4 Ecuaciones y sistemas lineales

De sobra son conocidas las ecuaciones. Refrescamos y profundizamos en su estudio: ecuaciones de primer y segundo grado, así como otras polinómicas de grados superiores, irracionales.

Tampoco son nuevos los sistemas de ecuaciones lineales. Aquí introducimos el método de Gauss, como generalización del método de resolución, y lo usamos para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Resolver con soltura todo tipo de ecuaciones de primer y segundo grado.
2. Aplicar razonadamente la fórmula de la ecuación de segundo grado en ecuaciones completas e incompletas.
3. Resolver ecuaciones bicuadradas.
4. Transformar ecuaciones irracionales en racionales para su resolución y posterior discusión.
5. Utilizar los conocimiento de resolución de ecuaciones para resolver problemas que se plantean en la vida actual.
6. Conocer los tres tipos de sistemas lineales que existen atendiendo al número de soluciones.
7. Resolver sistemas lineales por sustitución, igualación y reducción.
8. Conocer operativamente la propiedad en la que se basa el método de Gauss y que permite obtener sistemas equivalentes al dado de fácil solución.
9. Utilizar los conocimiento de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas que se plantean en la vida actual.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Ecuaciones

Las relaciones numéricas o algebraicas separadas por el signo **igual "="** se llaman **igualdades**. De una igualdad se puede afirmar que es **verdadera** o **falsa**.

1.1. Identidades y ecuaciones

Las igualdades algebraicas pueden ser de dos tipos.

- **Identidad:** Es una igualdad algebraica que es verdadera para cualquier valor de las variables. Por ejemplo, la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ es una identidad.

- **Ecuación:** Es una igualdad que es verdadera para algunos valores de las variables.

  Por ejemplo, la ecuación $2x + 5 = 15$, es verdadera únicamente para $x = 5$; la ecuación $x + y = 12$ es verdadera para infinidad de valores de las variables; por ejemplo, $x = 2$ e $y = 10$, $x = 4$ e $y = 8$.

- **Variables o incógnitas:** Son las letras que intervienen en la ecuación.

- **Soluciones o raíces de la ecuación:** Son los valores de las incógnitas que convierten la ecuación en una igualdad verdadera.

- **Resolver una ecuación:** Es hallar su solución, o soluciones, o demostrar que no tiene solución.

1.2. Equivalencia de ecuaciones

Dos ecuaciones son equivalentes cuando toda solución de la primera es solución de la segunda y viceversa.

Por ejemplo, las ecuaciones $2x + 4 = 10$ y $2x = 6$ son equivalentes, las dos tienen por solución $x = 3$.

Para resolver una ecuación se transforma en otras equivalentes más simples en las que sea sencillo hallar la solución. Los principios que permiten convertir una ecuación en otra equivalente son:

- **Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación una misma expresión, la ecuación que resulta es equivalente a la primera.**

$$p(x) = q(x) \longleftrightarrow p(x) + a(x) = q(x) + a(x)$$

- **Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero, la ecuación que resulta es equivalente a la primera.**

$$p(x) = q(x) \longleftrightarrow a \cdot p(x) = a \cdot q(x), \text{ con } a \neq 0$$

- **Comprobar una solución consiste en sustituir en la ecuación la incógnita por el valor calculado y ver que convierte a la ecuación en una igualdad verdadera.**

Actividades

1. En las igualdades siguientes indica las que son ecuaciones y las que son identidades:

a) $3x - 6 = 2x + 4$; **b)** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; **c)** $x + 3y = 12$; **d)** $4(2x - 3) + 1 = 8x - 11$.

2. Estudia si $x = 3$ es solución de las ecuaciones: **a)** $2x^2 - 4x - 6 = 0$; **b)** $x^2 + x - 6 = 0$

3. Escribe dos ecuaciones que tengan por solución $x = 5$.

2. Ecuaciones de primer grado

Son las ecuaciones más sencillas que has estudiado.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es toda ecuación equivalente a otra de la forma $a\,x + b = 0$, con $a \neq 0$; a y b son números reales y se llaman coeficientes de la ecuación.

Ejemplos

1. Resolver: $6(x - 3) - 3(x - 4) = x + 8$

Solución.

Quitamos paréntesis: $6x - 18 - 3x + 12 = x + 8$

Transponemos términos: $6x - 3x - x = 18 - 12 + 8$

Simplificamos: $2x = 14$

Despejamos la incógnita: $x = \dfrac{14}{2} = 7$

Comprobación: $6(7 - 3) - 3(7 - 4) = 7 + 8$

Simplificamos: $15 = 15$

2. Resolver $\frac{3x+8}{10}=3-\frac{5x-8}{12}$

Solución. Se calcula el M.C.M. de los denominadores 10 y 12 que es 60; y se multiplican los dos miembros de la ecuación por 60.

$$60\,\frac{3x+8}{10}=60\left(3-\frac{5x-8}{12}\right)$$

Se quitan paréntesis y se simplifica: $18x + 48 = 180 - 25x + 40$

Trasponemos términos: $18x + 25x = 180 + 40 - 48$

Simplificamos: $43x = 172$

Despejamos la incógnita: $x=\frac{172}{43}=4$

Comprobación: Sustituir x por 4 en la ecuación como en el ejemplo anterior.

Actividades

4. Resolver las ecuaciones: **a)** $5 + 4x + 5(1 + 3x) = - 4(3 - 2x)$;

b) $5x - 2(x - 1) + 5(2 + 3x) = 3(x - 1)$; **c)** $6(x - 10) = -3(2x - 7) - 34$;

d) $8(6 + 2x) = 4(2 - 3x) - 72$.

