UNIDAD

12 Distribuciones de probabilidad

Comenzamos la Unidad introduciendo los conceptos básicos de probabilidad, pues en las distribuciones de probabilidad se entremezclan estadística y probabilidad. También repasamos conceptos de combinatoria que se usan en probabilidad.

Se estudian la distribución binomial y la normal como ejemplos de distribuciones de probabilidad de variable discreta y de distribuciones de probabilidad de variable continua, respectivamente, por ser las más usadas.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Conocer el concepto de experimento aleatorio, el de suceso y las operaciones con sucesos.
2. Conocer los modos de asignar probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio.
3. Distinguir las variables aleatorias discretas de las variables aleatorias continuas.
4. Utilizar fórmulas y tablas para calcular probabilidades en una variable aleatoria que sigue una distribución binomial.
5. Utilizar tablas para calcular probabilidades de una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal.
6. Saber cómo aproximar una distribución binomial por una normal.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. PROBABILIDAD **279**
1.1. Experiencias aleatorias y sucesos 279
1.2. Operaciones con sucesos 280
1.3. Probabilidad de un suceso 282
1.4. Cálculo de probabilidades en experiencias de dos o más pruebas 284
2. NÚMEROS COMBINATORIOS **286**
3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA **288**
4. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL **291**
5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL **285**
5.1. Funciones de densidad 295
5.2. La Distribución Normal 296
5.3. Tipificación de la variable 297
5.4. Cálculo de probabilidades con la tabla $N(0,1)$ 298
5.5. Aproximación de la binomial por la normal 301

1. Probabilidad

1.1. Experiencias aleatorias y sucesos

Muchos fenómenos observables tienen un resultado imprevisto: el juego de arrojar un dado o una moneda, extraer una carta de un mazo de naipes, extraer números de la Lotería Primitiva, etc.. A este tipo de fenómenos se les denomina experiencias aleatorias y se caracterizan porque:

a) su resultado es imprevisible;

b) podemos realizar el experimento tantas veces como queramos, siempre en las mismas condiciones.

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados de un experimento aleatorio y lo simbolizamos por la letra E. Al arrojar una moneda y observar si sale cara o cruz, el espacio muestral es $E = \{cara, cruz\}$. Si tiramos un dado, el espacio muestral resulta ser $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Al elegir un naipe en una baraja de 40 cartas, podemos suponer que a cada una le asignamos un número distinto del 1 al 40, entonces el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, ... ,39, 40\}$$

En el juego de lanzar dos dados el espacio muestral es:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2 ,3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Se denomina ***suceso*** a cada uno de los subconjuntos de un espacio muestral. Los sucesos como son subconjuntos se pueden determinar enumerando sus elementos o mediante una propiedad que cumplan exclusivamente sus elementos. En el juego de arrojar un dado los subconjuntos $A = \{1, 4, 5\}$ y $B = \{salir\ número\ par\}$ son sucesos, es evidente que $B = \{2, 4, 6\}$. Los sucesos constituidos por un único elemento se llaman ***sucesos elementales***. En el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ los subconjuntos: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6} son sucesos elementales.

Los conjuntos $\varnothing$ (vacío) y E (espacio muestral) se denomina ***suceso imposible*** y ***suceso seguro***.

Decimos que, al realizar un experimento aleatorio, se presenta un suceso A si el resultado de dicho experimento es uno cualquiera de los sucesos elementales que pertenecen a *A*. Por ejemplo, si arrojamos un dado y el resultado es el suceso elemental {4}, además de éste, se presentan todos los sucesos que tienen el 4 como uno de sus elementos: *A* = {*salir número par*}, *B* = { *salir número mayor que* 3}, entre otros.

Ejemplo

En el juego de tirar dos dados y sumar las puntuaciones, ¿cuáles son los elementos del suceso *A* = {*sumar* 3} y del suceso *B* = {*sumar* 11}?

Solución. *A* = { *sumar* 3 } = { (1,2) y (2,1) } y *B* = {*sumar* 11} = {(5,6) y (6,5)}.

Actividades

1. En el juego o experimento aleatorio de tirar un dado:

   a) ¿cuáles son los elementos del suceso *A* = { *salir un número menor o igual que seis* }?;

   b) ¿cuál es el suceso *B* = { *salir un múltiplo de siete* }?;

   c) ¿cómo se llaman a los sucesos *A* y *B* de este juego?

2. En el juego de tirar dos dados describe los sucesos *A* = {*sumar* 8} y *B* = {*sacar al menos un* 5}.

1.2. Operaciones con sucesos

Con los sucesos podemos hacer dos operaciones: la unión y la intersección. La **unión** de dos sucesos *A* y *B* es otro suceso que simbolizamos por $A \cup B$ y contiene los sucesos elementales de *A*, de *B* o de ambos,

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x \,/\, x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}}$$

La **intersección** de dos sucesos *A* y *B* es otro suceso que simbolizamos por $A \cap B$ y contiene los sucesos elementales que pertenecen simultáneamente a *A* y a *B*,

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}}$$

Dos sucesos se dicen ***incompatibles*** cuando su intersección es el **suceso imposible**, $\varnothing$.

Ejemplo

Los conjuntos $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3\}$ y $C = \{4,5\}$ son sucesos del experimento de lanzar un dado. Halla $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cup A$, $B \cap B$, $B \cap C$, $E \cup B$ y $E \cap B$.

Solución.

$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$,

$A \cup B \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$,

$A \cup A = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$,

$B \cap B = \{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$,

$B \cap C = \{1,2,3\} \cap \{4,5\} = \varnothing$, son incompatibles,

$E \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$,

$E \cap B = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\} = B$.

El **contrario** de un suceso A se representa por $\bar{A}$, y se realiza siempre y cuando no suceda A. Es obvio que el suceso contrario de $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$, es A. Por tanto $A = \bar{\bar{A}}$. También es evidente que A y lo que no es A constituyen todo el espacio muestral

$$A \cup \bar{A} = E \quad y \quad A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Actividades

3. En el juego de lanzar un dado, ¿cuál es el contrario de A = {*salir mayor o igual que* 5}? Si B = {*múltiplo de* 3}, ¿cuál es el suceso $A \cap B$?

4. En el juego de lanzar dos dados describe los sucesos A = {*sumar* 7} y B = {*salir al menos un* 6}. ¿Cómo son los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$? ¿Cuántos elementos tiene el suceso $\bar{A}$?

1.3. Probabilidad de un suceso

Hay dos modos de atribuir probabilidad a un suceso:

a) Mediante la frecuencia relativa del suceso, cuando el número de veces que repetimos el experimento es muy grande.

b) Admitiendo como axiomas de la probabilidad las afirmaciones siguientes:

1. La probabilidad de un suceso A es siempre un número real no negativo, $\boldsymbol{P(A) \geqslant 0}$,

2. La probabilidad del proceso seguro $\boldsymbol{E}$ es **1**, $\boldsymbol{P(E) = 1}$,

3. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son sucesos incompatibles, $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$, la probabilidad de la unión es igual a la suma de $\boldsymbol{P(A)}$ y $\boldsymbol{P(B)}$,

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Estos axiomas unidos al hecho de que cada suceso elemental, de un espacio muestral E de m elementos, cuando es previsible que tengan la misma disponibilidad de salir, tiene una probabilidad de:

$$\frac{1}{n^{o} \text{ de sucesos elementales}}$$

permiten encontrar una regla para hallar la probabilidad de otros sucesos. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, ...,a_n\}$ es un suceso, entonces $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup .... \cup \{a_n\}$, que evidentemente son incompatibles dos a dos, por tanto,

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ...+ P(\{a_n\}) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

Es decir, **la probabilidad de un suceso *A*** es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que constituyen A. Luego,

$$P(A) = \frac{n^{o} \text{ de elementos de } A}{n^{o} \text{ de elementos de } E}$$

A los elementos de A se llaman resultados favorables a la realización del suceso A, y a los elementos del espacio muestral E: resultados posibles, y por esto se acostumbra a escribir:

$$P(A) = \frac{n^{o} \text{ de casos favorables}}{n^{o} \text{ de casos posibles}}$$

A este cociente se llama **Regla de Laplace**.

Ejemplos

1. Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga número par? ¿cuál es la probabilidad de que no salga número par? ¿y de qué salga par y mayor que 2?

