5 Funciones

En la presente Unidad estudiamos los fundamentos de las funciones. Veremos las dos notaciones existentes para familiarizarnos con los términos usados en Matemáticas, y así poder introducir también el concepto de Dominio de una función. Cuando conocemos la relación entre variable independiente y dependiente podemos plasmarla en una gráfica, aunque el estudio riguroso y el esbozo de gráficas de funciones no aparecerá hasta la Unidad 9.

Una vez conocidos los términos básicos del lenguaje de funciones, pasamos a estudiar las funciones más elementales: lineales, cuadráticas, proporcionalidad inversa, valor absoluto, segmentarias; todas ellas conocidas de la E.S.O. Nos centraremos sobre todo en su representación gráfica, ya que son fácilmente representables a partir de pocas propiedades y sirven como un buen entrenamiento para funciones más complejas. También citaremos las funciones con radicales, aunque únicamente las que tienen raíces cuadradas, las más sencillas.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Profundización y adquisición del vocabulario para el estudio y comprensión del concepto de función.
2. Estudio del dominio y de la imagen de una función.
3. Interpretación de gráficas de valores desde un punto de vista funcional.
4. Uso de los métodos de interpolación y extrapolación lineal para el cálculo razonado de datos desconocidos.
5. Introducción de técnicas y procedimientos para el análisis de funciones, utilizables tanto en funciones elementales como en cualesquiera otras.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Concepto de función

Una **función** es una **regla que permite transformar un número real en otro**. El número que se transforma, habitualmente representado por x, se llama **variable independiente**, y el resultado de la transformación, representado por $f(x)$ o y, se llama **variable dependiente**. La notación usada para las funciones es $f(x)$ = *regla para transformar x*, y esta regla vendrá casi siempre dada por un fórmula. Por ejemplo, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 5$, $y = \ln(x + 4)$.

Hay que hacer notar que la función se llama f o g, y que $f(x)$ o $g(x)$ son los valores que asigna la función f o g a la variable x. Sin embargo, también se emplea $f(x)$ para designar a la función, siempre que no haya problemas de interpretación.

A los números que se van a transformar por una función también se les llama ***originales*** y los resultados de la transformación ***imágenes***. No todas las reglas son funciones, sino sólo aquellas que transforman un número en una única imagen, es decir, un valor x sólo puede tener una imagen $f(x)$.

Ejemplos

1. Calcula las imágenes de -7, 1, $\sqrt{5}$ por las funciones $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 5$, $y = \dfrac{4}{x+2}$

Solución.

- $f(-7) = 2 \cdot (-7) = -14;\quad f(1) = 2 \cdot 1 = 2;\quad f(\sqrt{5}) = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$
- $g(-7) = (-7)^2 - 3 \cdot (-7) + 5 = 49 + 21 + 5 = 75;\quad g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 1 - 3 + 5 = 3;$

  $g(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 3 \cdot \sqrt{5} + 5 = 5 - 3\sqrt{5} + 5 = 10 - 3\sqrt{5}$
- $y(-7) = \dfrac{4}{-7+2} = -\dfrac{4}{5};\quad y(1) = \dfrac{4}{1+2} = \dfrac{4}{3};\quad y(\sqrt{5}) = \dfrac{4}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{4 \cdot (\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} =$

  $= \dfrac{4 \cdot (\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4 \cdot (\sqrt{5}-2)$

2. Averigua las imágenes de -2, 0 y $x + h$ por las funciones $y = x + 4$,

$g(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $m(x) = \sqrt{x+1}$

Solución.

- $y(-2) = -2 + 4 = 2$; $y(0) = 0 + 4 = 4$; $y(x+h) = x + h + 4$
- $g(-2) = \dfrac{-2+3}{-2} = -\dfrac{1}{2}$; $g(0) = \dfrac{0+3}{0} \Rightarrow$ no existe $g(0)$; $g(x+h) = \dfrac{x+h+3}{x+h}$
- $m(-2) = \sqrt{-2+1} = \sqrt{-1} \Rightarrow$ no existe $m(-2)$; $m(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$;
  $m(x+h) = \sqrt{x+h+1}$

Actividades

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ averigua el valor de $f(-3)$, $f(0)$, $f(7)$, $f(-x)$.
2. Calcula las imágenes de $-\sqrt{2}$, $x-h$, 3 por la función $f(x) = 7 - x^2$
3. Dada la función $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, halla $g(-5)$, $g(0)$, $g(3+h)$, $g(5)$.
4. Dada la función $y = \sqrt{x^2+20}$ calcula $y(-7)$, $y(-4)$, $y(x+h)$, $y(4+h)$.

2. Dominio de una función

Hemos visto en los ejemplos que para determinadas funciones no todos los números reales tienen imagen. En las funciones polinómicas podemos encontrar siempre una imagen para cualquier valor de x, ya que un número podemos elevarlo a cualquier número natural, mientras que si la función tiene denominador, no existe imagen para aquellos valores que anulan dicho denominador, pues no podemos dividir por cero. Otro caso en el que aparecen valores que no tienen imagen es en el de las raíces cuadradas (o en las raíces de índice par), porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. También aparecen números sin imagen en el caso de los logaritmos, dado que no existen los logaritmos de los números negativos ni el del cero.

Para identificar a los números que tienen imagen por una determinada función se usa el **Dominio de una función**, que es *el conjunto formado por todos los elementos que tienen imagen por dicha función:* Dom $f = \{x \in R \,/\text{existe } f(x)\}$. En el caso de las funciones polinómicas: Dom $f = R$.

En la determinación del dominio se pueden presentar los casos siguientes:

1º Si $f(x)$ es una función formada por el cociente de dos polinomios, el polinomio $N(x)$ dividido por el polinomio $D(x)$, $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$, entonces el dominio está formado por todos los números reales menos aquellos que anulan el denominador, es decir los que cumplen que $D(x) = 0$. Por tanto, Dom $f = \{x \in R / D(x) \neq 0\}$.

2º Cuando $f(x)$ es la raíz de una expresión algebraica, $f(x)=\sqrt{R(x)}$, entonces el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo. Por lo tanto, hemos de resolver la inecuación $R(x) \geq 0$. Luego,

Dom $f = \{x \in R / R(x) \geq 0\}$

3º Cuando $f(x)$ es el logaritmo de una expresión algebraica $f(x) = \log A(x)$, entonces el dominio está formado por los números reales para los que $A(x) > 0$, es decir, las soluciones de la inecuación $A(x) > 0$. Por lo tanto, Dom $f = \{x \in R / A(x) > 0\}$.

Ejemplos

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$; **b)** $g(x)=\sqrt{x-4}$; **c)** $h(x) = \ln(x + 5)$.

Solución.

a) Como es una función con denominador, igualamos éste a cero y resolvemos la ecuación. En este caso tenemos la ecuación de segundo grado: $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Por lo tanto, Dom $f = R - \{2, 3\}$

b) Como es una raíz cuadrada, hemos de resolver la inecuación $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$, entonces Dom $g = [4, \infty)$

c) Al ser un logaritmo neperiano (que son los más usados), hay que resolver la inecuación: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$ entonces Dom $h = (-5, \infty)$.

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x+7}{x^2-1}$; **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-7}}$; **c)** $g(x)=\ln\dfrac{x+7}{x^2-1}$

Solución.

a) Como $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$, entonces Dom $y = R - \{1, -1\}$

b) El radicando es una fracción y resolvemos la inecuación $\dfrac{x+3}{x-7}\geq 0$, igualamos numerador y denominador a cero: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$; y $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Descomponemos la recta real en tres intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 7)$ y $(7, \infty)$, y construimos la tabla:

	$(\infty, -3)$	$(-3,7)$	$(7,\infty)$
$\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+3}{x-7}\right)$	$\dfrac{-}{-}=+$	$\dfrac{+}{-}=-$	$\dfrac{+}{+}=+$

A partir de ella obtenemos Dom $f = (-\infty, -3] \cup (7, \infty)$.

Observa que en el dominio entra - 3, porque anula al numerador, obteniéndose $f(-3) = 0$, mientras que 7 anula al denominador, luego no existe $f(7)$.

c) Resolvemos la inecuación $\dfrac{x+7}{x^2-1} > 0$, $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$; $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Partimos la recta real en cuatro intervalos $(-\infty, -7)$, $(-7, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

Construimos la tabla

	$(-\infty, -7)$	$(-7, -1)$	$(-1,1)$	$(1, \infty)$
$\text{sgn}\left(\dfrac{x+7}{x^2-1}\right)$	$\dfrac{-}{+} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$	$\dfrac{+}{-} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$

A partir de la tabla se obtiene Dom $g = (-7, -1) \cup (1, \infty)$. En este caso no entran ni - 7 ni - 1 ni 1, puesto que como ya dijimos, no existe el ln 0.

Aunque parezcan pocos, el cálculo del dominio de otro tipo de funciones consiste en mezclar convenientemente estos tres casos. Podría darse algún otro caso como el siguiente, más de astucia que de dificultad.

3. Averigua el dominio de la función $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < 0 \\ 4x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solución.

Observando la definición de esta función segmentaria o definida a trozos, vemos que el problema es que no se ha definido la función para $x = 0$, con lo que su dominio sería Dom $f = R - \{0\}$.