5. Resolver las ecuaciones:

a) $\frac{x}{4}+8=\frac{3x-2}{8}$;

b) $\frac{20-x}{8}-\frac{10x+3}{16}=\frac{10-10x}{4}$;

c) $\frac{2x-3}{2}+17=\frac{4x+3}{3}+\frac{x+3}{6}$;

d) $\frac{3x+17}{8}-\frac{1-4x}{3}=\frac{1-x}{4}-\frac{9+x}{6}$;

e) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+3}{3}=\frac{x+1}{2}$

3. Ecuaciones de segundo grado

Como ya sabes, las ecuaciones de segundo grado son de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$; con $a \neq 0$; donde a, b y c son número reales, llamados coeficientes de la ecuación.

Veremos varios métodos para resolver la ecuación de segundo grado.

3.1. Completar cuadrados

Este método es el más antiguo para resolver ecuaciones de segundo grado; los ejemplo siguientes darán las estrategias para resolver ecuaciones.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación $x^2 + 8x + 16 = 0$

Solución. La ecuación se puede escribir: $x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 = 0$

El primer miembro es el cuadrado de un binomio: $(x + 4)^2 = 0$

El paréntesis se anula para $x = -4$ y esta es la solución.

2. Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$

Solución. El primer miembro no es el cuadrado de un binomio, se debe completar el cuadrado.

- Pasar al segundo miembro el término independiente: $x^2 - 6x = -5$
- Ajustar el cuadrado sumando 9 a los dos miembros: $x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = 9 - 5$
- El primer miembro es el cuadrado de un binomio: $(x - 3)^2 = 4$
- Despejar $(x - 3)$: $(x-3) = \sqrt{4} = \pm\ 2$
- Las soluciones se obtienen resolviendo las ecuaciones : $\begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases}$
- La soluciones son $x = 5$ y $x = 1$.

3.2. Fórmula para resolver la ecuación de segundo grado

La generalización de completar cuadrados da lugar a la fórmula siguiente que permite obtener las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $2x^2 - x - 6 = 0$

Solución. Se aplica la fórmula, teniendo en cuanta que $a = 2$, $b = -1$ y $c = -6$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 2$ y $x = -\frac{3}{2}$

3.3. Función cuadrática

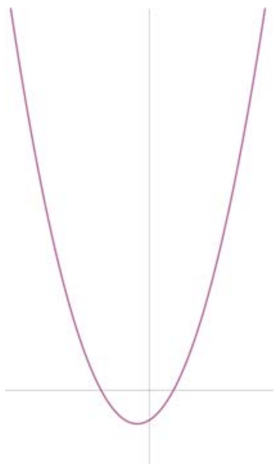
Recuerda que la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola de la que conoces:

- Su eje es paralelo al eje de ordenadas Y.
- El coeficiente a de x^2 nos da la forma de la parábola.

  Si $a > 0$ la parábola presenta un **mínimo**.

  Si $a < 0$ la parábola presenta un **máximo**.

  Por otra parte, cuanto menor es el valor absoluto del coeficiente a de x^2, más abierta es la parábola.
- La abscisa del vértice (máximo o mínimo) viene dada por $x = \frac{-b}{2a}$.
- Los puntos de corte con el eje de abscisas son las soluciones de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$



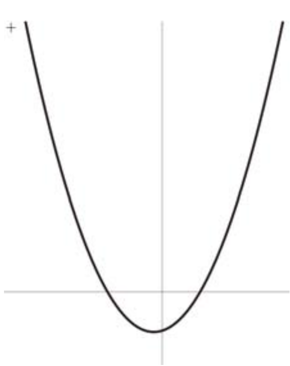
Gráfica de la función
$y = 1/2 \cdot x^2 + x - 4$

3.4. Soluciones de una ecuación de segundo grado

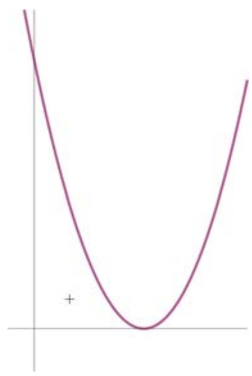
A partir de la fórmula y sin necesidad de resolver la ecuación de segundo grado se puede conocer el número de soluciones de la ecuación de segundo grado. Todo depende del signo de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, que se encuentra bajo el signo radical, llamado **discriminante** de la ecuación.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ el doble signo de la fórmula proporciona **dos soluciones para la ecuación**.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ la raíz de cuadrada de cero es cero y la ecuación **tiene una solución**.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no existe raíz cuadrada y la ecuación **no tiene soluciones reales**.

Las gráficas siguientes representan las situaciones indicadas anteriormente



Función $y = x^2 + x - 6$
$\Delta = 25 > 0$



Función $y = x^2 - 6x + 9$
$\Delta = 0$

Función $y = x^2 - x + 6$
$\Delta = -23 < 0$

Ejemplo

Representa las parábolas: **a)** $y = x^2 - 2x - 3$; **b)** $y = -x^2 + 4x + 12$.

Solución.

a) • Los cortes con el eje X son las soluciones de la ecuación : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

La parábola corta al eje X en $A(3, 0)$ y $B(-1, 0)$.

