DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Variable aleatoria

Se llama **variable aleatoria** a toda ley (función) que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real.

Según sean los recorridos de las variables, éstas se pueden clasificar en discretas y continuas:

i. Variable aleatoria **discreta**, solo puede tomar unos ciertos valores enteros
ii. Variable aleatoria **continua**, puede tomar, al menos teóricamente, todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real

Función de probabilidad.

Se llama **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X a la aplicación que asocia a cada valor x_i de la variable su probabilidad p_i.

MUY IMPORTANTE En toda función de probabilidad se verifica:

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$$

Ya que se trata de la probabilidad del suceso cierto.

Función de distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor. Llamaremos función de distribución de la variable X, y escribiremos F(x), a la función

$$F(x) = p(X \leq x)$$

ACLARACIONES:

I. X es el símbolo que representa a la variable aleatoria, en este caso discreta.
II. x es un número real cualquiera
III. $p(X \leq x)$ se lee *"probabilidad de que la variable aleatoria x tome un valor menor o igual a x"*

CONCLUSIÓN: **La función de probabilidad asocia a cada valor de la variable la probabilidad acumulada hasta ese valor**.

PROPIEDADES DE F(x)

1. F(x) es una probabilidad $\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$.
2. F(x) = cte. Entre cada dos valores consecutivos de la variable. Función escalonada.
3. $F(x) = 0 \ \forall \ x <$ al menor valor de la variable.
4. $F(x) = 1 \ \forall \ x >$ al mayor valor de la variable.
5. F(x) es creciente

Media o Esperanza matemática.

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

Desviación típica.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2}$$

Ejemplo 1. Un dado trucado tiene la siguiente función de probabilidad:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0’1	0’15	0’15	0’15	0’15	0’30

Calcular:

a. Parámetros de dela distribución.
b. Representar gráficamente la función de probabilidad y la de distribución.
c. $p(3 \le x \le 5)$

a. Para calcular los parámetros de la distribución es necesario el siguiente cuadro:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
1	0’1	0’1	0’1
2	0’15	0’30	0’6
3	0’15	0’45	1’35
4	0’15	0’60	2’4
5	0’15	0’75	3’75
6	0’30	1’8	10’8
	$\sum p_i = 1$	$\sum x_i \cdot p_i = 4$	$\sum x_i^2 \cdot p_i = 19$

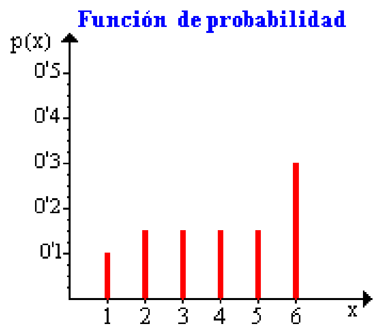
Media: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 4$

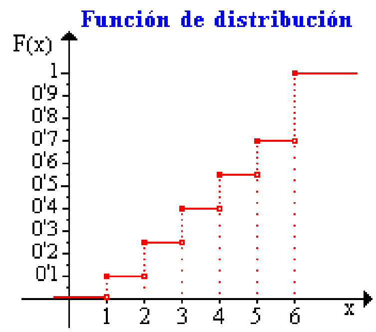
Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 19 - 4^2 = 3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{19 - 4^2} = 1'7$

b. Función de probabilidad(p(x)) y función de distribución(F(x))

x_i	p_i	$F(x) = p(x \le x_i)$
1	0’1	0’1
2	0’15	0’25
3	0’15	0’40
4	0’15	0’55
5	0’15	0’70
6	0’30	1





c. $p(3 \le x \le 5) = F(5) - F(2) = p(x \le 5) - p(x \le 2) = 0'70 - 0'25 = 0'45$

Variable aleatoria de la distribución binomial.

El experimento aleatorio debe de tener las siguientes características:

1. Solo son posibles dos resultados. A y $\overline{A}$. **Éxito** o **fracaso**.
2. Los resultados obtenidos en cada prueba son independientes.
3. La probabilidad de A es constante

Se le denomina distribución binomial. **B(N, p)**, siendo **N** y **p** sus parámetros, donde **N** es el número de pruebas, **p** es la probabilidad de éxito y **q** la de no-éxito. Además se cumple:

$$\mathbf{p + q = 1}$$

$$P(\text{obtener r éxitos}) = p(N, r) = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot q^{N-r}$$

Parámetros de la distribución de variable binomial.

$$B(N, p): \begin{cases} \mu = N \cdot p \\ \sigma^2 = N \cdot p \cdot q \\ \sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} \end{cases}$$

Ejemplo 2. En una moneda trucada, la probabilidad de cara es doble que la de cruz, si se lanza cinco veces se pide:

a. Función de probabilidad y función de distribución
b. Parámetros de la distribución
c. Probabilidad de no sacar ninguna cara
d. Probabilidad de sacar al menos una cara
e. Probabilidad de sacar más de tres caras

a. Se pide calcular la función de probabilidad y de distribución de una variable aleatoria discreta

$$x \equiv \text{Numero de caras al lanzar una moneda cinco veces}$$

Para calcular la probabilidad de los sucesos elementales se informa que la probabilidad de cara(éxito p) es doble que la de cruz(no-éxito q)

$$p = 2 \cdot q$$

Teniendo en cuenta que los sucesos cara y cruz son complementarios

$$p + q = 1$$

Con las dos ecuaciones se plantea un sistema que permite calcular las probabilidades de cada suceso.