Para terminar este apartado, mencionaremos un conjunto que en cierta medida complementa al dominio: la **Imagen** o **Recorrido de una función**. Si el Dominio es el conjunto de los números reales que tienen imagen por la función, la Imagen o Recorrido es ***el conjunto de los números reales que provienen de un original o antecedente por la función:***

$$Im\ f = \{\, y \in R \,/\, \text{existe } x \text{ que verifica } y = f(x) \,\}$$

El problema de averiguar la Imagen es considerablemente más complejo que el de hallar el Dominio, no existiendo unas reglas fijas. Como ejemplo, podemos averiguar la Imagen de la función $f(x) = x^2$. Es fácil ver que, pongamos el número que pongamos, la imagen siempre va a ser positiva o, como mínimo, cero. Por lo tanto, Im $f = [0, \infty)$. El estudio de la Imagen se hace mejor a partir de la gráfica de la función.

Actividades

5. Halla el dominio de las funciones $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ y $g(x)=\sqrt{16-x^2}$

6. Averigua el dominio de $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$ y $g(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7. Calcula el dominio de $f(x)=\ln\left(x^2-x-12\right)$ y $g(x)=\dfrac{1}{2x-5}$

8. Averigua el dominio de $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+5}}$ y $g(x)=\ln\left(x^2-2x\right)$

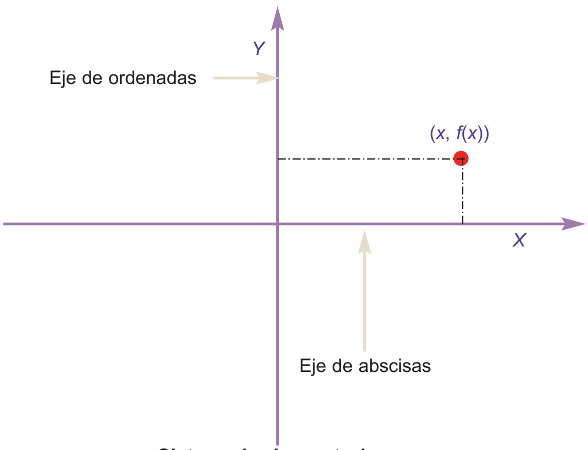
3. Gráficas de funciones

Como una imagen vale más que mil palabras, si queremos averiguar las propiedades de una función, es más rápido y efectivo el observar su gráfica.

¿Cómo podemos construir una gráfica? Necesitamos dos rectas: una para los originales, variables independientes o *x*, y otra para las imágenes, variables dependientes o *y*. La primera se denomina **eje de abscisas *X*** y en ella marcamos el valor de las *x*. La segunda se llama **eje de ordenadas *Y*** y en ella marcamos el valor de las *f*(*x*). Los ejes son perpendiculares entre sí y la gráfica está constituida por infinitos pares de valores (*x*,*f*(*x*)), denominados **puntos**. El sistema aquí descrito se llama sistema de ejes cartesianos o simplemente sistema de ejes.

Observa que cuando se habla de un punto de una función se considera el par (*x*,*f*(*x*)), no sólo *f*(*x*); y es que necesitamos dos valores para determinar un punto en un plano. También debes notar que hablamos de *f*(*x*) o *y* dependiendo de nuestro estado de ánimo. Como ya sabes, en este contexto ambos términos son sinónimos.

A la vista de lo anterior podría pensarse que para representar cualquier función bastará con dar valores a *x* y obtener los respectivos *f*(*x*). ¡Pero *x* tiene infinitos valores! Hay que buscar otro método (que se estudiará en la unidad 9.4) que nos permita esbozar una gráfica a partir de un pequeño número de operaciones. No obstante, existen funciones, dada su sencillez, que pueden ser representadas con pocos puntos; algunas se estudiaron en los cursos de E.S.O., como las funciones constantes, lineales y cuadráticas.



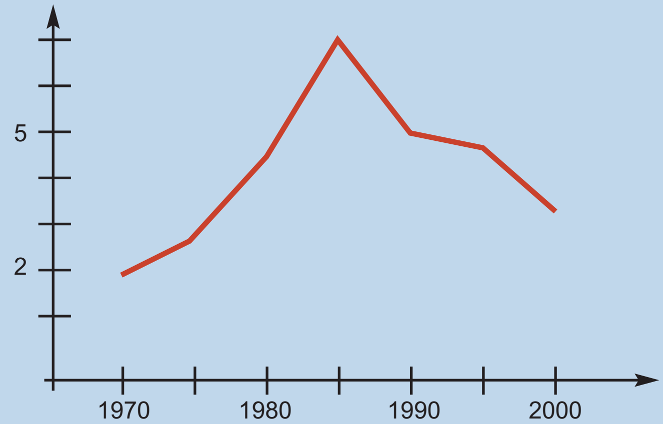
Sistema de ejes cartesianos

Hasta ahora hemos hablado de las gráficas de funciones, es decir, de funciones de las que disponemos de una fórmula. Sin embargo, en prácticamente todos los campos de estudio aparecen gráficas como expresión de una relación entre magnitudes que también pueden interpretarse con el lenguaje de las funciones. A veces se trata de un gráfico en el que aparecen reflejadas las variaciones de las cotizaciones de la Bolsa en el tiempo, o la evolución de la temperatura corporal de una persona en el tiempo, o el crecimiento del P.I.B. de un país en función del dinero invertido en Educación, etc. Estas gráficas no se ajustan a fórmula alguna, aunque evidentemente haya ciertas funciones, como veremos en estadística, que se adaptan mejor a ellas.

Ejemplos

1. Construye una gráfica uniendo los puntos de la siguiente tabla mediante segmentos:

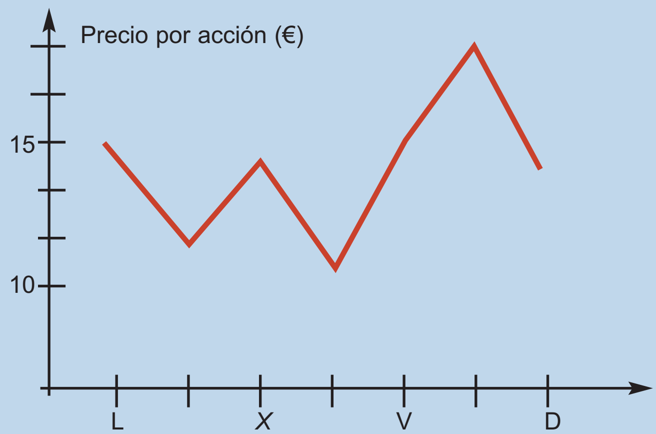
Año	Tasa de paro (%)
1970	2,1
1975	2,8
1980	4,6
1985	7,2
1990	5,1
1995	4,9
2000	3,5



2. La siguiente gráfica muestra la evolución de la cotización de las acciones de la empresa Currando, S.A. durante una semana. ¿Qué día interesó vender las acciones? ¿Qué día interesó comprarlas? Si se compraron el mejor día para su compra y luego se vendieron en el mejor día para su venta, ¿cuánto dinero se ganó? ¿Cuál fue el porcentaje de beneficio?

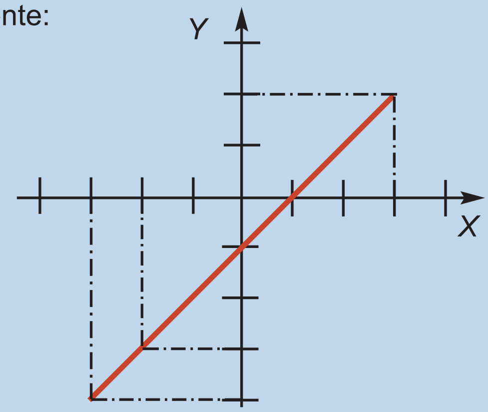
Solución.

El mejor día para su venta fue el sábado, pues estaban a 17 € aproximadamente, mientras que el mejor día para su compra fue el jueves, ya que cada acción venía a costar 10 € aproximadamente. La ganancia obtenida por acción sería 17 - 10 = 7 €, lo que hace un porcentaje de $\frac{7}{10} \cdot 100 = 70\%$.



3. Representa la función dada por la tabla siguiente:

x	- 3	- 2	0	1	3
y	- 4	- 3	- 1	0	2

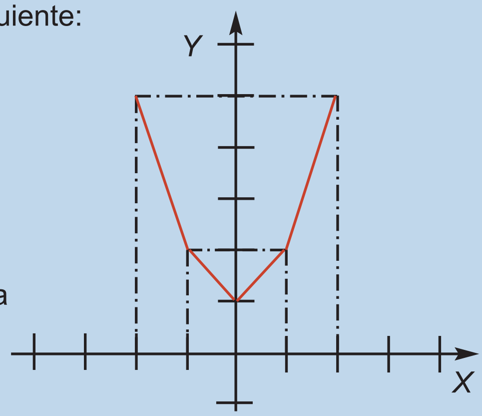


4. Representa la función dada por la tabla siguiente:

x	- 2	- 1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

Solución.

En la tabla no se aprecia que existe la relación funcional $y = x^2 + 1$, que nos daría una parábola al ser representada.



Actividades

9. Representa la función dada por la tabla siguiente:

x	0	100	200	300	400
y	150	400	550	350	200

10. Se tiene la siguiente tabla, en la que se relaciona el dinero invertido en publicidad y las ventas obtenidas de un cierto producto (ambos en miles de €). Haz un gráfico. ¿Para qué gasto en publicidad se obtiene el mayor beneficio? ¿Interesaría aumentar el gasto en publicidad indefinidamente?