- Abscisa del vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$; ordenada del vértice $y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

  Vértice de la parábola $V(1, -4)$

- Tabla de valores próximos al vértice incluido este:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

b) • Los cortes con el eje X son las soluciones de la ecuación: $-x^2 + 4x + 12 = 0$

Se multiplica por -1 y queda, $x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{4+8}{2} = 6 \\ \frac{4-8}{2} = -2 \end{cases}$$

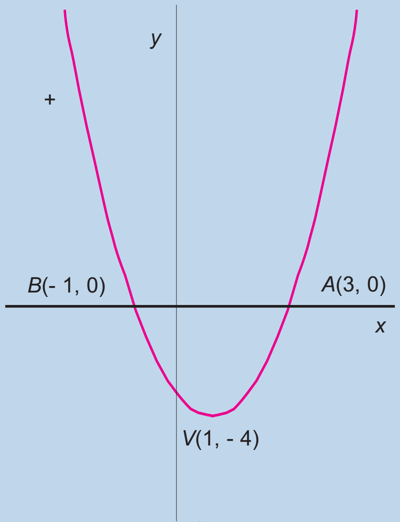
La parábola corta al eje X en $A(6, 0)$ y $B(-2, 0)$.

- Abscisa del vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$; ordenada del vértice $y = -2^2 + 4 \cdot 2 + 12 = 16$.

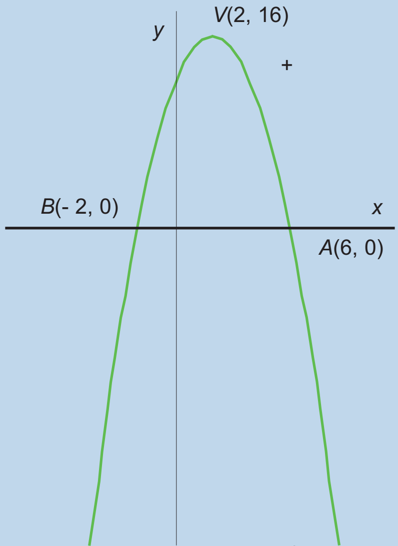
  Vértice de la parábola $V(2, 16)$

- Tabla de valores próximos al vértice incluido este.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	7	12	15	16	15	12	7	0



a) Parábola $y = x^2 - 2x - 3$



b) Parábola $y = -x^2 + 4x + 12$

Factorizar la ecuación de segundo grado:

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede factorizar cuando tiene soluciones y de ellas nos informa el discriminante; por tanto, si:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones r y s y admite la factorización:

$$ax^2 + bx + c = (x - r)(x - s)$$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una raíz r y admite la factorización:

$$ax^2 + bx + c = (x - r)^2$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene solución; no se puede descomponer, por tanto, es irreducible.

3.5. Ecuaciones incompletas de segundo grado

Las **ecuaciones incompletas de segundo grado** se presentan cuando al menos uno de los coeficientes b o c son cero. La ecuación general se reduce a:

a) $ax^2 = 0$,	si	b y c son cero.
b) $ax^2 + c = 0$,	si	b es cero.
c) $ax^2 + bx = 0$,	si	c es cero.

Todas se pueden resolver mediante la fórmula general, pera es más cómodo aplicar a cada una los razonamientos siguientes:

a) Ecuación: $ax^2 = 0$; dividir por a y queda, $x^2 = 0$; $x = 0$

b) Ecuación $ax^2 + c = 0$; transponer c y queda, $ax^2 = -c$; despejar $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

c) Ecuación $ax^2 + bx = 0$; sacar factor común, $x(ax + b) = 0$.

Para que un producto sea cero uno de los factores o los dos deben ser cero:

$\begin{cases} x = 0 \\ ax + c = 0 \end{cases}$; las soluciones serán , $x = 0$ y $x = \frac{-c}{a}$

Ejemplos

1. Resolver las ecuaciones: **a)** $4x^2 = 0$; **b)** $2x^2 - 8 = 0$; **c)** $3x^2 + 12x = 0$

Solución.

a) Despejar $x^2 = 0$; $x = 0$

b) Transponer, $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

c) Sacar factor común; $x(3x + 12) = 0$; de donde $\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 12 = 0 \end{cases}$

Soluciones. $x = 0$ y $x = -4$

Actividades

6. Completa cuadrados y resuelve las ecuaciones: **a)** $(x - 3)^2 = 64$; **b)** $x^2 + 10x + 25 = 0$;

c) $x^2 + 2x - 15 = 0$; **d)** $x^2 - 8x + 15 = 0$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; **b)** $x^2 + 3x - 28 = 0$; **c)** $2x^2 + 7x = 15$;

d) $12x^2 - 7x + 1 = 0$; **e)** $x^2 + x = 42$

8. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{4}{x} - \frac{2x+1}{5} = 1$;

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{3x-1} = \frac{4}{(x+2)(3x-1)}$

9. Representa las parábolas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$; **b)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

10. Resuelve y factoriza si es posible las ecuaciones siguientes: **a)** $x^2 - 4x - 12 = 0$;

b) $3x^2 - 18x + 15 = 0$; **c)** $3x^2 - 6x + 3 = 0$; **d)** $x^2 - 5x + 9 = 0$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 4)(x - 2) = 0$; **b)** $(x + 3)(x - 2) = 0$;

c) $(x - 5)(x + 6) = 0$; **d)** $(x - 7)(x + 9) = 0$

12. Resuelve la siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 25 = 0$; **b)** $x^2 - 1 = 0$; **c)** $3x^2 = 0$; **d)** $2x^2 - 3x = 0$

13. Calcula las raíces de las ecuaciones:

a) $-3x + x^2 = 0$; **b)** $- 5x = x^2$; **c)** $x^2 + 10 = 19$; **d)** $x^2 + 3x = 17x$

4. Ecuaciones de grado superior e irracionales

4.1. Ecuaciones de grado superior

Algunas **ecuaciones de grado superior** al segundo se resuelven si se aplican técnicas de factorización para transformarlas en otras equivalentes de primero y segundo grado.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación: $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Solución. $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = 0$

Se Igualan a cero los dos factores: $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

La ecuación de segundo grado tiene por soluciones, $x = 1$ y $x = -3$.

