qquad x = 5$$

Dada una ecuación polinómica de grado n, si se puede factorizar de la forma

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0$$

entonces su resolución, como acabamos de ver, es inmediata. De hecho, las soluciones son

$$x = x_1 \quad x = x_2 \quad \ldots \quad x = x_n$$

En particular, esto es posible siempre que las raíces de la ecuación sean números enteros.

Para hacer esta descomposición vamos a utilizar la regla de Ruffini. Recordemos que ésta es una regla que sirve para dividir un polinomio entre otro que sea de la forma $(x - a)$. Por ejemplo, para dividir el polinomio $x^3 - 2x^2 + 6x + 5$ entre $(x - 2)$, escribimos los coeficientes del primer polinomio y el número 2 (por ser $(x - 2)$ abajo a la izquierda)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ & & & & \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ahora, el primer número se baja a la fila de abajo tal cual. Este número se multiplica por 2 y el resultado se suma al siguiente coeficiente. Se vuelve a t'multiplicar el resultado por 2 y sumar al coeficiente siguiente, así hasta el final:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ & & & & \\ 2 & & 2 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & \boxed{17} \end{array}$$

El último resultado es el resto de la división, 17, el cociente está formado por el polinomio cuyos coeficientes obtenemos antes del 17, es decir, $x^2 + 6$ en este caso.

Recordemos cómo se puede utilizar la regla de Ruffini para factorizar un polinomio. Por ejemplo, queremos factorizar el polinomio y, de esta forma resolver la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Consideramos el polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, debido a un resultado conocido como **teorema del Resto**, sabemos que el valor numérico del polinomio para $x = a$, es decir, $P(a)$ es el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$. Se trata entonces de localizar los números a tales que $P(a) = 0$, es decir, tales que el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ sea cero. Estos números serán las raíces de la ecuación. Se sabe además, que estos números son siempre divisores del término independiente del polinomio. Por tanto, vamos probando con los distintos divisores de -6, que son

$$-1, +1, -2, +2, -3, +3, -6, +6$$

hasta que encontremos uno en el que el resto sea nulo. Dividimos usando la regla de Ruffini y, al cociente obtenido, le aplicamos la misma operación, así hasta descomponer completamente el polinomio.

En nuestro caso

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
-1 & & -1 & 6 & -11 & 6 \\
\hline
 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & -5 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

Entonces, el polinomio se puede descomponer

$$(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Y las soluciones de la ecuación son precisamente las raíces que hemos localizado, es decir, los números que hemos ido poniendo a la izquierda,

$$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

ACTIVIDADES

12. Resolver las siguientes ecuaciones factorizando, si es necesario:
a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$ c) $x^8 - 4x^6 = 0$

Recuerda

- ✓ Una *ecuación bicuadrada* es una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Se resuelve mediante el cambio de variable $x^2 = t$, que convierte la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en t. Una vez resuelta, se deshace el cambio, para calcular el valor de x.
- ✓ Una ecuación que contenga una raíz cuadrada se puede resolver aislando la raíz en uno de los miembros y elevando al cuadrado. Una vez calculadas las soluciones hay que verificarlas necesariamente, ya que se han podido introducir soluciones extrañas al elevar al cuadrado.
- ✓ Una ecuación de grado superior a dos se puede resolver, si sus raíces son números enteros, mediante la regla de Ruffini. Si conseguimos escribir la ecuación de la forma

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = 0$$

las soluciones son

$$x = x_1 \qquad x = x_2 \qquad \dots \qquad x = x_n$$

3. Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece alguna letra, que representa un número, llamada incógnita, que queremos calcular. Por ejemplo,

$$2x + 3 < 5x$$

Una inecuación es entonces, al menos en la forma, lo mismo que una ecuación, pero en la que se ha cambiado el “$=$"por alguno de los siguientes símbolos:

$<$ menor que, $>$ mayor que, $\leq$ menor o igual, $\geq$ mayor o igual.

