6 Operaciones con funciones. Funciones trascendentes: exponencial, logarítmica y trigonométrica

El álgebra de funciones indica qué operaciones pueden realizarse con funciones y cómo hacerlo. Operación nueva y muy importante es la composición, pues permite construir funciones complejas a partir de las sencillas, y lleva al concepto de función inversa.

La función exponencial se define a través del número e, que es a la vez la base de los logaritmos neperianos. Se pone de manifiesto la relación entre ambas funciones, que son inversas entre sí. Definimos y describimos los datos básicos de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, y de sus inversas.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Introducción a la notación matemática y al cálculo de las operaciones con funciones.
2. Construcción de funciones complejas mediante la composición.
3. Cálculo de la inversa de funciones.
4. Profundización en el estudio de las funciones exponencial y logarítmica.
5. Conocimiento y manejo de las funciones trigonométricas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Operaciones con funciones

El conjunto de operaciones que podemos realizar con las funciones, así como las reglas que permiten efectuar dichas operaciones, recibe el nombre de **álgebra de funciones**. Las funciones, siempre que compartan el dominio, podemos sumarlas, restarlas, multiplicarlas, dividirlas y, cuando el dominio de una contenga a la imagen de otra, componerlas. El objetivo de este apartado es estudiar las cuatro primeras, reservándole a la quinta un apartado completo. A continuación estudiamos las cuatro primeras operaciones.

1.1. Suma de funciones $f + g$

La suma de las funciones f y g es otra función que simbolizamos por $f + g$ y definimos por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Es decir, para sumar dos funciones sumamos los valores que toman las funciones en cada punto; en Matemáticas es equivalente hablar de puntos o de números reales, pues son considerados sinónimos.

Ejemplos

1. Dadas: $f(x) = 4x - 5$ y $g(x) = x^2 + 7 \Rightarrow (f+g)(x) = 4x - 5 + x^2 + 7 = x^2 + 4x + 2.$
2. Dadas: $f(x) = \dfrac{3}{x}$ y $g(x) = x + 1 \Rightarrow (f+g)(x) = \dfrac{3}{x} + x + 1 = \dfrac{x^2 + x + 3}{x}.$
3. Dadas: $f(x) = x^3 - 5x + 4$ y $g(x) = 5x^3 - x^2 - 8x \Rightarrow (f+g)(x) = 6x^3 - x^2 - 13x + 4.$

Parece claro que la adición es conmutativa $f + g = g + f$.

1.2. Resta de funciones $f - g$

La resta de las funciones f y g es otra función que simbolizamos por $f - g$ y definimos por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Igual que antes, hay que restar las dos funciones punto a punto.

Ejemplos

1. Dadas: $f(x)=4x-5$ y $g(x)=x^2+7 \Rightarrow (f-g)\ (x)=4x-5-\left(x^2+7\right) \ =-x^2+4x-12.$

2. Dadas: $f(x)=\dfrac{3}{x}$ y $g(x)=x+1 \Rightarrow (f-g)(x)=\dfrac{3}{x}-(x+1)=\dfrac{3}{x}-x-1=\dfrac{3-x-x^2}{x}.$

3. Dadas: $f(x)=x^3-5x+4$ y $g(x)=5x^3-x^2-8x \Rightarrow$
$\Rightarrow (f-g)\ (x)=x^3-5x+4-\left(5x^3-x^2-8x\right) \ =-4x^3+x^2+3x+4.$

Observa que para restar cambiamos de signo todos los términos de la función que está restando, y luego efectuamos las operaciones pertinentes. También se puede interpretar como sumar a *f* la función opuesta de *g* (la opuesta de *g* es $-g$). Obviamente la diferencia no es conmutativa.

1.3. Multiplicación de funciones $f \cdot g$

La multiplicación de las funciones *f* y *g* es otra función que simbolizamos por $f \cdot g$ y definimos por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Multiplicaremos punto a punto, y para todo *x* del dominio común.

Ejemplos

1. Dadas: $f(x)=4x-5$ y $g(x)=x^2+7 \Rightarrow (f \cdot g)(x)=(4x-5)\cdot\left(x^2+7\right)=4x^3-5x^2+28x-35.$

2. Dadas: $f(x)=\dfrac{3}{x}$ y $g(x)=x+1 \Rightarrow (f \cdot g)(x)=\dfrac{3}{x}\cdot(x+1)=\dfrac{3(x+1)}{x}.$

3. Dadas: $f(x)=x^3-5x+4$ y $g(x)=5x^3-x^2-8x \Rightarrow$
$(f \cdot g)(x)=\left(x^3-5x+4\right)\left(5x^3-x^2-8x\right)=5x^6-x^5-33x^4+25x^3+36x^2-32x.$

El producto de funciones sí es conmutativo $f \cdot g = g \cdot f$.

1.4. División de funciones *f*/*g*

La división de las funciones f y g es otra función que simbolizamos por $\frac{f}{g}$ y definimos por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ si } \quad g(x)\neq 0$$

Dividiremos las funciones punto a punto en todos los puntos en los que no se anule el denominador. Como está prohibido dividir por cero, debemos excluir en la definición aquellos puntos que hacen cero el denominador.

Un caso particular de división de funciones es $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$, cuando $f(x)\neq 0$, que recibe el nombre de inversa para el producto, pues $\left(f\cdot\frac{1}{f}\right)(x)=f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=1.$ Hay que tener cuidado con el término inversa porque habitualmente se reserva para la inversa obtenida a partir de la composición de funciones.

Tampoco es conmutativo el cociente de funciones.

Ejemplos

1. Dadas: $f(x)=4x-5$ y $g(x)=x^2+7 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{4x-5}{x^2+7}.$

2. Dadas: $f(x)=\frac{3}{x}$ y $g(x)=x+1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{3}{x}}{x+1}=\frac{3}{x(x+1)}=\frac{3}{x^2+x}.$

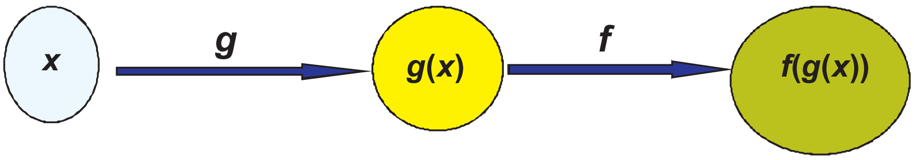
3. Dadas: $f(x)=x^3-5x+4$ y $g(x)=5x^3-x^2-8x \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^3-5x+4}{5x^3-x^2-8x}.$

Actividades

1. Dadas : $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x - 1$, calcula $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y f/g.
2. Dadas : $f(x) = 3x^2 + 8$ y $g(x) = x^2 + 3$, calcula $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y f/g.
3. Dadas: $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{2}{x}$, calcula $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$.
4. Dadas: $f(x)=\frac{1}{x+1}$ y $g(x)=\frac{x}{2}$, calcula $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$.

2. Composición de funciones $f \circ g$

Se define la **composición de dos funciones** como **$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.** La anterior operación se lee ***g* compuesta con *f*** (fíjate que se lee de derecha a izquierda, no de izquierda a derecha como es habitual). Si observas la definición te darás cuenta de que la función de la derecha, en este caso g, es la variable independiente para la función de la izquierda, en este caso f. Es decir, en lugar de poner x en la f hay que poner $g(x)$. La composición de funciones conduce a otra función que produce el mismo efecto que $g(x)$ y $f(x)$ actuando sucesivamente.



Ejemplos

1. Dadas: $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x - 1$ calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1) + 3 = 2x + 2;$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = 2(x+3) - 1 = 2x + 5.$

2. Dadas $f(x) = 5x - 4$ y $g(x) = x^2 + 3$ calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 5(x^2+3) - 4 = 5x^2 + 11.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-4) = (5x-4)^2 + 3 = 25x^2 - 40x + 19.$

3. Dadas $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{2}{x}$ calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{1}{\frac{2}{x}} = \dfrac{x}{2}$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{\frac{1}{x}} = 2x.$

4. Dadas $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \dfrac{1+x}{1-x}.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{x-1}{x+1}.$

De los ejemplos observamos que la operación composición no es conmutativa en general, dado que el orden en el que coloquemos las funciones cambia completamente el resultado. Podemos componer tantas funciones como queramos, sin más que tener en cuenta el orden en el que debemos ir efectuando las operaciones: siempre empezaremos por la derecha y nos iremos desplazando hacia la izquierda, cambiando en cada paso la variable independiente.