Las soluciones de la ecuación propuesta serán: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -3$.

2. Resolver la ecuación: $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = 0$.

Solución.

Se saca factor común x: $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = x(4x^3 - 21x^2 + 29x - 6) = 0$

Se aplica la Regla de Ruffini al segundo factor:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -21 & 29 & -6 \\ 2 & & 8 & -26 & 6 \\ \hline & 4 & -13 & 3 & 0 \end{array}$$

Se descompone en factores: $x(x - 2)(4x^2 - 31x + 3) = 0$

La ecuación de segundo grado tiene por soluciones, $x = 3$ y $x = \frac{1}{4}$

Las soluciones de la ecuación de partida serán: $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = \frac{1}{4}$.

4.2. Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones de cuarto grado $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que no tienen los grados uno y tres se llaman **ecuaciones bicuadradas**; se reducen a ecuaciones de segundo grado mediante el siguiente cambio de variable $x^2 = y$; por lo que, $x^4 = y^2$; al sustituir en la ecuación dada se obtiene:

$$ay^2 + by + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en la variable y.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Solución. Se realiza el cambio $x^2 = y$, $x^4 = y^2$

Se obtiene la ecuación de segundo grado: $y^2 - 10y + 9 = 0$

Se resuelve esta ecuación en y : $y = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{10+8}{2} = 9 \\ \dfrac{10-8}{2} = 1 \end{cases}$

De $y = x^2 = 9$, se obtienen las soluciones, $x = 3$ y $x = -3$

De $y = x^2 = 1$, se obtiene las soluciones, $x = 1$ y $x = -1$.

La ecuación propuesta tiene cuatro soluciones.

2. Resolver la ecuación: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Solución. Se realiza el cambio $x^2 = y$, $x^4 = y^2$

Se obtiene la ecuación de segundo grado: $y^2 + 3y - 4 = 0$

Se resuelve esta ecuación en y : $y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1\,(-4)}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ \dfrac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}$

De $y = x^2 = 1$, se obtienen las soluciones, $x = 1$ y $x = -1$

De $y = x^2 = -4$, no se obtienen las soluciones para x

La ecuación propuesta tiene dos soluciones reales.

4.3. Ecuaciones irracionales

Son aquellas en las que la variable aparece bajo el signo radical. Estudiaremos aquellas en las que aparecen raíces cuadradas.

Para resolver estas ecuaciones se aísla la raíz en uno de los miembros para a continuación elevar al cuadrado los dos miembros y obtener ecuaciones líneales o de segundo grado.

Al elevar al cuadrado pueden aparecer raíces que no sean solución de la ecuación de partida y que deben rechazarse; se localizan mediante la comprobación en la ecuación de partida.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación: $\sqrt{x+3}-1=x$

Solución.

Aislar el radical: $\sqrt{x+3}=1+x$

Elevar el cuadrado: $(\sqrt{x+3})^2=(1+x)^2$

Desarrollar: $x + 3 = 1 + 2x + x^2$

Simplificar: $x^2 + x - 2 = 0$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x = 1$ y $x = -2$.

Comprobación:

$\sqrt{1+3}-1=1$; $1 = 1$; $x = 1$ es solución

$\sqrt{-2+3}-1=-2$; $0 = -2$; falso, $x = -2$ no es solución.

2. Resolver la ecuación: $\sqrt{x^2-3}+x-3=0$

Solución.

Aislar el radical: $\sqrt{x^2-3}=3-x$

Elevar al cuadrado: $\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2=(3-x)^2$

Desarrollar: $x^2 - 3 = 9 - 6x + x^2$

Simplificar y despejar: $6x = 12$; $x = 2$

Comprobación: $\sqrt{2^2-3}+2-3=0$; $0=0$; $x = 2$ es solución.

Actividades

14. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-x^3-6x^2=0$; **b)** $x^3+5x^2-x-5=0$; **c)** $16x^3-16x^2-9x+9=0$; **d)** $x^3-x^2-14x+24=0$.

15. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-16=0$; **b)** $81x^4-x^2=0$; **c)** $4x^4-x^2=0$; **d)** $x^4-9x^2=0$.

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas: **a)** $x^4-5x^2+4=0$; **b)** $x^4-10x^2=-9$; **c)** $x^4-16x^2-225=0$; **d)** $64x^4-244x^2+225=0$.

17. Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2-5}+x-5=0$; b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$

c) $\sqrt{1+x}+\sqrt{7+x}=\sqrt{16+2x}$; d) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$

18. El perímetro de un rectángulo es de 98 m. Su área es de 570 m^2. Halla sus dimensiones.

19. Los tres lados de un triángulo miden 18, 16, y 9 m. Determinar que misma cantidad se debe restar a cada lado para que resulte un triángulo rectángulo.