$$\begin{cases} p = 2q \\ p + q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2/3 \\ q = 1/3 \end{cases}$$

Puesto que el experimento aleatorio a realizar cumple las condiciones de la distribución binomial, la variable x sigue una distribución del tipo

$$x : B\left(5, \frac{2}{3}\right)$$

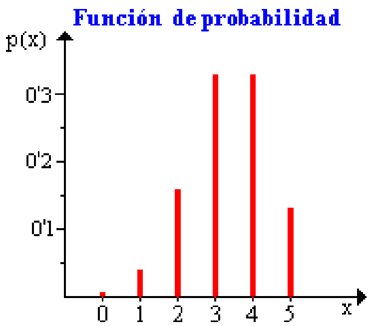
y las probabilidades de los respectivos valores que puede tomar la variable se calculan mediante:

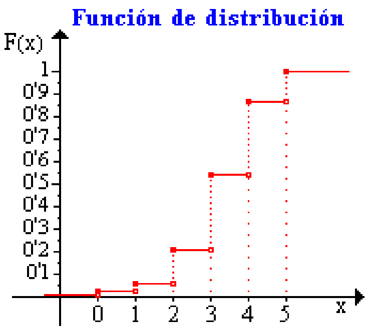
$$p(x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}$$

siendo el espacio muestral de x

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

x	$\mathbf{p(x)} = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}$	$\mathbf{F(x) = p(x \le x_i)}$
0	0’0041	0’0041
1	0’0412	0’0453
2	0’1646	0’2099
3	0’3292	0’5391
4	0’3292	0’8683
5	0’1317	1





b. Media: $\mu = N \cdot p = 5 \cdot \frac{2}{3} = 3'33$

Varianza: $\sigma^2 = N \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1'11$

Desviación: $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 1'05$

c. $p(0) = p(5,0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-0} = 0'0041 \Rightarrow p(0) = 0'41\%$

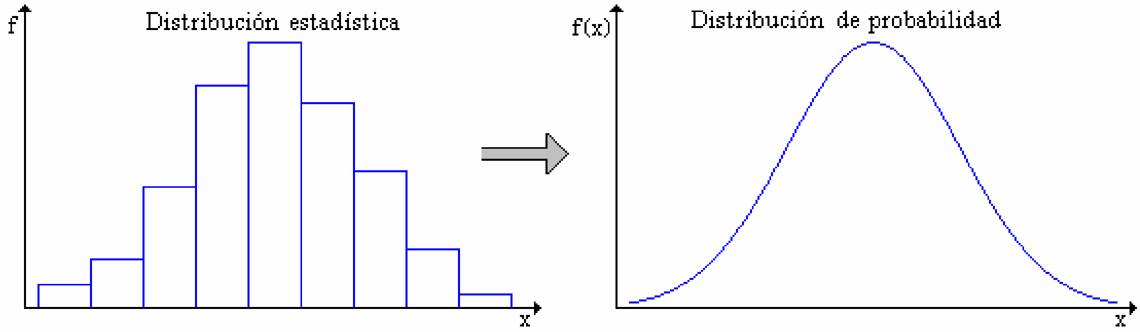
d. $p(x > 0) = p(\overline{x = 0}) = 1 - p(x = 0) = 1 - 0'0041 = 0'9959 \Rightarrow p(x > 0) = 99'59\%$

e. $p(x > 3) = p(4) + p(5) + p(6) = 0'3292 + 0'3292 + 0'1317 = 0'7901 \Rightarrow p(x > 3) = 79'01\%$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

Distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad de variable continua son distribuciones teórica e idealizadas de las distribuciones estadísticas de variable continua.

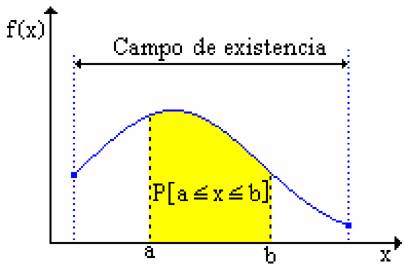


Las distribuciones de probabilidad de variable continua se definen mediante una función($y = f(x)$) denominada función de probabilidad o **función de densidad**.

Las funciones de densidad de variable aleatoria deben de cumplir una serie de propiedades:

- Deben ser positivas($f(x) > 0$) para cualquier valor de la variable aleatoria en su campo de definición.
- Debe ser una función normalizada, es decir, el área encerrada por la curva en su campo de existencia y el eje de abcisas debe ser la unidad

Debido a estas propiedades, la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor comprendido en cualquier intervalo [a, b] interior a su campo e existencia, es el área bajo la curva en dicho intervalo.



La probabilidad de un suceso puntual es cero:

$$P[x = a] = 0$$

Como consecuencia:

$$P[a \leq x \leq b] = P[a < x < b]$$

Los parámetros que definen a este tipo de distribución son la media y la desviación. Para su determinación teórica se requiere el cálculo infinitesimal(Integrales).