   Solución. El suceso salir par es A = {2, 4, 6} y $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

   El suceso no salir par es el contrario de A, es decir, $\bar{A}$ y $\bar{A}$ ={1, 3, 5}, luego

   $P(\bar{A})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Observamos que $P(A)+P(\bar{A}) = 1$ o $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

   El suceso salir mayor que 2 es B = {3, 4, 5, 6} y salir par y mayor que 2 es $A \cap B$ = {4, 6};

   luego: $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

2. Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número primo?; ¿y de que salga un número primo e impar?; ¿cuál es la probabilidad de que salga un número que no es primo ni impar?

   Solución. El suceso salir número primo es A = {1, 2, 3, 5} y $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

   El suceso salir impar es B = {1, 3, 5} y salir primo e impar es $A \cap B$ = {1, 3, 5}; luego:

   $P(A\cap B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

   El suceso no primo es $\bar{A}=\{4,6\}$ y no impar es $\bar{B}=\{2,4,6\}$ luego de $\bar{A}\cap\bar{B}$ = {4,6},

   $P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Actividades

5. En un sombrero negro hay 11 fichas iguales: 5 negras y 6 blancas. Al lado hay un sombrero gris con 7 fichas iguales: 3 negras y 4 blancas. Si quisiéramos una ficha negra, ¿qué sombrero ofrece mayor probabilidad?

6. En el juego de lanzar dos dados si A = {*sumar* 7}, calcula la probabilidad del suceso A y del suceso $\bar{A}$. ¿Se cumple que $P(A)+P(\bar{A}) = 1$?

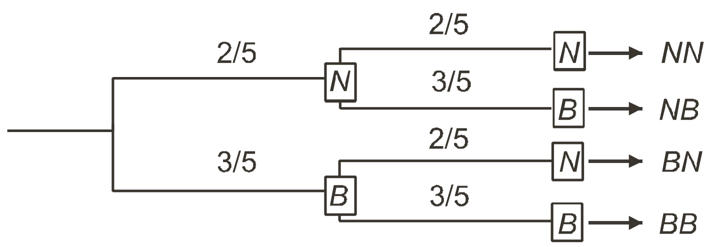
7. Sea $E = \{a,b,c,d,e,f\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = 1/6$. Se consideran los sucesos $A = \{a,c,d,e\}$ y $B = \{d,e,f\}$. Hallar $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ y $P(\bar{A})$

1.4. Cálculo de probabilidades en experiencias de dos o más pruebas

Cuando realizamos experiencias con varias pruebas, tirar dos dados, o un dado varias veces, extraer varias cartas de una baraja, o varias bolas de una urna, para calcular la probabilidad de un suceso es importante conocer si las pruebas son independientes o, por el contrario, afecta el resultado de una en la siguiente.

Pruebas independientes

Analicemos un ejemplo. En una urna hay cinco bolas de igual tamaño, 2 son negras y 3 blancas. Se extrae una bola al azar, **se observa y se devuelve** a la urna. Seguidamente se repite la misma operación. Estamos ante una experiencia aleatoria de dos pruebas. **El resultado de la primera prueba no influye en la segunda, son pruebas independientes**. Las dos primeras ramas del diagrama en árbol corresponden a las probabilidades de la primera extracción y las cuatro restantes a las probabilidades de la segunda prueba:



El espacio muestral de este juego es: $E = \{ BB, BN, NB, NN \}$ y la determinación de la probabilidad de un suceso elemental se hace mediante las probabilidades de las ramas que conducen a él. Si queremos hallar la probabilidad de extraer una bola blanca seguida de una negra,

$$P(BN) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24 = P(\{Blanca\ en\ la\ 1^{a}\} \cap \{Negra\ en\ la\ 2^{a}\}) =$$

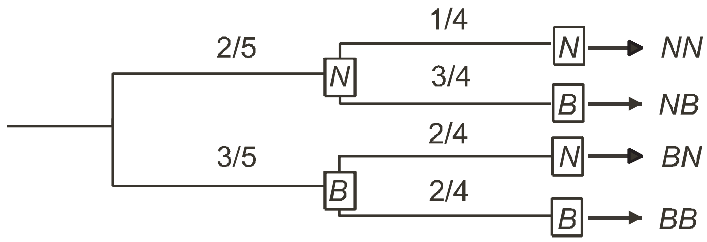
$$= P(\{Blanca\ en\ la\ 1^{a}\}) \cdot P(\{Negra\ en\ la\ 2^{a}\})$$

Por tanto, podemos hacer las siguientes consideraciones:

La probabilidad de un suceso elemental es igual al producto de las probabilidades de las ramas que conducen a él. Pero además podemos afirmar que la probabilidad de la intersección dos sucesos independientes, o en pruebas independientes, es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos.

Pruebas dependientes

Si en una urna hay cinco bolas de igual tamaño, 2 son negras y 3 blancas, y extraemos una bola al azar, **se observa y no se devuelve** a la urna, entonces en la segunda extracción cambian las condiciones iniciales del juego. **El resultado de la primera prueba influye en la segunda, son pruebas dependientes**. Las dos primeras ramas del diagrama en árbol corresponden a las probabilidades de la primera extracción y las cuatro restantes, ahora con otros números, a las probabilidades de la segunda prueba:



En este caso, si queremos hallar la probabilidad de extraer una bola blanca seguida de una negra, tendremos:

$$P(\text{BN}) = P(\{\textit{Blanca en la } 1^{a}\} \cap \{\textit{Negra en la } 2^{a}\}) = P(\{\textit{Blanca en la } 1^{a}\}) \cdot$$

$$\cdot\, P(\{\textit{Negra en la } 2^{a} \textit{ condicionado a la salida Blanca en la } 1^{a}\})$$

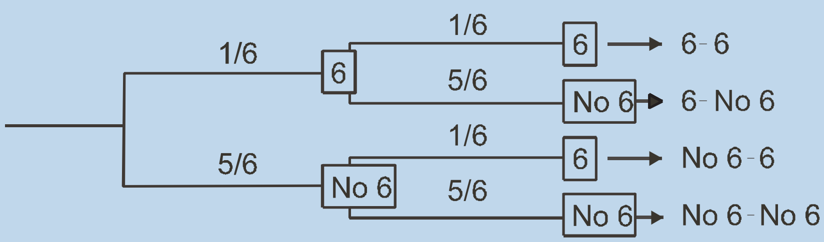
Por tanto, podemos hacer la siguiente consideración:

La probabilidad de la intersección de dos sucesos dependientes, o en pruebas dependientes, es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad del otro condicionado por el primero.

Ejemplos

1. Se tira un dado dos veces ¿cuál es la probabilidad de que salga al menos un 6?

Solución.



$P\,(\textit{Al menos un } 6) = 1/6 \cdot 1/6 + 1/6 \cdot 5/6 + 5/6 \cdot 1/6 = 11/36$

Que es lo mismo que P (*Al menos un* 6) = 1 – P(*No salir* 6) = 1 – 5/6 · 5/6 = 1 – 25/36 = = 11/36.

2. Se extraen simultáneamente dos cartas de una baraja de 40. Encontrar la probabilidad de que salgan dos ases.

Solución: P(*Dos ases*) = P({*As en la* 1ª}∩{*As en la* 2ª}) =

= P({*As en la* 1ª}) · P({*As en la* 2ª *condicionado a la salida As en la* 1ª}) =

= 4/40 · 3/39 = 1/130

Actividades

8. De una baraja de 40 cartas se extraen dos cartas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos oros? Si las dos cartas se extraen sucesivamente y la primera se devuelve al mazo, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos oros?

2. Números combinatorios

Imaginemos una urna con m bolas numeradas de 1 a m, y extraemos n bolas (con $0 < n \leqslant m$) sin devolver ninguna a la urna. Obtenemos así un subconjunto de n elementos de un conjunto mayor de m elementos. ¿Cuántos subconjuntos de n elementos hay en un conjunto mayor de m elementos?

El número total de subconjuntos se simboliza por $\binom{m}{n}$ y para calcularlo empleamos la fórmula

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

donde $m!$ se llama factorial de m y corresponde a

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

es decir, al producto de los m primeros números naturales, así:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \;; \qquad 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Observaremos, sin embargo, una convención $0! = 1$ y $1! = 1$, con esta salvedad podemos calcular algunos números combinatorios

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = \frac{120}{12} = 10 \qquad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\cdot0!} = 1$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot2!} = 21 \qquad \binom{8}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{8!}{1!\cdot7!} = 8$$

Las calculadoras científicas disponen de la tecla x! para calcular el factorial de un número, si la tecla está en color encarnado debemos pulsar antes SHIFT, es decir, 5! se calcula así:

5 SHIFT x! ⟶ 120

En otras calculadoras es aún más fácil con la tecla nCr , que nos da directamente el número $\binom{m}{n}$ o, si está en color encarnado, por la secuencia SHIFT nCr.

