9 Aplicaciones de la derivada

En la presente Unidad estudiamos la monotonía (crecimiento y decrecimiento de las funciones), así como sus máximos y mínimos, estos conceptos tienen muchas aplicaciones en economía ya que aparecen ligados a los conceptos coste mínimo y máxima producción; el estudio de la monotonía y de los máximos y mínimos de las funciones se realiza con facilidad después del concepto de derivada estudiado en la Unidad anterior.

Se utilizarán los conceptos de máximos y mínimos para resolver problemas de optimación.

Una vez adquiridos los conocimientos anteriores, los aplicaremos a la representación de funciones, ya que la gráficas nos aportan una visión rápida y clara del comportamiento de las funciones.

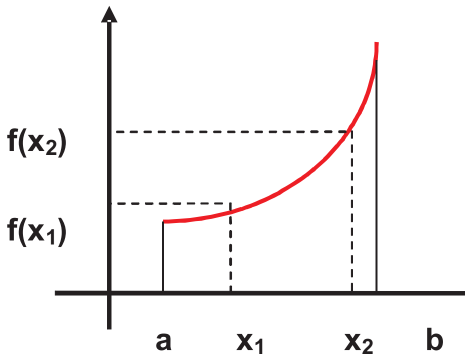
Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de funciones sencillas.
2. Calcular máximo y mínimos relativos de funciones derivables.
3. Determinar intervalos de concavidad y convexidad en funciones derivables.
4. Calcular los puntos de inflexión en el caso de funciones derivables.
5. Utilizar los conocimiento de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad para la representación gráfica de funciones polinómicas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Crecimiento y decrecimiento de las funciones

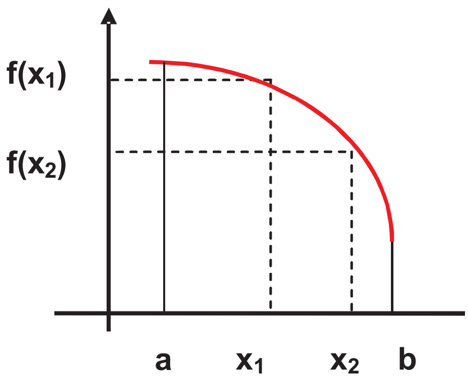
Al recorrer de izquierda a derecha la gráfica de la función representada debajo del texto se observa que va hacia arriba; es decir, el valor de la ordenada de la función crece. Es un ejemplo de **función creciente**.



Una función ***f*** es **creciente** en un intervalo **(*a*, *b*)** cuando para cualquier par de valores x_1 y x_2 del intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Si con las condiciones para la variable $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad estricta para la función; es decir $f(x_1) < f(x_2)$ se dice que la función es **estrictamente creciente**.

En la gráfica de la función representada debajo del texto, se observa lo contrario; es decir, al recorrer la gráfica de izquierda a derecha el valor de la ordenada de la función decrece, es un ejemplo de **función decreciente**.



Una función ***f*** es **decreciente** en un intervalo **(*a*, *b*)** cuando para cualquier par de valores x_1 y x_2 del intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Como en el caso anterior, si para $x_1 < x_2$ la desigualdad es estricta para los valores de la función; es decir $f(x_1) > f(x_2)$ se dice que la función es **estrictamente decreciente.**

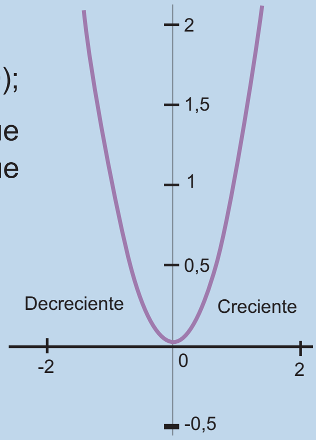
Cuando las funciones son crecientes o decrecientes en todo el dominio, se las llama **funciones monótonas.** Las funciones representadas en la gráficas anteriores son funciones monótonas.

Ejemplo

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^2$.

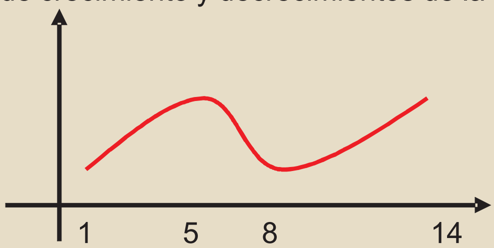
Solución. Se toman dos puntos $x_1 < x_2 < 0$ del intervalo $(-\infty, 0)$; se eleva al cuadrado la desigualdad y se tiene en cuenta que los valores son negativos; por tanto $x_1^2 > x_2^2$; lo que indica que la función es decreciente en dicho intervalo.

Se toman dos puntos $0 < x_1 < x_2$ del intervalo $(0, \infty)$; se eleva al cuadrado la desigualdad y resulta $x_1^2 < x_2^2$; lo que indica que la función es creciente en dicho intervalo.