Calculo de probabilidades mediante la función de densidad

Para calcular probabilidades en distribuciones de probabilidad de variable continua, hay que hallar las áreas bajo la curva que representa la función de densidad, lo que se hace mediante el cálculo integral. Para funciones de densidad constante o proporcionales, el área bajo la curva se puede hallar como el área de un rectángulo $(A = \text{base} \times \text{altura})$ ó el área de un trapecio $\left(A = \dfrac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \times \text{altura}\right)$

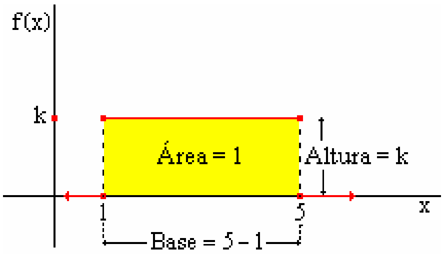
Ejemplo 1. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{Sí} \quad x<1 \\ k & \text{Sí} \quad 1\le x\le 5 \\ 0 & \text{Sí} \quad x>5 \end{cases}$, se pide

a. Calcular el valor de k para que f (x) sea una función de densidad
b. Hallar la probabilidad de x este comprendido entre 2 y 4.

a. Para que f (x) sea una función de densidad se ha de cumplir que

i. $f(x)\ge 0 \ \forall \ x \in$ Dominio
ii. El área comprendida entre la función y el eje de abcisas debe ser la unidad.

La grafica de la función es:



A partir de esta segunda condición se obtiene el valor de k

$$A = \text{Base} \times \text{altura} = (5-1)\cdot k = 1$$

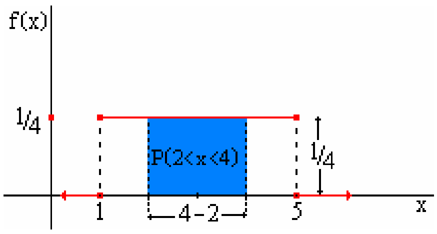
despejando el valor de k,

$$k=\frac{1}{4}$$

por lo tanto, la expresión de f (x) para que sea una función de densidad debe ser:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{Sí} \quad x<1 \\ 1/4 & \text{Sí} \quad 1\le x\le 5 \\ 0 & \text{Sí} \quad x>5 \end{cases}$$

b. La P(2<x<4) es el área bajo la curva en el intervalo (2, 4), que por ser un rectángulo se calcula como base × altura.



$$p(2<x<4)=(4-2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Función de distribución

Se llama función de distribución de una variable aleatoria(x), a la función F(x) que asocia a cada valor de la variable x la probabilidad acumulada hasta ese valor

$$F(x) = P(x \le x)$$

La función de distribución de una variable aleatoria definida en el intervalo [a, b] cumple las siguientes propiedades:

i. La probabilidad de que la variable tome un valor menor que a es la probabilidad del suceso imposible, y por tanto vale cero

$$\forall \ x<a \ \Rightarrow \ F(x)=0$$

ii. La probabilidad de que la variable tome un valor anterior a x siendo x >b es la probabilidad del suceso seguro y, por tanto, 1

$$\forall\, x > b \;\Rightarrow\; F(x) = 1$$

iii. La probabilidad de que la variable tome un valor anterior a x con ($a \le x \le b$) es el área bajo la curva en el intervalo [a, x]. Se halla mediante el cálculo infinitesimal, pero para funciones elementales del tipo constante ó lineal, se puede hallar mediante la geometría elemental.

iv. La función F es continua a la derecha de a

v. La función F es creciente

vi. $p(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

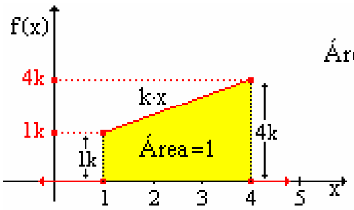
vii. En toda distribución de variable continua la probabilidad de que la variable X tome un determinado valor x, es igual a cero. $p(X = x) = 0$

viii. La función de densidad de una variable aleatoria continua es una función derivada de la función de distribución.

Ejemplo 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} k\cdot x & \text{Sí} \quad x \in [1,4] \\ 0 & \text{Sí} \quad x \notin [1,4] \end{cases}$, se pide:

a. Calcular k para que f (x) sea una función de densidad
b. Calcular su función de distribución
c. Calcular $P(x \ge 3)$

a. Para que f (x) sea una función de densidad, el área bajo la curva en su campo de existencia debe ser la unidad.



$$\text{Área} = \frac{\text{Altura menor} + \text{Altura mayor}}{2} \times \text{Base}$$

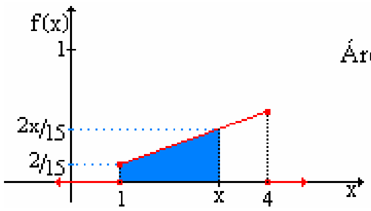
$$\text{Área} = \frac{1k + 4k}{2}(4-1) = \frac{15k}{2}$$

$$\frac{15k}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{15}$$

sustituyendo en la expresión de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{15} & \text{Sí} \quad x \in [1,4] \\ 0 & \text{Sí} \quad x \notin [1,4] \end{cases}$$

b. La función de distribución, debe calcular el área acumulada hasta el valor x



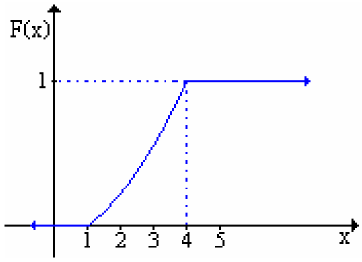
$$\text{Área} = \frac{\text{Altura menor} + \text{Altura mayor}}{2} \times \text{Base}$$

$$\text{Área} = \frac{\frac{2x}{15} + \frac{2}{15}}{2}(x-1) = \frac{1}{15}(x^2-1)$$