En este caso

$\binom{5}{3}$ sería 5 SHIFT nCr 3 = ⟶ 10

Ejemplos

1. Calcula $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

Solución. $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$, $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = \frac{5!}{1!\cdot4!} = 5$,

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot3!} = 10$, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = 10$, $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 5$,

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4} = 1+5+10+10+5 = 31$$

2. Calcula $\binom{6}{0}$; $\binom{6}{6}$; $\binom{7}{0}$; $\binom{7}{7}$ ¿Cuál sera el resultado de $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$?

Solución. $\binom{6}{0}=\frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}=\frac{6!}{6!}=1,\ \binom{6}{6}=\frac{6!}{6!\cdot 0!}=1,\ \binom{7}{0}=\frac{7!}{0!\cdot 7!}=1,\ \binom{7}{7}=\frac{7!}{7!\cdot 0!}=1,$

$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot n!}=1$ y $\binom{n}{n}=1$

Actividades

9. Calcula: **a)** $\binom{6}{4}$ y $\binom{6}{2}$, **b)** $\binom{7}{2}$ y $\binom{7}{5}$ ¿Son los pares de números combinatorios iguales?

Comprueba que la igualdad $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$ es cierta para cada valor que le demos a m y n ($m > n$).

10. Comprueba que la igualdad es cierta $\binom{10}{7}+\binom{10}{8}=\binom{11}{8}$. Comprueba que la igualdad $\binom{m}{n}+\binom{m}{n+1}=\binom{m+1}{n+1}$ es cierta para cada valor que le demos a m y n ($m \geqslant n$).

3. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

En los apartados anteriores hemos hablado de sucesos en general, pero nos interesan los experimentos aleatorios cuyos sucesos sean identificables por un número; tal como ocurre al tirar dos dados y sumar sus puntuaciones o lanzar 5 monedas y contar el número de caras, aunque también son de naturaleza numérica: anotar, en un examen de 50 preguntas, el número de respuestas correctas o registrar el número de huevos rotos, por cada envase de 12, de una determinada granja. En todos estos casos los sucesos son identificables por un número.

Una variable numérica que toma diferentes valores, de los que conocemos o podemos conocer la probabilidad de que cada uno ocurra, se llama una **variable aleatoria discreta**. Las variables aleatorias se simbolizan por una letra mayúscula como X (o Y o Z), y asociada con la variable aleatoria hay una función de probabilidad que nos informa de la probabilidad de que X tome un determinado valor.

Una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es semejante a una distribución de frecuencias de una variable estadística, sólo que en vez de frecuencias relativas tenemos probabilidades.

En el juego de lanzar dos dados y sumar sus puntuaciones la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La probabilidad de que en este juego la suma sea 3 se simboliza por

$$P[X=3]=\frac{2}{36}$$

En general, si

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria X, entonces

$$P[X=x_1]=p_1$$
$$P[X=x_2]=p_2$$
$$...$$
$$P[X=x_n]=p_n$$

donde p_i es un número comprendido entre 0 y 1, $0 \le p_i \le 1$, y la suma de los p_i es la unidad

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

En ocasiones, la probabilidad de que una variable aleatoria X tome un determinado valor x, $P[X=x]$, viene dado por una función de probabilidad, como veremos en el próximo apartado.

Sabemos que los parámetros principales de una distribución estadística son la media, $\overline{x}$, y la desviación típica, s, y se calculan por:

$$\overline{x}=\frac{x_1f_1+...+x_nf_n}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad s=\sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i}-\overline{x}^2}$$

En el caso de las distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria también podemos considerar la media, que simbolizamos por la letra griega μ, y definimos como

$$\mu = x_1p_1+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

y la desviación típica, que simbolizamos por la letra griega σ, y definimos como

$$\sigma=\sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2}$$

Ejemplos

1. La tabla siguiente indica la distribución de probabilidad del juego de lanzar 4 monedas y anotar el número de caras:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Calcular μ y σ.

Solución. $\mu = x_1p_1 + \ldots + x_np_n = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$; a este número se le llama también valor esperado o esperanza matemática de la variable.

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0 + 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{4} + 4^2\cdot\frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

2. Calcular μ y σ en la distribución de probabilidad de la suma de las puntuaciones de dos dados.

Solución. En el juego de tirar dos dados, la distribución viene dada por la tabla

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Luego, $\mu = x_1p_1 + \ldots + x_np_n = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{2^2\cdot\frac{1}{36} + 3^2\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 11^2\cdot\frac{2}{36} + 12^2\cdot\frac{1}{36} - 7^2} = 2{,}41\ldots$$

Actividades

11. Escribe la tabla de distribución de probabilidad del juego de tirar tres monedas y anotar el número de cruces. Calcula μ y σ.

4. Distribución binomial

Supongamos un experimento aleatorio que se pueda repetir indefinidamente y que en cada prueba sólo tenga dos resultados. Experimentos de este tipo son: tirar una moneda, donde únicamente sale cara o cruz; tirar un dado y observar si sale 5 o no; anotar el sexo de los recién nacidos de una maternidad; registrar los resultados de un tenista contra otro determinado, etc.

A los dos posibles resultados de estas experiencias les llamaremos éxito (*E*) y fallo (*F*).

Supondremos que *p* es la probabilidad de **éxito** en cada prueba y, por tanto, 1 - *p* será la probabilidad de **fallo** en cada prueba.

Si el experimento se repite *n* veces, al anotar los resultados, obtenemos una palabra de longitud *n* formada por las letras *E* y *F*

E E F F E F E E F E F F F E ...

Estamos interesados en contar cuántas palabras de este tipo contienen *x* veces la letra *E*. Esto es equivalente a decir: si tenemos *n* casilleros, ¿de cuántas maneras distintas podemos situar *x* veces la letra *E*, una por casillero? O, mejor aún, ¿cuántos subconjuntos de *x* elementos tiene un conjunto de *n* elementos?

Esta última pregunta tiene una respuesta conocida, y es el número combinatorio $\binom{n}{x}$.

Si ahora nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de obtener *x* éxitos en *n* pruebas del experimento? o, lo que es lo mismo, ¿cuál es la probabilidad del suceso $A = \overbrace{E \cap \ldots \cap E}^{x \text{ veces}} \cap \overbrace{F \cap \ldots \cap F}^{n-x \text{ veces}}$?

Como las pruebas son independientes, la probabilidad no varía de una a otra prueba, entonces:

$$P(A) = \overbrace{P(E) \cdot \ldots \cdot P(E)}^{x \text{ veces}} \cdot \overbrace{P(F) \cdot \ldots \cdot P(F)}^{n-x \text{ veces}}$$

$$P(A) = \overbrace{p \cdot \ldots \cdot p}^{x \text{ veces}} \cdot \overbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}^{n-x \text{ veces}} = p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Al haber $\binom{n}{x}$ palabras de longitud *n* con *x* letras *E* y cada palabra tiene una probabilidad de $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, entonces definimos una función de probabilidad para la variable aleatoria *X*, que cuenta el número de éxitos en *n* pruebas, así:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Esta función recibe el nombre de función de probabilidad de una **distribución binomial** de n pruebas con probabilidad de éxito p, simbólicamente $B(n,p)$, y que tabulamos de este modo:

x	0	1	...	k	...	n
$P[X=x]$	$\binom{n}{0}(1-p)^n$	$\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}$	...	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	...	$\binom{n}{n}p^n$

Se puede demostrar que en una distribución binomial $B(n,p)$ la media y la desviación típica vienen dadas por las fórmulas:

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Ejemplos

1. En una distribución binomial $B(6;\ 0{,}25)$ calcular:

a) $P[X=0]$, **b)** $P[X=3]$, **c)** $P[X=5]$, **d)** $P[X>0]$, **e)** $P[X\geq 0]$, y **f)** $P[X\geq 5]$.