Publicidad (en miles de €)	5	10	15	20	25	30	35
Ventas (en miles de €)	120	122	125	130	128	124	110

4. Funciones lineales. Interpolación

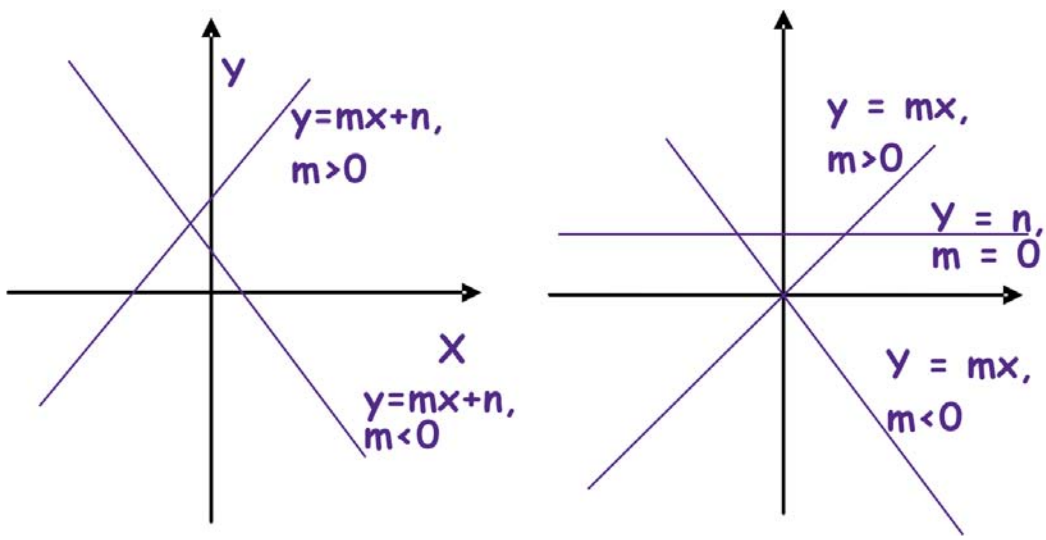
4.1. Funciones lineales

En este texto vamos a llamar **funciones lineales** a las que tienen la forma $y = m\,x + n$, y su gráfica es una recta. Recordemos que m se llama **pendiente** de la recta y que n es la **ordenada en el origen** (si $x = 0$, $f(0) = n$). De los dos el más importante es m, que se calcula como:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, siendo (x_1,y_1) y (x_2,y_2) dos puntos cualesquiera de la función.

Se ve fácilmente que $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Estos términos se llaman **incremento** o **variación** de y y de x, respectivamente. Considerados de esta última forma vemos que se trata de variaciones absolutas, mientras que m representa una variación relativa, pues es el cociente de la variación absoluta de y entre la variación absoluta de x, es decir, m es la **tasa de variación** de f respecto de x. Como veremos en 8.1., $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es la **tasa de variación media** de una función, que se convierte en el importantísimo concepto de **derivada** de una función en un punto.

Cuando $n = 0$, la gráfica de $y = mx$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Si $m = 0$, tenemos una función constante, puesto que $f(x) = n$ para cualquier valor de x. Y como sabemos que para representar una función lineal o una recta nos basta con conocer dos puntos de ella, la gráfica de estas funciones se hace a partir de una tabla con dos valores.



Ejemplos

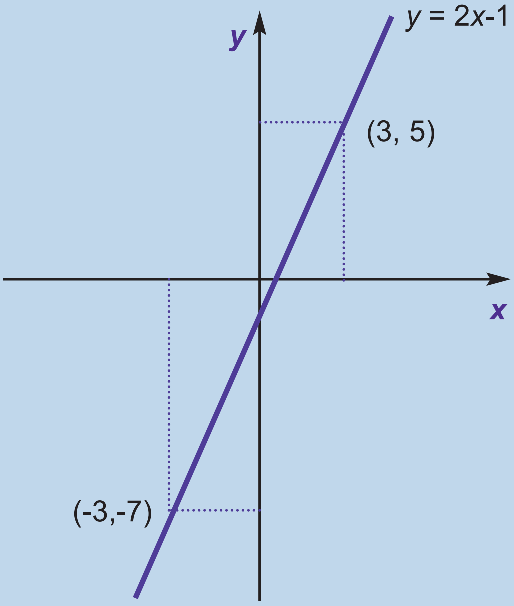
1. Representa $y = 2x - 1$.

Solución.

Podemos construir la siguiente tabla:

x	$y = 2x - 1$	Puntos
-3	$2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7$	(-3,-7)
3	$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$	(3, 5)

y representar los puntos obtenidos.



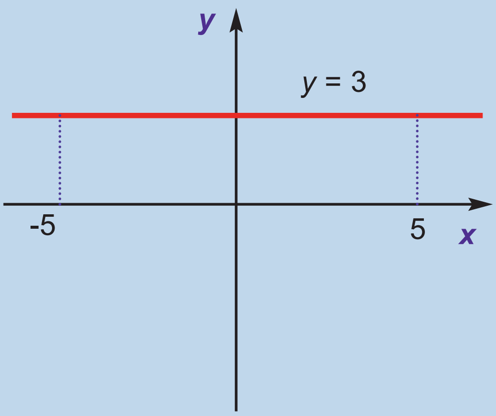
Hemos cogido dos puntos cualesquiera, uno positivo y otro negativo, suficientemente alejados para que al poner una regla las oscilaciones sean las menores posibles. Podríamos haber cogido otros distintos y obtendríamos la misma recta, pero tal vez sería más incómodo de representar: $x = 0$ y $x = 1$ tienen el problema de su excesiva proximidad y podría bailar la regla al trazar la recta.

2. Representa la función y = 3.

Solución.

Aunque no es necesario, pues se ve que la imagen siempre es 3, independientemente del valor de x, podemos construir la siguiente tabla para representar la función:

x	$y = 3$	Puntos
-5	3	(-5,3)
5	3	(5, 3)



4.2. Interpolación

Muy a menudo, cuando tratamos con variables que están relacionadas funcionalmente, o que creemos que lo están, sólo somos capaces de averiguar ciertos valores. Podemos representarlos gráficamente para hacernos una idea de la relación que existe entre x e y, aunque habitualmente solemos estar más interesados en calcular el valor que toma la variable y para ciertos valores de la variable x.

Si el valor de x está dentro del rango de los valores conocidos, hablamos de interpolación, y de extrapolación si está fuera. Para efectuar los cálculos se usan polinomios: si sólo disponemos de dos parejas de valores , la interpolación (y extrapolación) ha de ser forzosamente lineal (mediante un polinomio de primer grado). Si disponemos de más valores, podemos recurrir a polinomios de mayor grado, más fiables que los de primer grado. Sin embargo, suelen usarse a lo sumo polinomios de tercer grado, siendo los de segundo grado (parábolas) suficientemente precisas para la mayor parte de las necesidades.

Una condición importante para que la extrapolación sea fiable es que los valores a calcular estén próximos a los conocidos, porque si están muy alejados apenas podremos confiar en nuestras predicciones. Esta es una diferencia importante con la interpolación, pues en este caso podemos hacernos una idea del error que cometemos (y por lo tanto de la fiabilidad) sin más que calcular el valor que predice el polinomio interpolador para datos conocidos entre los que se encuentre nuestra predicción, algo imposible en el caso de la extrapolación.

La interpolación lineal puede llevarse a cabo de varias formas; vamos a verlas.

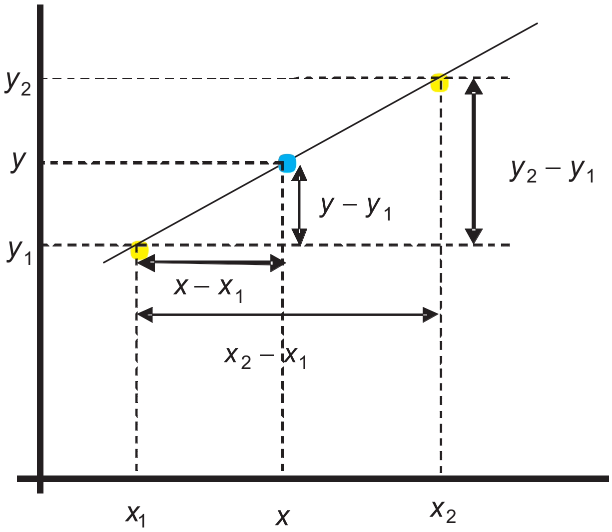
1. *Mediante una proporción*. A la vista del gráfico y teniendo en cuenta que se trata de triángulos proporcionales (en los que se puede usar el teorema de Tales) tenemos que: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,

   donde (x_1,y_1), (x_2,y_2) son los valores conocidos y (x,y) los valores a calcular por la interpolación.

   Recordando que $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,

   podemos escribir

   $y = y_1 + m\,(x - x_1)$, más cómoda para los cálculos.



2. *Mediante la ecuación de la recta que pasa por dos puntos*. Aparte de la ecuación punto-pendiente de la recta que aparece en la forma 1, podemos usar la ecuación explícita de la recta $y = mx + n$. En ella calculamos m y n y así podemos hallar cualquier otro valor que nos interese.