Actividades

1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimientos de la función *f* representada en la gráfica siguiente:

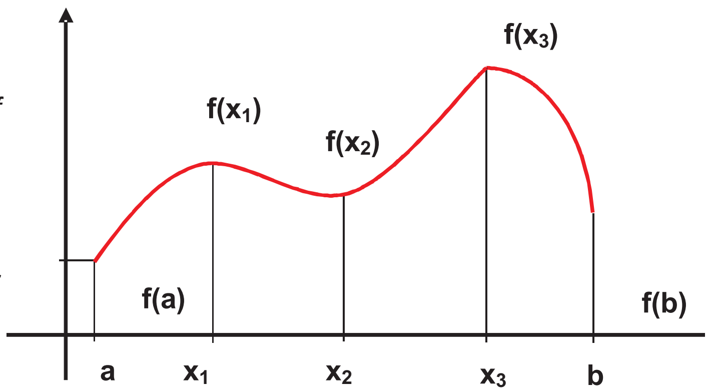


2. Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 4$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. Dada la función $y = -x^2 + 6x - 9$; determinar el crecimiento y decrecimiento en los intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$.

2. Extremos de las funciones: máximos y mínimos

Al recorrer de izquierda a derecha la gráfica la función *f* definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y representada aquí se puede observar:



✓ El valor $f(a)$ es el menor valor que toma la función en el intervalo $[a, b]$.

✓ El valor $f(x_3)$ es el mayor valor que toma la función en el intervalo $[a, b]$.

Los valores $f(a)$ y $f(x_3)$ son los **extremos absolutos** de la función f en el intervalo $[a, b]$; $f(a)$ es el **mínimo absoluto** y $f(x_3)$ es el **máximo absoluto** de la función f. A partir de estas observaciones definimos:

Una función presenta un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x) \leqslant f(x_0)$ para cualquier x que pertenezca al dominio.

Una función presenta un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x) \geqslant f(x_0)$ para cualquier x que pertenezca al dominio.

Ejemplo

Representa gráficamente la función $y = x^2 - 2x - 8$ y calcula sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo [0, 5].

Solución.

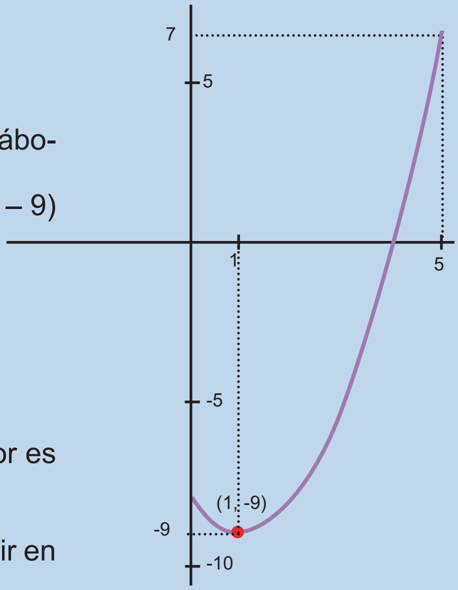
Se representa la función, en este caso es una parábola cuyo vértice es $x = \frac{2}{2} = 1$ e $y = -9$; el punto $(1, -9)$ es el vértice.

Se dan valores a x para construir una tabla

x	0	1	2	3
y	-8	-9	-8	-1

El máximo absoluto se presenta en $x = 5$ y su valor es $y = 7$.

El mínimo absoluto se presenta en el vértice; decir en $x = 1$ y su valor es $y = -9$



Otras observaciones de la primera figura de este apartado son:

✓ El valor $f(x_1)$ es mayor que todos los valores próximos a él.

✓ El valor $f(x_2)$ es menor que todos los valores próximos a él.

✓ El valor $f(x_3)$ es mayor que todos los valores próximos a él.

Los valores $f(x_1)$; $f(x_2)$ y $f(x_3)$ son **extremos relativos** de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Los valores $f(x_1)$ y $f(x_3)$ son **máximos relativos** y el valor $f(x_2)$ es un **mínimo relativo** de f. A partir de estas observaciones definimos:

Una función ***f*** presenta un **máximo relativo** en x_0 si existe un intervalo abierto ***I*** que contiene a x_0; tal que el valor $f(x_0)$ es mayor que el valor que toma la función en el intervalo citado ***I***.

Una función ***f*** presenta un **mínimo relativo** en x_0 si existe un intervalo abierto ***I*** que contiene a x_0; tal que el valor $f(x_0)$ es menor que el valor que toma la función en el intervalo citado ***I***.

Ejemplo

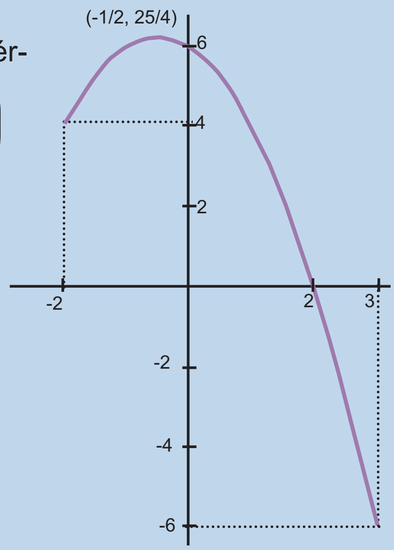
Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 - x + 6$ en el intervalo [–2,3]. Indica si alguno de ellos es absoluto.

Solución.

Se dibuja la función, en este caso es una parábola de vértice $x = \frac{1}{-2}$ e $y = \frac{25}{4}$; el vértice es el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

Se dan valores a *x* para construir una tabla.

x	–2	–1	0	1	2
y	4	6	6	4	0



Tiene un máximo relativo que es el vértice $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

No tiene mínimo relativo.

El máximo relativo es también máximo absoluto.

Actividades

4. Las funciones siguientes alcanzan en los intervalos que se indican máximos y mínimos absolutos. Utiliza las graficas para calcularlos aproximadamente.

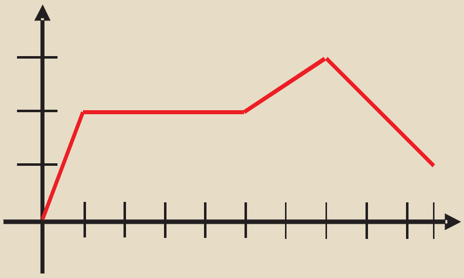
a) $y = 2x - 6$, en el intervalo [0, 4].

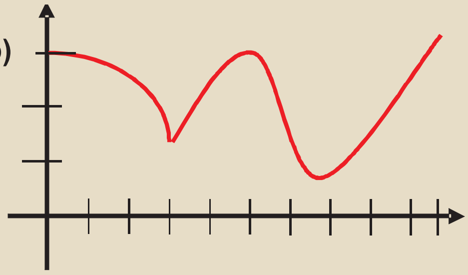
b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$, en el intervalo [–3, 3]

c) $y = \frac{3}{x-1}$ en el intervalo [2, 5]

Indica si algunos de los valores obtenido son relativos.

5. Calcula los máximos y mínimos relativos de la funciones siguientes en los intervalos que aparecen dibujadas.

a) 

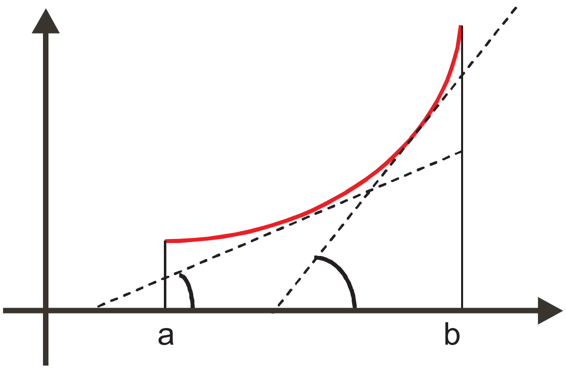
b) 

3. Funciones derivables

Si las funciones objeto de estudio admiten derivada, el comportamiento de la función derivada facilita el estudio de la monotonía, y de los extremos de la función.

3.1. Crecimiento y decrecimiento para funciones derivables

La gráfica de la figura adjunta corresponde a una función creciente y derivable en el intervalo (a, b); sobre ella aparecen dibujadas algunas tangentes ; se observa que todas las rectas tangentes forman un ángulo agudo con la dirección positiva del eje de abscisas, lo que indica que sus pendientes son positivas, y también la derivada de la función, lo que nos permite afirmar:



Una función ***f* creciente y derivable** en un intervalo **(*a*, *b*)** tiene su derivada positiva.

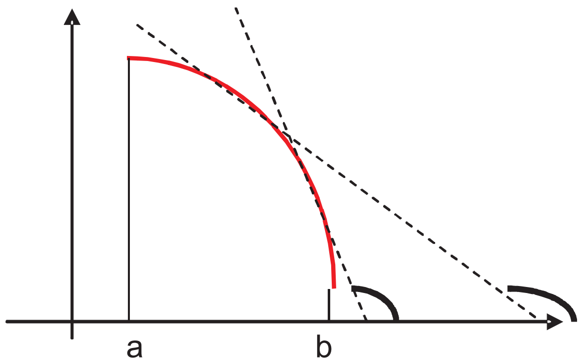
Por otra parte, si para un punto de la curva de abscisa $x = x_0$ de (a, b) se cumple que $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$; debe ocurrir que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sea positivo para valores suficientemente pequeños de Δx y como $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ y $\Delta x = x_0 + h - x_0 > 0$, la función f tiene que ser creciente; por lo que podemos afirmar:

Si la derivada $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ en un intervalo **(*a*, *b*)**, la función ***f*(*x*) será creciente** en dicho intervalo.

Análogo estudio se puede hacer sobre una función f derivable y decreciente en el intervalo (a, b); para concluir:

Una función ***f* decreciente y derivable** en un intervalo **(a, b)** tiene su **derivada negativa**.

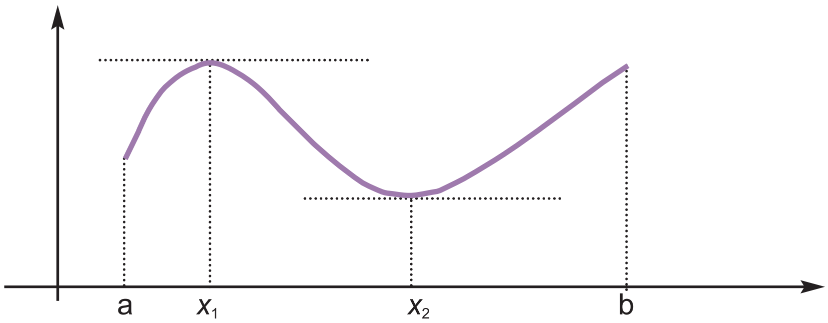
Recíprocamente:



Si la derivada **$f'(x) < 0$** en un intervalo **(a, b)**, la función **$f(x)$** será **decreciente** en dicho intervalo.

3.2. Máximos y mínimos para funciones derivables

La figura siguiente representa una función f con un máximo en $x = x_1$ y un mínimo en $x = x_2$, ambos relativos. En ellos se observa que la tangente es horizontal y por tanto la derivada es nula, que es la **condición necesaria de extremo**.



- En el caso del máximo la función pasa de creciente en (a, x_1) (derivada positiva) a decreciente en (x_1, x_2) (derivada negativa), que es la **condición suficiente de máximo**.

- En el mínimo la función pasa de ser decreciente en (x_1, x_2) (derivada negativa) a creciente en (x_2, b) (derivada positiva), que es la **condición suficiente de mínimo**.

Esto nos permite afirmar:

- **Si *f* es derivable y admite un extremo relativo en un punto entonces la derivada en ese punto es nula.**
- **Si el punto es un máximo, la derivada a la izquierda es positiva y la derecha es negativa.**
- **Si el punto es un mínimo, la derivada a la izquierda es negativa y a la derecha es positiva.**

De esta forma, la derivada de una función proporciona un estudio rápido de la función como se indica en ejemplo siguiente.

Si bien es cierto que con la derivada primera se puede realizar el estudio de extremos relativos; conviene a veces aplicar la derivada segunda, con ella la regla para determinar los extremos relativos es la siguiente:

1º. Se calculan los valores que anulan la derivada primera y estos valores se sustituyen en la derivada segunda:

2º. Si $y'' > 0$ nos encontramos ante un **mínimo**; si $y'' < 0$ el punto es un **máximo**.

Ejemplos

1. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento; los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución. Función derivada: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

Puntos donde se anula la primera derivada: $6x^2 + 6x - 12 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$

Soluciones: $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

Se construye una tabla en la que se divide la recta real en intervalos que tienen como extremos los valores que anulan la derivada $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$. Cogiendo un punto arbitrario de estos intervalos y sustituyéndolo en $f'(x)$ calculamos el signo de $f'(x)$.

x	→ -2	→ 0 → 1	→
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función pasa de creciente en $(-\infty, -2)$ a decreciente en $(-2, 1)$; por tanto en $x = -2$ la función presenta un máximo relativo de valor $f(-2) = 4$.

Mediante la segunda derivada: $f''(x) = 12x + 6$; $f''(-2) = -18 < 0$ *(máximo)*

La función pasa de decreciente en $(-2, 1)$ a creciente en $(1, \infty)$; por tanto la función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ de valor $f(1) = -7$.

Mediante la segunda derivada: $f''(x) = 12x + 6$; $f''(1) = 18 > 0$ *(mínimo)*

Función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-2,1)$.

2. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento; los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

Solución. Resolvemos la ecuación $1-x^2=0$ para hallar el dominio de la función.

Dominio de la función: $D = R - \{-1, 1\}$

Función derivada: $f'(x)=\dfrac{2x(1-x^2)-x^2(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

Puntos donde se anula la primera derivada: $2x = 0 \longrightarrow x = 0$

Se construye una tabla en la que se divide la recta real en intervalos con extremos los valores donde la función no está definida y los valores que anulan la derivada.

x	→ -1	→ 0	→ 1	→
$f'(x)$	–	–	+	+
$f(x)$	decreciente	decreciente	creciente	creciente

La función pasa de ser decreciente en $(-1, 0)$ a creciente en $(0, 1)$; por tanto en $x = 0$ la función presenta un mínimo.

El criterio de la derivada segunda en este caso no es demasiado útil.

Función es creciente en $(0, 1)\cup(1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

Actividades

6. Estudiar la monotonía de las funciones: **a)** $f(x) = x^2 - 4$; **b)** $g(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$.

7. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de las funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 5$, **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$, **c)** $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, **d)** $y=\dfrac{x}{x-1}$

8. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento; los máximos y mínimos relativos de las funciones.

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, **b)** $y = x^4 - 2x^2$, **c)** $y = x^3 + x + 3$, **d)** $y=\dfrac{2}{x^2-4}$

9. Hallar el valor de a para que el máximo de la función la función $y = -x^2 + 4x + a$ valga 8.

10. Calcula a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga un mínimo en el punto $(2, -15)$

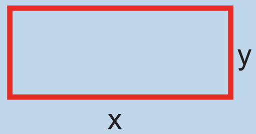
4. Problemas de máximos y mínimos

Los máximos y mínimos tienen aplicación en los problemas de optimización que se presentan con frecuencia tanto en matemáticas como en otras ciencias. Merece la pena destacar su aplicación en economía para determinar los mínimos de coste en producción y los máximos en beneficios.

Ejemplos

1. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyo perímetro sea de 40cm. Calcular dicho área.

Solución.



En este problema tenemos que encontrar el máximo de la función área.Si x es la base e y la altura de un rectángulo su área será: $A(x, y) = xy$

Como estamos ante una función de dos variables, intentamos encontrar una relación entre las dos variables en este caso es el perímetro de los rectángulos:

$$40 = 2x + 2y$$

de donde : $y = 20 - x$

Se sustituye este valor en la función área: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

Se trata de encontrar los máximos de esta función; para la que se calcula la función derivada: $A'(x) = 20 - 2x$.

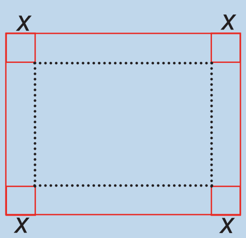
Se iguala a cero: $20 - 2x = 0$; solución $x = 10$

Derivada segunda: $A''(x) = -2$, como es negativa el área será máxima para $x = 10$ e $y = 10$

Resulta que, de todos los rectángulos con igual perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado: $A = 10 \cdot 10 = 100$ cm^2

2. Recortando cuadraditos de cada esquina de cartones rectangulares de dimensiones 12 y 16 cm. se pueden construir cajas sin tapa. Calcular las dimensiones de esos cuadraditos, para que el volumen de las cajas sea máximo. ¿Cuánto vale dicho volumen?

Solución.



Estrategia: Cuando estamos ante problemas geométricos conviene realizar dibujos.

De la figura se deduce que la caja es un paralelepípedo; su volumen es área de la base por la altura, en nuestro caso: $V = (16 - 2x)(12 - 2x)x$.

Se opera: $V = 4x^3 - 56x^2 + 192x$

En este caso, la función a maximizar únicamente contiene una variable, por lo que no se necesita **buscar una relación.**

$$V' = 12x^2 - 112x + 192.$$

Los ceros de la derivada primera serán los posibles máximos o mínimos de la función volumen:

$12x^2 - 112x + 192 = 0$; simplificando, queda, $3x^2 - 28x + 48 = 0$

Soluciones: $x_1 = 7{,}21$ y $x_2 = 2{,}26$

Dadas las condiciones del problema, la única solución válida es 2,26, puesto que no se pueden cortar cuadrados de 7,21 cm en cartones rectangulares de 12 cm de altura.

$V'' = 24x - 112$. Para $x = 2{,}26$, $V'' = 24 \cdot 2{,}26 - 112 < 0$, luego para este valor de x el volumen es máximo.

Valor del máximo: $V = (16 - 2 \cdot 2{,}26)(12 - 2 \cdot 2{,}26)\, 2{,}26 = 194{,}06 \text{ cm}^3$

Actividades

11. Hallar dos números cuya suma sea 30 de forma que su producto sea máximo.

12. Se desea vallar un terreno rectangular con 6000 metros de valla de forma que la superficie encerrada sea máxima.

13. Descomponer el número 50 en dos sumandos de modo que la suma del doble del cuadrado de uno de ellos y el triple del cuadrado del otro sea mínima.

14. Un envase de cartón para envasar leche tiene forma de paralelepípedo con base rectangular, con un lado de doble longitud que el otro y con doble espesor de cartón en estas dos bases. Si la capacidad ha de ser de 1 000 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones del recipiente más económico?

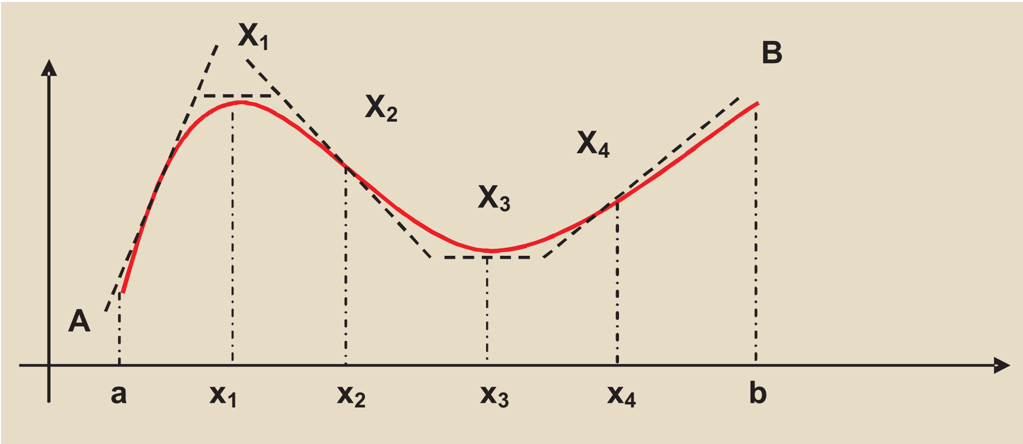
15. El dueño de un manantial de agua llega a la siguiente conclusión: si el precio al que vende la botella es x euros, sus beneficios serán $-x^2 + 10x - 21$ miles de euros diarios. Representa la función precio-beneficio, e indica: a) ¿a qué precio debe vender la botella para que el beneficio sea máximo? b) ¿cuál será ese beneficio?

16. Con listones de madera de 3 m. de largo queremos fabricar marcos de cuadros; si la base mide 50 cm., ¿cuánto mide la altura y la superficie del cuadro? Busca una relación funcional entre la base del cuadro y la superficie del cuadro. ¿Para qué valor de la base la superficie es máxima?

17. El beneficio de una empresa de automóviles viene dado por $B(x) = -20000000 + 800000x - 0{,}2\, x^3$, donde x es el número de vehículos producidos semanalmente. Hallar la producción que hace máximo el beneficio en el supuesto de que la empresa pueda fabricar semanalmente: a) hasta 800 vehículos; b) menos de 1200 vehículos.

5. Concavidad y convexidad: puntos de inflexión

Si se observa en la figura situada abajo la variación de las derivadas, es decir, las pendiente de las tangentes a la curva al recorrerla de izquierda a derecha, se puede afirmar que:



- ✓ Entre ***A*** y X_1 las pendientes son positivas y decrecientes hasta anularse en X_1, a partir de este punto, las pendiente son negativas y decrecientes hasta X_2 donde alcanza el valor negativo más pequeño (un mínimo).
- ✓ A partir de X_2 las pendientes siendo negativas crecen de nuevo hasta anularse en X_3, a partir de este punto se hace positiva y creciente hasta X_4 donde alcanza el valor máximo, a partir de este valor la pendiente vuelve a decrecer hasta ***B***.

A partir de las observaciones realizadas se estudia la curvatura de las funciones, que puede ser de dos tipos diferentes:

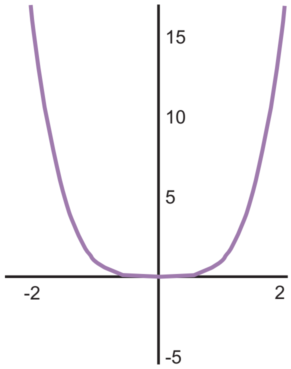
- ✓ *En el arco AX_2, la derivada primera decrece y la curva se dice que es cóncava.*
- ✓ *En al arco X_2X_4, la derivada primera crece y la curva diremos que es convexa; a partir de este punto vuelve a ser de nuevo cóncava.*

Los puntos X_2 *y* X_4 donde la curva cambia de curvatura y la función derivada primera alcanza un mínimo y un máximo respectivamente se llaman puntos de inflexión.

El crecimiento y decrecimiento de la derivada primera f' nos ha permitido caracterizar la curvatura; el signo de la función derivada segunda f'', como derivada de la función f' nos permite afirmar:

✓ Si f'' es **positiva,** la función f' será creciente y la curva **convexa**.

✓ Si f'' es **negativa,** la función f' será decreciente y la curva **cóncava**.



Para que haya puntos de inflexión, es condición necesaria que se anule la derivada segunda; esta condición no es suficiente. Por ejemplo la función $y = x^4$ representada al lado; tiene la derivada primera y segundas nula en $x = 0$ y no tiene punto de inflexión en él.

Ejemplos

1. Estudiar la curvatura de y los puntos de inflexión de la función $y = x^2 – 1$.

Solución. Función derivada primera: $y' = 2x$. Función dervada segunda: $y'' = 2$.

La derivada primera es creciente; la curva es convexa en todo R y no tiene puntos de inflexión.

2. Estudiar puntos de inflexión de la función $y = x^3 + 3x^2 – 9x + 8$

Solución. Función derivada primera: $y' = 3x^2 + 6x - 9$

Función derivada segunda: $y'' = 6x + 6$

La función derivada segunda se anula en: $6x + 6 = 0$; la solución $x = –1$ será un posible punto de inflexión. Cogiendo un punto arbitrario en los intervalos $(– \infty, –1)$ y $(–1, –\infty)$ y sustituyendo en y'', hallamos el signo de y''.

x	← $–1$ →	
y''	–	+
y	cóncava	convexa

La función es cóncava en $(–\infty, –1)$ y convexa $(–1, \infty)$

La función presenta en $x = –1$ un punto de inflexión cóncavo - convexo. De pendiente

$y' = 3(–1)^2 + 6\,(–1) – 9 = 12$ y valor $y = (–1)^3 + 3(–1)^2 – 9\,(–1) + 8 = 19$; $\quad I = (–1, 19)$

3. Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

Solución. Dominio de la función: $R – \{ –2\}$.

Función derivada: $f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - x^2(1)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$

Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - (x^2+4x)2}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

La derivada segunda no se anula en ningún punto, puesto que el numerador es 8, por eso la función no tiene puntos de inflexión, aunque en la tabla consideremos el –2 en él la función no existe.

x	←	– 2	→
y''	–		+
y	cóncava		convexa

La curva es cóncava en (–∞, –2) y convexa (–2, ∞)

Actividades

18. Estudiar la curvatura de las funciones: **a)** $y = x^2$; **b)** $y = x^3$; **c)** $y = x^4$; **d)** $y = x^5$.

19. Estudiar la curvatura de las funciones: **a)** $y = \frac{-1}{2x}$; **b)** $y = \frac{1}{x^2}$; **c)** $y = \sqrt{x}$; **d)** $y = 2^x$

20. Determina los intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función siguiente: $f(x) = x^4 - 6x + 2$

21. Estudiar puntos de inflexión de la función $y = x^4 - 6x^2$

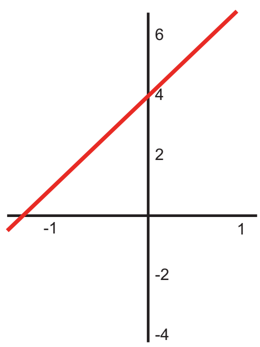
6. Representación gráfica de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son de la forma $y = p(x)$, donde $p(x)$ indica un polinomio. Las siguientes funciones son polinómicas:

a) $y = 3x + 4$, b) $y = x^2 - x - 6$; c) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$; d) $y = x^4 - 4x^2$

Los dos primeros ejemplos ya se han representado en unidades anteriores.

El primero $y = 3x + 4$ es una función lineal, su gráfica es una recta; para representarla se determinan dos de sus puntos.