También es interesante descomponer funciones, es decir, dada una función compleja averiguar qué funciones más sencillas la componen. Esto nos facilitará el estudio de la regla de la cadena que veremos al tratar la derivada de funciones.

Ejemplos

1. Dada $h(x) = (3x - 7)^2$ averigua dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$.

Solución.

Para hallar f y g primero hemos de averiguar en la función a descomponer el orden en el que deben realizarse las operaciones en ella especificadas: en este caso, hay que multiplicar x por 3 y restarle 7; después elevamos el resultado al cuadrado. La primera operación que hay que realizar debe corresponderse con g, pues es la primera función que actúa, mientras que la segunda operación se corresponderá con f, pues actúa en segundo lugar tras haberlo hecho g. Por lo tanto, $g(x) = 3x - 7$, $f(x) = x^2$.

Comprobémoslo: $(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = f(3x-7) = (3x-7)^2$.

2. Halla dos funciones f y g tales que $(f \circ g)\ (x) = \sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}$.

Solución.

La primera operación es efectuar el cociente $\Rightarrow g(x) = \dfrac{x}{2x-1}$.

La segunda es sacar la raíz cuadrada $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$.

Comprobación $(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) = \sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}$.

3. Averigua dos funciones que verifiquen que $(f \circ g)\ (x) = \dfrac{7}{6x+2}$.

Solución.

La primera operación es multiplicar por 6 y sumar 2 $\Rightarrow g(x) = 6x + 2$.

La segunda operación es dividir 7 entre el resultado anterior $\Rightarrow f(x) = \dfrac{7}{x}$.

Comprobación $(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = f(6x+2) = \dfrac{7}{6x+2}$.

En las actividades 7 y 8, que proponemos a continuación, encontraremos funciones para las que la composición sí es conmutativa; pero no es una regla general, de ahí que digamos que la composición no es conmutativa. La conmutatividad de las actividades 7 y 8 es un tanto especial, tan especial que nos conducirá al concepto de función inversa.

Actividades

5. Dadas $f(x)=2-7x$ y $g(x)=1-x^2$ calcula $f\circ g$ y $g\circ f$.

6. Dadas $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{x}{2}$ calcula $f\circ g$ y $g\circ f$.

7. Calcula $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=x^2-1$.

8. Halla $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo $f(x)=\sqrt{3x+2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-2}{3}$.

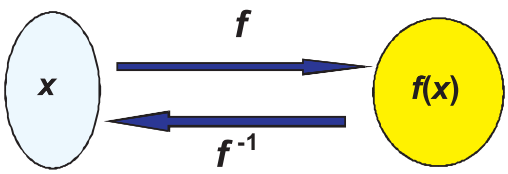
9. Averigua dos funciones que verifiquen que $(f\circ g)\ (x)=\sqrt{4-5x}$.

3. Funciones inversas

Las actividades 7 y 8 nos han mostrado dos casos peculiares: al componer dos funciones el resultado ha sido el mismo que dejar las cosas como estaban. Dejar las cosas como estaban también es una función, se llama función identidad y se simboliza por: *Id(x)* = *x*. Es decir, partimos de la variable *x* y hemos vuelto a ella tras la acción de una y otra función, como si lo que hiciera una lo deshiciera la otra. Si esto ocurre, se dice que son funciones inversas una de la otra.

Decimos que f^{-1} es la **función inversa** de *f* cuando se verifica que $\left(f\circ f^{-1}\right)\ (x)=\left(f^{-1}\circ f\right)\ (x)=x$ ó simbólicamente $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=Id$.

Con el símbolo *Id* represento la **función identidad**, definida como *Id*(*x*) = *x*. El nombre de función identidad le viene porque a cada número *x* le asocia el mismo número *x*.



¿Cómo calcular la inversa de una función? En principio parece que tenemos dos maneras: o bien con $f\circ f^{-1}=Id$ o con $f^{-1}\circ f=Id$. En la primera forma deberíamos cambiar *x* por f^{-1}(x) en la definición de *f* y operar; en la segunda tendríamos que cambiar *x* por *f(x)* en la definición de f^{-1}, lo que es imposible, pues no conocemos la forma de f^{-1}. Por lo tanto, sólo tenemos una forma de calcularla. Habitualmente lo que se hace es cambiar *x* por *y* e *y* por *x* en la expresión: *y* = *f(x)*, y luego despejamos *y*. Finalmente cambiamos *y* por f^{-1}.

Ejemplos

1. Calcula la inversa de $f(x) = x + 1$

Solución. Usando f^{-1}: $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow f^{-1}(x) + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$.

$$\text{En } y = f(x), \begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1.$$

Aunque en este ejemplo el cambio sea más largo, normalmente se compensa con la claridad, pues escribir cuando hay un exponente dificulta la lectura del ejercicio.

Como método para detectar si el cálculo es correcto, componemos la función original con la obtenida, y el resultado debe ser la función identidad:

$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f(x-1) = (x-1) + 1 = x$ ó $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x$.

2. Halla la inversa de $f(x) = 3x - 2$.

Solución. $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = 3y - 2 \Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow y = \dfrac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

3. Dada $f(x) = \dfrac{3x+7}{4}$, calcula $f^{-1}(x)$.

Solución. $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3y+7}{4} \Rightarrow 3y + 7 = 4x \Rightarrow y = \dfrac{4x-7}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{4x-7}{3}$.

4. Dada $f(x) = x^2 + 3$, halla $f^{-1}(x)$.

Solución.

$y = x^2 + 3$, $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = y^2 + 3 \Rightarrow y^2 = x - 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x-3}$. Aquí nos aparece un problema típico de las raíces cuadradas: el doble signo de la raíz. Así, para un mismo valor de x tendríamos dos posibles resultados: uno al coger la parte positiva de la raíz y el otro al coger la parte negativa de la raíz. Si lo dejamos con el doble signo, la función $f(x) = x^2 + 3$ no tendría función inversa porque no sería una función al no darnos una única imagen para x. Para resolverlo se recurre a separar las partes positiva y negativa de la raíz como si fueran funciones independientes, escribiéndose $f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-3} \\ f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-3} \end{cases}$.

5. Halla la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución. $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Curiosamente la inversa de esta función es ella misma, como le pasa a la función identidad: $Id(x) = x$.

Actividades

10. Halla la inversa de $f(x)=7x+5$.

11. Dada $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, averigua $f^{-1}(x)$.

12. Calcula la inversa de $g(x)=\dfrac{4x-3}{7x+5}$.

13. Halla la inversa de $h(x)=x^2+2x-1$.

4. Función exponencial

Se llama **función exponencial** a una función $f(x)=a^x$, con $a\in R^+$, (R^+ *es el conjunto formado por todos los números reales positivos*), en la que la variable independiente aparece como exponente. El número real *a* se llama *base* y ha de ser positivo. No hay que confundir la función exponencial con la **función potencial** $f(x)=x^n$, pues en ésta la base es *x* y el exponente *n* es fijo, mientras que en la exponencial la base es fija y varía el exponente.

Dada la forma de la función exponencial es fácil deducir las siguientes propiedades comunes a todas, independientemente del valor de *a*:

I. $Dom\ a^x=R$, ya que siempre podemos elevar un número positivo a cualquier exponente.

II. $a^x>0$, para todo $x\in R$, pues al elevar un número positivo como *a* a cualquier exponente, el resultado seguirá siendo positivo. Recuerda que $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

III. Todas las funciones exponenciales pasarán por el punto (0,1) pues $a^0=1$.

Para obtener una representación gráfica de la exponencial hay que distinguir dos casos:

1. Si $a>1\Rightarrow$ La función siempre es creciente en todo su dominio, verificándose que $a^x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$, $a^x\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$. Estudiemos el caso de la exponencial 2^x y comprobémoslo.

Calculamos $2^{100} = 1{,}268 \cdot 10^{30}$. Con la calculadora científica usamos la tecla $\boxed{x^y}$ siguiendo la secuencia 2 $\boxed{x^y}$ 100 $\boxed{=}$ $1{,}268^{\,30}$. Si intentas calcular 2^{1000} en la calculadora te saldrá un mensaje de error (*-E-*) pues supera el valor del número más grande que puede manejar la calculadora. Sin necesidad de calculadora parece claro que a medida que aumentemos el exponente aumentará 2^x, pues crece el número de veces que hay que multiplicar 2 por sí mismo.