Al igual que las ecuaciones, dependiendo de cuál es la x de mayor grado, las inecuaciones pueden ser de primer grado, de segundo, etc. Nosotros estudiaremos aquí las de primer y segundo grado.

3.1. Inecuaciones de primer grado

Antes de empezar a ver cómo se resuelven veamos qué significa una inecuación. En una ecuación, por ejemplo,

$$x + 2 = 3,$$

queremos calcular el valor de x, de tal forma que, si le sumamos 2, nos dé 3. Este número es $x = 1$.

En una inecuación, por ejemplo,

$$x + 2 > 3,$$

buscamos un número x tal que, sumado con 2, sea mayor que 3. En primer lugar, es fácil ver que no hay un único número que verifique esta relación. En efecto, valdría el número 2, el 4, el 5, etc. La solución de una inecuación no es un sólo número, sino todo un intervalo de números. En este caso, son todos los números mayores que 1, es decir, los x tales que

$$x > 1,$$

o lo que es lo mismo, los números del intervalo abierto $(1, +\infty)$. (Los intervalos han sido estudiados en la unidad correspondiente a números reales, sería recomendable repasarlos antes de seguir adelante.)

La manera de resolver una inecuación de primer grado va a ser muy parecida a la forma en la que resolvemos ecuaciones de segundo grado, sin embargo, con las desigualdades hay ciertas operaciones especiales que conviene tener en cuenta. Por ejemplo,

$$2 < 5$$

- Si sumamos un mismo número (positivo o negativo) a la izquierda y a la derecha de la desigualdad, ésta se mantiene. Por ejemplo,

$$2 + 3 < 5 + 3$$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad por un mismo número **positivo**, tampoco cambia la desigualdad. Por ejemplo,

$$2 \cdot 4 < 5 \cdot 4$$

- Pero, si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad por un mismo número **negativo**, entonces cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo,

$$2 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$$

Entonces, para resolver una inecuación de primer grado, podemos aplicar el mismo procedimiento que para resolver una ecuación de primer grado, salvo cuando haya que multiplicar por un número negativo, o cambiar de signo, en cuyo caso también habrá que cambiar el sentido de la desigualdad. Veamos un ejemplo, resolver la inecuación

$$2(x-1) \leq 5x - 8,$$

quitamos los paréntesis,

$$2x - 2 \leq 5x - 8,$$

agrupamos los términos en x a la izquierda, por ejemplo, y los independientes a la derecha,

$$-3x \leq -6$$

Hasta aquí, todo se ha hecho como si se tratase de una ecuación. Pero ahora, para cambiar de signo la inecuación, necesariamente tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad, porque al cambiar de signo, multiplicamos por un número negativo, -1,

$$3x \geq 6$$

por tanto, $x \geq 2$.
Entonces, la solución de la inecuación son los números del intervalo $[2, +\infty)$.

ACTIVIDADES

13. Resolver las siguientes inecuaciones, indicando la solución mediante un intervalo:

a) $3(x-3) \leq 2 - 7x$ b) $\frac{-x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$ c) $2x - 10 < \frac{2x-6}{3}$

3.2. Inecuaciones de segundo grado

Empecemos con un ejemplo,

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Factorizamos el polinomio, utilizando la regla de Ruffini o bien, como es de segundo grado, resolviendo la ecuación para calcular sus raíces. En cualquier caso,

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$

La solución de la inecuación son los x tales que $(x-1)$ por $(x-2)$ es mayor o igual que cero. Entonces, habrá que determinar el signo de cada uno de los factores. Es evidente que el factor $(x-1)$ cambia de signo en $x = 1$, y el factor $(x-2)$ cambia de signo en $x = 2$. (Cambian de signo donde se hacen cero).

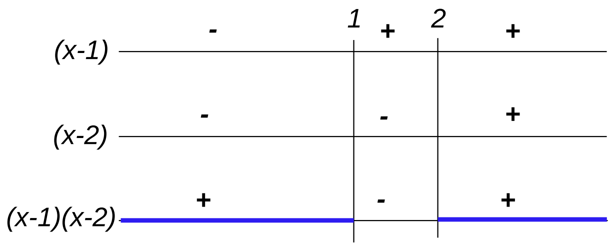

Figura 3.1: $(x-1)(x-2) \geq 0$

El estudio del signo está hecho en el esquema de la figura 3.1. Cada una de las tres líneas horizontales representa la recta real, en la que se han señalado los números 1 y 2, que es donde se puede producir cambio de signo.

En la primera línea están indicados los signos del factor $(x-1)$ en cada intervalo de la recta, que se determina sin más que sustituir un número de ese intervalo. Por ejemplo, si probamos con el número -2, $(-2-1) = -3$, negativo, así, todos los números a la izquierda del 1 son negativos.

En la segunda línea están indicados los signos del factor $(x-2)$ en cada intervalo de la recta.

Por fin, en la última línea están indicados los signos del producto $(x-1)(x-2)$ en cada intervalo. Estos últimos signos se han obtenido sin más que multiplicar los signos de las dos líneas anteriores.

Por tanto; a la izquierda de 1 y a la derecha de 2, el signo es positivo, y entre el 1 y el 2, el signo es negativo. La inecuación incial imponía la condición de que el producto $(x-1)(x-2) \geq 0$, es decir positivo. La solución está constituida por los intervalos en los que el producto es positivo, que en el esquema se han marcado con trazo más grueso, es decir,

$$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

(El símbolo $\cup$ es el símbolo de la unión, sirve para indicar que la solución es la reunión de los dos intervalos).

Los intervalos son cerrados porque la desigualdad es $\geq$, es decir, contiene al igual, por lo que los números 1 y 2 también forman parte de la solución.

El ejemplo anterior es el más habitual, ya que el polinomio se puede descomponer en dos factores, porque la solución de la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. Sin embargo, puede ocurrir que esto no sea posible. Pero en este caso la solución es más sencilla. Por ejemplo, la inecuación

$$2x^2 + 1 > 0$$

El polinomio no se puede descomponer, porque la ecuación $2x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones, es decir, nunca se hace cero. Pero si nunca se hace cero, esto es porque o bien siempre es positivo o siempre es negativo. Es evidente que $2x^2 + 1$ siempre es positivo, para cualquier x. Por tanto, la solución son todos los números reales $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES

14. Resolver las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 - 1 < 0$ b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ c) $-x^2 - 1 < 0$ d) $-x^2 - 1 > 0$

Recuerda

- ✓ Una *inecuación* es como una ecuación pero cambiando la igualdad por una desigualdad. Las soluciones de una inecuación suelen estar constituidas por intervalos de números reales.
- ✓ Las inecuaciones de primer grado se resuelven exactamente igual que las ecuaciones, teniendo en cuenta que si hay que multiplicar por un número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.
- ✓ Una inecuación de segundo grado se resuelve factorizando y analizando el signo de los factores, de manera que se verifique la desigualdad de la inecuación.

4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En este apartado vamos a estudiar un tipo de ecuaciones no algebraicas: ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En primer lugar, es conveniente repasar las propiedades de las potencias y de los logaritmos ya estudiadas.

4.1. Ecuaciones exponenciales

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que aparecen potencias y la incógnita se encuentra en algún exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 8$$

El problema consiste en calcular el valor de x, de manera que 2 elevado a x sea 8. La solución en este caso es $x = 3$.