3. *Mediante la fórmula* $y = a + b\,(x - x_1)$. Se trata de rescribir el polinomio interpolador de una forma más sencilla. En este caso, coincide con la de la forma 1.

4. *Mediante el polinomio interpolador de Lagrange*. Es el procedimiento más general, más rápido y cómodo, y por ello más usado, para la interpolación mediante un polinomio de cualquier grado. Para el caso que nos ocupa, parece más lioso que cualquiera de los anteriores, pero es una sensación engañosa: no tenemos que calcular ningún coeficiente, pues la interpolación, o la extrapolación, se obtiene mediante operaciones aritméticas básicas. El polinomio interpolador de primer grado es:

$$y = y_1\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Observa que hay una regularidad, que se mantiene al aumentar el grado y que es lo que permite que se pueda programar en un ordenador fácilmente. Fíjate que al sustituir x por su valor, quedan restas, divisiones, productos y sumas.

Ejemplos

1. En la tabla de la distribución normal N(0,1), averigua para qué valor de k se verifica que $P[z < k] = 0{,}8583$.

Solución.

En la tabla de la N(0,1) aparecen tabulados los valores de $P[z < k]$, con $k \geq 0{,}50$, pues k viene expresado hasta las centésimas. Lo que nos interesa aquí es dar un valor aproximado para una cierto k que no aparece en dicha tabla. Yendo a ella, encontramos dos valores entre los que se encuentra el buscado: $P[z < 1{,}07] = 0{,}8577$, $P[z < 1{,}08] = 0{,}8599$. Luego $1{,}07 < k < 1{,}08$. Como k es el valor que buscamos (la y de la fórmula), $P[z < k]$ es la x. Redondearemos k hasta las milésimas:

$$k = 1{,}07 + \frac{1{,}08 - 1{,}07}{0{,}8599 - 0{,}8577} \cdot \left(0{,}8583 - 0{,}8577\right) \approx 1{,}073.$$

2. La acción de Park Bank se cotizaba a 33,25 € el martes de una semana, y a 34,52 € el jueves de esa misma semana. Averigua el precio que tendría dicha acción el lunes, el miércoles y el viernes de esa semana mediante interpolación y extrapolación lineal.

Solución.

La variable y es el precio de la acción y la x el tiempo transcurrido desde el martes (que podemos tomar como origen). Sabemos entonces que la recta $y = mx + n$ pasa por los puntos (0; 33,25) y (2; 34,52), por lo que podemos plantear el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} n = 33{,}25 \\ 2m + n = 34{,}52 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0{,}635x + 33{,}25.$$

Interpolando hallamos el valor de la acción el miércoles ($x = 1$) : $y(1) = 33{,}885 \approx 33{,}89$ €.

Extrapolando: lunes ($x = -1$) $y(-1) = 32{,}615 \approx 32{,}62$ €; viernes ($x = 3$): $y(3) = 35{,}155 \approx 35{,}16$ €.

En el ejemplo siguiente se trata de justificar el motivo de utilizar polinomios interpoladores de grado superior a uno.

Halla, mediante interpolación lineal, el valor de y para y de la siguiente tabla

x	1	4	8
y	2	0	9

Solución.

Aquí tenemos 3 puntos, lo que nos complica la interpolación lineal, y nos permite hacer una interpolación cuadrática. Usando la fórmula $y = a + b(x - 1)$, y cogiendo los puntos extremos, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=a=2 \\ y(8)=a+7b=9 \end{array}\right\} \Rightarrow b=1 \Rightarrow y=2+(x-1)=x+1 \Rightarrow y(3)=2+2=4\ ;\ y(5,5)=6,5.$$

Comparando el valor intermedio se tiene que, en la tabla, $y(4) = 0$ y en la interpolación$y(4) = 4 + 1 = 5$, que son valores excesivamente alejados.

Podemos intentar resolver este problema de dos formas:

Primera, recurriendo a un polinomio interpolador de mayor grado (2º en este caso).

Como ejemplo, vamos a usar el polinomio interpolador de Lagrange de 2º grado:

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$, con lo que

$$y(3) = 2\frac{(3-4)(3-8)}{(1-4)(1-8)} + 0\frac{(3-1)(3-8)}{(4-1)(4-8)} + 9\frac{(3-1)(3-4)}{(8-1)(8-4)} = -0,167$$

$$y(5,5) = 2\frac{(5,5-4)(5,5-8)}{(1-4)(1-8)} + 0\frac{(5,5-1)(5,5-8)}{(4-1)(4-8)} + 9\frac{(5,5-1)(5,5-4)}{(8-1)(8-4)} = 1,813$$

Si tienes conocimientos del uso de Microsoft Excel, puedes hacer lo siguiente:

escribe los datos en dos columnas (una llámala x_i y la otra y_i). En la fórmula los valores de x_i van de la celda A4 a la A6, y los y_i de B4 a B6. Los valores de x a calcular los escribo en la columna D, empezando por la celda D4, y la fórmula para y en la celda E4. La fórmula es *=$B$4*(D4-$A$5)*(D4-$A$6)/($A$4-$A$5)/($A$4-$A$6)+$B$5*(D4-$A$4)*(D4-$A$6)/($A$5-$A$4)/($A$5-$A$6)+$B$6*(D4-$A$4)*(D4-$A$5)/($A$6-$A$4)/($A$6-$A$5)*

Los símbolos *$* se escriben porque las celdas en cuestión son referencias absolutas (los valores con subíndices 1, 2 y 3), no como las D que deben cambiar al estirar la fórmula.

Uso del polinomio interpolador de Lagrange de segundo grado con Microsoft Excel:

x_i	y_i		x	y
1	2,00		3	-0,167
4	0,00		5,5	1,813
8	9,00			

Segunda, construyendo una función a trozos, formada por dos polinomios interpoladores lineales.

Se trata de una función definida por dos rectas, una que pase por los puntos (1,2) y (4,0), y otra por (4,0) y (8,9). Usando las fórmulas $y = a + b(x-1)$ e $y = a + b(x-4)$, se obtienen dos sistemas de ecuaciones con las soluciones $a = 2,\ b = -\frac{2}{3}$ para la primera y $a=0$, $b=\frac{9}{4}$ para la segunda. la función será $f(x)=\begin{cases} 2-\frac{2}{3}(x-1), \text{ si } x\leq 4 \\ \frac{9}{4}(x-4), \text{ si } x>4 \end{cases}$

y las interpolaciones darán $f(3)=2-\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}\approx 0{,}667$, $\quad f(5{,}5)=\frac{9}{4}\cdot(5{,}5-1)=3{,}375.$

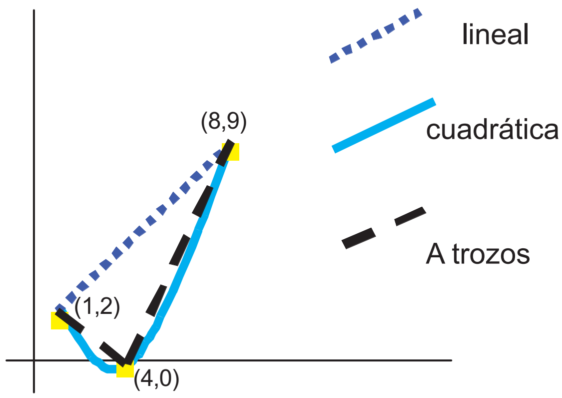
Observa que hay diferencia con la interpolación cuadrática, aunque no tan abultada como la primera que hicimos. Si representamos los puntos, vemos que la cuadrática se ajusta mejor a los datos.

Si sólo estamos interesados en los valores, pero no en la expresión de los polinomios, podemos usar la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange de primer grado:

$$y=y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$y(3)=2\cdot\frac{3-4}{1-4}+0\cdot\frac{3-1}{4-1}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$$

$$y(5{,}5)=0\cdot\frac{5{,}5-8}{4-8}+9\cdot\frac{5{,}5-4}{8-4}=3{,}375$$



Actividades

11. De acuerdo con los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) la población total de España en los años que se indican es la recogida en la siguiente tabla:

Año	2000	2002	2004	2006
Población	40 499 790	41 837 894	43 197 684	44 708 964

Averigua mediante interpolación lineal (con una función definida a trozos) la población en los años 2001, 2003 y 2005. Mediante extrapolación predice la población que hubo en el año 2000 y la que habrá en 2007 y 2008.

Responde a estas mismas preguntas usando el polinomio interpolador de 2º grado de Lagrange para los años 2000, 2002 y 2006. ¿Qué valor da dicho polinomio para el año 2004? ¿Qué error estamos cometiendo con la interpolación cuadrática?

12. Los beneficios de una empresa en los años 2005 y 2007 han sido 2,08 y 2,13 millones de €, respectivamente.

a) ¿Cuál fue el beneficio en el año 2006?

b) ¿Qué beneficio se espera para el año 2008?

13. En la tabla de la distribución normal N(0,1), averigua para qué valor de k se verifica que $P[z<k]=0{,}9142$.

Actividades

14.a

14.b

14. Dada la tabla

Año	2001	2003	2005	2007
Gastos (en millones de €)	3,48	3,97	4,88	6,01

a) ¿Qué función afín pasa por los puntos (2001;3,48) y (2003;3,97)? ¿Cuál por los puntos (2003;3,97) y (2005;4,88)? ¿Y por (2005;4,48) y (2007;6,01)? Escribe la función definida a trozos que, mediante interpolación lineal, permitiría calcular el gasto en cada uno de los años intermedios y halla el gasto previsto para los años 2000, 2002, 2004, 2006 y 2008.

b) Usando la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange de 2º grado, y usando los puntos (2001;3,48), (2003;3,97) y (2007;6,01) como los 1, 2 y 3 de la fórmula, revisa las previsiones efectuadas en el apartado a). Estima el error cometido en la aproximación cuadrática.