Solución:

a) $P[X=0]=\binom{6}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^6=0{,}1779$, **b)** $P[X=3]=\binom{6}{3}\cdot 0{,}25^3\cdot 0{,}75^3=0{,}1318$,

c) $P[X=5]=\binom{6}{5}\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75=0{,}0044$, **d)** $P[X>0]=1-P[X=0]=1-0{,}1779=0{,}8221$.

e) $P[X\geq 0]=1$ y **f)** $P[X\geq 5]=\binom{6}{5}\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75+\binom{6}{6}\cdot 0{,}25^6\cdot 0{,}75^0=0{,}0044+0{,}0002=0{,}0046$.

2. En una distribución binomial $B(5;\ 0{,}3)$ calcular: **a)** $P[X\leq 2]$, **b)** $P[X\leq 4]$ y **c)** $P[X\neq 0]$

Solución:

a) $P[X\leq 2]=\binom{5}{0}\cdot 0{,}7^5+\binom{5}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^4+\binom{5}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^3=0{,}8369$

b) $P[X\leq 4]=\binom{5}{0}\cdot 0{,}7^5+\binom{5}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^4+\binom{5}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^3+\binom{5}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7=$

$=0{,}9976$ o también $P[X\leq 4]=1-P[X=5]=1-\binom{5}{5}\cdot 0{,}3^5=0{,}9976$.

c) $P[X\neq 0]=1-P[X=0]=1-0{,}1681=0{,}8319$. Dado que los sucesos ser $[X\neq 0]$ y ser $[X=0]$ son contrarios.

3. Si el 60% de los empleados de una empresa están de acuerdo en que los salarios dependan de la productividad, y se elige una muestra de tres empleados, hallar una tabla de distribución de probabilidad para la variable aleatoria que cuenta el número de empleados que están a favor de esta forma retributiva. Calcula μ y σ.

Solución. Se trata de una distribución binomial: 1º) en cada prueba hay dos únicos resultados: estar de acuerdo o no; 2º) el resultado de cada prueba es independiente del anterior; 3º) la probabilidad de encontrar un empleado que esté a favor de esta forma retributiva es constante $p = 0,6$ y de que sea contrario $1-p = 0,4$. Es, por tanto, una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0,6$, $B(3; 0,6)$, cuya tabla es:

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\binom{3}{0}\cdot 0,4^3$	$\binom{3}{1}\cdot 0,6\cdot 0,4^2$	$\binom{3}{2}\cdot 0,6^2\cdot 0,4$	$\binom{3}{3}\cdot 0,6^3$

Además,

$$\mu = n \cdot p = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \text{ y } \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = \sqrt{3\cdot 0,6\cdot 0,4} = 0,8485$$

4. En una ciudad, el 40% de los alumnos que promocionan a Bachillerato tiene suspensa alguna asignatura de 4º ESO. Se eligen 6 alumnos de 1º de Bachillerato al azar, ¿cuál es le probabilidad de que la mitad de ellos tenga alguna asignatura suspensa de ESO?

Solución. Se trata de una distribución binomial: 1º) en cada prueba hay dos únicos resultados: tener alguna suspensa o no, 2º) el resultado de cada prueba es independiente del anterior, 3º) la probabilidad de encontrar un alumno con algún suspenso es constante $p = 0,4$. Es, por tanto, una distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0,4$, $B(6; 0,4)$.

La mitad de 6 es 3, la probabilidad buscada es $P[X=3] = \binom{6}{3}\cdot 0,4^3\cdot 0,6^3 = 0,2765$

Nota: Cuando los datos de un problema de distribución binomial no son extravagantes, $n \leqslant 10$, y p es un número múltiplo de 0,05, entonces los valores de la función de probabilidad están tabulados. El resultado de este ejemplo se leería así en la tabla de la distribución binomial al final de la unidad:

			p	
n	x	...	0,4	...
...	...	...	$\downarrow$	...
6	0	...	...	...
	1	...	...	...
	2	...	...	...
	3	$\rightarrow$	0,27648	...

Comprobar los resultados de los ejemplos con la tabla de la distribución binomial.

Actividades

12. La probabilidad de que un jugador de baloncesto haga canasta en los tiros libres es 1/4. Si lanza 6 tiros libres, ¿cuál es la probabilidad de que haga al menos 3 canastas?

13. La probabilidad de que un misil alcance su objetivo es 0,8. Si se lanzan 4 misiles, ¿cuál es le probabilidad de que, como máximo, dos de ellos den en el blanco?

14. Una moneda se tira cuatro veces, ¿cuál es le probabilidad de que al menos salgan dos caras?

15. ¿Cuál es le probabilidad de obtener cuatro veces 5 si tiramos un dado siete veces?

16. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, y cada pregunta tiene 3 posibles respuestas, de las que sólo una es cierta. Un alumno contesta al azar.

a) Si cada pregunta acertada es un punto y se aprueba con 5 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien al menos a 4 preguntas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien a lo sumo a 2 preguntas?

17. De la experiencia acumulada se sabe que un jugador de tenis *A* tiene una probabilidad de 1/3 de ganar a otro *B*. Juegan un torneo a 5 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que *A* gane más de tres partidos?

18. Se sabe que el 15% de las bombillas que produce una máquina duran menos de 100 horas. Se escogen 4 bombillas de las que produce la máquina y se dejan encendidas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 3 se fundan antes de 100 horas?

19. Las parejas de cierta especie de aves incuban un huevo. La probabilidad de que la cría alcance la madurez es 2/3. Se observan 4 nidos de esta especie, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos crías alcancen la madurez?

20. Según la herencia genética, la probabilidad de que un matrimonio tenga un hijo con ojos azules es 1/4. Sabemos que un matrimonio tiene 5 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo haya dos con ojos azules?

21. Una encuesta revela que el 80% de los usuarios de una línea de transporte público están satisfechos del servicio. Se eligen 10 usuarios al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la mitad de ellos estén descontentos con el servicio?

22. La probabilidad de que salga cara en una moneda trucada es 0,45. Se lanza la moneda 7 veces. Calcular la probabilidad de que:

a) salgan exactamente 3 caras;

b) salgan al menos 3 caras;

c) salgan a lo sumo 3 caras.

5. Distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria continua. La distribución normal

5.1. Funciones de densidad

Al igual que las variables estadísticas continuas, las variables aleatorias continuas toman valores reales en un cierto intervalo. Las variables aleatorias continuas tienen asociadas una función de probabilidad que se llama función de densidad. Aunque desempeñan el mismo cometido, existe una gran diferencia entre la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y la función densidad de una variable aleatoria continua.

Si $f(x)$ es una **función de densidad** de una variable X, entonces tiene las siguientes características:

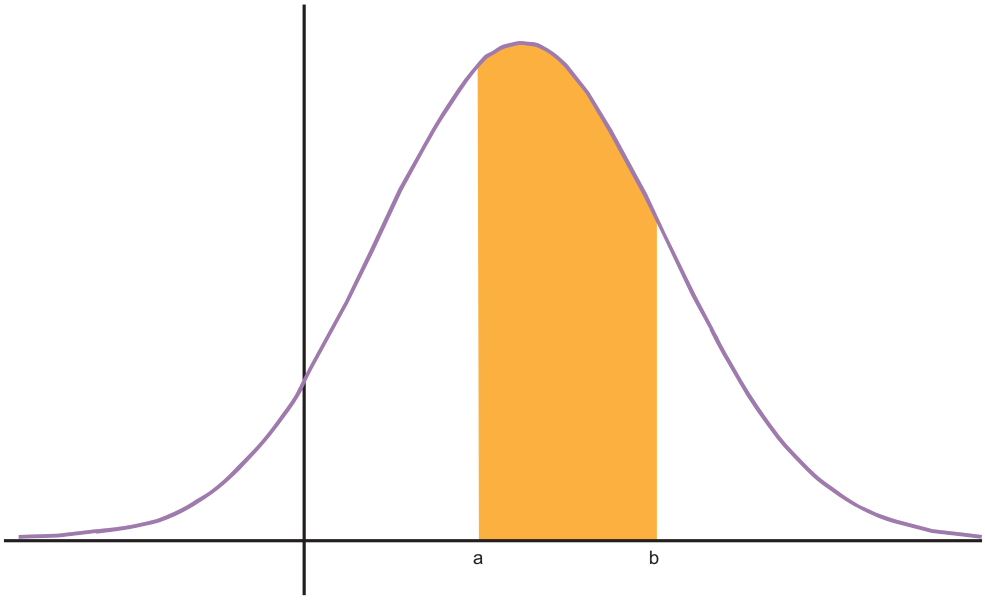
1º) $f(x) \geqslant 0$, para todo x

2º) El área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas es 1.