La ecuación puede ser más complicada, el objetivo en caso de que así sea es escribirla de la forma anterior. Una vez escrita de esta forma, la solución puede ser inmediata como antes, o quizá sea preciso utilizar logaritmos para calcular exactamente el exponente. Por ejemplo, en la ecuación

$$3^x = 7,$$

el número x no es entero, ya que: $3^1 = 3$, que no llega, y $3^2 = 9$, que se pasa. Se trata de algún número entre 1 y 2. Para calcularlo exactamente hacemos lo siguiente:

Tomamos logaritmos (neperianos por ejemplo)

$$\ln(3^x) = \ln(7)$$

Ahora aplicamos la propiedad de los logaritmos que nos permite sacar el exponente fuera del logaritmo, es decir,

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$$

En nuestro caso,

$$x \cdot \ln(3) = \ln(7),$$

despejamos x y utilizamos la calculadora,

$$x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = 1'7712$$

ACTIVIDADES

15. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 1$ b) $2^x = \frac{1}{2}$ c) $5^x = \frac{1}{25}$ d) $3^x = 81$ e) $7^x = 2$

Veamos un ejemplo de una ecuación más complicada, en la que hay que hacer algunas manipulaciones para llegar a las formas anteriores. Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$$

Aplicando las propiedades de las potencias, podemos escribirla de la forma

$$\frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3 = 30$$

Se trata ahora, de despejar 3^x, aunque lo mejor quizá sea hacer un cambio de variable $X = 3^x$, con lo que la ecuación queda de la forma

$$\frac{X}{3} + 3X = 30$$

Resolvemos esta ecuación de primer grado,

$$X = 9$$

Entonces, $3^x = 9$, por tanto $x = 2$.

También puede ocurrir que la potencia a despejar esté dentro de un ecuación de segundo grado. Por ejemplo, la ecuación

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

En este caso, si hacemos el cambio de variable $2^x = X$, la ecuación anterior se convierte en la ecuación de segundo grado

$$X^2 - 9X + 8 = 0$$

(obsérvese que $X^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$).

Resolvemos la ecuación y obtenemos las soluciones $X = 8$ y $X = 1$. Entonces, deshaciendo el cambio de variable,

$$2^x = 8 \qquad 2^x = 1$$

Por tanto, $x = 3$ y $x = 0$ son las soluciones de la ecuación inicial.

ACTIVIDADES

16. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 7$ b) $3^{x+5} + 3^x = \dfrac{244}{3}$ c) $5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

4.2. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación en la que la incógnita aparece en una expresión con logaritmos es una **ecuación logarítmica**. Por ejemplo, la ecuación

$$\log_{10} x + \log_{10}(x-2) = \log_{10} 3$$

Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos en ecuaciones que no contengan logaritmos.

Por ejemplo, para resolver la ecuación anterior vamos a hacer que ambos miembros de la ecuación queden como un único logaritmo, para después eliminarlos.

$$\log_{10}(x(x-2)) = \log_{10} 3$$

Por tanto, eliminando los logaritmos

$$x(x-2) = 3$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado y obtenemos como soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Aunque sólo es válida $x = 3$, ya que los logaritmos de números negativos no existen.

En otras ocasiones conviene más reducir la expresión a una igualdad entre un logaritmo y un número. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\log_5 x + 3 \cdot \log_5 x = 4$$

Transformamos la parte de la izquierda,

$$\log_5 x + \log_5(x^3) = 4; \quad \log_5(x^4) = 4$$

Por tanto, utilizando la definición de logaritmo, lo anterior es equivalente a

$$x^4 = 5^4$$

de donde $x = 5$. (¿Podría ser $x = -5$?)

Otra forma de resolver la ecuación anterior más sencilla:
Sumamos los logaritmos en base 5,

$$4 \cdot \log_5 x = 4$$

Entonces, $\log_5 x = \frac{4}{4} = 1$. Por tanto, $x = 5^1 = 5$.

ACTIVIDADES

17. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:
a) $\log_x 4 = 2$ b) $\log_{10} x - \log_{10}(x-1) = 1$ c) $2\ln x - 3\ln(x^4) + 4\ln\sqrt{x} = 1$

Recuerda

- ✓ Una *ecuación exponencial* es una ecuación con potencias, en la que la incógnita se encuentra en algún exponente. Se resuelven transformándolas en una expresión de la forma $a^x = b$.
- ✓ Una *ecuación logarítmica* es una ecuación en la que la incógnita aparece entre logaritmos. Se resuelven eliminando los logaritmos, utilizando sus propiedades.