5. Función cuadrática

La **función cuadrática** responde a la fórmula $y = ax^2 + bx + c$, que no es más que un polinomio de segundo grado, y cuya representación gráfica se llama parábola.

Para representarla podemos usar varios métodos; pero en la práctica el más sencillo consiste en averiguar las coordenadas del vértice de la parábola y, a partir de la abscisa del vértice, construir una tabla de valores donde figuren tantos valores de x a la derecha como a la izquierda de la abscisa del vértice. Las coordenadas del vértice vienen dadas por $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, y debemos tener en cuenta que si a es positivo la parábola está abierta hacia arriba (el vértice es un mínimo) y si a es negativo la parábola está abierta hacia bajo (el vértice es un máximo)

Si en vez de la tabla resolvemos la ecuación de segundo grado $0 = ax^2 + bx + c$, obtenemos los puntos de corte de la función con el eje X y con el vértice ya tenemos elementos suficientes para dibujar la parábola. Este último recurso tiene algunas particularidades que aparecen al resolver la ecuación de segundo grado:

- Si ésta tiene dos soluciones reales distintas, ya tenemos dos puntos y con el vértice podemos dibujar la parábola.
- Si tiene una solución real doble, dicha solución proporciona las coordenadas del vértice, por lo que necesitamos otros dos puntos para trazar la gráfica. Los hallamos de una forma sencilla desplazándonos simétricamente alrededor del vértice (por ejemplo, haciendo $x_V + 3$, $x_V - 3$ y hallando sus respectivas ordenadas).
- Si no tiene soluciones reales, la parábola no corta al eje X. No obstante, podemos averiguar las coordenadas del vértice y desplazarnos simétricamente en torno a éste, igual que en el 2º caso, para hallar un par de puntos.

Ejemplos

1. Representa las funciones **a)** $y = x^2 - x - 2$; **b)** $y = x^2 - 4x + 4$; **c)** $y = -x^2 - x - 1$

Solución.

a) El vértice es $\left(-\frac{-1}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot(-2)-(-1)^2}{4\cdot 1}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ y como $a=1$ es positivo, la parábola es abierta hacia arriba. Como la abscisa del vértice es $x = \frac{1}{2}$, construimos una tabla dando valores a x alrededor de $\frac{1}{2}$: 1, 2, 3, 0, -1 y –2.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	0	-1
y	$-\frac{9}{4}$	-2	0	4	-2	0

, llevando estos puntos sobre unos ejes de coordenadas y uniéndolos mediante un trazo continuo obtenemos la parábola.

b) En este caso, si hallamos los puntos de corte con los ejes, resulta:

$$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=2.$$

El punto de corte, que ahora también es el vértice, tiene por coordenadas (2, 0). Desplazándonos simétricamente en torno a dicho vértice tenemos:

$$x_V+3=2+3=5 \Rightarrow y(5)=5^2-4\cdot 5+4=25-20+4=9 \;\Rightarrow (5,\ 9)$$

$$x_V-3=2-3=-1 \Rightarrow y(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+4=1+4+4=9 \Rightarrow (-1,\ 9).$$

Con los tres puntos anteriores, y viendo que a es positivo, por tanto el vértice es un mínimo, no hay dificultad para trazar la parábola.

c) No tiene soluciones reales. Resolvemos la ecuación:

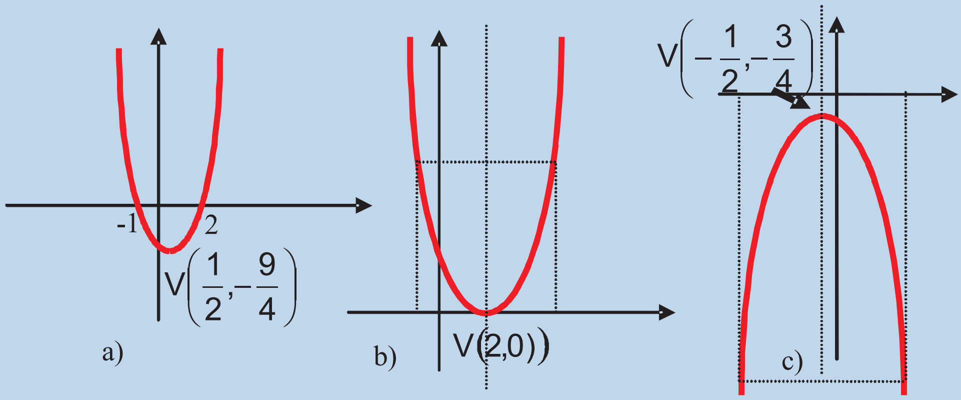
$$-x^2-x-1=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\notin R \Rightarrow$$ no tiene soluciones reales. Hallamos el vértice: $\left(-\frac{-1}{2\cdot(-1)}, \frac{4\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)^2}{4\cdot(-1)}\right)=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

Como a = -1 es negativo, la parábola está abierta hacia abajo. Desplazándonos simétricamente alrededor del vértice, obtenemos dos puntos más:

$$x_V+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=3 \Rightarrow y(3)=-3^2-3-1=-9-3-1=-13 \Rightarrow (3,-13).$$

$$x_V-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-4 \Rightarrow y(-4)=-(-4)^2-(-4)-1=-16+4-1=-13 \Rightarrow (-4,-13).$$

Con tres puntos podemos dibujar la parábola. Observa que hemos utilizado como desplazamiento fracciones de denominador 2 para que nos dé un número entero. Las gráficas de las tres funciones las hemos dibujado en la misma ilustración.



2. Halla las coordenadas del vértice y los puntos de corte de la función $y = 2x^2 + 9x - 5$ con los ejes coordenados. ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de dicha parábola?

Solución. Resolvemos la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 9x - 5 = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -5 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, (-5, 0) son los puntos de corte.

Vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{4}$; $y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-121}{8} \Rightarrow V\left(-\dfrac{9}{4}, -\dfrac{121}{8}\right)$.

Recordemos que el eje de simetría era la recta vertical (paralela al eje *Y*) que pasa por el vértice. Por tanto la ecuación es $x = x_V \Rightarrow x = -\dfrac{9}{4}$.

3. Un cañón lanza un disparo cuya trayectoria viene dada por $y = -3x^2 + 18x$, con x e y en cientos de metros. Calcula la altura máxima alcanzada por el disparo, así como el alcance del disparo.

Solución. La altura máxima no es más que $y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-18^2}{-12} = 27$, y el alcance del disparo es el punto en el que la función corta al eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 18x = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$, y $x_2 = 6$. Lógicamente 0 se corresponde con el punto en el que se encuentra el cañón, por lo que el alcance será $x = 6$. Así, teniendo en cuenta la escala de x e y, la altura máxima que alcanza es de 2700 m y el alcance de 600 m.

4. Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(1, 3)$, $B(0, -5)$ y $C(2, 13)$.

Solución. La ecuación ha de ser de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo las coordenadas de los 3 puntos se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y, aunque se estudiarán el próximo curso, en este caso particular es fácil de resolver:

$$\left.\begin{array}{lll} A(1, 3) & \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 & \Rightarrow a + b + c = 3 \\ B(0, -5) & \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -5 & \Rightarrow c = -5 \\ C(2, 13) & \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 13 & \Rightarrow 4a + 2b + c = 13 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

De (E_2) sacamos que $c = -5$, y sustituyendo en (E_1) y (E_3) tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a+b-5=3 \Rightarrow & a+b=8 \\ 4a+2b-5=13 \Rightarrow 4a+2b=18 \Rightarrow & 2a+b=9 \end{cases}$$ que resuelto nos da $a = 1$, $b = 7$,

$c = -5$, siendo la parábola buscada: $y = x^2 + 7x - 5$.

Actividades

15. Halla las coordenadas del vértice y de los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5x - 14$. Represéntala.

16. Dibuja la función $y = 3x - x^2$ averiguando las coordenadas de su vértice y los puntos de corte con los ejes.

17. La relación entre el precio de un cómic y el beneficio mensual viene dado por $G(x) = -x^2 + 6x + 6{,}40$, siendo x el precio en € y G el beneficio en miles de €. Halla el precio para el que se obtiene el beneficio máximo y también dicho beneficio máximo.

18. Un estudio de mercado para el lanzamiento de teléfonos móviles ha obtenido que la función demanda de dicho producto en función del precio x (en €) es $D(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 11250$ y la función oferta $F(x) = \frac{7}{18}x^2$ ¿A qué precio deben venderse los teléfonos móviles para que la demanda iguale a la oferta?