20. Determinar un número que sumado con su raíz cuadrada es 132.

21. Dos números suman 62 y sus cuadrados 1954. Hallarlos.

22. El área de un triángulo rectángulo es de 60 m^2 y la suma de sus catetos es 23 cm. Hallar sus tres lados.

23. Un cuadrado tiene 33 m^2 más que otro, y éste un metro más de lado que el primero. Hallar los lados de los dos cuadrados.

5. Problemas que se resuelven mediante ecuaciones

Recuerda que para resolver un problema mediante álgebra se debe seguir el procedimiento siguiente.

Planteo. Consiste en traducir el enunciado escrito en una ecuación o sistemas de ecuaciones.

Resolución. Parte en la que se resuelve la ecuación o el sistema planteado.

Discusión. Se comprueba que la solución obtenida es solución de la ecuación o el sistema y que es válida para las condiciones impuestas en el enunciado.

Para plantear una ecuación a partir de un enunciado debes:

Paso 1. Realizar lecturas comprensivas para identificar el dato que se debe calcular y representarlo con una letra.

Paso 2. Trazar un plan para traducir el lenguaje escrito a lenguaje algebraico. Planificar la información en resúmenes. Comparar el problema con otros conocidos.

Paso 3. Llevar a cabo el plan trazado y si este no funciona cambiar de plan.

Ejemplo

La cantidad de euros que un chico lleva en el bolsillo es tal que si gasta la tercera parte más su séptima parte, aún le quedarían 2,5 euros mas la mitad de lo que llevaba. ¿Qué cantidad de euros llevaba en el bolsillo?

Solución.

- Sea x el dinero que llevaba.
- Gastos: $x/3 + x/7$
- Le queda: $2{,}5 + x/2$
- Ecuación: $2{,}5 + x/2 = x - (x/3 + x/7)$
- Resolver la ecuación: $x = 105$ euros.
- Discusión: La solución cumple las condiciones del enunciado; veamos si cumple la ecuación: $2{,}5 + 105/2 = 105 - (105/3 + 105/7)$

$$2{,}5 + 52{,}5 = 105 - 50$$

$$55 = 55$$

El valor de 105 para *x* convierte la ecuación en una igualdad numérica verdadera.

Actividades

24. Un ganadero vende los 3/5 de los corderos que posee. A continuación compra 50, con lo que se queda con 40 corderos menos que los que tenía al principio. ¿Cuántos tenía?.

25. Un trayecto se ha realizado en tres etapas; en la primera se recorre 3/5 del trayecto, en la segunda 1/4 del resto y en la última los 12 km. restantes. ¿Cuál es la longitud total del trayecto?.

26. Una persona dispone de dos horas para dar un paseo en coche. ¿Qué distancia podrá recorrer sabiendo que a la ida la velocidad del coche es 80 km/h y que sin detenerse regresa a 120 Km/h?.

27. La distancia entre dos estaciones A y B es 480 km. Un tren sale de A en dirección B con una velocidad constante de 100 km/h. Al mismo tiempo, otro tren sale de B en dirección a A con un velocidad de 140 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse?. ¿A qué distancia de A y B se encuentran?.

28. La base de un rectángulo es 6 cm mayor que su altura. si la base crece 4 cm y la altura disminuye en 2 cm, el área crece 8 cm^2. Calcula sus dimensiones.

29. La suma de dos números es 24 y su producto 135. Calcula dichos números.

30. Calcula las dimensiones de un rectángulo que tiene de perímetro 24 cm y de área 35 cm^2.

6. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

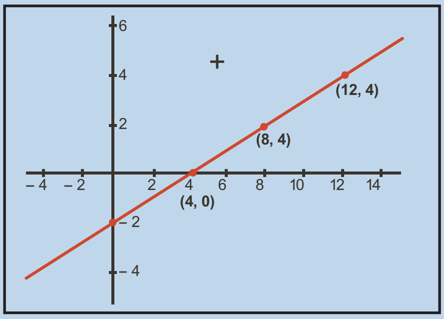
Una ecuación lineal con dos incógnitas es de la forma $a_1x + a_2y = b$; donde a_1, a_2 y b son número reales; x e y son las incógnitas.

Se llama solución de una ecuación lineal a los pares de valores (α, β) pertenecientes a R^2 que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una igualdad numérica verdadera. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal son los puntos de una recta del plano.

Ejemplo

Dada la ecuación lineal $x - 2y = 4$; comprueba que los pares (4, 0); (8, 2) y (12, 4) son algunas de sus soluciones; dibuja la recta que pasa por dichas soluciones.

Solución.



$4 - 2 \cdot 0 = 4$; $4 - 0 = 4$; $4 = 4$

$8 - 2 \cdot 2 = 4$; $8 - 4 = 4$; $4 = 4$

$12 - 2 \cdot 4 = 6$; $12 - 8 = 4$; $4 = 4$

Solución general; $x - 2y = 4$; $x = 4 + 2y$; se cambia el nombre a y; $y = \lambda$ (λ es un parámetro); la solución general se escribe $(4 + 2\lambda, \lambda)$; para cada valor que asignemos al parámetro λ se obtiene una solución particular.

7. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Se llaman **sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas** al conjunto formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se expresa así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Se llama solución del sistema al par de valores (α, β) que cumplen las dos ecuaciones.

Resolver un sistema es encontrar sus soluciones o demostrar que no tiene solución.