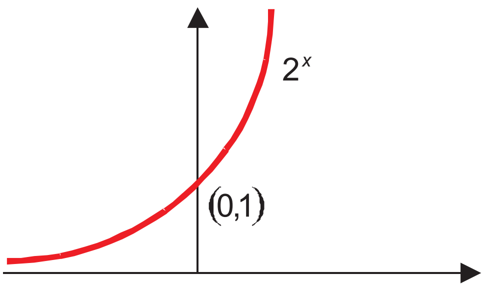
Para ver qué sucede cuando $x \to -\infty$, recurrimos a la definición de potencia negativa. Como los números negativos que tratamos son muy grandes en valor absoluto, resulta entonces que $2^{-n} = \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Con la calculadora **2** $\boxed{x^y}$ **-100** $\boxed{=}$ **$7{,}889^{-31}$**, y si usas – 1000, obtendrás $2^{-1000} = 0$.

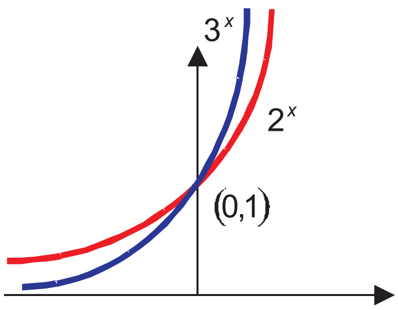
Además, la función $y = 2^x$ crece muy rápidamente, de ahí el uso de **crecimiento exponencial** para indicar un crecimiento desmesurado y rapidísimo. Observa la siguiente tabla:

x	1	10	50	100
2^x	2	1024	$1{,}126 \cdot 10^{15}$	$1{,}268 \cdot 10^{30}$

Cuando x crece de 1 a 50 (multiplicar por 50), la función aumenta de 2 a $1{,}126 \cdot 10^{15}$ (multiplicar por $5{,}63 \cdot 10^{15}$), lo que supone un crecimiento vertiginoso.

La gráfica de una función exponencial a^x, con $a > 1$ sería:





En la parte derecha están representadas 2^x y 3^x en los mismos ejes. Fíjate que 3^x crece más deprisa que 2^x, pues la base es mayor y también será mayor el producto de ella consigo misma tantas veces como queramos: $2^2 = 4 < 3^2 = 9$. Por esta misma razón, 3^x se acerca más rápidamente a cero que 2^x cuando $x \to -\infty$:

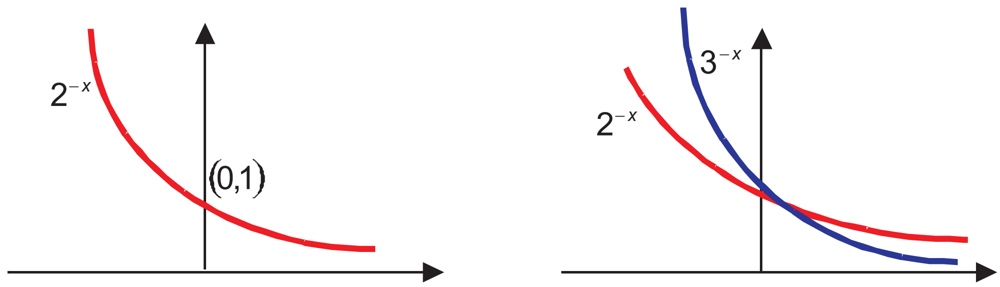
$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = 9{,}766 \cdot 10^{-4}, \quad 3^{-10} = \frac{1}{3^{10}} = 1{,}695 \cdot 10^{-5} \Rightarrow 2^{-10} > 3^{-10}.$$

2. Si $0 < a < 1$, los valores que toma a son decimales de la forma 0,*mnp*… muchos de los cuales se pueden escribir como fracciones que tengan el numerador menor que el denominador. Una de éstas puede ser $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

La función sería $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, pues estas tres formas de escribirla son sinónimas. La última nos proporciona la mejor pista: el exponente tiene el signo negativo y lógicamente hará lo contrario que 2^x, decrece. En la siguiente tabla parece más claro:

x	-100	-10	-1	0	1	10	100
2^{-x}	2^{100}	2^{10}	2^{1}	1	2^{-1}	2^{-10}	2^{-100}

La gráfica de la función a^x, con $0 < a < 1$ será como las gráficas de 2^{-x} y 3^{-x} que dibujamos a continuación:



La función exponencial aparece en aquellos fenómenos en los que hay una tasa de crecimiento o de decrecimiento constante. Veamos algunos:

Interés compuesto: $C(t) = C_0\,(1+r)^t$, siendo C_0 el capital inicial depositado, r el rédito en tanto por ciento al que se coloca el capital y t el tiempo en años.

Evolución de una población: $P(t) = P_0\,(1+tc)^t$, siendo P_0 la población inicial (la población que se tiene en una fecha determinada); tc la tasa de crecimiento en tanto por ciento; t es el tiempo que puede medirse en años, o en días, dependiendo del tipo de población (humana en el primer caso, bacterias en el segundo).

Hay un montón de funciones exponenciales, tantas como números reales positivos tenemos para poner en la base. Sin embargo, en Matemáticas Superiores se utiliza el término exponencial para designar a la función $\mathbf{e}^x$, cuya base es el **número e**, definido como $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, y que además es la base de los logaritmos neperianos. El número e es quizá el más importante de todas las Matemáticas. Se trata de un número real que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y del que podemos tener un valor aproximado con la calculadora científica. La tecla e^x precedida de SHIFT nos da un valor aproximado de e, así:

1 SHIFT e^x = **2,718281828**

Si queremos calcular e^5 procedemos así: **5** SHIFT e^x = **148,4131591...**

Recordando la definición de logaritmo neperiano de un número, **ln *a*,** como el exponente al que hay que elevar la base *e* para obtener *a* , entonces $e^{\ln a} = a$, en cuyo caso la función exponencial $y = a^x$ puede escribirse así: $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\cdot \ln a}$.

Según esto la función $y = 2^x$ se podría escribir también como $y = e^{x\ln 2} \approx e^{0,693x}$, y la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ se escribiría $y = e^{x\ln\frac{1}{3}} = e^{-1,099x}$. Observa que si $a > 1$ el exponente es positivo, pues $\ln a > 0$, y si $0 < a < 1$ el exponente será negativo, pues $\ln a < 0$.

Ejemplos

1. Una ciudad tiene una tasa de crecimiento anual del 1,5%. Escribe la función exponencial del crecimiento en una base a y también en base *e*. Si se mantuviese esa tasa de crecimiento, ¿cuánto tiempo tardaría en duplicarse la población?

Solución. $P(t) = P_0(1+tc)^t = P_0(1+0,015)^t = P_0 \cdot 1,015^t$. Escrito con base *e* quedaría: $P(t) = P_0 e^{t\ln 1,015} = P_0 e^{0,015t}$. Para encontrar el tiempo que tarda en duplicarse la población tendremos $P_0 \cdot 1,015^t = 2P_0 \Rightarrow 1,015^t = 2$. Para poder resolver esta ecuación exponencial hemos de tomar logaritmos en ambos miembros, para conseguir bajar la *t* del exponente:

$$\log 1,015^t = \log 2 \Rightarrow t\cdot \log 1,015 = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,015} = 46,55 \text{ años}$$

Exactamente 46 años y 0,55·12 = 6,6 meses, y con más exactitud 46 años, 6 meses y 0,6·30 = 18 días.

2. Laboratorios Jaquecax ha medido la concentración *C* en la sangre de un fármaco en función del tiempo *t* transcurrido desde su administración (en minutos), obteniendo $C(t) = C_0 e^{-0,005t}$, donde C_0 representa la concentración en el momento de la administración del fármaco. ¿Qué concentración de fármaco habrá en la sangre pasadas dos horas desde que se administró el fármaco?

Solución. Pasamos el tiempo a minutos (2 horas = 120 minutos) y sustituimos en la función: $C(120) = C_0 e^{-0,005\cdot 120} = C_0 \cdot e^{-0,6} = 0,549\ C_0$

Al cabo de dos horas habrá un poco más de la mitad de la concentración inicial de fármaco.

3. Averigua las tasas de crecimiento de dos poblaciones P y Q de bacterias, sabiendo que las evoluciones de sus poblaciones (en miles de individuos) en función del tiempo (en horas) vienen dadas por las funciones $P(t) = 1{,}6 \cdot 2^t$, $Q(t) = 67{,}8 \cdot 1{,}5^t$.

Indica qué población será mayor al cabo de 20 horas. Escribe también ambas funciones en base e.

Solución. Comparando con la función general $P(t) = P_0\,(1+tc)^t$ obtenemos:

$P \Rightarrow P_0 = 1{,}6;\quad 1+tc = 2 \Rightarrow tc = 1 \Rightarrow$ La tasa de crecimiento de P es del 100%.