3º) La probabilidad $P[X = x] = 0$, para cualquier valor, x, de la variable aleatoria X.

4º) La función densidad sólo permite calcular probabilidades de intervalos $P[a \leqslant X \leqslant b]$ = *área limitada por* $f(x)$ *y* $[a, b]$ y como $P[X = a] = P[X = b] = 0$, entonces $P[a \leqslant X \leqslant b] = P[a < X < b]$

Por este procedimiento, calcular probabilidades equivale a calcular áreas como la de la región sombreada de la figura



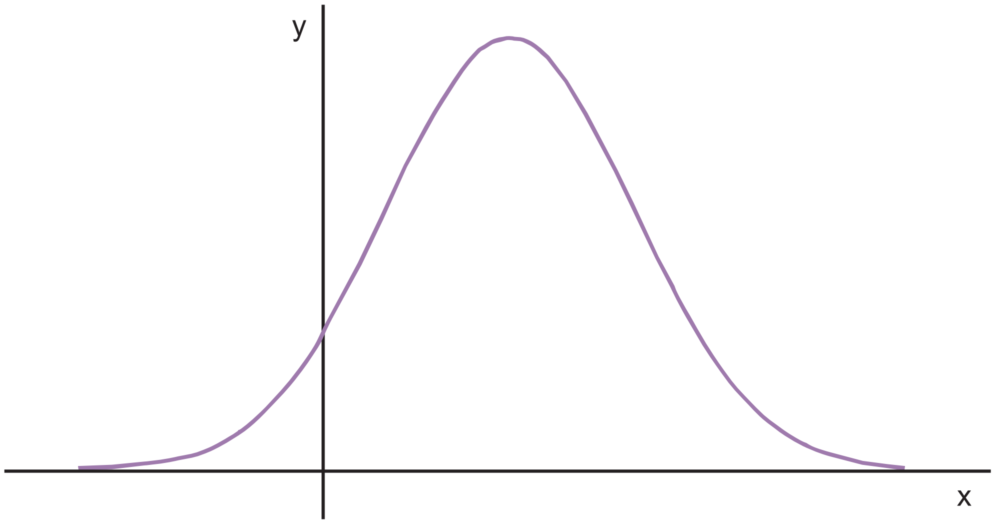
y esto nos obliga a resolver integrales, lo que excede el nivel de este curso.

5.2. La distribución normal

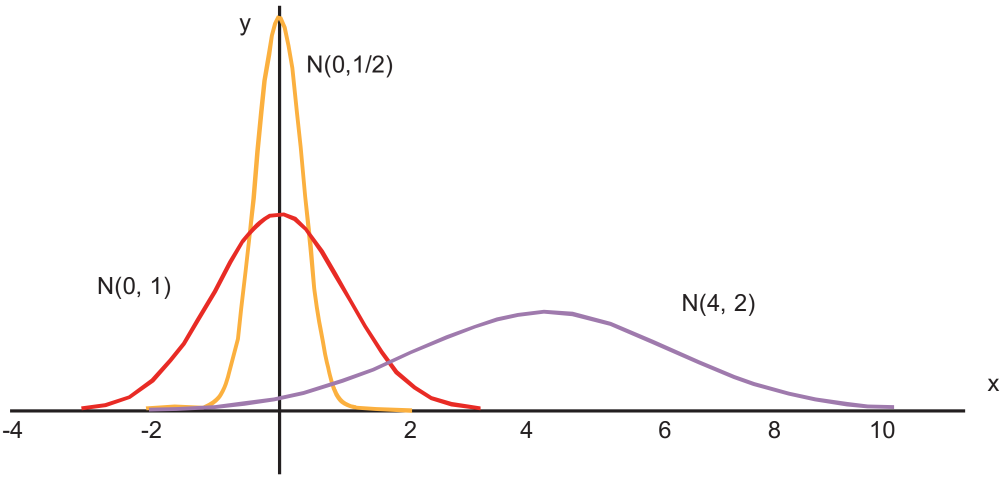
Una variable aleatoria continua, *X*, se dice que está normalmente distribuida o que sigue una distribución normal de **media μ** y **desviación típica σ**, y se simboliza por $N(\mu, \sigma)$, si su función densidad tiene esta apariencia:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{con} \qquad -\infty < x < \infty$$

A pesar de su apariencia temible, la gráfica de esta función tiene la forma de una campana, llamada campana de Gauss, y es como la de la figura:



En la fórmula de *f*(*x*) observamos que depende de μ y de σ ; y un cambio en estos parámetros provoca una deformación de la campana. Cuando σ aumenta la curva es más achatada, al estar más dispersos los valores de la variable; por el contrario, cuando σ es pequeño la dispersión es menor y la gráfica es más esbelta, dado que los valores se concentran alrededor de la media. En la figura hemos dibujado las funciones de densidad de *N*(0,1), *N*(0,1/2) y *N*(4,2).



Esta función densidad tiene algunas características interesantes:

1º) Alcanza un **máximo** en el punto $\left(\mu, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.

2º) Es **simétrica** respecto a la recta $x = \mu$

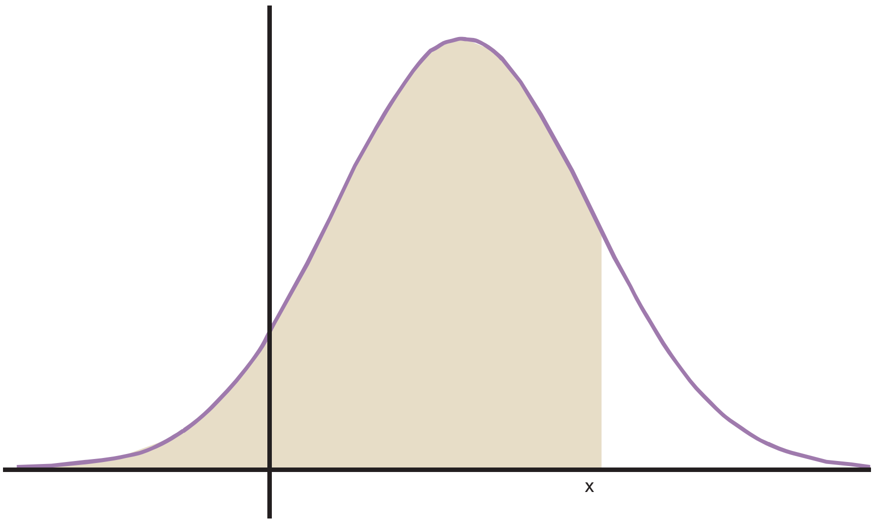
3º) Tiene dos **puntos de inflexión** en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$

4º) **El área limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas es 1**, y como es simétrica respecto a la recta $x = \mu$; a la derecha de μ limita un área de 0,5 y a la izquierda de μ, también.

5.3. Tipificación de la variable

Si X está normalmente distribuida, la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x es el área de la región sombreada en la figura

$P[X \leqslant x]$ = área sombreada en la figura



El cálculo de esa área se hace mediante una integral, pero afortunadamente los valores de estas integrales están tabulados; naturalmente no hay una tabla para cada $N(\mu, \sigma)$, que son infinitas. Pero sí hay una tabla para $N(0,1)$.

Entonces para hallar $P[X \leqslant x]$, con X, $N(\mu, \sigma)$, transformamos la variable X en otra, que simbolizaremos por Z, que sea $N(0,1)$. Esta transformación se llama **tipificación de la variable**. En realidad, consiste en dos operaciones:

1º) Trasladar la gráfica de $f(x)$ hasta que el eje de ordenadas sea el eje de simetría.

2º) Achatar o estirar la gráfica hasta que σ sea 1.

Estas operaciones se reducen a cambiar la variable X por Z, donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esta transformación se llama tipificación de la variable, y se cumple que:

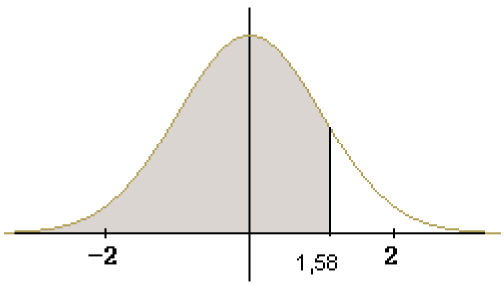
$$P[X \leq x] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$

Veremos primero las tablas de Z, $N(0,1)$, y luego en los ejemplos cómo calculamos probabilidades en una normal cualquiera.