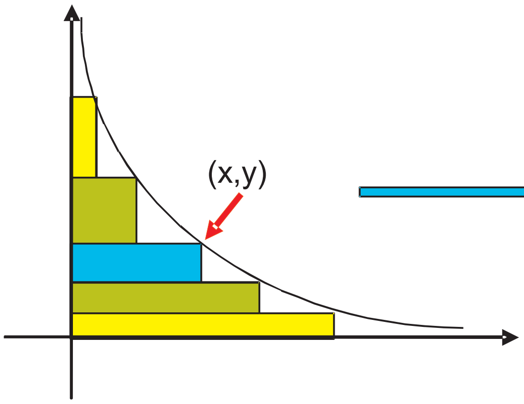
6. Función proporcionalidad inversa

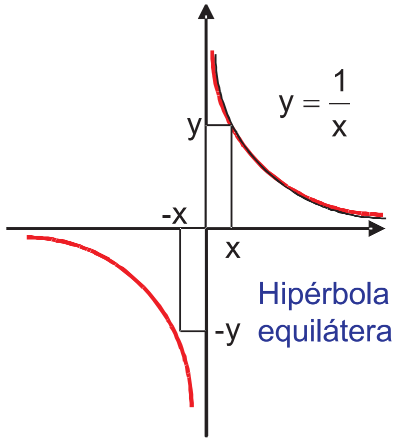
Sabemos que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando su producto se mantiene constante: $x \cdot y = k$, k constante. De aquí se deduce que si la magnitud y aumenta, la magnitud x ha de disminuir para que el producto permanezca constante, y viceversa. También se suele escribir la relación funcional como $y = \frac{k}{x}$, que es la nomenclatura de la que procede el término inversa, que en Matemáticas se aplica cuando la variable independiente está en un denominador (el término directa se usa cuando la x está en un numerador, como por ejemplo $y = k \cdot x$).

Para obtener la representación gráfica centrémonos en $y = \frac{k}{x}$ y observemos que $x \cdot y = 1$ representa rectángulos de base x y altura y con área fija igual a *1*.

Podemos tener la siguiente secuencia: $\frac{1}{10}\cdot 10 = \frac{1}{5}\cdot 5 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1\cdot 1 = 2\cdot\frac{1}{2} = 5\cdot\frac{1}{5} = 10\cdot\frac{1}{10}$.

Para las x negativas, también las ordenadas serán negativas (porque **– · (–) = +**), pero los valores no cambian en valor absoluto (es decir, para $x = -1$, $y = -1$).





Llevándolo a un sistema de ejes cartesianos obtenemos la curva conocida como **hipérbola equilátera**. Se observa que dicha curva es simétrica respecto al origen de coordenadas (**función impar**), pues si cambiamos *x* por – *x*, *y* pasa a valer – *y* (por ejemplo, *x* = 1, *y* = 1 y si *x* = - 1, *y* = – 1).

Si aumentamos el valor de *k* lo que conseguimos es separar la curva del origen de coordenadas (con *k* = 1 pasa por (1, 1) y con *k* = 10 pasaría por (1, 10)), mientras que si disminuimos el valor de *k* la acercamos al origen de coordenadas (con $k = \frac{1}{10}$ pasaría por $\left(1, \frac{1}{10}\right)$). Pero lo que no conseguimos es cambiar el comportamiento de la curva cerca del origen y en ∞ y -∞. Fíjate que en las proximidades del origen la función se dirige hacia ∞ si nos acercamos a cero con valores positivos, y hacia - ∞ si lo hacemos con valores negativos: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \infty$ o $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$x \to 0^+$ se lee ***x* tiende a cero por la derecha**, que es donde están los números mayores que cero. La flecha se lee **tiende**. La segunda notación se lee **el límite, cuando *x* tiende a cero por la derecha, de $\frac{1}{x}$ es infinito**. Volveremos a verla cuando estudiemos límites de funciones. Ambas notaciones son equivalentes. Si nos aproximamos a cero por otro lado: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$ o $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

$x \to 0^-$ se lee ***x* tiende a cero por la izquierda**, que es donde están los números menores que cero.

Decimos que una función *f* tiene una **asíntota vertical** de ecuación *x* = *n* cuando *f* tiende hacia infinito al acercarse *x* a *n*. En este caso, $y = \frac{1}{x}$ tiene por asíntota vertical la recta vertical *x* = 0. Fíjate que éste es el valor que anula el denominador y que es el que excluiríamos del dominio (*Dom y* = *R* - {*0*}).

Cuando hacemos que x crezca indefinidamente, o lo que es lo mismo, cuando x **tiende a infinito**, la función se acerca a cero: si $x = 10^{20}$, y vale $\frac{1}{10^{20}} = 10^{-20}$, y si aumentamos el valor de x acercamos más la función a cero $y(10^{40}) = \frac{1}{10^{40}} = 10^{-40}$. Lo mismo pasa cuando x tiene a $-\infty$: si $x = -10^{20}$, $y = -10^{-20} = -0,\overbrace{00\ldots}^{19\ ceros}1 \approx 0$, pues recuerda que 0 no tiene signo. Matemáticamente escribiríamos los resultados anteriores como:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0; \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Decimos que una función f tiene una **asíntota horizontal** de ecuación $y = m$ cuando al tender x a $\pm\infty$ f se acerca a m. En este caso la asíntota horizontal es la recta $y = 0$ (eje X).

Ejemplos

1. Un listo afirma que para él no sube la gasolina, pues al repostar siempre pide 20 € de combustible. Averigua la relación que existe entre el precio x en € y la cantidad y en litros de combustible que recibe.

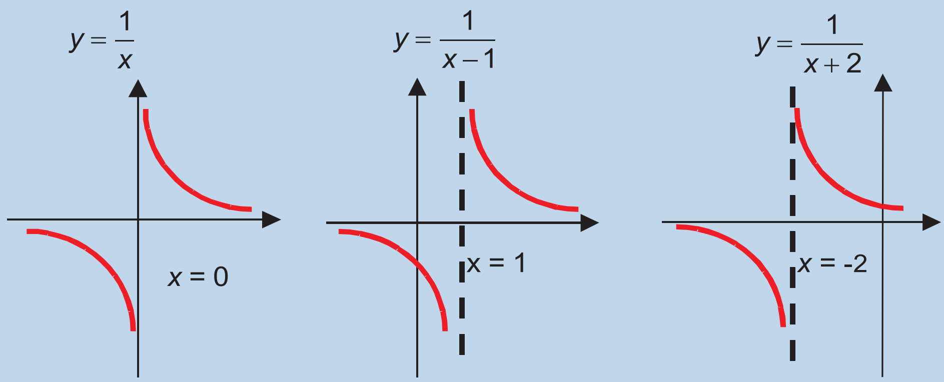
Solución. Lo que está claro es que cuanto mayor sea el precio de la gasolina, menor cantidad de combustible recibirá. Por tanto x e y son inversamente proporcionales, por lo que verificarán que: $x \cdot y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{x}$.

2. Conocida la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ representa $y = \frac{1}{x-1}$, $y = \frac{1}{x+2}$.

Solución.

Para representar $y = \frac{1}{x-1}$ hay que desplazar la hipérbola 1 unidad hacia la derecha ($x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$) y para representar $y = \frac{1}{x+2}$ hay que desplazarla 2 unidades hacia la izquierda ($x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$).

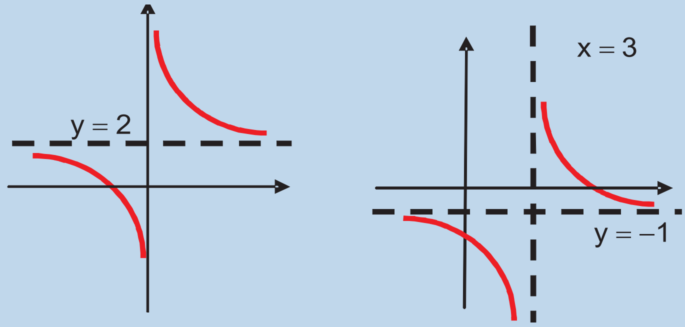
La hipérbola no sufre cambio en su forma porque el numerador sigue siendo 1.



3. Conocida la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ representa $y = 2 + \dfrac{1}{x}$, $y = -1 + \dfrac{1}{x-3}$.

Solución.

En la primera, al sumarle 2, lo que se produce es un desplazamiento de 2 unidades hacia arriba. En la segunda hay un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo, pues restamos 1, y un desplazamiento de 3 unidades hacia la derecha, por restar 3 en el denominador:



Observa que ahora se verifica lo siguiente:

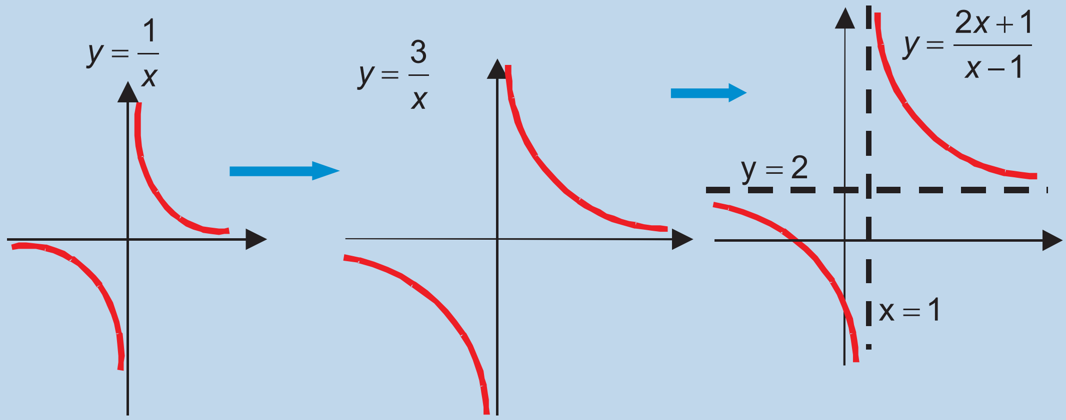
$$2 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 2, \quad 2 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty, \quad 2 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \infty.$$

$$-1 + \frac{1}{x-3} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -1; \quad -1 + \frac{1}{x-3} \xrightarrow[x \to 3^-]{} -\infty, \quad -1 + \frac{1}{x-3} \xrightarrow[x \to 3^+]{} \infty.$$

4. Conocida la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ representa $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Solución. Lo que hemos de hacer es efectuar la división de los polinomios que aparecen en la fracción. $\dfrac{2x+1}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ pues se obtiene 2 como cociente y 3 como resto.