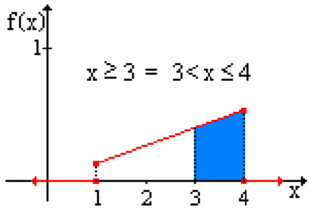
Teniendo en cuenta lo anterior, la función de distribución toma la forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{15}\left(x^2 - 1\right) & \text{Si} \quad 1 \le x \le 4 \\ 1 & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

su gráfica es de la forma:



c. Se pide calcular:

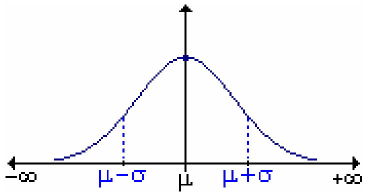


Teniendo en cuenta las propiedades de la función de distribución, la probabilidad pedida se puede calcula como:

$$P(x \geq 3) = P(3 < x \leq 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{15}\left(4^2 - 1\right) - \left[\frac{1}{15}\left(3^2 - 1\right)\right] = \frac{7}{15}$$

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La campana de Gauss o **curva normal**, es una función de probabilidad **continua**, **simétrica**, cuyo máximo coincide con la media, μ.



Por su forma acampanada, se denomina campana de gauss.

Tiene una gran importancia debido a la enorme frecuencia con que aparece en las situaciones más variadas, por ejemplo:

- Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas)de una misma raza. Tallas, pesos, envergaduras, etc.
- Caracteres fisiológicos. Efectos de una misma dosis de un fármaco o de una misma cantidad de abono.
- Caracteres sociológicos. Consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano.
- Caracteres físicos. Resistencia a la rotura de piezas aparentemente idénticas.

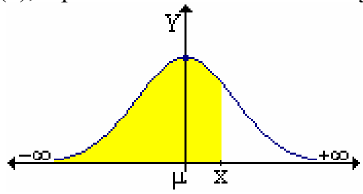
Y, en general, cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

Para cada valor de μ (media) y cada valor de σ (desviación típica), hay una curva normal, que se caracteriza por N (μ, σ), siendo μ y σ los parámetros de los distribución.

El cálculo de probabilidades en cada una de ellas es idéntico y solo depende de los parámetros de la distribución.

Distribución de probabilidades bajo la curva normal

La función de distribución F(x), representa el área encerrada bajo la curva f(x) desde −∞ hasta x



La función de densidad de una variable normal viene definida mediante una expresión del tipo exponencial de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

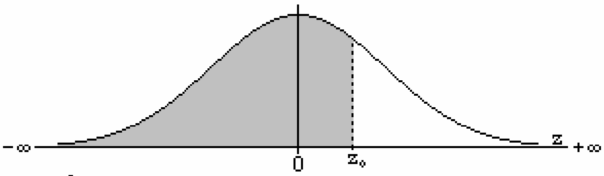
que representa a todas las posibles distribuciones normales, y cada una se caracterizaran por los parámetros por μ y σ.

A mayor dispersión, mayor desviación típica, la gráfica de la distribución es menos apuntada y más abierta. Por el contrario, para valores de σ muy pequeños disminuye la dispersión, y en consecuencia la gráfica de la función es mucho más apuntada y muy concentrada.

De las infinitas distribuciones, tiene especial interés la distribución N(0,1), que tiene μ =0 y σ =1. A está distribución se la denomina **ley normal standard**.

La N(0, 1) se ha tabulado, obteniéndose la siguiente tabla:

NORMAL N(0, 1)