5.4. Cálculo de probabilidades con la tabla $N(0,1)$

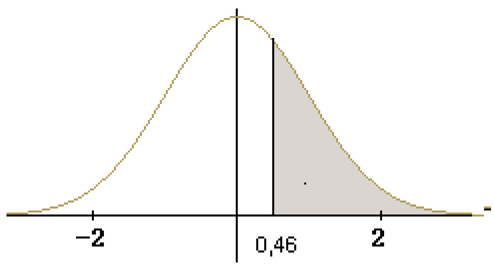
Estudiaremos los diferentes casos que se pueden presentar en el manejo de las tablas de la $N(0,1)$, que aparecen al final de la unidad.

1. $P[Z \leq 1{,}58] = 0{,}9429$



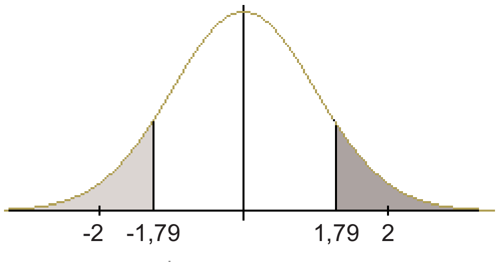
El número 0,9429 aparece en la tabla en la intersección de la fila que empieza por 1,5 y la columna que encabeza 0,08; y significa que el 94,29% de los valores de Z están comprendidos entre $-\infty$ y 1,58.

2. $P[Z \geq 0{,}46] = 1 - P[Z \leq 0{,}46] = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228$



En la gráfica vemos que la probabilidad buscada corresponde al área sombreada y es igual al área total, 1, menos el área de $P[Z \leqslant 0{,}46]$

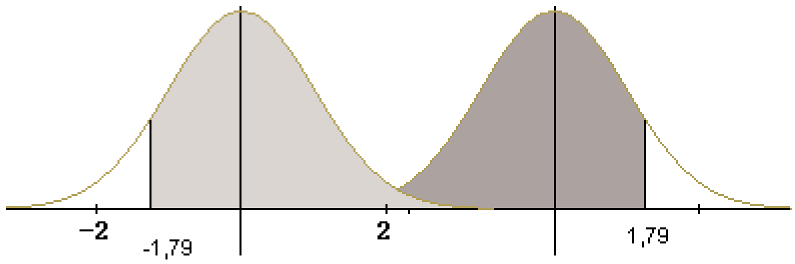
3. $P[Z \leq -1{,}79] = P[Z \geq 1{,}79] = 1 - P[Z \leq 1{,}79] = 1 - 0{,}9633 = 0{,}0367$



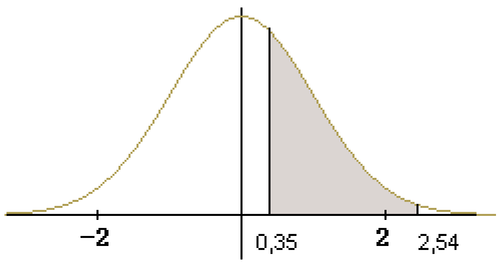
En la gráfica observamos que por simetría el área $P[Z \leqslant -1{,}79]$ es igual que $P[Z \geqslant 1{,}79]$

4. $P[Z \geq -1{,}79] = P[Z \leq 1{,}79] = 0{,}9633$

Por simetría el área de $P[Z \geqslant -1{,}79]$ es igual que $P[Z \leqslant 1{,}79]$

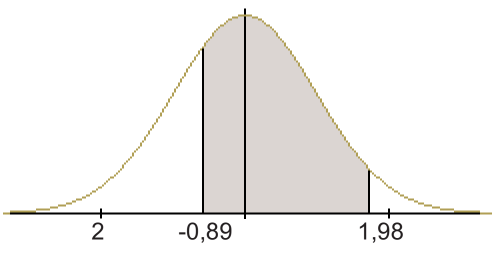


5. $P[0{,}35 \leq Z \leq 2{,}54] = P[Z \leq 2{,}54] - P[Z \leq 0{,}35] = 0{,}9945 - 0{,}6368 = 0{,}3577$

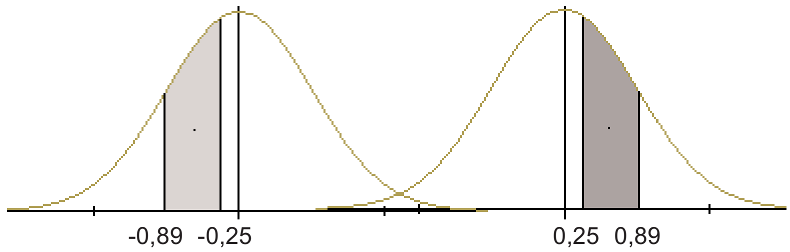


El área de $P[0{,}35 \leqslant Z \leqslant 2{,}54]$ es la diferencia entre el área $P[Z \leqslant 2{,}54]$ y el área $P[Z \leqslant 0{,}35]$

6. $P[-0{,}89 < Z < 1{,}98] = P[Z < 1{,}98] - P[Z < -0{,}89] =$
$= P[Z < 1{,}98] - (1 - P[Z < 0{,}89]) = 0{,}9761 - (1 - 0{,}8133) = 0{,}7894$



7. $P[-0{,}89 < Z < -0{,}25] = P[0{,}25 < Z < 0{,}89] = P[Z < 0{,}89] - P[Z < 0{,}25] =$
$= 0{,}8133 - 0{,}5987 = 0{,}2146$



Por simetría, las áreas del intervalo negativo y del positivo son iguales.

Ejemplos

1. Calcula **a)** $P[Z \leqslant 0{,}75]$, **b)** $P[Z < -0{,}75]$, **c)** $P[Z > 0{,}75]$ y **d)** $P[Z \geqslant -0{,}75]$

Solución.

a) $P[Z \leqslant 0{,}75] = 0{,}7734$, **b)** $P[Z < -0{,}75] = P[Z > 0{,}75] = 1 - P[Z < 0{,}75]$
$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$, **c)** Por simetría $P[Z > 0{,}75] = P[Z < -0{,}75]$ $0{,}2266$,
d) $P[Z \geqslant -0{,}75] = P[Z \leqslant 0{,}75] = 0{,}7734$

2. Calcula **a)** $P[0{,}75 < Z \leqslant 2{,}12]$, **b)** $P[-0{,}75 < Z \leqslant 2{,}12]$

Solución.

a) $P[0{,}75 < Z \leqslant 2{,}12] = P[Z \leqslant 2{,}12] - P[Z < 0{,}75] = 0{,}9830 - 0{,}7734 = 0{,}2096$,

b) $P[-0{,}75 < Z \leqslant 2{,}12] = P[Z \leqslant 2{,}12] - (1 - P[Z < 0{,}75]) = 0{,}9830 - 0{,}2266 = 0{,}7564$.

3. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución N(60,12), calcula: **a)** $P[X < 65]$, **b)** $P[X > 65]$, **c)** $P[45 < X \leqslant 65]$

Solución.

Los números que aparezcan al tipificar, los redondeamos a dos cifras decimales.

a) $P[X < 65] = P\left[\frac{X-60}{12} \le \frac{65-60}{12}\right] = P\left[Z \le \frac{5}{12}\right] = P[Z \le 0{,}42] = 0{,}6628$,

b) $P[X > 65] = P\left[\frac{X-60}{12} > \frac{65-60}{12}\right] = P\left[Z > \frac{5}{12}\right] = P[Z > 0{,}42] = 1 - P[Z < 0{,}42] =$
$= 1 - 0{,}6628 = 0{,}3372$.

c) $P[45 < X \le 65] = P\left[\frac{45-60}{12} < \frac{X-60}{12} \le \frac{65-60}{12}\right] = P[-1{,}25 < Z \le 0{,}42] =$
$= P[Z \le 0{,}42] - P[Z < -1{,}25] = P[Z \le 0{,}42] - (1 - P[Z < 1{,}25]) = 0{,}6628 - 0{,}1056 = 0{,}5572$.