Una vez así escrito procedemos como en el ejemplo 3, observando que hay que subir la curva 2 unidades hacia arriba y desplazarla 1 unidad hacia la derecha. El 3 lo que hace es deformarla, pues la separará del origen de coordenadas:



Ahora se verifica que $\dfrac{2x+1}{x-1} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 2$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^+]{} \infty$.

Actividades

19. Averigua el dominio e indica hacia dónde se acerca la función $y = \dfrac{1}{x+3}$ cuando: $x \to \pm\infty$, $x \to -3^-$, $x \to -3^+$.

20. ¿Cómo sería la gráfica de $y = \dfrac{4x-5}{x+3}$?

21. Indica el dominio, la ecuación de las asíntotas y el comportamiento de la función $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ en el entorno de su asíntota vertical en ∞ y $-\infty$.

22. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x}{5-x}$ indica su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, así como su comportamiento en el entorno de su asíntota vertical.

7. Otras funciones

Hasta el momento, las funciones que hemos visto tienen la misma fórmula en todo su dominio. Sin embargo, puede ocurrir que la función tenga fórmulas distintas en intervalos distintos. Veamos algunas:

a) $f(x) = \begin{cases} 4, \textit{ si } x < 1 \\ x+3, \textit{ si } 1 \le x \le 5 \\ 37 - x^2, \textit{ si } x > 5 \end{cases}$; b) $|x| = \begin{cases} -x, \textit{ si } x < 0 \\ x, \textit{ si } x \ge 0 \end{cases}$; c) Ent*(x)* = *parte entera de x*.

Este tipo de funciones reciben el nombre genérico de **funciones definidas a trozos** o **segmentarias**, pues su representación suele estar constituida por segmentos que pueden estar unidos o no. La forma de manejar estas funciones es sencilla: hemos de averiguar la fórmula que le corresponde a un valor de *x* . Veámoslo primero con la función a):

Como $-3 < 1 \Rightarrow f(-3) = 4$

Como 1 está en el intervalo [1, 5], $f(1) = 1 + 3 = 4$;

Como 4 está en el intervalo [1, 5], $f(4) = 4 + 3 = 7$;

Como 6 está en el intervalo (5, ∞], $f(6) = 37 - 6^2 = 1$;

La función b) tiene un nombre propio y una grafía especial: |*x*| es la función **valor absoluto**, que nos proporciona el valor absoluto de un número. Fíjate que efectivamente lo hace:

$$|-10| = -(-10) = 10;$$

$$|-4| = -(-4) = 4;$$

$$|5| = 5.$$

La función c) se llama **parte entera de *x*** y se representa por Ent *(x)* ó *[x],* y se define como el entero inmediatamente menor o igual que *x* o como el mayor entero menor o igual que *x*. Veamos algunos valores de esta función:

Ent (7,234) = 7; Ent (3,4) = 3; Ent (2) = 2; Ent (0,987) = 0.

Lógicamente, la parte entera de un número entero es él mismo. Hay que tener cuidado con los números negativos como verás a continuación:

Ent (-0,25) = -1, porque 0 es mayor que -0,25.

Ent (-1,65) = -2, pues -1 es mayor que -1,65.

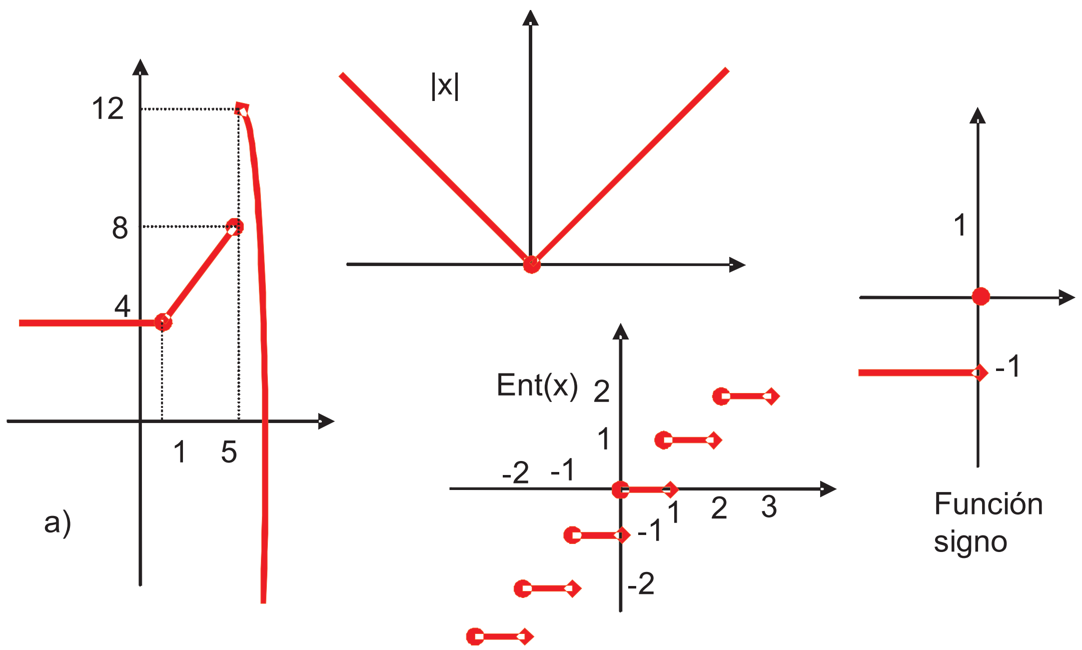
Ent (-3) = -3, pues – 3 es un número entero.

Ent (-12,45) = -13, pues -12 es mayor que -12,45.

Otra función definida a trozos interesante es la función signo definida como:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para representar gráficamente estas funciones lo que hemos de hacer es representar cada fórmula en el intervalo en que está definida. Volviendo al ejemplo a), hemos de representar f(x) = 4 en el intervalo (-∞ , 1), f(x) = x + 3 en el intervalo [1, 5] y por último f(x) = 37 – x^2 en (5, ∞). Se trata por tanto de una recta horizontal (la función constante), de una recta (la función lineal) y de una parábola (la función cuadrática). Los intervalos nos dicen donde empieza y donde termina cada una de estas funciones y no podemos prolongarlas más allá de dichos intervalos. A continuación van las representaciones de los 4 ejemplos vistos hasta ahora.



El convenio que se ha seguido en el gráfico es el siguiente: si el valor de x entra en el intervalo, se pone un círculo relleno y si no entra, un rombo relleno. Observarás que en a) el rombo del primer trozo ha sido solapado por el círculo del segundo trozo debido a que la función es continua en ese punto (f(1) vale lo mismo si lo calculamos con la primera fórmula o con la segunda). Sin embargo, en $x = 5$ se observa un salto: el 2º trozo acaba en el punto (5, 8) y el 3º empezaría en (5, 12) (aunque no es correcto calcular $f(5)$ con la 3ª definición, $f(x) = 37 - x^2$, fíjate que f(5,00…1) ya sí se calcularía con esta 3ª definición y nos saldría 11,99…, que es 12 a todos los efectos). La forma matemáticamente correcta de escribir estos resultados la veremos cuando hablemos de los límites y de la continuidad. Por tanto, la función es discontinua en $x = 5$.

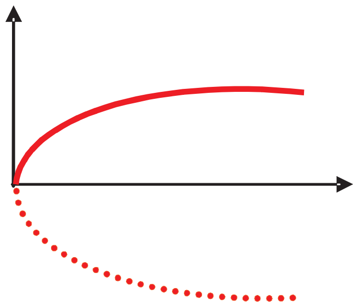
En el valor absoluto se solapan de nuevo el rombo y el círculo en $x = 0$, puesto que la función es continua en dicho punto.

La función Ent *(x)* se llama **función escalonada** (no hay más que ver el dibujo), pues está formada por segmentos de longitud 1, habiendo un salto de longitud 1 cada vez que encontramos un número entero: fíjate en que todos los números del intervalo [0,1) son de la forma 0,… por lo que su parte entera vale 0 y justo salta a 1 cuando entramos en el intervalo [1,2), que son números de la forma 1,… por lo que su parte entera vale 1 y salta a valer 2 cuando entramos en el intervalo [2,3), y así sucesivamente. Observa que esta función va a tener tantos puntos de discontinuidad como números enteros hay, es decir, infinitos puntos de discontinuidad, aunque los saltos son finitos.

La **función signo** sólo tiene dos escalones y es discontinua en $x = 0$. Aparecen funciones escalonadas, por ejemplo, cuando nos cobran el teléfono por pasos de 3 minutos: vale lo mismo una llamada de 30 segundos que otra de 2 min 50 s, y una de 3 min 10 s lo mismo que otra de 5 min 59 s. Es decir, una función escalonada está compuesta de escalones que no son más que funciones constantes en ciertos intervalos.