Z	0’00	0’01	0’02	0’03	0’04	0’05	0’06	0’07	0’08	0’09
0’0	0’5000	0’5040	0’5080	0’5120	0’5160	0’5199	0’5239	0’5279	0’5319	0’5359
0’1	0’5398	0’5438	0’5478	0’5517	0’5557	0’5596	0’5636	0’5675	0’5714	0’5753
0’2	0’5793	0’5832	0’5871	0’5910	0’5948	0’5987	0’6026	0’6064	0’6103	0’6141
0’3	0’6179	0’6217	0’6255	0’6293	0’6331	0’6368	0’6406	0’6443	0’6480	0’6517
0’4	0’6554	0’6591	0’6628	0’6664	0’6700	0’6736	0’6772	0’6808	0’6844	0’6879
0’5	0’6915	0’6950	0’6985	0’7019	0’7054	0’7088	0’7123	0’7157	0’7190	0’7224
0’6	0’7257	0’7291	0’7324	0’7357	0’7389	0’7422	0’7454	0’7486	0’7517	0’7549
0’7	0’7580	0’7611	0’7642	0’7673	0’7704	0’7734	0’7764	0’7794	0’7823	0’7852
0’8	0’7881	0’7910	0’7939	0’7967	0’7995	0’8023	0’8051	0’8087	0’8106	0’8133
0’9	0’8159	0’8186	0’8212	0’8238	0’8264	0’8289	0’8315	0’8340	0’8365	0’8389
1’0	0’8413	0’8438	0’8461	0’8485	0’8508	0’8531	0’8554	0’8577	0’8599	0’8621
1’1	0’8643	0’8665	0’8686	0’8708	0’8729	0’8749	0’8770	0’8790	0’8810	0’8830
1’2	0’8849	0’8869	0’8888	0’8907	0’8925	0’8944	0’8962	0’8980	0’8997	0’9015
1’3	0’9032	0’9049	0’9066	0’9082	0’9099	0’9115	0’9131	0’9147	0’9162	0’9177
1’4	0’9192	0’9207	0’9222	0’9236	0’9251	0’9265	0’9279	0’9292	0’9306	0’9319
1’5	0’9332	0’9345	0’9357	0’9370	0’9382	0’9394	0’9406	0’9418	0’9429	0’9441
1’6	0’9452	0’9463	0’9474	0’9484	0’9495	0’9505	0’9515	0’9525	0’9535	0’9545
1’7	0’9554	0’9564	0’9573	0’9582	0’9591	0’9599	0’9608	0’9616	0’9625	0’9633
1’8	0’9641	0’9649	0’9656	0’9664	0’9671	0’9678	0’9686	0’9693	0’9699	0’9706
1’9	0’9713	0’9719	0’9726	0’9732	0’9738	0’9744	0’9750	0’9756	0’9761	0’9767
2’0	0’9772	0’9778	0’9783	0’9788	0’9793	0’9798	0’9803	0’9808	0’9812	0’9817
2’1	0’9821	0’9826	0’9830	0’9834	0’9838	0’9842	0’9846	0’9850	0’9854	0’9857
2’2	0’9861	0’9864	0’9868	0’9871	0’9875	0’9878	0’9881	0’9884	0’9887	0’9890
2’3	0’9893	0’9896	0’9898	0’9901	0’9904	0’9906	0’9909	0’9911	0’9913	0’9916
2’4	0’9918	0’9920	0’9922	0’9925	0’9927	0’9929	0’9931	0’9932	0’9934	0’9936
2’5	0’9938	0’9940	0’9941	0’9943	0’9945	0’9946	0’9948	0’9949	0’9951	0’9952
2’6	0’9953	0’9955	0’9956	0’9957	0’9959	0’9960	0’9961	0’9962	0’9963	0’9964
2’7	0’9965	0’9966	0’9967	0’9968	0’9969	0’9970	0’9971	0’9972	0’9973	0’9974
2’8	0’9974	0’9975	0’9976	0’9977	0’9977	0’9978	0’9979	0’9979	0’9980	0’9981
2’9	0’9981	0’9982	0’9982	0’9983	0’9984	0’9984	0’9985	0’9985	0’9986	0’9986
3’0	0’9987	0’9987	0’9988	0’9988	0’9989	0’9989	0’9989	0’9990	0’9990	0’9990
3’1	0’9990	0’9991	0’9991	0’9991	0’9992	0’9992	0’9992	0’9992	0’9993	0’9993
3’2	0’9993	0’9993	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9995	0’9995	0’9995
3’3	0’9995	0’9995	0’9995	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9997
3’4	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9998
3’5	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998
3’6	0’9998	0’9998	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’7	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’8	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’9	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000

Tipificación de la variable.

No se pueden construir tablas para todos los tipos posibles de distribuciones N(μ, σ) ya que μ y σ pueden tomas infinitos valores, es más aconsejable transformar la variable X que sigue una distribución N(μ, σ) en otra variable Z que siga una distribución N(0, 1), a esta transformación se le denomina tipificación de la variable.

La tipificación de la variable lleva dos conceptos:

i. Centrar, es decir, hacer la media nula (μ =0)
ii. Reducir, es decir, hacer la desviación típica igual a uno

Estos dos pasos se consiguen simultáneamente haciendo el siguiente cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

En cualquier variable continua(x) que siga una distribución del tipo N(μ, σ), la probabilidad de que la variable este comprendida dentro de un intervalo se puede calcular mediante la distribución N(0, 1) mediante la tipificación de la variable

$$p(x \le x_o) = \left\{ x_o \to z_o = \frac{x_o - \mu}{\sigma} \right\} = p\left(z \le \frac{x_o - \mu}{\sigma} \right) = p(z \le z_o)$$

La tabla N(0, 1) da las probabilidades $p(z \le k)$ para valores de k de 0 a 4, de centésima en centésima. A estas probabilidades se llama $\phi(k)$:

$$\phi(z_o) = p(z \le z_o)$$

$\phi(z_o)$ es la función de distribución de esta variable aleatoria.

El valor de z_o se busca de la siguiente forma:

- **Unidades** y **décimas** en la columna de la izquierda.
- **Centésimas** en la primera fila.

El número que da la tabla($\phi(z_o)$), es la probabilidad de que la variable tipificada z sea menor o igual que z_o.

Ejemplo 3.

$$P[z \le 0{,}45] = \phi(0{,}45) = 0{,}6736$$
$$P[z \le 1{,}2] = \phi(1{,}20) = 0{,}8849$$
$$P[z \le 1] = \phi(1{,}00) = 0{,}8413$$

Recíprocamente, si se conoce el valor de la probabilidad $\phi(z_o)$, se puede calcular el valor de z_o.

Ejemplo 4.

$$p[z \le z_o] = \phi(z_o) = 0{,}7190 \to z_o = 0{,}58$$
$$p[z \le z_o] = \phi(z_o) = 0{,}8643 \to z_o = 1{,}10$$
$$p[z \le z_o] = \phi(z_o) = 0{,}5560 \to z_o \approx 0{,}14$$

En una distribución de variable continua las probabilidades puntuales son nulas: $p[x = z_o] = 0$. Por tanto,

$$p[x \le z_o] = p[x < z_o]$$

La curva de distribución normal N(0, 1) tiene dos propiedades muy útiles a la hora de calcular probabilidades:

i. La curva es normalizada

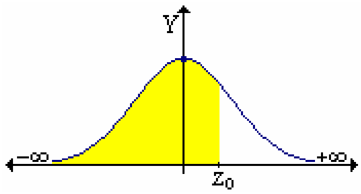
$$p(z \le z_o) = 1 - p(z > z_o)$$

ii. La curva es simétrica

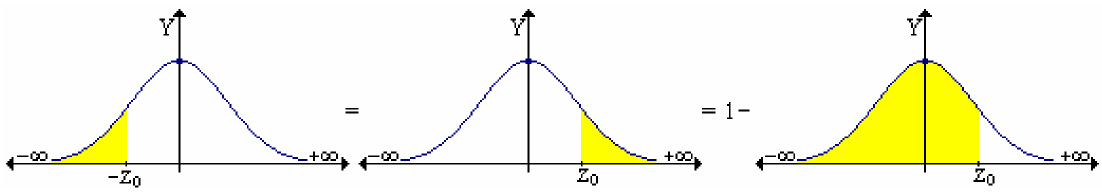
$$p(z \le z_o) = p(z \ge -z_o)$$

Teniendo en cuenta estas propiedades se pueden calcular los siguientes casos:

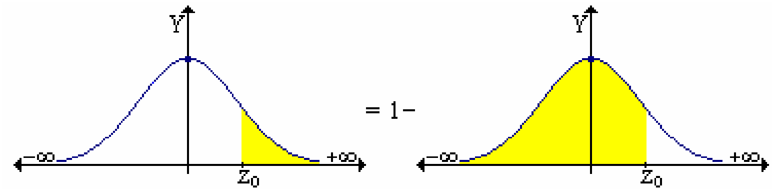
i. $p(Z \le Z_0) = \phi(Z_0)$



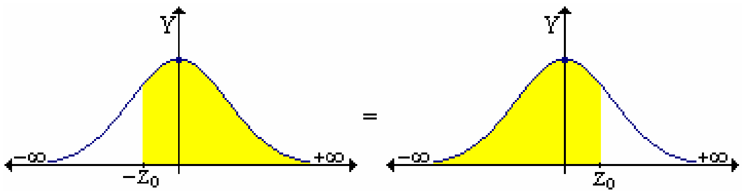
ii. $p(Z \le -Z_0) = p(Z \ge Z_0) = 1 - p(Z < Z_0) = 1 - \phi(Z_0)$



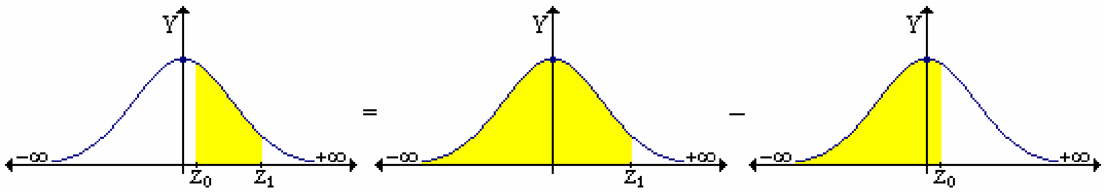
iii. $p(Z \ge Z_0) = 1 - p(Z < Z_0) = 1 - \phi(Z_0)$



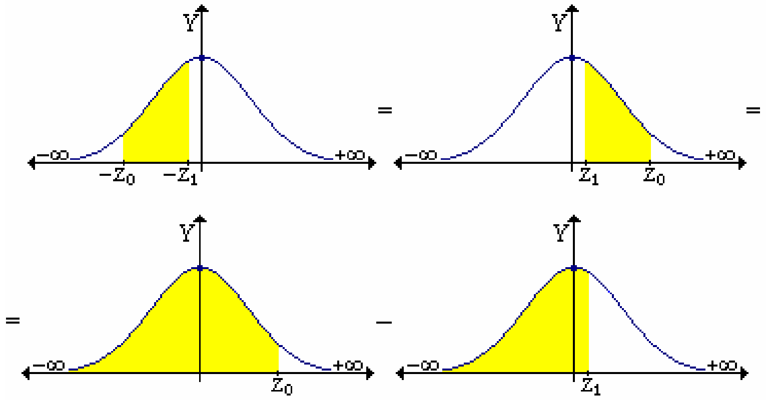
iv. $p(Z \ge -Z_0) = p(Z \le Z_0) = \phi(Z_0)$