$Q \Rightarrow P_0 = 67{,}8;\quad 1+tc = 1{,}5 \Rightarrow tc = 0{,}5 \Rightarrow$ La tasa de crecimiento de Q es del 50%.

$P(20) = 1{,}6 \cdot 2^{20} = 1\,677\;721{,}6$ miles, $\quad Q(20) = 67{,}8 \cdot 1{,}5^{20} = 225\,452{,}4$ miles.

Observa cómo la población de P, aunque empiece con un menor número de individuos, consigue superar a la de Q en un número no muy elevado de horas. Conforme aumente el tiempo, la población de P será muchísimo mayor que la de Q. Esto nos da idea de que lo que realmente importa en una función exponencial no es su valor inicial sino su tasa de crecimiento.

$$P(t) = 1{,}6 \cdot 2^t = 1{,}6 \cdot e^{t \ln 2} = 1{,}6 \cdot e^{0{,}693t},\quad Q(t) = 67{,}8 \cdot 1{,}5^t = 67{,}8 \cdot e^{t \ln 1{,}5} = 67{,}8 \cdot e^{0{,}405t}.$$

4. El carbono 14 es un isótopo del carbono que se usa para la datación de restos arqueológicos. Se desintegra de acuerdo con la función $C(t) = C_0 \cdot e^{-0{,}000121t}$, siendo C_0 la cantidad inicial de carbono 14 presente en el material y t el tiempo en años. ¿Cuántos años han de pasar para que la cantidad se reduzca a la mitad? Si han pasado 10 000 años, ¿qué fracción de la cantidad inicial quedará?

Solución. Para averiguar los años que han de pasar para que se reduzca a la mitad deberemos resolver la ecuación: $\frac{1}{2}C_0 = C_0 \cdot e^{-0{,}000121t} \Rightarrow e^{-0{,}000121t} = \frac{1}{2}$. Tomamos ln

$$\ln e^{-0{,}000121t} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -0{,}000121t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}000121} = 5728{,}49 \text{ años.}$$

En este caso no tenemos más que sustituir el tiempo por el valor indicado:

$$C(10\,000) = C_0 \cdot e^{-0{,}000121 \cdot 10000} = C_0 \cdot 0{,}2982 \approx 0{,}3 \cdot C_0$$

En 10000 años el carbono 14 queda reducido al 30% de la cantidad inicial.

Como se desprende de los ejemplos, el crecimiento exponencial es muy fuerte, tan fuerte que lo convierte en poco válido para reflejar la evolución de una población a largo plazo o de otros fenómenos que, tarde o temprano, acabarán estabilizándose después de un crecimiento inicial espectacular. Para este tipo de fenómenos suele ser más apropiada una función de crecimiento limitado, que contiene en su seno una exponencial, y su fórmula es:

Funciones de crecimiento limitado $f(x) = c\left(1 - e^{-kt}\right)\ ;\ c, k > 0$

Actividades

14. Una ciudad tenía una población de 100 000 habitantes hace 30 años, teniendo actualmente el triple de dicha población. Calcula su tasa de crecimiento y escribe la función de crecimiento en base *e*.

15. Una figura de madera encontrada en una excavación contiene el 25 % del carbono 14 que contenía cuando se fabricó. Estima su antigüedad por el método del carbono 14, sabiendo que dicho elemento se desintegra de acuerdo con la fórmula $C(t) = C_0 \cdot e^{-0{,}000121t}$, siendo $C(t)$ la cantidad de carbono presente en cualquier instante t y C_0 la cantidad inicial.

16. Tras estudiar la evolución de la población de una ciudad se ha llegado a la conclusión de que responde a la fórmula $P(t) = \dfrac{250\,000}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}06t}}$. Averigua la población que tenía inicialmente, la que tendrá al cabo de 10 años y la población alrededor de la cual se estabilizará.

17. Una empresa ha comprobado que la relación entre el número de veces que emite un anuncio (x) y las ventas obtenidas (en miles de €) viene dada por la función $f(x) = 4000\left(1 - e^{-0{,}05x}\right)$. Haz una tabla y calcula el valor que toma la función para x igual a 0, 10, 100, 200, 300, 400, 500. ¿Es beneficioso para la empresa emitir el anuncio más de 200 veces, si han de pagar por cada emisión siempre la misma cantidad?

5. Función logarítmica: logaritmos decimales y logaritmos neperianos

Como ya sabes, el **logaritmo** en base *a* de un número *x* se define como el exponente *n* al que hay que elevar la base *a* para que nos dé *x*: $\log_a x = n \Leftrightarrow a^n = x$

Lógicamente *a* recibe el nombre de base porque es la base en la ecuación exponencial que permite definir el logaritmo y ha de ser positiva. El número *x* (lo que hay dentro del logaritmo) recibe el nombre de **argumento**. Como sabes, los logaritmos más usados son los neperianos o naturales y los decimales. En los neperianos la base es el número ***e*** y en los decimales es 10.

Recordemos las propiedades del logaritmo:

1. $\mathbf{\log_a a = 1}$ pues $a^1 = a \Rightarrow$ el logaritmo de un número en su propia base es 1.

2. $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ porque $a^0 = 1$ Fíjate que 1 va a separar el signo de la función logaritmo:

   - Si $a > 1$, $\log_a x > 0$ cuando x sea mayor que 1 y $\log_a x < 0$ cuando x sea menor que 1. Por ejemplo, $\log_2 4 = 2, \log_2 \frac{1}{2} = -1$.
   - Si $0 < a < 1$, $\log_a x < 0$ cuando x sea mayor que 1 y $\log_a x > 0$ cuando x sea menor que 1. Por ejemplo, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$.

   No existe el logaritmo ni de cero ni de números negativos, ya que al elevar un número positivo a otro cualquiera el resultado siempre es positivo. Esto implica que el dominio de $\log_a x$ es el conjunto de los números reales positivos.

   Cuando calculemos el límite de una función logaritmo y el argumento se acerque a cero, si la base del logaritmo es mayor que 1, diremos que tiende a $-\infty$, y si la base es menor que 1 tenderá a ∞. Por ejemplo, $\log 0,0000001 = \log 10^{-7} = -7$, $\log_{\frac{1}{10}} 10^{-7} = 7$.

3. $\mathbf{\log_a x^p = p \times \log_a x}$. La demostración de esta propiedad es muy sencilla y se basa en la forma en que elevamos una potencia a otra potencia:

   $$\log_a x = n \Rightarrow x = a^n \Rightarrow x^p = \left(a^n\right)^p = a^{p\cdot n} \Rightarrow \log_a x^p = \log_a a^{p\cdot n} = p\cdot n = p\cdot \log_a x$$

   Esta propiedad es muy importante y convierte al logaritmo en una potente herramienta, pues permite bajar los exponentes sin más que tomar logaritmos: es la que nos permitió resolver las ecuaciones exponenciales que nos aparecieron al tratar la función exponencial. Observa que para su demostración usamos la definición (de ahí que $\log_a a^{p\cdot n} = p\cdot n$).

4. $\mathbf{\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y}$. La demostración tampoco entraña dificultad y nos permite familiarizarnos con la función logaritmo:

   $$\left.\begin{array}{l}\log_a x = n \Rightarrow x = a^n \\ \log_a y = p \Rightarrow y = a^p\end{array}\right\} \Rightarrow \log_a (x\cdot y) = \log_a \left(a^n \cdot a^p\right) = \log_a a^{n+p} = n + p = \log_a x + \log_a y$$

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. Tampoco es difícil demostrar esta propiedad:

$$\left.\begin{array}{l}\log_a x = n \Rightarrow x = a^n \\ \log_a y = p \Rightarrow y = a^p\end{array}\right\} \Rightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^n}{a^p}\right) = \log_a a^{n-p} = n - p = \log_a x - \log_a y$$

6. $\log_a x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, **si** $a > 1$. Observa la siguiente tabla:

x	10^{20}	10^{40}	10^{100}	$10^{1\,000}$	$10^{1\,000\,000}$
log x	20	40	100	1 000	1 000 000

Cuando x crece, log x también lo hace, aunque de una forma bastante más lenta: el paso de 10^{20} a 10^{40} supone multiplicar por 10^{20}, mientras que el paso de 20 a 40 supone multiplicar por 2.

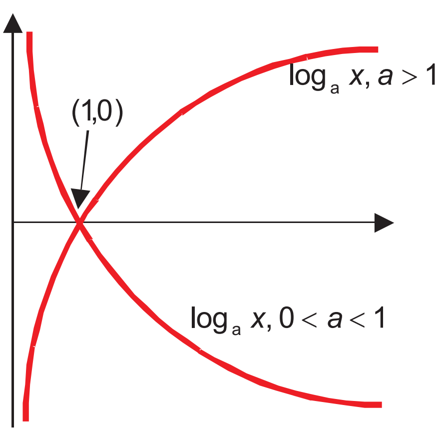
$\log_a x \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$, **si** $0 < a < 1$. Observa la siguiente tabla:

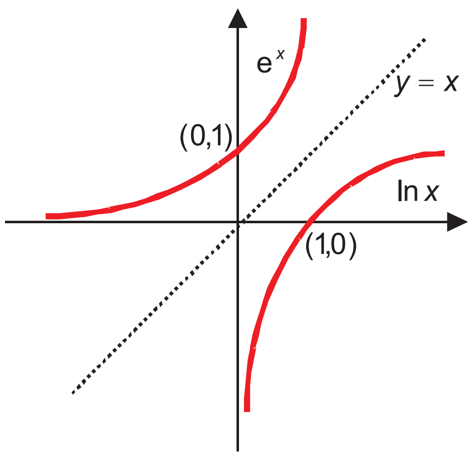
x	10^{20}	10^{40}	10^{100}	$10^{1\,000}$	$10^{1\,000\,000}$
$\log_{1/10} x$	-20	-40	-100	-1 000	-1 000 000

Esta capacidad para ralentizar el crecimiento hace del logaritmo una herramienta muy adecuada para la medida de magnitudes que presentan un rango de variación enorme, como la escala de Richter para la medida de la magnitud de un terremoto; o la ley estímulo-sensación o de Fechner-Weber, que mide la sensación producida al ser generado un estímulo; o la medida del nivel de intensidad de un sonido (los belios y los decibelios).

7. El logaritmo es una función continua en todo su dominio.

Después de haber estudiado las propiedades de los logaritmos, podemos representarlos:





Dada la definición de logaritmo y sus propiedades parece claro que hay una estrecha relación entre éste y la exponencial, y es tan estrecha porque son funciones inversas: lo que hace una lo deshace la otra.

Para que lo veas más claramente hemos representado e^x junto con $\ln x$ y la bisectriz del primer cuadrante (que es la gráfica de la función identidad) . Observa que si doblamos el papel por la bisectriz la gráfica exponencial coincide con la logarítmica.

Vamos a comprobar que $\ln x$ y e^x son inversas; antes de componer recuerda, de la definición de logaritmo, que si $y = \ln x$ entonces $x = e^y = e^{\ln x}$, por tanto:

$$(\ln \circ e)(x) = \ln\left(e^x\right) = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x \qquad (e \circ \ln)(x) = e(\ln x) = e^{\ln x} = x$$

Ejemplos

1. Calcula la inversa de $y = e^{3x+1}$.

Solución. Cambiamos $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = e^{3y+1} \Rightarrow$ tomando logaritmos neperianos en ambos

miembros $\Rightarrow \ln e^{3y+1} = \ln x \Rightarrow (3y+1)\ln e = \ln x \Rightarrow 3y+1 = \ln x \Rightarrow y = \dfrac{\ln x - 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{\ln x - 1}{3}$

2. Representa $y = \ln x - 3, \quad y = \ln(x+5).$

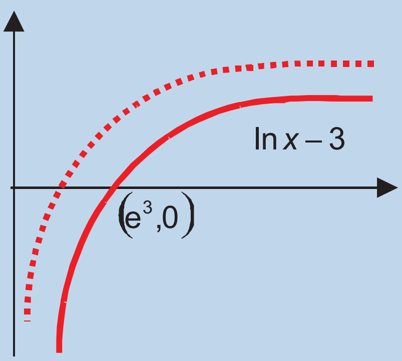
Solución. $y = \ln x - 3$ sufre un desplazamiento vertical hacia abajo con respecto a $\ln x$ al restarle 3 a la ordenada. Ahora el punto de corte de la función con el eje X será:

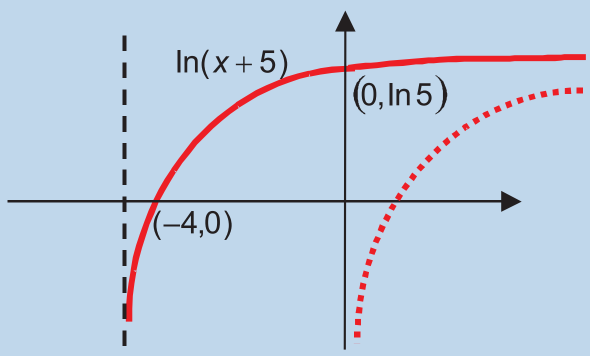
$y = 0 \Rightarrow \ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \Rightarrow$ punto $\left(e^3, 0\right)$, $\quad e^3 \approx 20{,}09.$

$y = \ln(x + 5)$ sufre un desplazamiento horizontal hacia la izquierda con respecto $\ln x$ al sumar 5 en el argumento. El punto de corte con el eje X es $y = 0 \Rightarrow$

$\ln(x+5) = 0 \Rightarrow x+5 = e^0 \Rightarrow x+5 = 1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$ punto $(-4, 0).$

Esta función corta también al eje Y, pues $f(0) = \ln 5 \Rightarrow (0, \ln 5)$





3. Toma logaritmos neperianos en los dos miembros de las expresiones:

$$y = \left(x^2 + 1\right)^{x-3}, \quad f(x) = \sqrt[x]{\frac{3}{x-2}}.$$

Solución. $\ln y = \ln\left(x^2+1\right)^{x-3} \Rightarrow \ln y = (x-3)\ln\left(x^2+1\right).$

Para tomar ln, primero escribimos la raíz como un exponente fraccionario:

$$f(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \ln\left(\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{3}{x-2}\right)$$

4. Calcula la inversa de $y = e^{4x+5}$

Solución. Cambiamos $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = e^{4y+5} \Rightarrow$ tomamos ln en ambos miembros:

$$\ln e^{4y+5} = \ln x \Rightarrow (4y+5)\ln e = \ln x \Rightarrow 4y+5 = \ln x \Rightarrow y = \frac{\ln x - 5}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 5}{4}.$$

Actividades

18. Calcula la inversa de $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

19. Resuelve las ecuaciones:

a) $e^{x^2} = 5$;

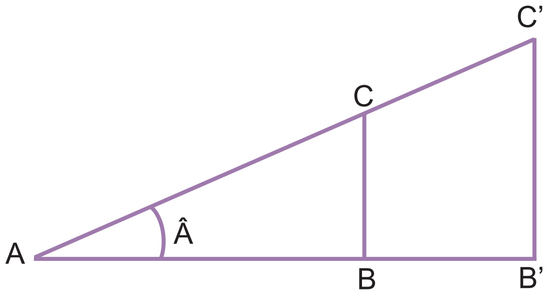
b) $1{,}03^t = 2$.

20. Toma logaritmos neperianos en los dos miembros de las expresiones:

$$f(x) = (2x)^{x-1}, \quad y = \sqrt[x]{(3x+5)^2}.$$

21. Calcula la inversa de $f(x) = e^{x^2-4}$.

6. Funciones trigonométricas



El teorema de Thales aplicado en triángulos rectángulos semejantes nos da las siguientes igualdades $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$, lo que lleva a pensar que estas cantidades pueden asociarse de alguna manera al ángulo del vértice A.

Así se definen las razones trigonométricas del ángulo $\hat{A}$ como:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Se define aún otra como $\operatorname{tg}\hat{A} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$

Dos observaciones:

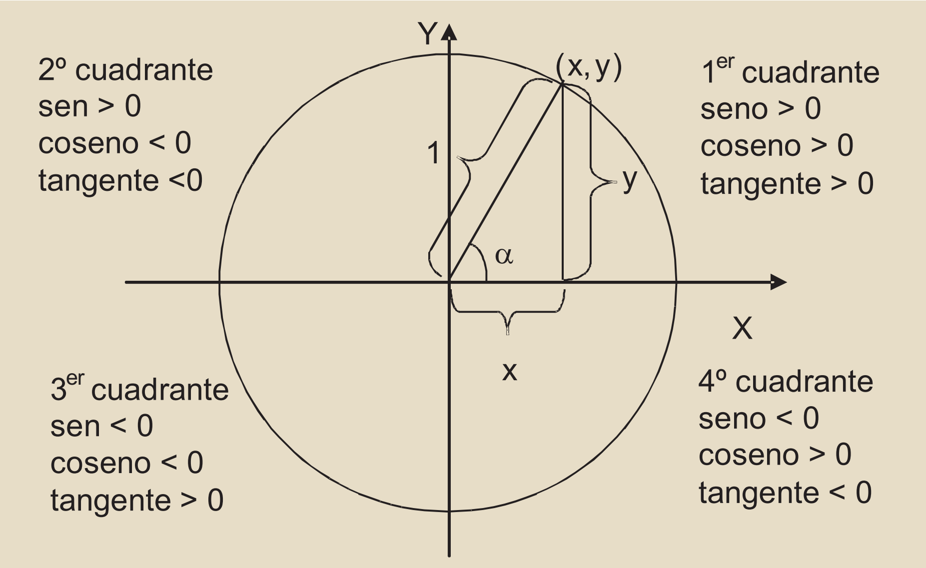
- Como se deduce de la definición, las razones trigonométricas no tienen unidades de medida, ya que son cocientes de longitudes.
- Los ángulos hay que medirlos en radianes. El **radián** se ideó para: a) tener una medida de ángulos en base 10, porque los grados, minutos y segundos son unidades sexagesimales (base 60), lo que produce dificultades a la hora de pasar de una a otra unidad, y b) para que la longitud de arco se calcule mediante la sencilla fórmula $L = \alpha \cdot r$, donde α es el ángulo abarcado por el arco y r el radio de la circunferencia. Recuerda que cuando el ángulo se mide en sexagesimal la longitud del arco es: $L = \dfrac{\text{ángulo}}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$.

Esto último nos permite establecer una relación entre la medida de ángulos en sexagesimal y en radianes, pues los 360º que abarca una circunferencia son 2π radianes, lo que nos permite usar la proporción $\dfrac{2\pi}{360^\circ} = \dfrac{\pi}{180^\circ}$. De este modo, para pasar de sexagesimal a radianes multiplicamos por $\dfrac{180^\circ}{\pi}$ y para pasar de radianes a sexagesimal multiplicaremos por $\frac{180^{o}}{\pi}$. A continuación incluimos una pequeña tabla con la equivalencia de los ángulos más empleados:

Sexagesimal	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Observa que los radianes suelen escribirse en función de π. En la calculadora cuando usamos los grados sexagesimales aparece **D** o **DEG** en la pantalla, y cuando usamos radianes aparece **R** o **RAD**. Para usar unas u otras unidades hay que pulsar MODE y algún número: eso hay que mirarlo en el manual de la calculadora, aunque algunas traen una leyenda bajo la pantalla como recordatorio.

Para hallar los valores de las razones trigonométricas se escoge un triángulo rectángulo inscrito en una **circunferencia goniométrica** (literalmente, para medir ángulos). Se trata de una circunferencia que tiene un sistema de ejes cartesianos con origen en el centro de la circunferencia y cuyo radio mide 1:



Los puntos de la circunferencia tendrán por coordenadas (*x*, *y*) y aplicando las definiciones anteriores en este triángulo y dado que la hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, mide 1, se obtiene:

$$\text{sen}\alpha = \text{cateto opuesto} = y,\ \ \cos\alpha = \text{cateto contiguo} = x,\ \ \text{tg}\alpha = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. contiguo}} = \frac{y}{x}$$

Usando el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta que los catetos coinciden con las razones trigonométricas seno y coseno y que la hipotenusa vale 1, se llega a una relación fundamental: $(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Para determinar las razones trigonométricas usaremos la calculadora, en la que encontrarás las teclas sin , cos y tan aunque conviene que aprendas los siguientes valores, que son fáciles de ver en el dibujo de la circunferencia goniométrica:

Ángulo	0º	$\pi/2$ = 90º	π = 180º	$3\pi/2$ = 270º	2π = 90º
sen α	0	1	0	- 1	0
cos α	1	0	- 1	0	1
tag α	0	∞	0	- ∞	0

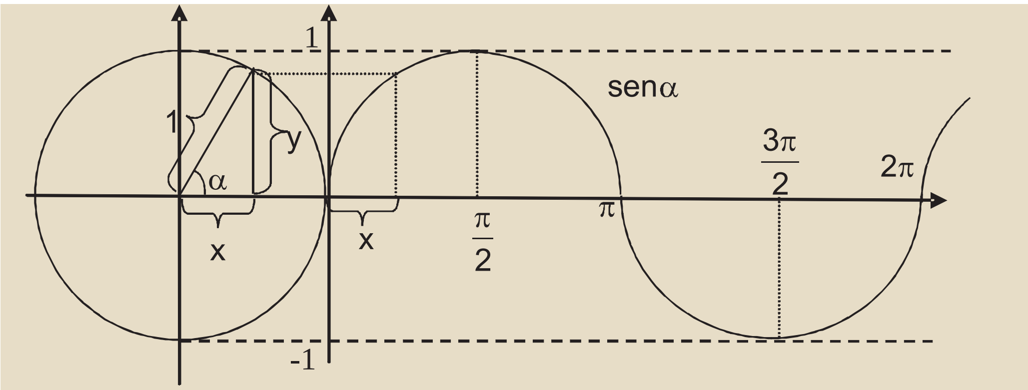
De la relación anterior para el seno y el coseno está claro que ni seno ni coseno pueden ser mayores que 1, porque al elevarlos al cuadrado quedaría una cantidad mayor que uno, lo que iría contra la igualdad. Tampoco pueden ser menores que -1, pues al elevarlos al cuadrado nos darían también cantidades mayores que 1. Podemos escribir por tanto que:

$-1 \le sen\alpha \le 1$, $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$, y además, cuando el seno vale 1 ó -1 el coseno ha de valer 0, y a la inversa, cuando el coseno vale 1 ó -1, el seno vale 0.

En cambio la tangente no está acotada. Observa que para $\frac{\pi}{2}$ rad se obtendría por la definición $\frac{1}{0}$, lo que nos lleva a decir que $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, aunque con las precauciones pertinentes, pues dependiendo de cómo nos acerquemos a $\frac{\pi}{2}$ (por su izquierda o por su derecha) podemos ir a ∞ ó $-\infty$. Lo mismo sucede en $\frac{3\pi}{2}$.

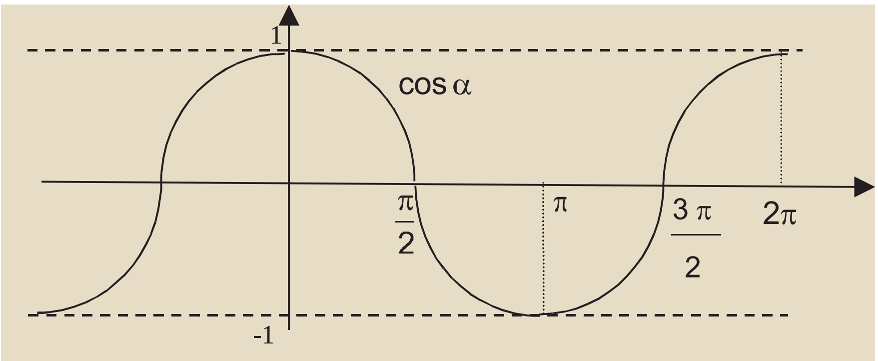
Un valor interesante para la tangente es el de $\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad} = 45º$. Como 45º es la inclinación de la bisectriz del 1er cuadrante, y en esta recta la abscisa y la ordenada coinciden, también lo harán $\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}$ y $\cos\frac{\pi}{4}$ por lo que $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

La circunferencia goniométrica nos permite representar las funciones seno y coseno y también hallar algunas propiedades importantes:

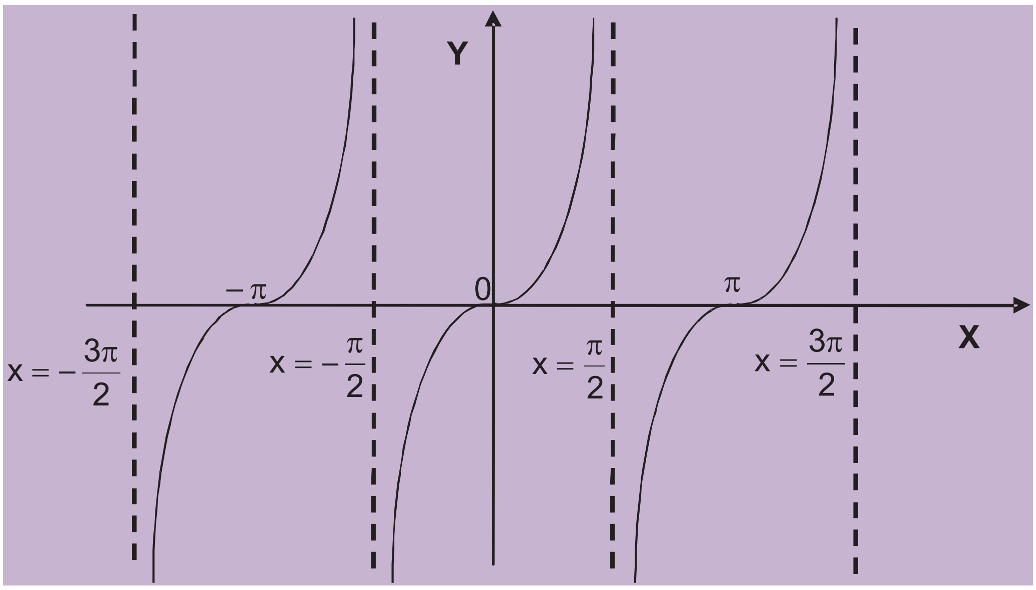


De la gráfica del seno, llamada **sinusoide**, se deduce que el trozo que hemos representado, que es el que va de 0 a 2π, se repite una y otra vez, pues al pasar de 2π lo que hacemos es dar vueltas a la circunferencia, obteniéndose de nuevo los mismos valores. Por esta razón se dice que el seno es una función periódica, de período 2π, que es el ángulo que hay que girar para que vuelvan a repetirse los valores. Abreviadamente $\text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}\alpha$.

El coseno tiene la misma forma, aunque empieza valiendo 1 (está desplazada $\frac{\pi}{2}$ rad con respecto al seno), y el mismo período, por lo que escribiremos $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$.



La tangente no se parece a ninguna de las anteriores.



Vale 0 siempre que lo vale el seno. A medida que nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda (ángulos del 1^er^ cuadrante) el coseno se acerca a 0 con números positivos y el seno a 1, por lo que la tangente tenderá a ∞. Si nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la derecha (ángulos del 2º cuadrante), el coseno se acerca a 0 pero con números negativos y el seno se acerca a 1, por lo que la tangente tiende a $-\infty$. Por lo tanto, $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical de la tangente.

En $\frac{3\pi}{2}$ tenemos que por la izquierda, el coseno y el seno son negativos (están en el 3er cuadrante) por lo que la tangente tenderá a ∞, mientras que por la derecha el coseno es positivo y el seno negativo, con lo que la tangente se va a $-\infty$. La recta $x = \frac{3\pi}{2}$ es otra asíntota vertical de la tangente. Igual le sucede en $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}, \ldots$, es decir, la tangente tiene infinitas asíntotas verticales, pasando dichas asíntotas por puntos cuya abscisa es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, teniendo por ecuaciones $x = \frac{\pm(2n+1)}{2}$. Como las asíntotas verticales van de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, por ejemplo, el período de la tangente es de $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad, repitiéndose los valores de la tangente cada media vuelta a la circunferencia.

El siguiente paso es definir las **funciones trigonométricas** **sen *x***, **cos *x*** y **tag *x***, verificando esta última que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Las funciones responden a una abstracción de las razones trigonométricas y conservan las propiedades que tienen dichas razones, que son:

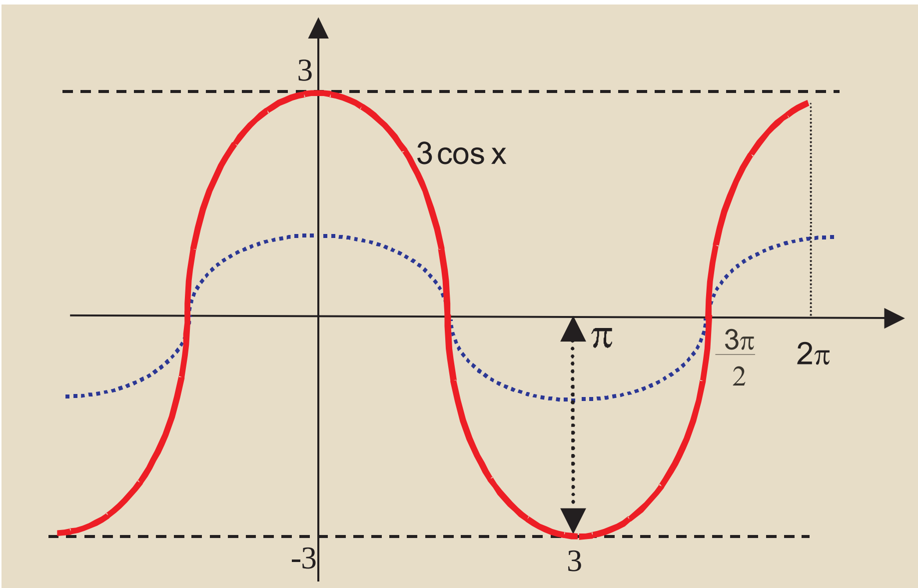
- El dominio de las funciones seno y coseno es todo R, y el de la tangente será $R - \left\{ \pm \frac{(2n+1)\ \pi}{2} \right\}$, pues como hemos visto tenemos que excluir los puntos cuya abscisa sea múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$. Esto hace que las tres sean continuas en sus respectivos dominios.
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow -1 \le \operatorname{sen} x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow$ Las funciones seno y coseno están acotadas superiormente por 1 e inferiormente por -1, mientras que la función tangente no está acotada. Se dice que la amplitud del seno y del coseno vale 1.
- Las tres son **funciones periódicas**: seno y coseno tienen de período 2π rad y la tangente π rad: $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x.$

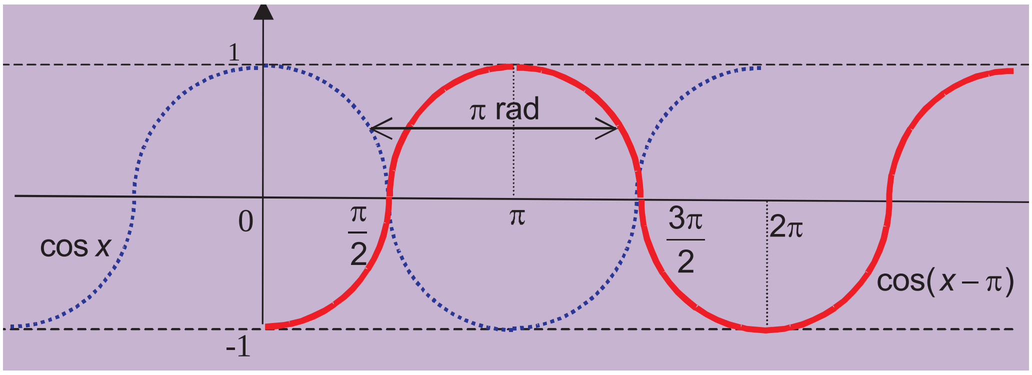
Estas funciones se usan para la descripción de fenómenos periódicos, dadas sus propiedades.

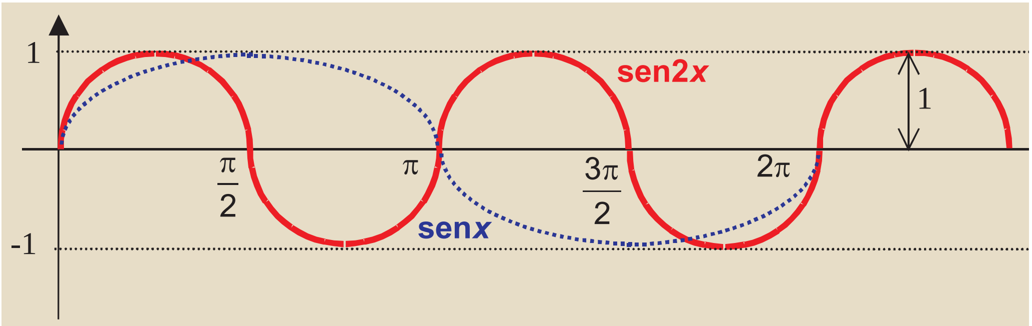
- Podemos cambiar la amplitud si multiplicamos seno y coseno por algún número distinto de 1 y de -1. Por ejemplo, la amplitud de $3\operatorname{sen} x$ es 3, pues verificará que $-3 \leq 3\operatorname{sen} x \leq 3$.

- Podemos desplazarlas a izquierda y a derecha sin más que sumar o restar una cantidad en el argumento. Por ejemplo, $\cos(x + \pi)$ está desplazado π rad hacia la derecha en relación con $\cos x$.

- Podemos modularla (cambiarle el período T) multiplicando o dividiendo el argumento por un número. Por ejemplo, la función $\operatorname{sen} 2x$ tiene un período de $\pi\left(=\frac{2\pi}{2}\right)$ rad, ya que $2x$ crece el doble de lo que lo hace x, por lo que $\operatorname{sen} 2x$ tardará la mitad en repetirse. En cambio, $\cos\frac{x}{3}$ tiene un período de 6π $(= 3 \cdot 2\pi)$ rad, pues $\frac{x}{3}$ crece la tercera parte de lo que lo hace x, por lo que $\cos\frac{x}{3}$ tardará tres veces más en repetirse. En general, el $\operatorname{sen} kx$ ó $\cos kx$ tienen por período $T = \frac{2\pi}{k}$.







¿Cómo podremos despejar x en la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$?

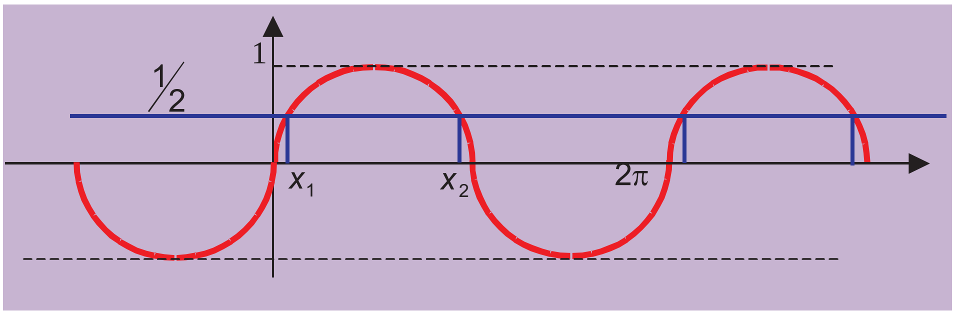
Para ello necesitamos definir unas funciones inversas. Tenemos tres, una para cada función, que son:

- **arc sen *x***, que en la calculadora suele aparecer como $\sin^{-1}$, es la inversa del seno, se lee arco cuyo seno vale x o, abreviadamente, arco seno de x. Como el seno está acotado por 1 y -1, la función $\operatorname{arc\,sen} x$ no admite que x sea mayor que 1 o menor que -1.

- **arc cos *x***, en la calculadora $\cos^{-1}$, es la inversa del coseno, se lee arco cuyo coseno vale x o, abreviadamente, arco coseno de x. Tampoco en este caso x puede ser mayor que 1 o menor que -1.

- **arc tg *x***, en la calculadora $\tan^{-1}$, inversa de la tangente, que se lee como arco cuya tangente vale x o, abreviadamente, arco tangente de x. Como la tangente no está acotada, tampoco lo estarán los valores que podemos poner en el arco tangente.

Estas tres funciones al introducirles un valor devuelven un ángulo. El problema es que no devuelven uno, sino que devuelven infinitos, porque las funciones de las que son inversas son periódicas y por lo tanto se repiten indefinidamente. Aunque evitemos la repetición periódica restringiéndonos al intervalo [0, 2π], estas funciones inversas nos devuelven más de un valor, lo que en rigor les quitaría el título de funciones. Por ejemplo, la ecuación del principio sen$x = \frac{1}{2}$ tendría dos soluciones, una del 1[er] cuadrante y la otra del 2º, aunque la calculadora sólo nos dará una: la del 1[er] cuadrante. Fíjate en el gráfico:



Lo mismo le ocurre a la ecuación cos$x$ = 0,75: la calculadora nos dará una única solución (la del 1[er] cuadrante) y se comerá la que hay en el 4º cuadrante (prueba con la gráfica del coseno para comprobarlo).

La forma de despejar es la siguiente:

$\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \text{arc sen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Con la calculadora operaríamos así:

$\frac{1}{2}$ SHIFT $\sin^{-1}$ obteniendo 30, si lo tenemos en sexagesimal, ó 0,5236 en rad (que son los $\frac{\pi}{6}$)

$\cos x = 0{,}75 \Rightarrow x = \text{arc cos}0{,}75 = 0{,}7227 \text{ rad} = 41{,}4096^\circ, \quad 5{,}5605 \text{ rad} = 318{,}5904^\circ$. Con la calculadora:

0,75 SHIFT $\cos^{-1}$ obteniendo sólo el valor del primer cuadrante.

Una última observación sobre las funciones inversas. Como son las inversas, al componerlas con sus funciones nos darán la función identidad, según las fórmulas:

$$(\text{sen} \circ \text{arc sen})(x) = \text{sen}(\text{arc sen}x) = x$$

Aquí x ha de ser una cantidad sin unidades, pues actúa primero el arco seno, que da un ángulo que luego coge el seno para devolver un valor.

$$(\text{arc sen} \circ \text{sen})(x) = \text{arc sen}(\text{sen}x) = x$$

Aquí x ha de ser un ángulo que el seno convierte en una cantidad adimensional para que el arco seno nos devuelva un ángulo.

Ejemplos

1. Indica la amplitud, el período y el desplazamiento lateral, si lo hubiera, de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}(x+\pi)$; **b)** $y = 5\cos x$; **c)** $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución.

a) El seno no está multiplicado por ningún número, por lo que su amplitud no cambia, y vale 1; en el argumento x está multiplicada por 1 por lo que no cambia el período valiendo $T = 2\pi$; como tenemos $x + \pi$ la función está desplazada π radianes hacia la izquierda, porque al resolver la ecuación $x + \pi = 0 \Rightarrow x = -\pi$

b) Como el coseno está multiplicado por 5, su amplitud valdrá 5; en el argumento sólo aparece x, lo que indica que ni se modifica el período, que sigue valiendo 2π, ni hay desplazamiento lateral.

c) La amplitud vale 2; el período valdrá $T = \frac{2\pi}{3}$ y habrá un desplazamiento lateral que se obtiene de resolver la ecuación $3x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

2. Calcula la inversa de la función $y = 4\text{sen}(3x - \pi)$

Solución.

$$\text{Cambio } \begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = 4\text{sen}(3y-\pi) \Rightarrow \text{sen}(3y-\pi) = \frac{x}{4} \Rightarrow (3y-\pi) = \text{arc sen}\frac{x}{4} \Rightarrow$$

$$3y = \pi + \text{arc sen}\frac{x}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi + \text{arc sen}\frac{x}{4}}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\text{arc sen}\frac{x}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\text{arc sen}\frac{x}{4}.$$

3. Halla la inversa de la función $y = 5\text{tg}\left(\frac{x}{3} + 1\right)$.

Solución.

$$\text{Cambio } \begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = 5\text{tg}\left(\frac{y}{3}+1\right) \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{y}{3}+1\right) = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{y}{3} + 1 = \text{arc tg}\frac{x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} = \text{arc tg}\frac{x}{5} - 1 \Rightarrow y = 3\left(\text{arc tg}\frac{x}{5} - 1\right).$$

4. Indica la amplitud, el período y el desplazamiento lateral, si lo hubiera, de las funciones:

a) $y = 7\cos 4x$; **b)** $y = \frac{1}{5}\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$; **c)** $y = -6\text{sen}\frac{x}{2}$.

Solución.

a) La amplitud es 7; no hay desplazamiento lateral, pues no hay ninguna cantidad sumando o restando en el argumento; el período será $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

b) La amplitud es $\frac{1}{5}$; el período no cambia porque el número que multiplica a x es 1 y hay un desplazamiento lateral de $\frac{3\pi}{2}$ rad hacia la izquierda, que se obtiene al resolver la ecuación $x + \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

c) La amplitud vale 6, por que el signo - lo único que hace es dar la vuelta a la función respecto al eje X (pasa lo positivo a negativo y lo negativo a positivo); no hay desplazamiento lateral y el período valdrá

Actividades

22. Calcula la inversa de $y = 5\text{sen}(x - \pi) + 1$.

23. Indica al amplitud, el período y el desplazamiento lateral de las funciones siguientes:

a) $y = -\frac{1}{2}\cos(4x + \pi)$; **b)** $y = \text{sen}\left(\frac{x+1}{5}\right)$; **c)** $y = 4\text{sen}(8x - 7)$.

24. Averigua las soluciones que tienen en el primer cuadrante las ecuaciones siguientes, tanto en radianes como en sexagesimal: **a)** $\text{sen}\, x = 0{,}1$; **b)** $\text{tg}\, x = 4$; **c)** $3\cos x + 2 = 4$.