Resolución gráfica

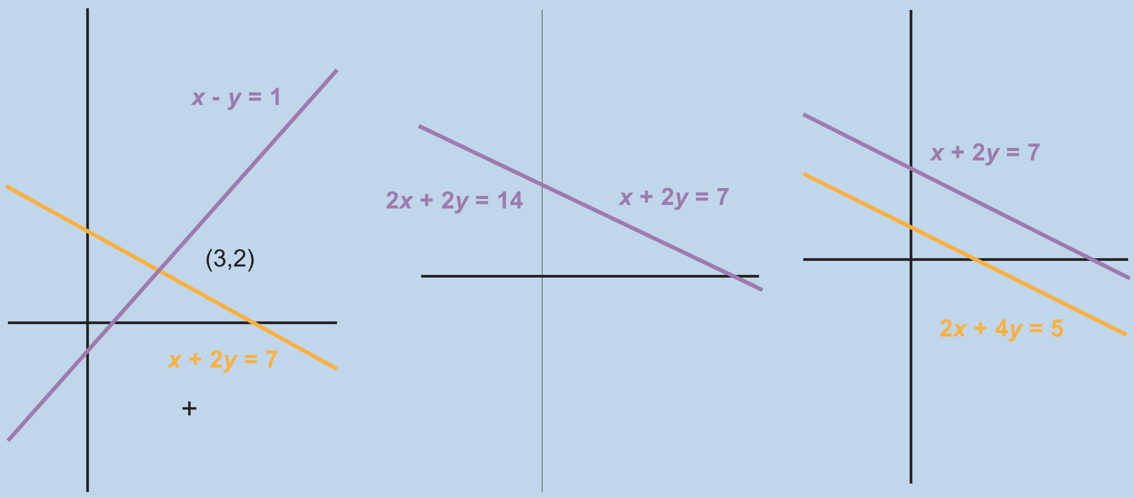
Para encontrar las soluciones de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden representar en coordenadas cartesianas las dos rectas que forman el sistema; los puntos de corte serán las soluciones del sistema.

Ejemplo

Resolver los sistemas: **a)** $\begin{cases} x+2y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+4y=14 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$

Solución.

Sistema a **Sistema b** **Sistema c**



a) Las dos recta se cortan en (3, 2) la solución del sistema es x = 3 e y = 2. **El sistema tiene solución única.**

b) Las rectas coinciden. **El sistema tiene infinitas soluciones.**

c) Las rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común. **El sistema no tiene solución.**

La solución gráfica permite clasificar los sistemas lineales en:

- **Compatibles** si tienen solución.
  - Si la solución es única se dice **compatible determinado**.
  - Si las soluciones son infinitas se dice **compatible indeterminado.**
- **Incompatibles** si no tienen solución.

Actividades

31. Resuelve gráficamente y clasifica los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x-y=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 8x-2y=2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 8x-2y=10 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

8. Sistemas equivalentes

Los sistemas: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$

Tienen por solución única (2, 1); decimos que son equivalentes.

En general **sistemas equivalentes** son aquellos que teniendo el mismo número de incógnitas (el número de ecuaciones puede ser distinto) tienen la misma solución.

Las siguientes transformaciones realizadas sobre un sistema dan lugar a sistemas equivalentes.

1. Cambiar el orden de las ecuaciones.

Ejemplo, los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ son equivalentes; ambos tienen por solución x = 3 e y = 2.

2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplo, los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} \lambda(2x-y)=\lambda 4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ con $\lambda \neq 0$ son equivalentes.

3. Sustituir una ecuación por la suma de ella con otras ecuaciones multiplicadas por números distintos de cero.

Ejemplo, los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x-y=4 \\ (x+3y)+3(2x-y)=9+3\cdot 4 \end{cases}$

son equivalentes, se opera en la segunda ecuación del segundo sistema y se obtiene,

$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 7x=21 \end{cases}$; que es un sistema más sencillo que el primero.

4. Suprimir una de las ecuaciones del sistema que sea combinación lineal de otras ecuaciones del sistema.

Ejemplo, los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$ son equivalentes, el segundo sistema resulta de suprimir la tercera ecuación del primero que es suma de las otras dos.

Actividades

32. Trasformar los sistemas siguientes en sistemas equivalentes con dos ecuaciones.

a) $\begin{cases} -2x+5y=3 \\ 2x+y=3 \\ 4x-4y=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 3x-y=13 \\ 2x+4y=4 \\ 5x+3y=17 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 4x-y=5 \\ x-2y=-4 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$

9. Métodos de resolución de sistemas lineales

Entre los métodos algebraicos que existen para resolver sistemas vamos a tratar:

- **Método de sustitución.** Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye la expresión obtenida en las otras ecuaciones.
- **Método de igualación.** Se despeja en todas las ecuaciones la misma incógnita y se igualan las expresiones obtenidas.
- **Método de reducción.** Se multiplican las ecuaciones por números adecuados de forma que al sumar los resultados se elimina una de las incógnitas.

Ejemplos

1. Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Solución.

- Se resuelve por **sustitución.**
- Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye su valor en la otra ecuación; que se transforma en una ecuación con una incógnita.
- Se despeja *y* en la segunda ecuación: $y = 4 - 2x$
- Se sustituye en la primera: $4x + 3(4 - 2x) = 10$
- Resolver esta ecuación: $x = 1$
- Sustituir el valor de x en la incógnita despejada: $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$
- La solución de sistema es $x = 1$ e $y = 2$.

2. Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Solución.

- Se resuelve por **igualación.**
- Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan, con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita.

