

## NÚMEROS COMPLEJOS

### EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

#### DEFINICIONES

Al resolver ecuaciones del tipo :  $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$  que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como número válido a  $\sqrt{-1}$  y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

**Unidad imaginaria:** Se llama así al nuevo número  $\sqrt{-1}$ . Y se designa por la letra  $i$   
 $i = \sqrt{-1}$  ;  $i^2 = -1$  (El nombre  $i$  viene de imaginario)

**Números complejos:** Son las expresiones:  $a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales.

**Componentes:** La expresión  $a + bi$ , se llama **forma binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes:  $a =$  **Parte real**;  $b =$  **Parte imaginaria**.

**Igualdad:** Dos números complejos son iguales sólo cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.

**El conjunto de todos los números complejos** se designa por **C**.

$$C = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$$

**Los números reales son complejos:**  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ : Los reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero:  $a + 0i = a$

**Números imaginarios:** Son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero. Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.

**Números imaginarios puros:** son los imaginarios cuya parte real es cero:  $0 + bi = bi$

**Opuesto de un número complejo  $z = a + bi$  :**  $-z = -a - bi$

**Conjugado de un número complejo  $z = a + bi$  :**  $\bar{z} = a - bi$

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la **recta real al plano complejo**.

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real y el Y, eje imaginario. El número complejo  $a + bi$  se representa mediante el punto  $(a,b)$  que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen  $(0,0)$  y extremo  $(a,b)$ .

Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

## OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones con los números complejos en forma binómica se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que  $i^2 = -1$ .

**SUMA:** La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b+b')i$$

**RESTA:** La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la resta de las partes reales y cuya parte imaginaria es la resta de las partes imaginarias.

$$z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = a + bi - a' - b'i = (a - a') + (b-b')i$$

## MULTIPLICACIÓN

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a + bi) \cdot (a' + b'i) = a \cdot a' + a \cdot b'i + ba'i + b \cdot b'i^2 = a \cdot a' + a \cdot b'i + a' \cdot bi - b \cdot b' = \\ &= (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b)i \end{aligned}$$

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado obtenemos un número real:  $z \cdot z = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2$

**DIVISIÓN:** Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi) \cdot (a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{(a \cdot a' + b \cdot b') + (b \cdot a' - a \cdot b')i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b \cdot a' - a \cdot b'}{a'^2 + b'^2} i$$

## POTENCIAS DE i:

$$i^0 = 1; i = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; \dots$$

$$i^n \Rightarrow \text{se divide } n \text{ entre cuatro y nos quedamos con el resto } (0,1,2,3) \Rightarrow i^n = i^r$$

## PROPIEDADES

La **suma** de números complejos cumple las propiedades **asociativa y conmutativa**.

El 0 es el **elemento neutro** de la **suma**.

Todos los números complejos tienen un **opuesto**.

La **multiplicación** de número complejo es, también, **asociativa y conmutativa**.

El 1 es el **elemento neutro** del **producto**

Todos los números complejos,  $a + bi$ , salvo el 0, tienen un **inverso**:  $1/(a + bi)$

Además, la multiplicación es **distributiva** respecto de la suma.

Con todas estas propiedades nos dicen que podemos operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

## NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

### MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

**Módulo** de un número complejo  $z$  es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por  $r = |z|$

**Argumento** de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se designa:  $\alpha = \arg(z)$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ )

**Número complejo en forma polar:**  $z = r_\alpha$

### PASO DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} r = +\sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{si } a \neq 0 \text{ (Teniendo en cuenta el cuadrante)} \\ 90^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ 270^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

### PASO DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

$$z = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow z = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cdot i$$

## OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

**PRODUCTO:** Al multiplicar dos números complejos en forma polar obtenemos otro número complejo en forma polar de módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos (reduciéndola a un ángulo entre 0° y 360°)

$$r_{\alpha} r'_{\alpha'} = (r \cos \alpha + r \operatorname{sen} \alpha i) \cdot (r' \cos \alpha' + r' \operatorname{sen} \alpha' i) = (r \cos \alpha \cdot r' \cos \alpha' - r \operatorname{sen} \alpha \cdot r' \operatorname{sen} \alpha') + (r \cos \alpha \cdot r' \operatorname{sen} \alpha' + r \operatorname{sen} \alpha \cdot r' \cos \alpha') i = r r' (\cos \alpha \cdot \cos \alpha' - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha') + r r' (\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha') i = r r' \cos(\alpha + \alpha') + r r' \operatorname{sen}(\alpha + \alpha') i = r r'_{\alpha + \alpha'}$$

**POTENCIA:** La potencia n-ésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo en forma polar de módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento el argumento multiplicado por n.

$$(r_{\alpha})^n = r_{\alpha} \cdot \dots \cdot r_{\alpha} = (r \cdot \dots \cdot r)_{\alpha + \dots + \alpha} = (r^n)_{n\alpha}$$

**COCIENTE:** El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los

argumentos:  $\frac{r_{\alpha}}{r'_{\alpha'}} = \left( \frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \alpha'}$

## FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada **fórmula de Moivre**:

$$(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha i)^n = \cos n\alpha + \operatorname{sen} n\alpha i$$

que es útil en trigonometría, pues permite hallar  $\cos n\alpha$  y  $\operatorname{sen} n\alpha$  en función de  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{sen} \alpha$ .

## RADICALES

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}} = \left( \sqrt[n]{r} \right)_{\frac{\alpha + 360^{\circ}k}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Dando los valores de k obtenemos la n raíces de dicho número complejo.

Para  $n > 2$ , los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen.