UNIDAD

8 Derivada de una función

Tras los límites viene una de las operaciones con funciones más importantes de toda la Matemática y una de las más potentes herramientas de análisis y de cálculo para las funciones: la derivada. Aquí la hacemos surgir de la tasa de variación media, como una generalización necesaria para el estudio del crecimiento de una función. De paso, mencionamos el origen geométrico de la derivada (trazado de la recta tangente) y después recordamos el origen físico de la derivada hablando de la velocidad.

Una vez visto el origen de la derivada, aprendemos cómo calcularla. Hallamos la derivada de algunas funciones sencillas con ayuda de los límites. No deducimos todas las reglas de derivación porque aumentaría la cantidad de cálculos, pero no añadiría gran cosa a este nivel. Aparte de las derivadas, aprenderemos el álgebra de derivadas: cómo es la derivada de la suma, del producto, del cociente y de la composición de funciones, importantísima operación que nos va a permitir derivar cualquier función, por muy complicada que sea.

Terminamos explicando las derivadas sucesivas, centrándonos en la derivada segunda que se usará en la Unidad siguiente para representar gráficamente una función.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Cálculo de la tasa de variación media.
2. Interpretación y definición de la derivada de una función en un punto.
3. Definición de la función derivada y su cálculo siguiendo ésta.
4. Cálculo de derivadas mediante las reglas adecuadas.
5. Cálculo de las derivadas sucesivas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Tasa de variación media

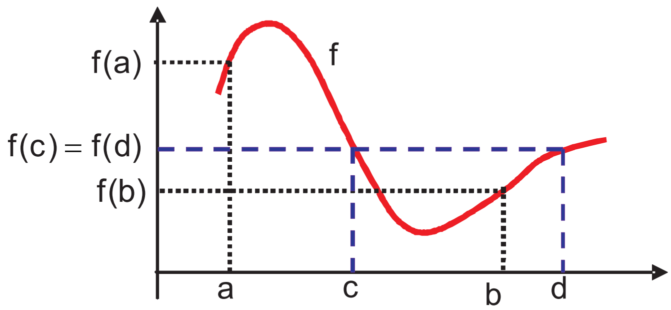
Cuando vimos la función lineal destacamos que la pendiente nos proporcionaba la **Tasa de Variación Media** (T.V.M.) de la función y escribíamos $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, donde el símbolo Δ se llama incremento y nos mide la variación (que puede ser crecimiento, si hay un aumento, o decrecimiento, si hay una disminución) de lo que viene a su derecha: Δy es el incremento de *y* (la función) y Δx el de la *x* (la variable independiente).

En el caso de la función lineal, cuya representación gráfica es una recta, ***m*** o la TVM nos proporciona toda la información sobre el crecimiento de la función, de modo que si $m > 0$ la función es creciente, si $m < 0$ es decreciente y es constante cuando $m = 0$.

Podemos extender el concepto de TVM a las demás funciones sin más que definirla como:

$$\text{TVM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ó} \quad \text{TVM} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{ó} \quad \text{TVM} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Sin embargo, la TVM para funciones que no son lineales no proporciona la misma información que en el caso lineal, pudiendo incluso inducir a error como se deduce fácilmente del siguiente gráfico



Está claro que la TVM va a ser negativa en el intervalo $[a, b]$, pues $f(b) < f(a)$, lo que nos llevaría a concluir que la función decrece en $[a, b]$, lo cual no es del todo cierto. Observa que crece alcanzando un máximo y después decrece hasta un mínimo, volviendo a crecer tras éste. También notamos que la TVM vale cero en el intervalo $[c, d]$, porque $f(c) = f(d)$, por lo que concluiríamos que la función es constante en el intervalo $[c, d]$, lo que está muy lejos de ser verdad, tal y como puedes ver en la gráfica. Toda la información anterior no la recoge la TVM debido a que abarca un intervalo muy amplio en el que la función puede sufrir muchas variaciones, indetectables por la TVM.

¿Podemos arreglar las insuficiencias de la TVM? Sí; lo que hemos de hacer es reducir el intervalo, haciendo que su anchura sea cada vez menor. Para ello recurrimos al límite del cociente cuando la anchura del intervalo tiende a cero, por lo que podemos escribir $\mathrm{TVI} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siendo TVI la **tasa de variación instantánea**, más conocida como **derivada** de una función en un punto. En el siguiente apartado seguiremos hablando de la derivada.

Ejemplos

1. Halla la TVM de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en [2, 5].

Solución.

Usamos la definición, teniendo en cuenta que $a=2$ y $b=5$ y nos queda $\mathrm{TVM} = \frac{f(5)-f(2)}{5-2}$.

Calculamos las imágenes de 5 y de 2: $f(5) = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$,

$$f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{\frac{3}{2}-3}{3} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}.$$

2. Halla la TVM de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $[-1, 3]$.

Solución.

Ahora $a = -1, b = 3 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$. Obtenemos $f(3) = 3^2 + 2\cdot 3 - 3 = 12$,

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow TVM = \frac{12-(-4)}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

3. Halla la TVM de $y = \sqrt{x+4}$ en [0, 12].

Solución.

Ahora $a = 0, b = 12 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{f(12)-f(0)}{12-0}$. Las imágenes son $f(12) = \sqrt{12+4} = 4$,

$$f(0) = \sqrt{0+4} = 2 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{4-2}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

4. Halla la TVM de $f(x) = \frac{3x}{4x-1}$ en [0, 1].

Solución.

Ahora $a = 0, b = 1 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$. Se tiene $f(1) = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1-1} = \frac{3}{3} = 1$,

$$f(0) = \frac{3\cdot 0}{4\cdot 0-1} = 0 \Rightarrow \mathrm{TVM} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

Actividades

1. Halla la TVM de $f(x) = x^3 - x$ en [–1, 1].

2. Calcula la TVM de $y = \dfrac{2x+3}{2x-3}$ en [–1, 2].

3. Averigua el valor de la TVM de $f(x) = \sqrt{3x+4}$ en [–1, 7].

4. ¿Cuánto vale la TVM de $f(x) = 4x + 5$ en [–5, 10]?¿Y en [0, 1]?

2. Derivada de una función en un punto

Hemos acabado el apartado anterior mencionando la tasa de variación instantánea, que nos permite estudiar el crecimiento de la función punto por punto, al hacer que la anchura del intervalo de la TVM tienda a cero. Habitualmente esta tasa recibe un nombre especial: se llama **derivada de una función** en un punto y se define como:

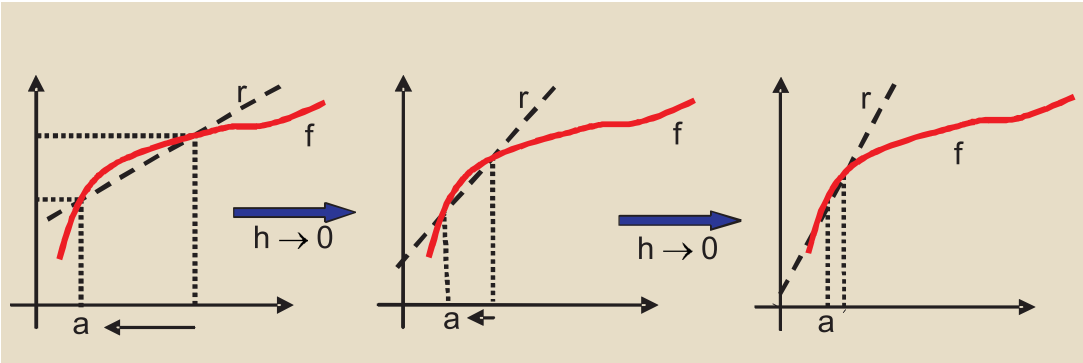
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Te darás cuenta de unas pequeñas diferencias con respecto a la TVM:

- En la TVM hablábamos del intervalo [*a*, *b*] y en la derivada lo hacemos del intervalo [*a*, *a* + *h*], es decir, hemos cambiado *b* por $a+h$, por lo que la anchura del intervalo será ahora $a+h-a=h$, que es lo que aparece en el denominador.

- En la primera definición de la derivada, en el apartado anterior cuando la llamamos TVI, dijimos que $TVI = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, que parece muy diferente a nuestra segunda definición de derivada. Pues no, coinciden: recuerda que $\Delta y = f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a)$, y que $\Delta x = b - a = a + h - a = h$. La ventaja que tiene esta forma de escribir la derivada de una función en un punto es la brevedad. El inconveniente: hay que saber lo que significa cada término para poder calcular la derivada correctamente. La derivada se escribe con esta notación (que se debe a Leibnitz) como $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y se lee derivada de ***y*** respecto de ***x*** o **diferencial** de ***y*** (**d*y***) partido por diferencial de ***x*** (**d*x***). Esta última lectura procede de considerarlo como el cociente de los límites de los incrementos, lo que permite escribir $\frac{dy}{dx} = y'$ y despejar $dy = y' \cdot dx$. Esta notación no es muy usada actualmente a estos niveles, aunque presenta ventajas cuando se trata la integral (que veremos en 2º de Bachillerato). Nosotros usaremos la notación de $f\,'$.

Podemos hacernos una idea gráfica de la derivada mirando la siguiente secuencia para una misma función *f*. Por claridad hemos omitido escribir *a* + *h*, que irá cambiando conforme *h* tienda a 0, y también hemos omitido el valor de *f* para cada uno de los puntos que aparece.



Observa la recta *r*: en principio corta a la función *f* en dos puntos distintos (es una recta secante), puntos que conforme *h* tiende a cero se aproximan cada vez más, verificándose que en el límite cuando *h* tiende a 0 corta a la función en un único punto, por lo que la recta *r* se convierte en la **recta tangente** y la derivada en el punto será la pendiente de dicha recta tangente. Teniendo en cuenta este resultado podemos escribir la fórmula para calcular la ecuación de la recta tangente a una función *f* en un punto (x_0, y_0) cualquiera: $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ en la que hemos sustituido la pendiente *m* por su valor, que es la derivada en el punto.

