

# Tema 1 – LOS NÚMEROS COMPLEJOS

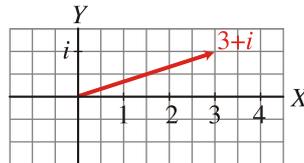
## OPERAR CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

**EJERCICIO 1 :** Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:

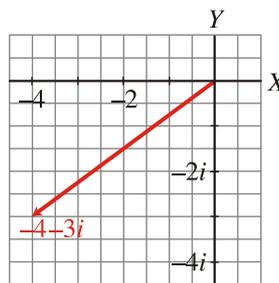
a)  $\frac{(4-2i)i^5}{1+i}$       b)  $\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}$       c)  $\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}$       d)  $\frac{5i^9(2-3i)}{2-i}$

Solución:

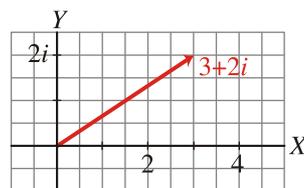
$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(4-2i)i^5}{1+i} &= \frac{(4-2i)i}{1+i} = \frac{4i-2i^2}{1+i} = \frac{4i+2}{1+i} = \frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2} = \frac{2-2i+4i+4}{1+1} = \\ &= \frac{6+2i}{2} = \frac{6}{2} + \frac{2i}{2} = 3+i \end{aligned}$$



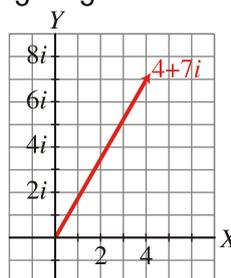
$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i} &= \frac{5(-1)(-2+i)}{-1+2i} = \frac{-5(-2+i)}{-1+2i} = \frac{-5(-2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-5(2+4i-i-2i^2)}{1-4i^2} = \\ &= \frac{-5(2+4i-i+2)}{1+4} = \frac{-5(4+3i)}{5} = -4-3i \end{aligned}$$



$$\text{c) } \frac{i^{30}(5-i)}{-1+i} = \frac{-1(5-i)}{-1+i} = \frac{-5+i}{-1+i} = \frac{(-5+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{5+5i-i-i^2}{1-i^2} = \frac{5+5i-i+1}{1+1} = \frac{6+4i}{2} = \frac{6}{2} + \frac{4i}{2} = 3+2i$$



$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{5i^9(2-3i)}{2-i} &= \frac{5i(2-3i)}{2-i} = \frac{10i-15i^2}{2-i} = \frac{10i+15}{2-i} = \frac{15+10i}{2-i} = \frac{(15+10i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{30+15i+20i+10i^2}{4-i^2} = \\ &= \frac{30+15i+20i-10}{4+1} = \frac{20+35i}{5} = \frac{20}{5} + \frac{35i}{5} = 4+7i \end{aligned}$$



**PASAR DE BINÓMICA A POLAR Y VICEVERSA. OPUESTO Y CONJUGADO**

**EJERCICIO 2 :** Dado el número complejo  $z = \sqrt{3} - i$ :

a) Representálo gráficamente y exprésalo en forma polar. b) Obtén su opuesto y su conjugado.

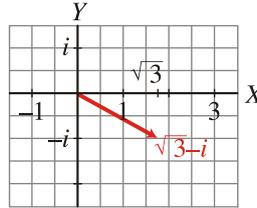
Solución:

a) Forma polar:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 330^\circ \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

Por tanto:  $z = 2_{330^\circ}$



b) Opuesto  $\rightarrow -z = -\sqrt{3} + i$

Conjugado  $\rightarrow \bar{z} = \sqrt{3} + i$

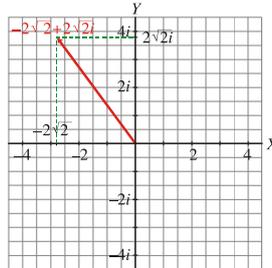
**EJERCICIO 3**

a) Expresa en forma binómica el número complejo  $z = 4_{135^\circ}$  y representálo gráficamente.

b) Obtén el opuesto y el conjugado de  $z$ .

Solución:

$$a) z = 4_{135^\circ} = 4(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$



b) Opuesto  $\rightarrow -z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

Conjugado  $\rightarrow \bar{z} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

**EJERCICIO 4 :** Halla el módulo y el argumento de  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

Solución:

Expresamos  $1 - i$  y  $1 + i$  en forma polar:

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow \beta = 315^\circ \text{ (pues está en el 4º cuadrante)}$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ (pues está en el 1º cuadrante)}$$

$$\text{Por tanto: } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}\right)^4 = \left(1_{270^\circ}\right)^4 = 1_{1080^\circ} = 1_{0^\circ} = 1$$

Módulo = 1 y Argumento =  $0^\circ$ .