- Despejar *y* en las dos ecuaciones: $y = \dfrac{10-4x}{3}$ e $y = 4-2x$
- Igualar los valores: $\dfrac{10-4x}{3} = 4-2x$
- Resolver esta ecuación: x = 1
- Sustituir este valor en la segunda y despejada: y = 4 - 2·1 = 2
- La solución de sistema es x = 1 e y = 2.

3. Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Solución.

- Se resuelve por **reducción.**
- Consiste en conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos en las dos ecuaciones y a continuación sumarlas.
- Se sustituye la segunda ecuación por el resultado de sumar la primera con la segunda multiplicada por –2; número con el que se consiguen que las dos ecuaciones tengan los coeficientes de x iguales y opuestos.

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = \ \ 10 \\ -\,4x - 2y = -\,8 \\ \hline 0x + \ \ y = \ \ \ 2 \end{array}$$

- El sistema de partida es equivalente al **sistema escalonado,** $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ \quad\quad\ \ y=2 \end{cases}$
- En este sistema es sencillo ver que y = 2; se sustituye este valor en la primera ecuación para calcular x; 4x + 3·2 = 10; x = 4/4 =1.
- La solución del sistema es x = 1 e y = 2.

Actividades

33. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ 5x-4y=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+7y=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x-2y=16 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

34. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 5x-3y=5 \\ 7x+2y=38 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x+3y=-13 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$

35. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}+\dfrac{4y}{5}=21 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{5}=17 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}-\dfrac{2y}{3}=1 \\ \dfrac{5x}{2}-\dfrac{4y}{3}=14 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{8}{15} \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x+4}{y+4}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

10. Sistemas de tres ecuaciones lineales. notaciones

Un **sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas** se escribe de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

A los números reales a_{ij} los llamamos coeficientes del sistema; a los b_i términos independientes y a las x_j incógnitas del sistema.

Se llama solución del sistema a los valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de las incógnitas que convierten las ecuaciones en identidades numéricas.

Clases de sistemas lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a los términos independientes se llaman:

- **Homogéneos** cuando los términos independientes b_i son todos ceros.
- **No homogéneos** si alguno de los términos independientes b_i son distintos de cero.

Según las soluciones, los sistemas pueden ser como hemos visto para los de dos ecuaciones en:

- **Incompatibles**, si no tiene solución.
- **Compatibles**, si tienen solución.
  - **Determinado**, si únicamente tiene una solución.
  - **Indeterminado**, si tiene infinitas soluciones.

11. Resolución de sistemas de tres ecuaciones método de Gauss

El **método de Gauss** permite, basándose en el método de reducción para sistemas de cualquier número de ecuaciones y de incógnitas, averiguar si son compatibles y en este caso resolverlos.

La combinación adecuada de las transformaciones **a)**, **b)**, **c)** y **d)** aplicadas a un sistema permiten obtener un sistema escalonado equivalente al inicial, que facilita la clasificación y solución en su caso, del sistema objeto de estudio.

Un **sistema escalonado de tres ecuaciones con tres incógnitas** tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Los ejemplos siguientes aclararán los pasos a seguir para trasformar sistemas en sistemas escalonados equivalentes.

Ejemplos

1. Resolver el siguiente sistema escalonado: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ 3z = 9 \end{cases}$

Solución.

Se despeja z en la tercera ecuación $y = \frac{6}{3} = 2$

Se sustituye el valor de *z* en la segunda ecuación y se despeja *y* ; $3y - 2 \cdot 3 = 0$; $3y = 6$; $y = \frac{6}{3} = 2$.

Finalmente se sustituyen los valores de *z* e *y* en la primera ecuación se despeja *x*:

$$x + 2 - 3 = -1;\ x = -1 - 2 + 3\ ;\ x = 0$$

La solución del sistema será: (0, 2, 3).

2. Transformar el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y en su caso, resolverlo: $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$

Solución.

Primer paso: anular el coeficiente de x en las dos últimas ecuaciones; para lo cual se realizan las dos transformaciones siguientes:

- Sustituir la segunda ecuación, por la que resulta de sumarle a ella la primera multiplicada por –2:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y + 4z = 2 \\ \underline{2x - 3y + 4z = 4} \\ 0x - 1y + 8z = 6 \end{array}$$

- Sustituir la tercera ecuación, por la que resulta de sumar a ella la primera multiplicada por –5:

$$\begin{array}{r} -5x + 5y + 10z = 5 \\ \underline{5x - y + 3z = 16} \\ 0x + 4y + 13z = 21 \end{array}$$

- Con lo que resulta el sistema equivalente siguiente: $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 0x - y + 8z = 6 \\ 0x + 4y + 13z = 21 \end{cases}$

Segunda paso: anular el coeficiente de *y* en la tercera ecuación; para lo que se realiza la transformación siguiente:

- Sustituir la tercera ecuación, por la que resulta de sumarle a ella la segunda multiplicada por 4.

$$\begin{array}{r} -4y+32z=24 \\ 4y+13z=21 \\ \hline 0y+45z=45 \end{array}$$

- Con esto se ha conseguido el sistema escalonado siguiente:

$$\begin{cases} x-y-2z= & -1 \\ 0z-y+8z= & 6 \\ 0x+0y+45z= & 45 \end{cases}$$

- La tercera ecuación se resuelve fácilmente y permite afirmar que el sistema es **compatible determinado** y la solución única es: $z=\frac{45}{45}=1$; – y + 8 = 6; *y* = 2; *x* –2 –2 = –1; *x* = 3.
- Que se expresa así: (*x*, *y*, *z*) = (3, 2, 1)