El encontrar un método que permitiera calcular la ecuación de la recta tangente a cualquier curva fue uno de los orígenes de la derivada. El otro origen fue el encontrar un método que permitiera encontrar la velocidad instantánea que lleva un móvil. Recuerda que la velocidad media es el espacio recorrido partido por el tiempo y la velocidad (instantánea) es el límite del espacio recorrido partido por el tiempo cuando el tiempo tiende a cero: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Este último camino es el que lleva al concepto de tasa de variación instantánea.

Una vez vista la definición y las interpretaciones de la derivada queda ver cómo se calcula. Vamos a usar un procedimiento conocido como la **Regla de los cuatro pasos**, que consiste en desglosar paso a paso la definición. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplos

Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en $x = 2$.

Solución.

Por definición $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

1^er^ paso: cálculo de las imágenes $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 9; f(2+h) = (2+h)^2 + 3(2+h) - 1 =$

$= 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h \ - 1 = 4 + 4h + h = h^2 + 7h + 9$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(2+h) - f(2) = h^2 + 7h + 9 - 9 = h^2 + 7h = h(h+7)$

3^er^ paso: cálculo del cociente $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(h+7)}{h} = h + 7$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+7) = 7 \Rightarrow f'(2) = 7$.

Una observación: si en el paso 3º no hubiéramos simplificado y eliminado h de numerador y denominador, al tomar el límite hubiéramos obtenido la indeterminación $\frac{0}{0}$. Este es un resultado necesario para que exista la derivada en el punto porque el denominador, que es h, siempre valdrá cero, y el único resultado que no nos dará infinito es que el numerador también sea cero. Para que el numerador sea cero ha de verificarse que $\lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \Rightarrow$ ***lo que significa que si hay derivada de la función es porque la función es continua***. De ahí la importancia de la continuidad, pues es una condición necesaria para que la función tenga derivada (aunque no suficiente).

Ejemplos

1. Usando la definición calcula la derivada de $f(x) = 5x - 2$ en $x = 1$.

Solución.

Definición $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

1^er^ paso: cálculo de las imágenes $f(1) = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad f(1+h) = 5(1+h) - 2 = 5h + 3$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(1+h) - f(1) = 5h$

3^er^ paso: cálculo del cociente $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5h}{h} = 5$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}5=5\Rightarrow f'(1)=5$

No había necesidad de hacer operaciones porque en la función lineal, y $f(x) = 5x - 2$ lo es, la derivada coincide con la tasa de variación media y ésta con la pendiente de la recta $m = 5$.

2. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ en $x = -3$ usando la Regla de los cuatro pasos.

Solución.

Definición $f'(-3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

1er paso: cálculo de las imágenes

$$f(-3)=(-3)^2+1=10,\quad f(-3+h)=(-3+h)^2+1=9-6h+h^2+1=h^2-6h+10$$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(-3+h)-f(-3)=h^2-6h+10-10=h^2-6h=h(h-6)$

3er paso: cálculo del cociente $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\dfrac{h(h-6)}{h}=h-6$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-6)=-6\Rightarrow f'(-3)=-6$

3. Usando la definición halla $f'(5)$, con $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$.

Solución.

Definición $f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$

1er paso: cálculo de las imágenes $f(5)=\dfrac{5+3}{5-4}=8,\quad f(5+h)=\dfrac{5+h+3}{5+h-4}=\dfrac{h+8}{h+1}$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(5+h)-f(5)=\dfrac{h+8}{h+1}-8=\dfrac{h+8-8(h+1)}{h+1}=\dfrac{-7h}{h+1}$

3er paso: cálculo del cociente $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\dfrac{\frac{-7h}{h+1}}{h}=\dfrac{-7}{h+1}$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-7}{h+1}=-7\Rightarrow f'(5)=-7$

4. Dada $f(x)=\sqrt{2x-1}$ calcula $f'(1)$ usando la definición.

Solución.

Definición $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

1er paso: cálculo de las imágenes $f(1)=\sqrt{2\cdot 1-1}=1$, $f(1+h)=\sqrt{2(1+h)-1}=\sqrt{2h+1}$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(1+h)-f(1)=\sqrt{2h+1}-1$

3er paso: cálculo del cociente $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{2h+1}-1}{h}$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2h+1}-1}{h}=\dfrac{0}{0}$ indeterminación $\Rightarrow$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador y obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2h+1}\right)^2-1^2}{h\left(\sqrt{2h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+1-1}{h\left(\sqrt{2h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2h+1}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Actividades

5. Usando la definición calcula la derivada de $f(x) = x^2 - x + 3$ en $x = -2$.

6. Calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{3x+2}{3x-1}$ en $x = 1$, usando la definición.

7. Halla la derivada de $f(x)=\sqrt{5x+1}$ en $x = 0$, usando la definición.

8. Usa la definición para calcular $f'(-3)$, siendo $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$.

3. Función derivada

En el apartado anterior hemos calculado la derivada de una función en un punto $x = a$. Sin embargo, dado lo tedioso que es seguir el procedimiento usado para calcularla, es lógico que nos planteemos si podemos encontrar una fórmula o una función que nos proporcione la derivada de una función en cualquier punto x, y que pueda ser particularizado para un cierto punto a. Surge entonces el concepto de función derivada, derivada primera o, simplemente, de derivada, definiéndose la derivada de una función en un punto cualquiera x como:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La forma de proceder es análoga a la anterior (regla de los cuatro pasos), pero al tratarse de un valor genérico *x* podemos dar fórmulas que nos servirán para las funciones que ya conocemos.

Ejemplos

1. Dada la función $f(x) = k$, $k \in R$, averigua su derivada.

Solución.

Definición $f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1er paso: cálculo de las imágenes $f(x+h)=k$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(x+h)-f(x)=k-k=0$

3er paso: cálculo del cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0$

4º paso: cálculo del límite del cociente $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0 \Rightarrow f'(x)=(k)'=0$.

La derivada de una (función) constante es cero. Si piensas un poco, no hubiera sido necesario aplicar ninguna definición, pues una función constante nunca cambia, por lo que su tasa de variación, ya sea media, ya sea instantánea, será cero.

2. Dada $f(x) = x^2$, halla su derivada.

Solución.

1er paso: cálculo de las imágenes $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(x+h)-f(x)=x^2+2xh+h^2-x^2=2xh+h^2=h(2x+h)$

3er paso: cálculo del cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \Rightarrow$

$f'(x)=\left(x^2\right)'=2x.$

3. Halla la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución.

1^er^ paso: cálculo de las imágenes $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$

3^er^ paso: cálculo del cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

4. Averigua la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución.

1^er^ paso: cálculo de las imágenes $f(x+h) = \sqrt{x+h}$

2º paso: cálculo de la diferencia $f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

3^er^ paso: cálculo del cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0}$ indeterminación $\Rightarrow$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador y se obtiene $\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

¿Dónde está la ventaja con respecto a lo que hicimos en el apartado 2? Pues la ventaja es que si quiero calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$, aprendo que $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x \Rightarrow f'(3)=2\cdot 3=6$, o que si quiero hallar el valor de la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=9$, tendré que $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$. Es decir, conociendo la derivada de una función no tengo más que sustituir cuando me interese.

Todas las derivadas que aparecen en la tabla que viene a continuación pueden obtenerse como las tres anteriores. Sin embargo, lo que nos interesa es que aprendas a derivar, es decir, que aprendas las derivadas de las funciones más importantes y que entiendas que tienen su origen en la definición que hemos manejado en los tres ejemplos anteriores.

Tabla de derivadas de las funciones usuales	
Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n, \quad n \in R$	$n \cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
sen x	cos x
cos x	- sen x
tg x	$1+\text{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
arcsen x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos x	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctg x	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Una observación al 2º caso: nos sirve para x elevado a cualquier exponente, ya sea entero o fraccionario. Por ejemplo:

Entero: $\left(\dfrac{1}{x^5}\right)'=\left(x^{-5}\right)'=-5\cdot x^{-5-1}=-5\cdot x^{-6}=\dfrac{-5}{x^6}$: escribimos el exponente como negativo y le aplicamos la fórmula. De igual modo, aunque ya la conocemos, podemos calcular la derivada de $\frac{1}{x}$: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = .$

Fraccionario: $\left(\sqrt[7]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = \frac{1}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$. Como $\sqrt{x}$ suele aparecer con cierta frecuencia, la hemos separado del caso general, aunque podemos averiguar su derivada mediante la fórmula general:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Ahora, lo más importante es aprender la tabla anterior.

Ejemplos

1. $(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$ Apréndete bien este sencillo resultado, que a veces se atraganta inexplicablemente. Recuerda que si no ponemos exponente se sobreentiende que es 1.

2. $\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \left(x^{-4}\right)' = -4 \cdot x^{-4-1} = -4 \cdot x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

3. $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Es también importante recordar bien el manejo de exponentes negativos y fraccionarios para pasar de un modo de escritura a otro.

Actividades

9. Halla $\left(\frac{1}{x^6}\right)'$, $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)'$.

10. Usando la fórmula $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, n \in R$, demuestra que $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

11. Demuestra que $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

4. Cálculo de derivadas

Vamos a ver a continuación el **álgebra de derivadas** o conjunto de reglas para derivar. Todas ellas proceden de combinar la definición de derivada con el álgebra de límites que vimos en la Unidad 7.

4.1. Derivada de la suma de funciones

$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x) \Leftrightarrow$ **La derivada de una suma (o resta) es la suma (o resta) de las derivadas**.

Ejemplos

1. $(x^2 + \cos x)' = (x^2)' + (\cos x)' = 2x - \operatorname{sen} x$

2. $(\sqrt{x} - \operatorname{sen} x)' = (\sqrt{x})' - (\operatorname{sen} x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x$

3. $\left(\dfrac{1}{x} + \operatorname{tg} x\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' + (\operatorname{tg} x)' = -\dfrac{1}{x^2} + 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Dada la sencillez de la fórmula suele escribirse directamente el resultado:

4. $(x^3 + 5)' = 3x^2$

5. $(x^4 + x)' = 4x^3 + 1$

6. $(x^5 - x^2 + x - 7)' = 5x^4 - 2x + 1$

y, claro está, podemos poner todos los sumandos que queramos y lo que deberemos hacer es ir derivando sumando a sumando.

7. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + \operatorname{sen} x + e^x - \ln x + \operatorname{tg} x - \cos x\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \cos x + e^x - \dfrac{1}{x} + 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen} x.$

(Recuerda que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ por lo que $-(\cos x)' = \operatorname{sen} x$).

4.2. Derivada del producto de funciones

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow$ **La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor por la derivada del segundo**.

Ejemplos

1. $\left(x^2 \cdot \cos x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

2. $\left(x^5 \cdot \ln x\right)' = \left(x^5\right)' \cdot \ln x + x^5 \cdot (\ln x)' = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \cdot \ln x + x^4 = x^4 (5 \ln x + 1)$

3. $\left(\sqrt{x} \cdot \operatorname{sen} x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \cdot (\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \cdot \cos x$

4. $\left(\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{x^2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = \frac{x\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) - \operatorname{tg} x}{x^2}$

Un caso especial de esta fórmula es cuando una de las funciones es constante, pues como la derivada de una constante es cero, sólo nos quedará uno de los términos de la derecha:

$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$, k constante (la constante multiplicativa no se deriva):

5. $\left(5x^3\right)' = 5 \cdot \left(x^3\right)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 15x^2$

6. $(3 \operatorname{sen} x)' = 3 \cdot (\operatorname{sen} x)' = 3 \cos x$

7. $\left(7x^5\right)' = 7\left(x^5\right)' = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35x^4$

Dejamos la constante y derivamos la función, multiplicando por el valor de la constante.

Podemos mezclar sumas, restas y productos, derivando cada una de estas operaciones como les corresponde:

8. $\left(x^4 + x^2 e^x\right)' = \left(x^4\right)' + \left(x^2 e^x\right)' = 4x^3 + \left(x^2\right)' e^x + x^2 \left(e^x\right)' = 4x^3 + 2xe^x + x^2 e^x$

9. $\left(4 \cos x - x^7 \ln x\right)' = (4 \cos x)' - \left(x^7 \ln x\right)' = -4 \operatorname{sen} x - \left[7x^6 \ln x + x^7 \cdot \frac{1}{x}\right] = -4 \operatorname{sen} x - 7x^6 \ln x - x^6$

4.3. Derivada del cociente de funciones

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\quad g(x)\neq 0\Leftrightarrow$$ **La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador por la derivada del denominador, partido todo por el denominador al cuadrado**.

Fíjate que para que podamos calcular la derivada del cociente, el denominador ha de ser distinto de cero, pues no podemos dividir por cero.

Ejemplos

1. $$\left(\frac{x}{\cos x}\right)'=\frac{(x)'\cos x-x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x-x(-\text{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\text{sen}x}{\cos^2 x}$$

2. $$(\text{tg}x)'=\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right)'=\frac{(\text{sen}x)'\cdot\cos x-\text{sen}x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\text{sen}x\cdot(-\text{sen}x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}\\[2ex] \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\text{tg}^2 x\end{cases}$$

3. $$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^2+1)(x^2-1)\quad-(x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Los denominadores no se suelen desarrollar, sino que se dejan indicados.

4. $$\left(\frac{\text{tg}x}{x}\right)'=\frac{(\text{tg}x)'\cdot x-\text{tg}x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{(1+\text{tg}^2x)\cdot x-\text{tg}x}{x^2}$$, que es un resultado que ya obtuvimos al escribir la fracción anterior como un producto (ejemplo 4 del producto).

Como puedes comprobar, hay que simplificar al máximo para obtener la derivada; no sirve con dejarla indicada. Como hemos dicho la derivada se usa para estudiar las funciones y por ello hay que saber lo que vale, algo que no podemos conocer si sólo la dejamos indicada.

5. $$\left(\frac{x+3}{x-4}\right)'=\frac{(x+3)'(x-4)-(x+3)(x-4)'}{(x-4)^2}=\frac{x-4-(x+3)}{(x-4)^2}=-\frac{7}{(x-4)^2}$$

6. $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

7. $\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

8. $\left(\dfrac{2x + \operatorname{sen}x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(2x + \operatorname{sen}x)' \cdot \cos x - (2x + \operatorname{sen}x) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{(2 + \cos x) \cdot \cos x + \operatorname{sen}x(2x + \operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{2\cos x + \cos^2 x + 2x\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\cos x + 2x\operatorname{sen}x + 1}{\cos^2 x}$, pues $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

9. $\left(\dfrac{xe^x}{\ln x}\right)' = \dfrac{(xe^x)' \cdot \ln x - xe^x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \dfrac{(e^x + xe^x)\ \ln x - xe^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{e^x(1 + x)\ln x - e^x}{(\ln x)^2} =$

$= \dfrac{e^x((1 + x)\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

Dentro de la derivada de un cociente, podemos considerar el caso particular $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ ó $\left(\dfrac{k}{f}\right)'(x) = -\dfrac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$ con k constante. Observa que el resultado se obtiene porque la derivada del numerador es cero, al ser constante (el 1 es una constante), por lo que en el numerador sólo queda la parte del numerador por la derivada del denominador.

Ejemplos

1. $\left(\dfrac{3}{\operatorname{sen}x}\right)' = -\dfrac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

2. $\left(\dfrac{7}{\operatorname{tg}x}\right)' = -\dfrac{7\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$

3. $\left(\dfrac{5}{x^7}\right)' = -\dfrac{5 \cdot 7x^6}{x^{14}} = -\dfrac{35}{x^8}$. Ésta se podría hacer escribiendo la función como un exponente negativo $\left(5x^{-7}\right)' = 5 \cdot (-7)x^{-7-1} = -\dfrac{35}{x^8}$.

Actividades

12. Halla la derivada de: **a)** $y = x^3 + x^2 - x + 1$; **b)** $y = 3t^2 - t + 1$; **c)** $y = 6t^7 - 2t^5 + 4t^2 + 3t - 2$

13. Halla la derivada de: **a)** $y = 8x\text{tg}x - 5e^x$; **b)** $y = \sqrt[5]{x} \cdot \ln x$; **c)** $y = \dfrac{5}{2x+3}$

14. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$; **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

15. Deriva y simplifica las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^2 - 9}$; **c)** $f(x) = \dfrac{8}{4 - x^2}$

16. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 7x + 1$ en el punto (1, -5).

17. Averigua la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^4 - x^2 + 1$ en el punto (-1, 1).

4.4. Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena

Definimos la derivada de la composición de funciones como:

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Es decir, **la derivada de una composición de funciones es igual al producto de la derivada de la primera función, particularizada en la segunda función, por la derivada de la segunda función, particularizada en *x***.

La dificultad estriba en averiguar cuál es la primera y cuál es la segunda función. Para ello, hay que recordar lo visto al hablar de la composición de funciones, y recordar que ***g*** era la primera que actuaba y ***f*** la segunda. Comparando con la fórmula (también conocida como **regla de la cadena**, porque vamos derivando eslabón a eslabón), vemos que primero derivamos ***f*** (la última que actúa) y después ***g*** (la primera que actúa).

Ejemplos

1. Calcula la derivada de **a)** $y = \text{sen}\,2x$; **b)** $y = \text{sen}^2 x$.

Solución.

a) Tenemos dos funciones seno y 2*x*. Primero calcularíamos 2*x* y después el seno, por lo que derivamos primero el seno (y lo evaluamos en 2*x*) y después derivamos 2*x*:

$$(\text{sen}2x)' = \underbrace{\cos 2x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{del seno}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de } 2x}} = 2\cos 2x$$

b) Tenemos las funciones seno y x^2 (elevar al cuadrado). Primero calcularíamos el seno y después elevaríamos al cuadrado, por lo que primero derivamos el cuadrado y después el seno: $\left(\text{sen}^2 x\right)' = \underbrace{2\text{sen}x}_{\text{derivada del cuadrado}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{derivada del seno}} = 2\text{sen}x\cos x$.

2. Halla la derivada de a) $f(x) = (7x+1)^3$; b) $y = \cos x^2$.

Solución.

a) Tenemos las funciones $7x + 1$ y x^3 (elevar al cubo). Primero operaríamos $7x + 1$ y después elevaríamos al cubo, por lo que derivamos primero el cubo y después $7x + 1$:

$$\left((7x+1)^3\right)' = \underbrace{3(7x+1)^2}_{\text{derivada del cubo}} \cdot \underbrace{7}_{\text{derivada de } 7x+1} = 21(7x+1)^2$$

b) Tenemos la función coseno y x^2 (elevar al cuadrado). Primero calcularíamos el cuadrado y después el coseno, por lo que primero derivamos el coseno y después x^2:

$$\left(\cos x^2\right)' = \underbrace{-\text{sen}x^2}_{\text{derivada del coseno}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2} = -2x\text{sen}x^2$$

3. Averigua las derivadas de a) $y = e^{-x}$; b) $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución.

a) Tenemos las funciones exponencial y $-x$. Primero cambiaríamos el signo ($-x$) y después la exponencial. Así, derivamos primero la exponencial y después $-x$:

$$\left(e^{-x}\right)' = \underbrace{e^{-x}}_{\text{derivada de la exponencial}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{derivada de } -x} = -e^{-x}$$

b) Tenemos las funciones exponencial y $-x^2$. Primero calcularíamos $-x^2$ y después la exponencial, por lo que primero hay que derivar la exponencial y después $-x^2$:

$$\left(e^{-x^2}\right)' = \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{derivada de la exponencial}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{derivada de } -x^2} = -2xe^{-x^2}$$

4. Deriva las siguientes funciones: a) $y = \ln\left(x^2 - 5x + 1\right)$; b) $y = \ln(\text{tg}x)$.

Solución.

a) Tenemos las funciones $x^2 - 5x + 1$ (primera que se calcularía) y ln (segunda que se calcularía). Se deriva primero el ln y después el polinomio:

$$\left(\ln\left(x^2 - 5x + 1\right)\right)' = \underbrace{\frac{1}{x^2 - 5x + 1}}_{\text{derivada del ln}} \cdot \underbrace{(2x-5)}_{\text{derivada de } x^2-5x+1} = \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 1}$$

b) Tenemos las funciones $\text{tg}x$ (la primera que se calcula) y ln (la última que se calcula). Así, se deriva primero ln y después la tangente:

$$\left(\ln(\text{tg}x)\right)' = \underbrace{\frac{1}{\text{tg}x}}_{\text{derivada del ln}} \cdot \underbrace{\left(1 + \text{tg}^2 x\right)}_{\text{derivada de la tangente}} = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg}x}$$

En algunos textos se detalla más la regla de la cadena, ampliando la tabla de derivadas que hay que aprender. Aunque la regla de la cadena sólo exige pararse a pensar el orden de ejecución de las funciones, también puede ser de utilidad la siguiente tabla:

Función	Derivada
$\left(f(x)\right)^n$	$n\cdot\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x),\quad n\in R$
$e^{f(x)}$	$f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$\ln\left(f(x)\right)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	$f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)$
$\cos\left(f(x)\right)$	$-f'(x)\cdot\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$
$\operatorname{tg}\left(f(x)\right)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2\left(f(x)\right)}=f'(x)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(f(x)\right)\right)$

Observa que en la tabla sólo tenemos dos funciones y que sus resultados se obtienen de la regla de la cadena, que deberemos usar cuando aparezcan más de dos funciones.

Ejemplos

1. Averigua la derivada de **a)** $y=e^{5x+3}$; **b)** $y=\ln\left(x^2+x-1\right)$.

Solución.

a) $\left(e^{5x+3}\right)'=5e^{5x+3}$, pues $(5x+3)'=5$.

b) $\left(\ln\left(x^2+x-1\right)\right)'=\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$, pues $\left(x^2+x-1\right)'=2x+1$.

2. Calcula la derivada de **a)** $\left(3x^5-5x^2+7\right)^8$; **b)** $\sqrt[3]{(9x-5)^{2}}$.

Solución.

a) $\left(\left(3x^5-5x^2+7\right)^8\right)'=8\left(3x^5-5x^2+7\right)^7\left(15x^4-10x\right)$, pues $\left(3x^5-5x^2+7\right)'=15x^4-10x$.

b) $\left(\sqrt[3]{(9x-5)^{2}}\right)'=\left((9x-5)^{\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{2}{3}(9x-5)^{-\frac{1}{3}}\cdot 9=\dfrac{6}{\sqrt[3]{9x-5}}$, pues $(9x-5)'=9$.

3. Deriva las siguientes funciones: **a)** $f(x)=\left(x^2-4\right)^2$; **b)** $y=\operatorname{sen}\left(x^2-3x\right)$.

Solución.

a) $\left(\left(x^2-4\right)^{2}\right)'=2\left(x^2-4\right)\cdot 2x=4x\left(x^2-4\right)$, pues $\left(x^2-4\right)'=2x$.

b) $\left(\text{sen}\left(x^2-3x\right)\right)' = \cos\left(x^2-3x\right)\cdot(2x-3) = (2x-3)\cdot\cos\left(x^2-3x\right)$, pues $\left(x^2-3x\right)' = 2x-3$

4. Calcula la derivada de **a)** $y=\text{sen}^3\left(4x^2-5\right)$; **b)** $y=\ln\dfrac{3x}{x+4}$

Solución.

a) Tenemos 3 funciones: el cubo (última en calcularse, primera en derivarse), el seno (segunda en calcularse, segunda en derivarse) y el polinomio (primero en calcularse, último en derivarse):

$$\left(\text{sen}^3\left(4x^2-5\right)\right)' = \underbrace{3\cdot\text{sen}^2\left(4x^2-5\right)}_{\text{derivada del cubo}}\cdot\underbrace{\cos\left(4x^2-5\right)}_{\text{derivada del seno}}\cdot\underbrace{8x}_{\text{derivada de }4x^2-5} = 24x\cdot\text{sen}^2\left(4x^2-5\right)\cos\left(4x^2-5\right).$$

b) $$\left(\ln\frac{3x}{x+4}\right)' = \frac{\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)'}{\dfrac{3x}{x+4}} = \frac{\dfrac{12}{(x+4)^2}}{\dfrac{3x}{x+4}} = \frac{4}{x(x+4)},\quad \text{pues} \quad \left(\frac{3x}{x+4}\right)' = \frac{3(x+4)-3x}{(x+4)^2} = \frac{12}{(x+4)^2}.$$

Actividades

18. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\text{sen}\left(5t^2-3t+2\right)$; **b)** $y=\sqrt{2x-3}$.

19. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=6\cos^2(3x+5)$; **b)** $y=\left(x^2+5\right)^3$.

20. Halla la derivada de:

a) $y=\sqrt{(3x+2)^7}$; **b)** $f(x)=\ln(2x-1)$.

21. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=5e^{x^2+3x}$; **b)** $y=\ln\left(\dfrac{3x}{x-2}\right)$.