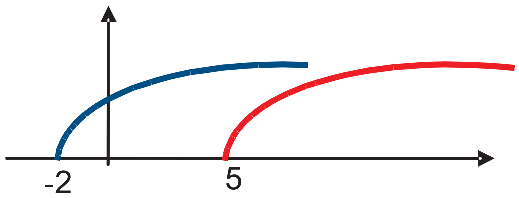
Otras funciones importantes son las **radicales**, que no son más que funciones definidas a partir de raíces, como por ejemplo, $\sqrt{x}, \sqrt{x-5}, \sqrt[5]{3x-1}, \ldots$ No podemos dar propiedades generales, dado que el índice de la raíz puede tomar infinitos valores, y además el comportamiento es distinto dependiendo de si dicho índice es un número par (el radicando no podrá ser negativo) o impar (el radicando puede tener cualquier signo).

La más sencilla es la función **raíz cuadrada** de x, $f(x) = \sqrt{x}$, aunque más correcto es decir que es la **raíz cuadrada positiva** de x, puesto que sólo hemos cogido el resultado positivo. Recuerda que la solución de la ecuación $x^2 = 1$ es $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Nosotros sólo vamos a coger la parte positiva de la raíz, por lo que f siempre será positiva, algo que no hay que confundir con que su dominio sea $[0, \infty)$, porque al intentar hallar la raíz cuadrada de un número negativo aparecen números que no son reales. La gráfica de esta función es una parábola tumbada, consecuencia de la relación que existe entre la raíz cuadrada y el elevar al cuadrado. Una tabla de valores para x igual a 0, 1, 4, 9, 16, …nos ayudará a completar la representación gráfica de esta función.



¿Qué pasará con $f(x)=\sqrt{x-5}$? Pues que hemos de desplazar la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ 5 unidades hacia la derecha. Fíjate que $x – 5 = 0$ si $x = 5$.

¿Y con $f(x)=\sqrt{x+2}$? Desplazaremos la figura 2 unidades hacia la izquierda (pues $x + 2 = 0$ implica $x = -2$).



Las funciones radicales con índice distinto de 2 necesitan para representarlas un tratamiento más detallado.Lo mismo sucede con las funciones polinómicas de grado mayor que 2, que no es posible conocer su gráfica generalizando el comportamiento de las funciones lineales y cuadráticas.

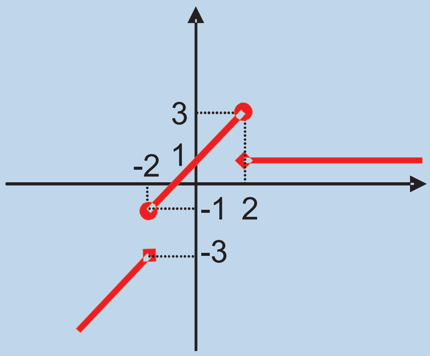
Ejemplos

1. Representa la función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \textit{ si } x<-2 \\ x+1, \textit{ si } -2\le x\le 2 \\ 1, \textit{ si } x>2 \end{cases}$$

Solución. Construimos la tabla teniendo en cuenta un pequeño truco: calculamos la imagen de un valor dos veces para saber dónde acaba un trozo y dónde empieza el otro. El cálculo no correcto con la definición lo marco con un asterisco:

x	- 5	- 2*	- 2	2	2*	5
y	- 6	- 3*	- 1	3	1	1



2. Representa las funciones | x - 4| y | x+2 |.

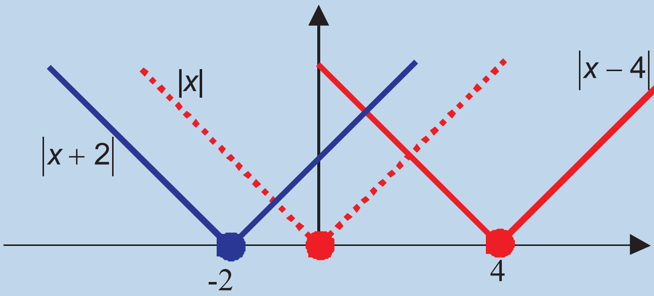
Solución. Construimos las tablas:

x	IxI	Ix - 4I
- 3	3	I-3 -4I = I-7I = 7
0	0	I0 - 4I = I -4I = 4
4	4	I4 - 4I = 0
7	7	I7 - 4I = 3

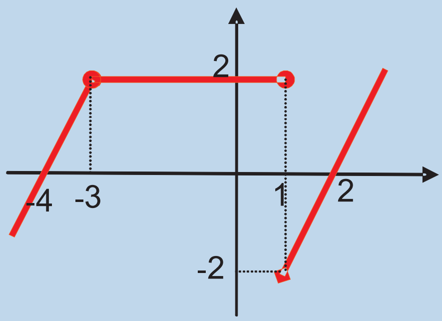
x	IxI	Ix + 2I
- 7	7	I-7+2I = I-5I = 5
- 3	3	I-3+ 2I = I -1I = 1
0	0	I0 + 2I = 2
4	4	I4 + 2I = 6

De la 1ª tabla se desprende que se produce un desplazamiento de 4 unidades hacia la derecha. El vértice del valor absoluto pasa de (0, 0) a (4, 0), pues $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.

En la 2ª tabla el desplazamiento es de 2 unidades hacia la izquierda, pasando el vértice de (0, 0) a (- 2, 0). Observa que $x + 2 = 0 \Rightarrow x = - 2$. Así, la V del valor absoluto se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda:



3. Escribe la expresión matemática de la función f que tiene la siguiente gráfica. ¿En qué puntos presenta f discontinuidades?



Solución. En el intervalo (-∞, - 3) tenemos una recta que pasa por (- 4, 0) y (- 3, 2). La ecuación de dicha recta es $y = 2x + 8$ (recuerda como hallamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos). En el intervalo [-3, 1] la función es constante, e igual a 2. Fíjate que $x = - 3$ podíamos haberlo metido en el primer intervalo, pues no se ve claramente si el punto está en el primer o en el segundo trozo, pero, por homogeneidad, como $x = 1$ está en el segundo trozo, se lo asignamos al segundo y no al primer trozo. La ecuación es $y = 2$. En el intervalo (1, ∞) volvemos a tener una recta que pasa por (1, - 2) y (2, 0), y su ecuación es $y = 2x – 4$.

La función será $f(x)=\begin{cases}2x+8, \text{ si } x<-3\\ 2, \text{ si } -3\le x\le 1\\ 2x-4, \text{ si } x>1\end{cases}$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$.

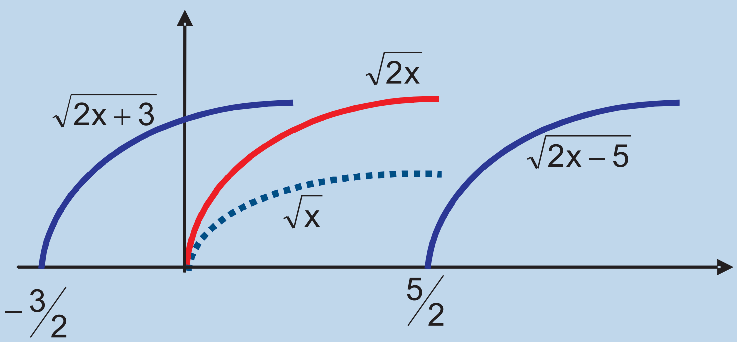
4. Representa la función $y=\sqrt{2x}$. ¿Cómo serían $y=\sqrt{2x+3}$, $y=\sqrt{2x-5}$?

Solución. Comparando con $\sqrt{x}$ se observa que lo que sucede con $\sqrt{2x}$ es que la curva se separa más del eje X (para el mismo valor de la abscisa, la ordenada es $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ veces mayor): $x=3\Rightarrow\sqrt{3}\approx 1{,}732$, $\sqrt{2\cdot 3}\approx 2{,}449$ (se puede usar la calculadora para comprobar estos valores). Por lo demás, el Dominio es el mismo, pues la inecuación $2x\ge 0$ tiene la misma solución que $x\ge 0$.

Con respecto a $y=\sqrt{2x+3}$, al sumar 3 se introduce un desplazamiento de $\frac{3}{2}$ unidades hacia la izquierda con respecto a $\sqrt{2x}$, siendo ahora el dominio $\text{Dom } y=\left[-\frac{3}{2},\ \infty\right)$.

Observa que $2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$. En $\sqrt{2x-5}$ aparece un desplazamiento de $\frac{5}{2}$ unidades hacia la derecha, por lo que el dominio es $\text{Dom } y=\left[\frac{5}{2},\ \infty\right)$, ya que $2x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$.

Las gráficas son:



Actividades

23. Representa las funciones $|2x - 4|$ y $|3x + 3|$.

24. Representa las funciones $y = |x| + 4$, e $y = |x - 2| - 5$

25. En un aparcamiento por la primera hora o fracción nos cobran 1,20 €; el resto de horas nos cobran a 1,10 €, pagándose como máximo 8,90 € por tener el vehículo estacionado durante un día entero. Representa la función que nos da el coste por hora en función de las horas aparcadas (sólo en un día). ¿Qué nombre reciben este tipo de funciones?