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlo consiste en encontrar dos números x e y que verifiquen **simultáneamente** las dos ecuaciones.

En general, un **sistema de ecuaciones lineales** es un grupo de ecuaciones de primer grado, con un grupo de incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

5.1. Métodos de reducción y sustitución

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden resolver de varias formas. En particular, los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se pueden resolver mediante los métodos de reducción y sustitución, que ya se han estudiado en otros cursos. No obstante, los vamos a repasar aquí.

Método de sustitución.

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra. Por ejemplo, queremos resolver el sistema,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = 3 - x$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $x - (3 - x) = 1$ y resolvemos esta ecuación, que tiene por solución $x = 2$. Ahora sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones para calcular $y = 1$.

Existe una variante del método de sustitución que se llama a veces, *método de igualación*. Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones para después igualarlas.

Método de reducción.

El método de reducción consiste en la eliminación (reducción) de una de las incógnitas sumando las ecuaciones, multiplicadas si fuera necesario por alguna constante.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda, de esta forma se elimina la y y queda

$$5x = 5$$

con lo que $x = 1$.

Ahora sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones, obtenemos $y = 2$.

5.2. Método de Gauss

El método de sustitución resulta útil cuando el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas, sin embargo, si aumentamos el número de ecuaciones y de incógnitas, no es práctico. Sin embargo, el método de reducción, utilizado convenientemente sí es útil para sistemas de más de dos ecuaciones. El **método de Gauss** consiste precisamente en una generalización del método de reducción que transforme el sistema inicial en un sistema más sencillo de resolver.

Por ejemplo, el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente es muy sencillo de resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\;\; y + 2z = 8 \\ \qquad\quad\;\; z = 3 \end{cases}$$

Se dice que es un sistema triangular. La última ecuación ya es la solución de la incógnita $z = 3$. Con esta, sustituyendo en la segunda ecuación, calculamos $y = 2$. Con las dos incógnitas calculadas, sustituimos en la primera ecuación y obtenemos el valor $x = 1$.

El método de Gauss consiste en aplicar el método de reducción de tal manera que podamos transformar el sistema inicial en un sistema triangular.

Vamos a aplicar el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ -x + y + z = 2 \\ 2x \qquad - z = 0 \end{cases}$$

Empezamos eliminando la incógnita x de la segunda y la tercera ecuación. Para ello utilizamos la primera de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 & \\ \quad 2y + 3z = 8 & \text{(segunda+primera)} \\ \quad -2y - 5z = -12 & \text{(tercera-2.primera)} \end{cases}$$

Ahora eliminamos la y de la tercera ecuación, la primera y la segunda las dejamos tal como están,

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 & \\ \quad 2y + 3z = 8 & \\ \quad\quad -2z = -4 & \text{(tercera+segunda)} \end{cases}$$

Y ya tenemos un sistema triangular. Resolvemos la última ecuación y después vamos sustituyendo en la segunda y en la primera, con lo que obtenemos

$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad z = 2$$

En algunas ocasiones, puede resultar útil cambiar de orden las ecuaciones.

ACTIVIDADES

18. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x + y \quad = 1 \\ \quad y + z = 2 \end{cases}$

Recuerda

- ✓ Un *sistema de ecuaciones lineales* está compuesto por varias ecuaciones de primer grado y varias incógnitas, cuyas soluciones deben verificar las ecuaciones simultáneamente.
- ✓ Cuando los sistemas no tienen muchas ecuaciones (dos) se puede utilizar el método de sustitución y reducción.
- ✓ Cuando el sistema tiene muchas ecuaciones y muchas incógnitas conviene utilizar el método de Gauss. El método de Gauss es una generalización del método de reducción que transforma el sistema inicial en un sistema triangular, que es más sencillo de resolver que el sistema inicial.