5. Derivadas sucesivas

¿Nos puede servir para algo hallar la tasa de variación instantánea de la derivada? Fíjate que la derivada es una función, por lo que podemos calcular su TVI, que será la derivada de la derivada. La derivada de la derivada de una función recibe el nombre de **derivada segunda** y en la unidad siguiente la usarás para estudiar la curvatura (concavidad y convexidad) de una función. Se define como:

$$\boldsymbol{f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}}$$

Este proceso lo podemos prolongar indefinidamente y así tendremos la derivada tercera $\boldsymbol{f'''}$ (que es derivar la derivada segunda), la derivada cuarta $\boldsymbol{f^{IV}}$ (que es derivar la derivada tercera), la derivada quinta $\boldsymbol{f^{V}}$ (derivar la derivada cuarta),…, la deriva n-sima o enésima $\boldsymbol{f^{(n}}$. Observa la notación: se usan números romanos para las primeras y un paréntesis con el grado para las de orden superior con el fin de no confundirlas con las potencias. Estas **derivadas sucesivas o de órdenes superiores** se calculan con las mismas reglas que vimos para la derivada, que ahora se llama derivada primera (y simplemente derivada cuando no hay confusión posible).

Ejemplos

1. Halla la derivada segunda, tercera y cuarta de las siguientes funciones:

a) $y = x^3$; **b)** $f(x) = \text{sen}x$; **c)** $y = \cos x$.

Solución.

a) $y' = 3x^2$; $y'' = 3 \cdot 2x = 6x$; $y''' = 6$; y^{IV} .

b) $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\text{sen}x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \text{sen}x$.

c) $y' = -\text{sen}x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \text{sen}x$; $y^{IV} = \cos x$.

2. Halla la derivada segunda, tercera y cuarta de las siguientes funciones:

a) $y = 6x^7 - 5x^2 + 4$; **b)** $f(x) = \ln x$; **c)** $y = e^{2x}$.

Solución.

a) $y' = 6 \cdot 7x^6 - 5 \cdot 2x = 42x^6 - 10x$; $y'' = 42 \cdot 6x^5 - 10 = 252x^5 - 10$;

$y''' = 252 \cdot 5x^4 = 1260x^4$; $y^{IV} = 1260 \cdot 4x^3 = 5040x^3$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$; $f'''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$;

$f^{IV}(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$; $f^{V} = -6(-4)x^{-5} = 24x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$.

c) $y' = 2e^{2x}$; $y'' = 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$; $y''' = 4 \cdot 2e^{2x} = 8e^{2x}$; $y^{IV} = 8 \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}$.

3. Calcula la derivada segunda, tercera y cuarta de:

a) $y = \cos 3x$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; **c)** $f(t) = t^3 - 2t + 1$.

Solución.

a) $y' = -\text{sen}3x \cdot 3 = -3\text{sen}3x$; $y'' = -3 \cdot 3\cos 3x = -9\cos 3x$

$y''' = -9 \cdot (-3)\text{sen}3x = 27\text{sen}3x$; $y^{IV} = 27 \cdot 3\cos 3x = 81\cos 3x$.

b) $f(x)=(x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-(x+2)^{-2}=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=-(-2)(x+2)^{-3}=2(x+2)^{-3}=\dfrac{2}{(x+2)^3}$;

$f'''(x)=2(-3)(x+2)^{-4}=-6(x+2)^{-4}=\dfrac{-6}{(x+2)^4}$; $f^{IV}(x)=-6(-4)\,(x+2)^{-5}=24(x+2)^{-5}=\dfrac{24}{(x+2)^5}$.

c) $f'(t)=3t^2-2$; $f''(t)=6t$; $f'''(t)=6$; $f^{IV}(t)=0$.

4. Calcula la derivada segunda de **a)** $y=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$; **b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Solución.

a) $y'=3x^2-\dfrac{9}{2}\cdot 2x+6=3x^2-9x+6$; $y''=6x-9$.

b) $f'(x)=\dfrac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2-1)^2-(-x^2-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}\overset{(1)}{=}$

$$=\frac{(x^2-1)\left[-2x(x^2-1)-4x(-x^2-1)\right]}{(x^2-1)^4}=\frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

En (1) hemos sacado factor común en el numerador. Fíjate que coincide con el denominador, por lo que podremos simplificar. De este modo el denominador no queda elevado a 4 sino a 3 y también disminuye el grado del numerador, quedando una fracción algebraica más sencilla. Este procedimiento lo podemos realizar siempre que derivemos fracciones algebraicas, y es la razón de no desarrollar el cuadrado que aparece en el denominador.

Actividades

22. Halla la derivada primera, segunda, tercera y cuarta de:

a) $y=e^{5x}$; **b)** $y=\dfrac{2}{x-5}$; **c)** $y=\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.

23. Calcula derivada segunda de **a)** $y=\dfrac{7}{9-x^2}$, **b)** $y=\dfrac{x}{x^2+4}$.

24. Halla la derivada segunda de **a)** $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, **b)** $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{7}+2x-1$.

25. Calcula la derivada segunda de $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.