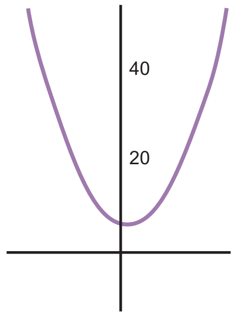


El segundo $y = x^2 - x - 6$ es una función polinómica de segundo grado y su gráfica es una parábola; para representarla debes recordar que lo más cómodo es determinar el vértice de la parábola y para ello, con los conocimientos que se han adquirido, se calcula anulando la primera derivada.

$y' = 2x - 1 = 0; \qquad x = 1/2 \qquad y = -25/4$

El vértice máximo o minimo se encuentra en $V(\ 1/2;\ 25/4)$

x	← 1/2 →		
y'	–		+
y	decreciente	–25/4	creciente



Como la función pasa de creciente a decreciente el vértice es un mínimo.

Otros valores para representarla se obtienen a partir de los cortes con los ejes o con valores simétricos a la abscisa del vértice

Funciones polinómicas de grado superior a dos

Para representar las funciones polinómicas $p(x)$ de grado superior a dos se debe tener en cuenta:

- Que son funciones continuas en toda la recta real.
- Que tienen dos ramas infinitas, una en $+\infty$ y la otra en $-\infty$
- Se deben localizar los extremos relativos.
- Si es posible encontrar los puntos de cortes con los ejes.

Con los datos anteriores se puede realizar un esbozo de la curva con bastante precisión.

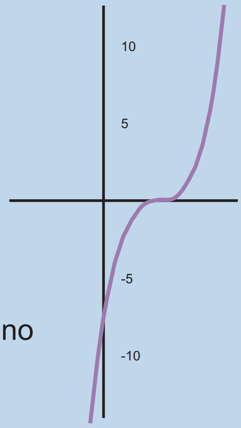
En consecuencia, para dibujar una función polinómica $y = p(x)$ de grado superior a dos se deben dar los siguientes pasos:

- Calcular: $\lim_{x\to\infty} p(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} p(x)$.
- Se calcula la función derivada $y' = p'(x)$ y se resuelve la ecuación $p'(x) = 0$; sus soluciones son posibles extremos relativos. Se realiza el estudio del crecimiento y decrecimiento de $y = p(x)$ para ver qué valores de los obtenidos son extremos y si son máximos o mínimos relativos. Se calculan los valores que toman las ordenadas.
- Se dibujan y se unen con las ramas del infinito y el resultado es la gráfica de la función.
- Se puede determinar si existen cortes con los ejes.

Ejemplos

1. Dibujar la gráfica de la función $y = (x-2)^3$

Solución. Ramas del infinito: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)^3 = +\infty$



Derivada de la función: $y' = 3(x-2)^2$

$y' = 0 \longrightarrow 3(x-2)^2 = 0 \longrightarrow x = 2$

Como la derivada primera es positiva en todo la recta real $x = 2$ no es extremo.

Cortes con los ejes: $(x-2)^3 = 0 \longrightarrow x = 2$

2. Dibujar la gráfica de la función $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Solución. Ramas del infinito: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) = +\infty$

Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 4x - 5$

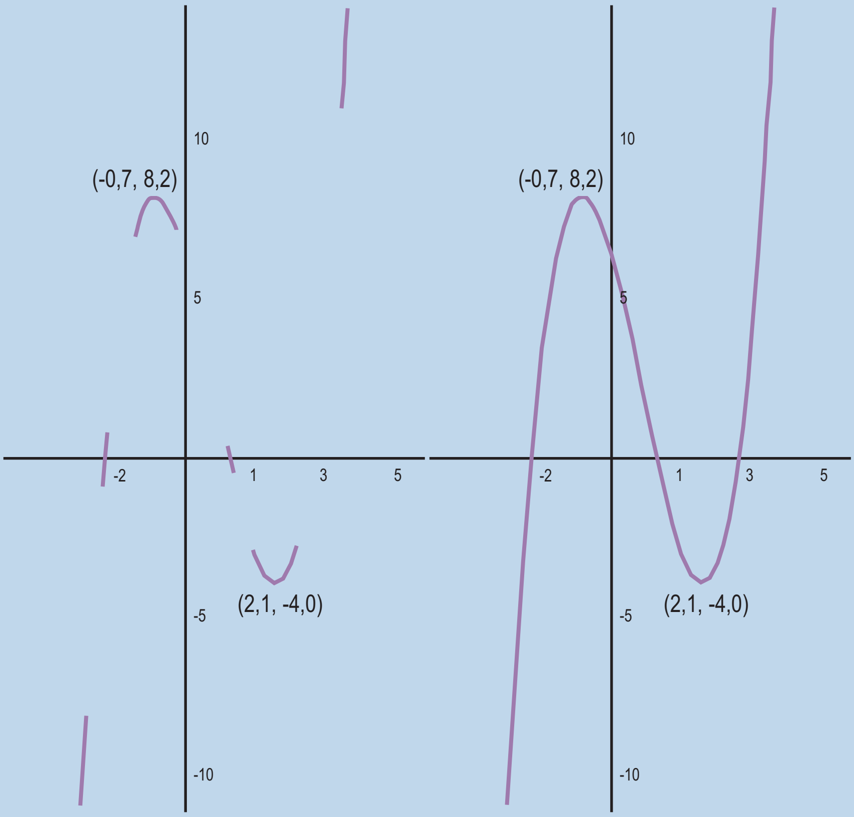
Los posibles extremos son las soluciones de la ecuación: $3x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3(-5)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3} = \begin{cases} \dfrac{2+\sqrt{19}}{3} \approx 2{,}12 \\ \dfrac{2-\sqrt{19}}{3} \approx -0{,}78 \end{cases}$$

Los posibles extremos se encuentran en los puntos $A(-0{,}78,\ 8{,}25)$ y $B(2{,}12,\ -4{,}06)$.

x	← −0,78 →	0 →	2,12 →
y'	+	− −	+
y	creciente	decreciente	creciente

A partir de la tabla se deduce que el punto *A* es un máximo relativo y el *B* es un mínimo relativo.



Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen al resolver la ecuación:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$; se aplica Ruffini y como las soluciones son enteras se obtiene que la curva corta al eje de abscisas en:

$x = -2$;

$x = 1$

$x = 3$.

Se representan estos datos y al unirlos se obtiene la gráfica.

3. Dibujar la gráfica de la función $y = x^4 - 9x^2$

Solución. Ramas del infinito: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 9x^2) = \infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 9x^2) = \infty$

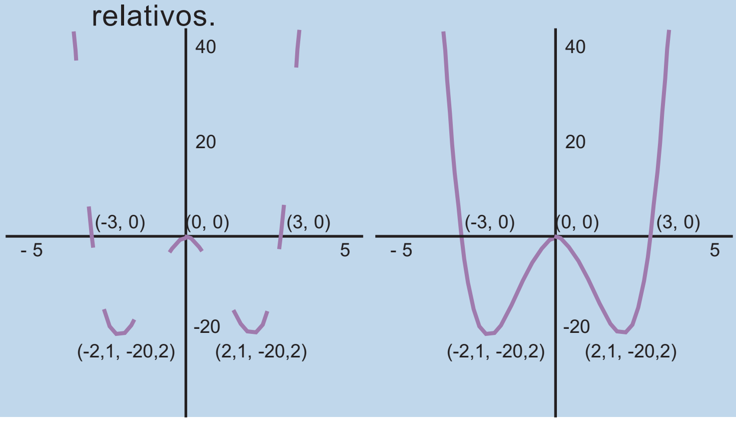
Derivada de la función: $y' = 4x^3 - 18x$

Los posibles extremos son las soluciones de la ecuación: $4x^3 - 18x = 0$; $2x(2x^2 - 9) = 0$; de donde, $x_1 = 0$, $x_2 \approx -2{,}1$ y $x_3 \approx 2{,}1$.

Los posibles extremos son $A(-2{,}1, -20{,}2)$; $O(0, 0)$ y $B(2{,}1, -20{,}2)$

x	←	$-2{,}1$ →	0 →	$2{,}1$ →
y'	–	+	–	+
y	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Se deduce que A es un mínimo, O es un máximo y B es un mínimo, todos ellos relativos.



La curva corta al eje de las x en las soluciones de la ecuación:

$x^4 - 9x^2 = 0$; cuyas soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 3$.

Se representan estos datos y al unirlos se obtiene la gráfica.

4. Dibujar la gráfica de la función $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4$.

Solución. Ramas del infinito: $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4 \right) = \infty$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4 \right) = \infty$

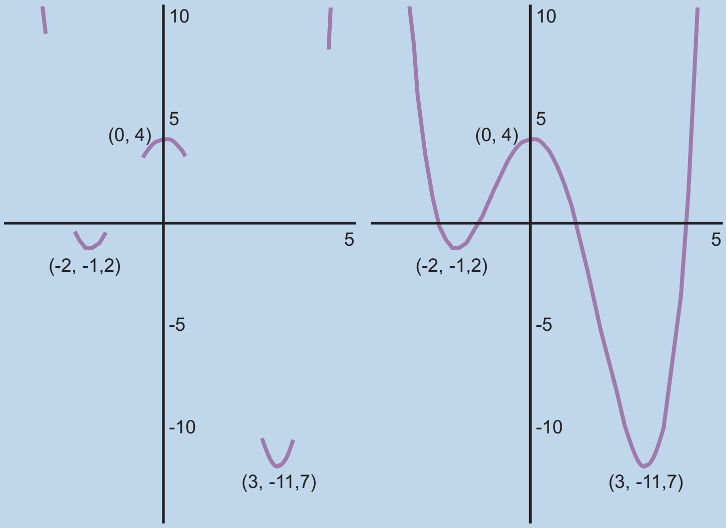
Derivada de la función: $y' = x^3 - x^2 - 6x$

Posibles extremos son las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6)$, de donde, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$.

Los posibles extremos son $A(-2, -1{,}2)$; $O(0, 4)$ y $B(3, -11{,}7)$

x	← -2 →	0 →	3 →	
y'	$-$	$+$	$-$	$+$
y	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Se deduce que A es un mínimo, O es un máximo y B es un mínimo, todos ellos relativos.



Actividades

22. Dibujar las gráficas de las funciones : **a)** $y = 2 - 4x - x^2$; **b)** $y = x^3 - 4x$,

c) $y = x^3 - 6x + 9$, **d)** $y = x^4 + 2x^3$.

23. Representa gráficamente las siguientes funciones: **a)** $y = x^3 - 2x^2 + 1$, **b)** $y = x^4 - x^2$,

c) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$, **d)** $y = x^4 - 2x^2$