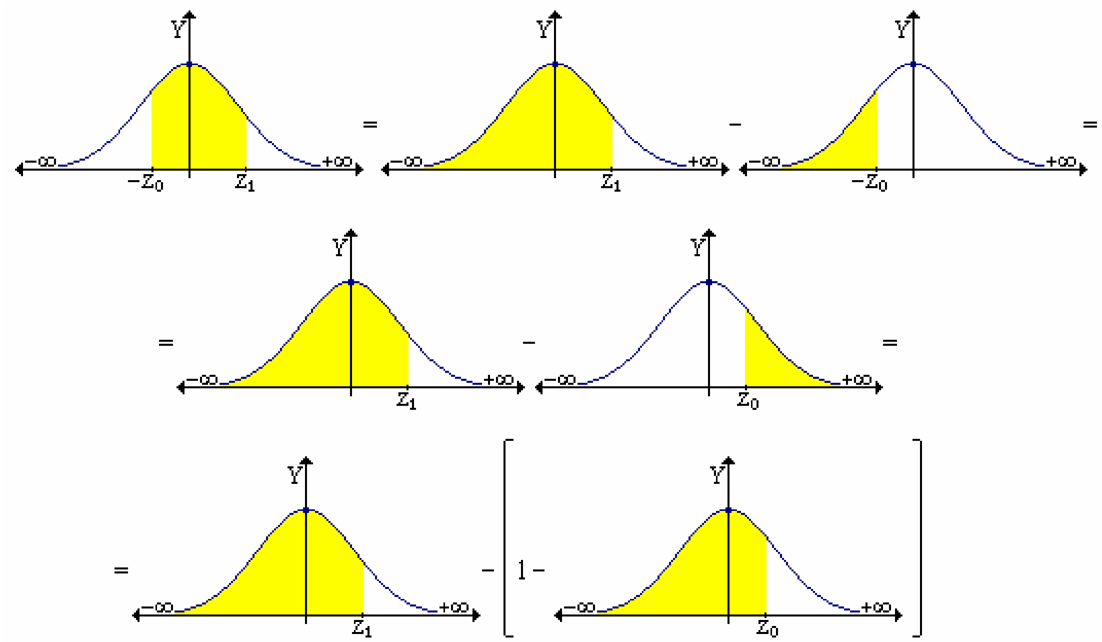
v. $p(Z_o \le Z \le Z_1) = p(Z \le Z_1) - p(Z < Z_o) = \phi(Z_1) - \phi(Z_o)$



vi. $p(-Z_o \le Z \le -Z_1) = p(Z_1 \le Z \le Z_o) = p(Z \le Z_o) - p(Z < Z_1) = \phi(Z_o) - \phi(Z_1)$



vii. $p(-Z_o \le Z \le Z_1) = p(Z \le Z_1) - p(Z < -Z_o) = \phi(Z_1) - \big(1 - \phi(Z_o)\big)$



Ejemplo 5. La talla media de 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm y la desviación típica, 10 cm. Si las tallas se distribuyen normalmente.

a. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm
b. ¿Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm?

a. x ≡ Variable aleatoria continua que representa la talla de los alumnos de un centro escolar, se distribuye según la normal:

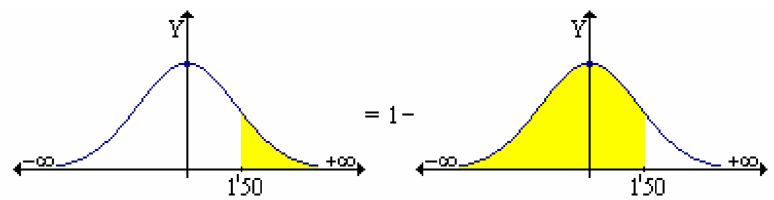
$$x : N(165, 10)$$

donde 165 es la media de la distribución(μ) y 10 es la desviación(σ).

Se pide calcular la probabilidad de que x sea mayor de 180 cm $(p(x > 180))$. Tipificando la variable:

$$p(x > 180) = \left\{ z = \frac{180 - 165}{10} = 1'50 \right\} = p(z > 1'50)$$

Gráficamente



Analíticamente:

$$p(z > 1'50) = 1 - p(z \le 1'50) = 1 - \phi(1'50) = \left[\phi(1'50) = \left\{ \begin{matrix} \text{Fila} : 1'5 \\ \text{Columna} : 0'00 \end{matrix} \right\} = 0'9332 \right] = 1 - 0'9332 = 0'0668$$

$$p(x > 180) = 6'68\%$$

b. Valor esperado = N · p = 200 · 0'0668 = 13'4 ⇒ Valor esperado ≤ 13

Ejemplo 6. En una ciudad las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 ºC y una desviación típica de 4 ºC. Que intervalo de temperaturas máximas se han alcanzado el 5% de los días más calurosos.

x ≡ Variable aleatoria continua que representa la temperatura máxima, sigue una distribución normal

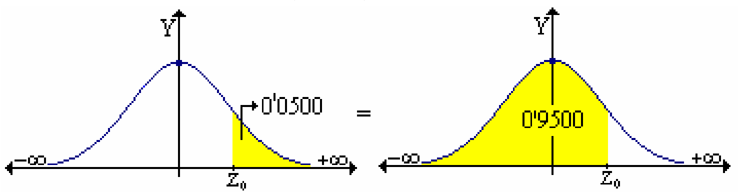
$$x : N(26, 4)$$

Se pide calcular la temperatura(x_o) para la que se cumple:

$$p(x > x_o) = 5\%$$

tipificando la variable

$$p(z > z_o) = 0'0500$$



operando

$$p(z > z_o) = 1 - p(z \le z_o) = 0'0500 \Rightarrow p(z \le z_o) = 1 - 0'0500 = 0'9500$$

$$p(z \le z_o) = \phi(z_0) = 0'9500 \Rightarrow z_o = \phi^{-1}(0'9500) \approx 1'65$$

conocido el valor de z_o, mediante la ecuación de tipificación se obtiene la temperatura buscada.