4. Sabiendo que X es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(10,3)$, halla el valor de x en cada caso: **a)** $P[X < x] = 0{,}9761$, **b)** $P[X \leqslant x] = 0{,}5714$

Solución.

a) Como $P[X<x]=0{,}9761=P\left[\dfrac{X-10}{3}<\dfrac{x-10}{3}\right]=P\left[Z<z\right]$; de $P[Z<z]=0{,}9761$, averiguamos el valor de z con ayuda de las tablas y resulta que a 0,9761 le corresponde 1,98, luego $z=1{,}98$. Dado que $z=\dfrac{x-10}{3}=1{,}98$ despejando x obtenemos $x=3\cdot 1{,}98+10=15{,}94$

b) Como $P[X\leq x]=0{,}5714=P\left[\dfrac{X-10}{3}<\dfrac{x-10}{3}\right]=P\left[Z<z\right]$; de $P[Z<z]=0{,}5714$, averiguamos el valor de z con ayuda de las tablas y resulta que a 0,5714 le corresponde 0,18, luego $z=0{,}18$. Dado que $z=\dfrac{x-10}{3}=1{,}98$ despejando x obtenemos $x=3\cdot 0{,}18+10=10{,}54$

5. Las estaturas de 600 alumnos de un colegio se distribuyen normalmente con media 148 cm y desviación típica 12 cm. Calcular cuántos alumnos no alcanzan los 160 cm y cuántos hay cuya talla está comprendida entre los 140 y los 160 cm. ¿Qué intervalo centrado en 148 contiene al 60% de los alumnos?

Solución.

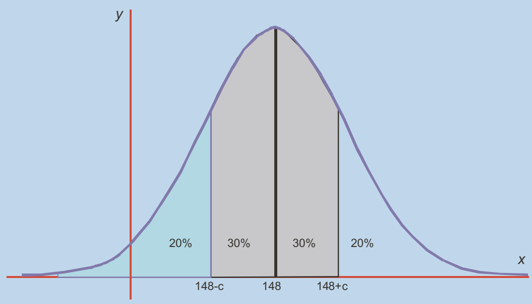
Las estaturas se distribuyen según una $N(148, 12)$. En primer lugar nos piden: $P[X<160]$ y $P[X<160]=P\left[\dfrac{X-148}{12}<\dfrac{160-148}{12}\right]=P\left[Z<1\right]=0{,}8413$, es decir, el 84,13% de los alumnos no llega a los 160 cm. Como el 84,13% de 600 es $0{,}8413\cdot 600=504{,}78$, truncada la parte decimal, podemos decir que 504 alumnos no llegan a los 160 cm de altura.

En segundo lugar, $P[140\leqslant X\leqslant 160]=P[X\leqslant 160]-P[X\leqslant 140]=0{,}8413-P[Z<-0{,}66]$ = = 0,8413 – (1 – 0,7454) = 0,5867.

Es decir, el 58,67% tiene una altura en el intervalo [140,160] y como $0{,}5867\cdot 600=352{,}02$, hay 352 alumnos cuya talla está comprendida entre los 140 y los 160 cm.

Por último, tenemos que hallar un número c tal que $P[148-c\leqslant X\leqslant 148+c]=60\%=0{,}6$

Gráficamente



En consecuencia,

$$P[X \leqslant 148 + c] = 60\% + 20\% = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$$

Y tipificando

$$P\left[Z \le \frac{148 + c - 148}{12}\right] = P\left[Z \le \frac{c}{12}\right] = 0{,}8$$

En las tablas $N(0,1)$ vemos que el más próximo a 0,8 es 0,7995 y corresponde $z = 0{,}84$, por tanto $z = \frac{c}{12} = 0{,}84$, $c = 0{,}84 \cdot 12 = 10{,}08$. El intervalo que contiene al 60% de los

Actividades

23. La media anual de días de sol en una ciudad son 220 días, con una desviación típica de 35 días. Suponiendo que la distribución sea normal calcular la probabilidad de que en un año no se superen los 200 días soleados.

24. Los ventas diarias de una gasolinera se distribuyen normalmente con media 1280 euros y desviación típica 260 euros. ¿En cuántos días al año cabe esperar unas ventas superiores a 1200 euros? ¿En cuántos días al año las ventas están comprendidas entre los 1100 y los 1300 euros?

25. En una oposición se necesitan 30 puntos para aprobar. Se sabe que las puntuaciones obtenidas por los alumnos siguen distribución normal con media 28 y desviación típica 8. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe? Si se han presentado 528 alumnos, ¿cuántos alumnos aprobarán?

26. El tiempo de retraso sobre el horario previsto en una línea de autobuses sigue una distribución normal con media 8 minutos y desviación típica 3 minutos. Calcula: a) la probabilidad de que un autobús llegue con más de 8 minutos de retraso, b) la probabilidad de que un autobús llegue sin retraso, c) la probabilidad de que llegue con menos de 5 minutos de retraso.

27. Los pesos de las vacas de una granja lechera se distribuyen normalmente con media 450 kg y desviación típica 75 kg. Si en la granja hay 250 vacas, ¿cuántas pesan más de 500 kg? y ¿cuántas pesan menos de 400 kg? ¿Qué intervalo centrado en 450 contiene el 80% de las vacas?

28. En un examen de Matemáticas se ha calificado de 0 a 10 puntos, obteniendo el 65% de los alumnos una puntuación igual o inferior a 6,5 puntos y el 10% de los alumnos puntuaciones superiores a 7 puntos. Sabiendo que la distribución de las puntuaciones es normal, calcular μ y σ.

29. Para promocionar a un puesto de trabajo mejor remunerado se hace un examen a todos los empleados con la misma cualificación de una empresa. Se sabe que las calificaciones siguen una distribución normal de media 11,5 y desviación típica 3,75 puntos. Si sólo han promocionado el 8% de los presentados, ¿qué calificación mínima obtuvieron?

5.5. Aproximación de la binomial por la normal

Si n es grande el cálculo de probabilidades en una distribución binomial $B(n,p)$ puede ser demasiado laborioso. Cuando esto ocurre la distribución binomial se puede aproximar por una normal, pero ¿cuáles son los parámetros de esta distribución normal?

Se puede demostrar que cuando n es suficientemente grande la distribución binomial $B(n, p)$ se puede aproximar por la normal $N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right)$, siempre que $n \cdot p \geqslant 5$ y $n \cdot (1-p) \geqslant 5$.

Es evidente que estas condiciones ocurren cuanto mayor sea n y cuanto más cerca esté p de 0,5.

Ejemplo

Se sabe que un determinado fármaco produce efectos secundarios en el 20% de los enfermos que se tratan con él. Se toma una muestra de 50 enfermos a los que se les administra el fármaco. ¿Cuál es la probabilidad de que haya a lo sumo 8 enfermos que sufran efectos secundarios?

Solución. La probabilidad buscada es

$$P[X \leq 8] = \binom{50}{0} \cdot 0,8^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^{49} + \ldots + \binom{50}{8} \cdot 0,2^{8} \cdot 0,8^{42}$$

Es obvio que calcular los ocho sumandos y luego sumar es trabajoso. Como $n \cdot p = 50 \cdot 0,2 = 10 > 5$ y $n \cdot (1-p) = 50 \cdot 0,8 = 40 > 5$, podemos aproximar la $B(50; 0,2)$ por la variable aleatoria Y que sigue una distribución

$$N\left(50 \cdot 0,2;\ \sqrt{50 \cdot 0,2 \cdot 0,8}\right) = N(10;\ 2,82),$$

entonces, como la variable X es discreta e Y continua hacemos una corrección de 0,5, y resulta de modo aproximado que

$$P[X \leq 8] = P[Y \leq 8 + 0,5] = P\left[\frac{Y-10}{2,82} \leq \frac{8,5-10}{2,82}\right] = P[Z \leq -0,53] = 1 - 0,7019 = 0,2981.$$

Cuando sea necesario calcular una probabilidad puntual, que sí es posible hacer en una binomial, procedemos así:

$$P[X = k] = P[k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5]$$

Actividades

30. La probabilidad de que un futbolista falle un penalti es 0,3. Si le hacemos tirar una tanda de 20 penaltis, ¿cuál es la probabilidad de que falle más de la mitad?; ¿y de que falle exactamente 6?

31. En una empresa el porcentaje de empleados con estudios superiores es el 35%. Se eligen 25 empleados al azar para realizar un cursillo, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 15 titulados superiores?; ¿y la probabilidad de que haya exactamente 10?