**OPERACIONES EN FORMA POLAR**

**EJERCICIO 5 :** Una de las raíces octavas de un número complejo,  $z$ , es  $-1 + i$ . Halla el valor de  $z$ .

Solución:

Si  $-1 + i$  es una raíz octava de  $z$ , entonces:  $z = (-1 + i)^8$

Expresamos  $-1 + i$  en forma polar:

$$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow \alpha = 135^\circ \text{ (pues está en el 2.º cuadrante)}$$

$$\text{Por tanto: } z = (-1 + i)^8 = (\sqrt{2}_{135^\circ})^8 = 16_{1080^\circ} = 16_0^\circ = 16$$

**EJERCICIO 6 :** El producto de dos números complejos es  $2\sqrt{2}_{75^\circ}$ . Sabiendo que uno de los números es  $z = 1 + i$ , halla el otro número.

Solución:

Llamamos  $w$  al número buscado. Entonces, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} z \cdot w &= 2\sqrt{2}_{75^\circ} \\ z &= 1 + i \end{aligned} \right\}$$

Expresamos  $z$  en forma polar:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ (pues está en el primer cuadrante)}$$

Luego  $z = \sqrt{2}_{45^\circ}$  y, por tanto:

$$w = \frac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \Rightarrow \text{Es decir: } w = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$$

**EJERCICIO 7 :** Calcula e interpreta gráficamente las soluciones:  $\sqrt[3]{-27i}$

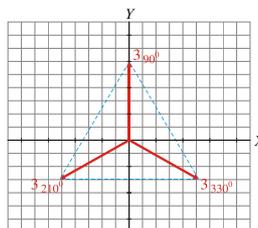
Solución:

Expresamos  $-27i$  en forma polar:  $-27i = 27_{270^\circ}$

$$\text{Así: } \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = \sqrt[3]{27_{270^\circ + 360^\circ k}} \text{ con } k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{27_{90^\circ}} = 3_{90^\circ} \quad k = 1 \rightarrow 3_{210^\circ} \quad k = 2 \rightarrow 3_{330^\circ}$$

Las tres raíces son:  $3_{90^\circ}$ ;  $3_{210^\circ}$ ;  $3_{330^\circ}$

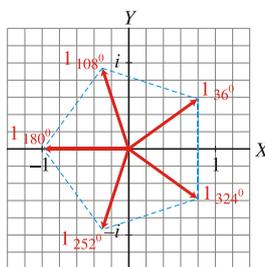


Los afijos de las tres raíces cúbicas ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

**EJERCICIO 8 :** Halla  $\sqrt[5]{-1}$  e interpreta gráficamente las soluciones.

Solución:

$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{5}} = 1_{36^\circ + 72^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{Las cinco raíces son: } 1_{36^\circ}; 1_{108^\circ}; 1_{180^\circ}; 1_{252^\circ}; 1_{324^\circ}$$



Los afijos de las raíces quintas ocupan los vértices de un pentágono regular.

**EJERCICIO 9 :** Halla un número complejo,  $z$ , sabiendo que una de sus raíces quintas es  $2 - 2i$ .

Solución:

$z = (2 - 2i)^5 \Rightarrow$  Expresamos  $2 - 2i$  en forma polar:

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \alpha = 315^\circ \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} z &= (2 - 2i)^5 = \left(\sqrt{8}_{315^\circ}\right)^5 = \left(\sqrt{2^3}_{315^\circ}\right)^5 = \sqrt{2^{15}}_{1575^\circ} = 2^7 \sqrt{2}_{135^\circ} = 128 \sqrt{2}_{135^\circ} = 128 \sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = \\ &= 128 \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -128 + 128i \Rightarrow \text{Es decir: } z = 128 \sqrt{2}_{135^\circ} = -128 + 128i \end{aligned}$$

**EJERCICIO 10 :** Calcula:  $\sqrt[4]{-81}$

Solución:

$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}} = 3_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{Las cuatro raíces son: } 3_{45^\circ}; 3_{135^\circ}; 3_{225^\circ}; 3_{315^\circ}$$

**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN FORMA COMPLEJA**

**EJERCICIO 11 :** Resuelve las ecuaciones:

- a)  $z^2 - 4z + 5 = 0$       b)  $z^3 + 8 = 0$       c)  $x^2 - 4ix - 5 = 0$       d)  $z^3 + 64 = 0$

Solución:

a)  $z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \Rightarrow$  Hay dos soluciones:  $z_1 = 2 + i$ ;  $z_2 = 2 - i$

b)  $z^3 + 8 = 0 \rightarrow z^3 = -8 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow 2_{60^\circ}; 2_{180^\circ}; 2_{300^\circ}$

c)  $x^2 - 4ix - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4i \pm \sqrt{16i^2 + 20}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 20}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4i \pm 2}{2} = 2i \pm 1 \rightarrow \begin{cases} 2i + 1 = 1 + 2i \\ 2i - 1 = -1 + 2i \end{cases}$

Hay dos soluciones:  $z_1 = 1 + 2i$ ;  $z_2 = -1 + 2i$

d)  $z^3 + 64 = 0 \rightarrow z^3 = -64 \rightarrow z = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} \Rightarrow z = 4_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} = 4_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:  $4_{60^\circ}; 4_{180^\circ}; 4_{300^\circ}$