$$z_o = \frac{x_o - 26}{4} = 1'65 \Rightarrow x_o = 1'65 \cdot 4 + 26 = 32'6\,^{o}C$$

El 5% de los días más calurosos la temperatura máxima fue mayor de 32’6 ºC

Aproximación de la Binomial a la Normal

Una distribución binomial del tipo B(N, p) se aproxima a una distribución normal a medida que aumenta el producto N·p ó N·q sí q<p. Si los productos N·p y N·q son mayores que 3, la aproximación es bastante buena. Si ambos productos superan a 5, la aproximación es casi perfecta.

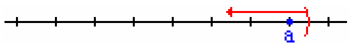
La distribución normal a la que se aproxima la binomial tiene la misma media y desviación típica que ella.

$$x : B(N, p) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu = N \cdot p \\ \sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} \end{array} \right\} \rightarrow x' : N(\mu, \sigma)$$

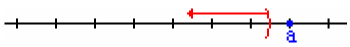
El cálculo de probabilidades de x puede hacerse a partir de x’ teniendo en cuenta lo siguiente:
$p(x = x_o) = p(x_o - 0'5 < x < x_o + 0'5)$
es decir, al valor puntual de x(0, 1, 2, ...) se asocia un intervalo centrado en x_o de radio 0’5.

Aplicando esto a los posibles intervalos, las transformaciones son de la siguiente forma:

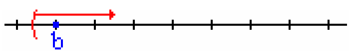
i. $p(x \leq a) = p(x' < a + 0'5)$



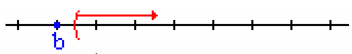
ii. $p(x < a) = p(x' < a - 0'5)$



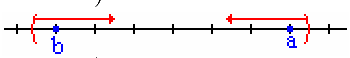
iii. $p(x \geq b) = p(x' > b - 0'5)$



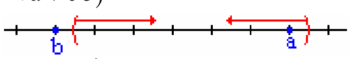
iv. $p(x > b) = p(x' > b + 0'5)$



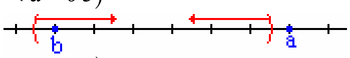
v. $p(b \leq x \leq a) = p(b - 0'5 < x' < a + 0'5)$



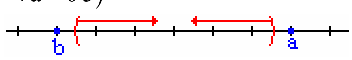
vi. $p(b < x \leq a) = p(b + 0'5 < x' < a + 0'5)$



vii. $p(b \leq x < a) = p(b - 0'5 < x' < a - 0'5)$



viii. $p(b < x < a) = p(b + 0'5 < x' < a - 0'5)$



Ejemplo 7. Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado 500 veces, se obtengan menos de 75 veces la cara tres.

x ≡ Variable discreta que representa el número de veces que se obtiene la cara tres al lanzar 500 un dado, sigue una distribución binomial del tipo B(N, p), donde N es el número de pruebas(lanzamientos) y p es la probabilidad de existo(obtener cara tres en un lanzamiento).

$$\left.\begin{array}{c} N = 500 \\ p = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \rightarrow x : B\left(500, \frac{1}{6}\right)$$

Puesto que el producto N·p = 83'3, la binomial se ajusta casi perfectamente a una normal del tipo N(μ, σ), siendo:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = N \cdot p = 500 \cdot \dfrac{1}{6} = 83'33 \\ \sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} = \sqrt{500 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6}} = 8'33 \end{array}\right\} \rightarrow x' : N(83'33, 8'33)$$

Nota: $p + q = 1 \;\Rightarrow\; q = 1 - p$

Se pide calcular la probabilidad de que x sea menor cincuenta, que transformada a la variable continua x' se transforma en que sea menor que 49'5.

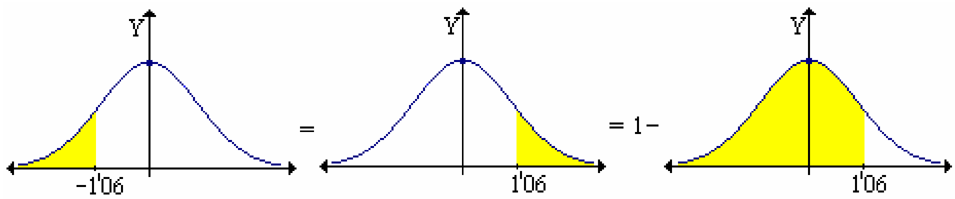
$$p(x < 75) = p(x' < 75 - 0'5) = p(x' < 74'5)$$

Tipificando la variable continua:

$$p(x' < 74'5) = \left\{ z = \frac{74'5 - 83'3}{8'33} = -1'06 \right\} = p(z < -1'06)$$

$$p(z < -1'06) = p(z > 1'06) = 1 - p(z \le 1'06) = 1 - \phi(1'06) = \left(\phi(1'06) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila} : 1'0 \\ \text{Columna} : 0'06 \end{array} \right\} = 0'8554 \right) = 1 - 0'8554 = 0'1456$$

Gráficamente



$$p(x < 75) = 14'56\%$$