Tabla de la distribución binomial

n	x	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.99000	0.95000	0.90000	0.85000	0.80000	0.75000	0.70000	0.65000	0.60000	0.55000	0.50000
	1	0.01000	0.05000	0.10000	0.15000	0.20000	0.25000	0.30000	0.35000	0.40000	0.45000	0.50000
2	0	0.98010	0.90250	0.81000	0.72250	0.64000	0.56250	0.49000	0.42250	0.36000	0.30250	0.25000
	1	0.01980	0.09500	0.18000	0.25500	0.32000	0.37500	0.42000	0.45500	0.48000	0.49500	0.50000
	2	0.00010	0.00250	0.01000	0.02250	0.04000	0.06250	0.09000	0.12250	0.16000	0.20250	0.25000
3	0	0.97030	0.85738	0.72900	0.61413	0.51200	0.42188	0.34300	0.27463	0.21600	0.16638	0.12500
	1	0.02940	0.13538	0.24300	0.32513	0.38400	0.42188	0.44100	0.44363	0.43200	0.40838	0.37500
	2	0.00030	0.00713	0.02700	0.05738	0.09600	0.14063	0.18900	0.23888	0.28800	0.33413	0.37500
	3	0.00000	0.00013	0.00100	0.00338	0.00800	0.01563	0.02700	0.04288	0.06400	0.09113	0.12500
4	0	0.96060	0.81451	0.65610	0.52201	0.40960	0.31641	0.24010	0.17851	0.12960	0.09151	0.06250
	1	0.03881	0.17148	0.29160	0.36848	0.40960	0.42188	0.41160	0.38448	0.34560	0.29948	0.25000
	2	0.00059	0.01354	0.04860	0.09754	0.15360	0.21094	0.26460	0.31054	0.34560	0.36754	0.37500
	3	0.00000	0.00048	0.00360	0.01148	0.02560	0.04688	0.07560	0.11148	0.15360	0.20048	0.25000
	4	0.00000	0.00001	0.00010	0.00051	0.00160	0.00391	0.00810	0.01501	0.02560	0.04101	0.06250
5	0	0.95099	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.11603	0.07776	0.05033	0.03125
	1	0.04803	0.20363	0.32805	0.39150	0.40960	0.39551	0.36015	0.31239	0.25920	0.20589	0.15625
	2	0.00097	0.02143	0.07290	0.13818	0.20480	0.26367	0.30870	0.33642	0.34560	0.33691	0.31250
	3	0.00001	0.00113	0.00810	0.02438	0.05120	0.08789	0.13230	0.18115	0.23040	0.27565	0.31250
	4	0.00000	0.00003	0.00045	0.00215	0.00640	0.01465	0.02835	0.04877	0.07680	0.11277	0.15625
	5	0.00000	0.00000	0.00001	0.00008	0.00032	0.00098	0.00243	0.00525	0.01024	0.01845	0.03125
6	0	0.94148	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.07542	0.04666	0.02768	0.01563
	1	0.05706	0.23213	0.35429	0.39933	0.39322	0.35596	0.30253	0.24366	0.18662	0.13589	0.09375
	2	0.00144	0.03054	0.09842	0.17618	0.24576	0.29663	0.32414	0.32801	0.31104	0.27795	0.23438
	3	0.00002	0.00214	0.01458	0.04145	0.08192	0.13184	0.18522	0.23549	0.27648	0.30322	0.31250
	4	0.00000	0.00008	0.00122	0.00549	0.01536	0.03296	0.05954	0.09510	0.13824	0.18607	0.23438
	5	0.00000	0.00000	0.00005	0.00039	0.00154	0.00439	0.01021	0.02048	0.03686	0.06089	0.09375
	6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00024	0.00073	0.00184	0.00410	0.00830	0.01563

7	0	0.93207	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.04902	0.02799	0.01522	0.00781
	1	0.06590	0.25728	0.37201	0.39601	0.36700	0.31146	0.24706	0.18478	0.13064	0.08719	0.05469
	2	0.00200	0.04062	0.12400	0.20965	0.27525	0.31146	0.31765	0.29848	0.26127	0.21402	0.16406
	3	0.00003	0.00356	0.02296	0.06166	0.11469	0.17303	0.22689	0.26787	0.29030	0.29185	0.27344
	4	0.00000	0.00019	0.00255	0.01088	0.02867	0.05768	0.09724	0.14424	0.19354	0.23878	0.27344
	5	0.00000	0.00001	0.00017	0.00115	0.00430	0.01154	0.02500	0.04660	0.07741	0.11722	0.16406
	6	0.00000	0.00000	0.00001	0.00007	0.00036	0.00128	0.00357	0.00836	0.01720	0.03197	0.05469
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00022	0.00064	0.00164	0.00374	0.00781
8	0	0.92274	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.03186	0.01680	0.00837	0.00391
	1	0.07457	0.27933	0.38264	0.38469	0.33554	0.26697	0.19765	0.13726	0.08958	0.05481	0.03125
	2	0.00264	0.05146	0.14880	0.23760	0.29360	0.31146	0.29648	0.25869	0.20902	0.15695	0.10938
	3	0.00005	0.00542	0.03307	0.08386	0.14680	0.20764	0.25412	0.27859	0.27869	0.25683	0.21875
	4	0.00000	0.00036	0.00459	0.01850	0.04588	0.08652	0.13614	0.18751	0.23224	0.26266	0.27344
	5	0.00000	0.00002	0.00041	0.00261	0.00918	0.02307	0.04668	0.08077	0.12386	0.17192	0.21875
	6	0.00000	0.00000	0.00002	0.00023	0.00115	0.00385	0.01000	0.02175	0.04129	0.07033	0.10938
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00008	0.00037	0.00122	0.00335	0.00786	0.01644	0.03125
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00007	0.00023	0.00066	0.00168	0.00391
9	0	0.91352	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.02071	0.01008	0.00461	0.00195
	1	0.08305	0.29854	0.38742	0.36786	0.30199	0.22525	0.15565	0.10037	0.06047	0.03391	0.01758
	2	0.00336	0.06285	0.17219	0.25967	0.30199	0.30034	0.26683	0.21619	0.16124	0.11099	0.07031
	3	0.00008	0.00772	0.04464	0.10692	0.17616	0.23360	0.26683	0.27162	0.25082	0.21188	0.16406
	4	0.00000	0.00061	0.00744	0.02830	0.06606	0.11680	0.17153	0.21939	0.25082	0.26004	0.24609
	5	0.00000	0.00003	0.00083	0.00499	0.01652	0.03893	0.07351	0.11813	0.16722	0.21276	0.24609
	6	0.00000	0.00000	0.00006	0.00059	0.00275	0.00865	0.02100	0.04241	0.07432	0.11605	0.16406
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00029	0.00124	0.00386	0.00979	0.02123	0.04069	0.07031
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00010	0.00041	0.00132	0.00354	0.00832	0.01758
	9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00008	0.00026	0.00076	0.00195
10	0	0.90438	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.01346	0.00605	0.00253	0.00098
	1	0.09135	0.31512	0.38742	0.34743	0.26844	0.18771	0.12106	0.07249	0.04031	0.02072	0.00977
	2	0.00415	0.07463	0.19371	0.27590	0.30199	0.28157	0.23347	0.17565	0.12093	0.07630	0.04395
	3	0.00011	0.01048	0.05740	0.12983	0.20133	0.25028	0.26683	0.25222	0.21499	0.16648	0.11719
	4	0.00000	0.00096	0.01116	0.04010	0.08808	0.14600	0.20012	0.23767	0.25082	0.23837	0.20508
	5	0.00000	0.00006	0.00149	0.00849	0.02642	0.05840	0.10292	0.15357	0.20066	0.23403	0.24609
	6	0.00000	0.00000	0.00014	0.00125	0.00551	0.01622	0.03676	0.06891	0.11148	0.15957	0.20508
	7	0.00000	0.00000	0.00001	0.00013	0.00079	0.00309	0.00900	0.02120	0.04247	0.07460	0.11719
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00007	0.00039	0.00145	0.00428	0.01062	0.02289	0.04395
	9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00014	0.00051	0.00157	0.00416	0.00977
	10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00003	0.00010	0.00034	0.00098

Tabla de la distribución normal, *N*(0,1)

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000