El nombre propuesto a las variables en el sistema no es fundamental para su solución; por tanto podemos prescindir del nombre de las variables y operar con sus coeficientes disponiéndolos en forma rectangular como se indica a continuación.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

A esta disposición rectangular de los coeficientes se la llama **matriz ampliada asociada al sistema**. Sobre esta matriz se aplican fácilmente los pasos para transformarla en la matriz ampliada asociada al sistema escalonado equivalente al dado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^a \textit{ fila por } (-2) \textit{ más } 2^a \textit{ fila} \Rightarrow \\ 1^a \textit{ fila por } (-5) \textit{ más } 3^a \textit{ fila} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad 2^a \textit{ fila por } 4 \textit{ más } 3^a \textit{ fila} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la matriz asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x-y-2z= & -1 \\ 0z-y+8z= & 6 \\ 0x+0y+45z= & 45 \end{cases}$;

☞ **Ejemplos**

3. Transformar el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y en su caso resolverlo: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$

Solución.

Primer paso. Anular el coeficiente de x en las dos últimas ecuaciones; para lo cual se realizan las dos transformaciones siguientes.

- Sustituir la segunda ecuación por la que resulta de sumar a la segunda actual la primera multiplicada por – 2:
$$\begin{array}{r} -2x + 2y - 6z = -8 \\ 2x - \;\; y - \;\; z = \;\; 6 \\ \hline 0x + \;1y - 7z = -2 \end{array}$$

- Sustituir la tercera ecuación por la que resulta de sumarle a ésta la primera multiplicada por – 3:
$$\begin{array}{r} -3x + 3y - 9z = -12 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \\ \hline 0x + 1y - 7z = -2 \end{array}$$

- Con lo que resulta el sistema equivalente siguiente: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 0x + y - 7z = -2 \\ 0x + y - 7z = -2 \end{cases}$

Segundo paso: Anular el coeficiente de y en la tercera ecuación; para lo que se realiza la transformación siguiente.

- Sustituir la tercera ecuación por la que resulta de sumarle a ésta la segunda multiplicada por – 1:
$$\begin{array}{r} -y + 7z = 2 \\ y - 7z = -2 \\ \hline 0y + 0z = 0 \end{array}$$

- Con esto se ha conseguido el sistema escalonado siguiente: $\begin{cases} x - y + 3 = 4 \\ 0z + y - 7z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$

- La tercera ecuación es $0z = 0$; cualquier valor de z cumple la ecuación, por lo que tiene infinitas soluciones; que serán las infinitas soluciones del sistema; por lo que se trata de un sistema **compatible indeterminado**.

- El sistema que resulta es: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \end{cases}$

- Se toma z como parámetro; $z = \lambda$ con lo que $y = -2 + 7\lambda$, y por tanto:

$x = 4 + y - 3z = 4 - 2 + 7\lambda - 3\lambda = 2 + 4\lambda.$

- La solución será: $(x, y, z) = (2 + 4\lambda, -2 + 7\lambda, \lambda)$
- Se trata de un sistema compatible, indeterminado uniparamétrico.
- Utilizando la notación matricial, los pasos serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a \textit{ fila por } (-2) \textit{ más } 2^a \textit{ fila} \Rightarrow \\ 1^a \textit{ fila por } (-3) \textit{ más } 3^a \textit{ fila} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^o \textit{ fila menos } 2^a \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esta es la matriz asociada al sistema triangular: $\left\{ \begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ y - 7z &= -2 \\ 0z &= 0 \end{aligned} \right.$

4. Transformar el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y en su caso resolverlo:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ 4x - 2y + 6z &= 9 \\ x - y + z &= 3 \end{aligned} \right.$$

Solución.

Primer paso. Cambiar el orden de las ecuaciones (colocamos la tercera en primer lugar); esto facilita los cálculos

$$\left\{ \begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 6 \\ 4x - 2y + 6z &= 9 \end{aligned} \right.$$

Segundo paso. Anular los coeficientes de x en las dos últimas ecuaciones; para lo que se realizan las dos transformaciones siguientes.

- Sustituir la segunda ecuación por la que resulta de sumarle a ésta la primera multiplicada por – 2:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y - 2z = -6 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ \hline 0x + 1y + 1z = 0 \end{array}$$

- Sustituir la tercera ecuación por la que resulta de sumarle la primera multiplicada por – 4:

$$\begin{array}{r} -4x + 4y - 4z = -12 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ \hline 0x + 2y + 2z = -3 \end{array}$$

- Con lo que resulta el sistema equivalente siguiente: $\left\{ \begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 0x + y + z &= 0 \\ 0x + 2y + 2z &= -3 \end{aligned} \right.$

Tercer paso. Anular el coeficiente de y en la tercera ecuación; para lo que se realiza la transformación siguiente.

- Sustituir la tercera ecuación por la que resulta de sumarle a ésta la segunda ecuación multiplicada por – 2:

$$\begin{array}{r} -2y-2z=0 \\ \underline{2y+2z=-3} \\ 0x+0y=-3 \end{array}$$

- Con esta se ha conseguido el sistema escalonado siguiente:

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 0x+y+z=0 \\ 0x+0y+0z=-3 \end{cases}$$

- La tercera ecuación, $0z = -3$, no tiene solución; cualquier número por cero da cero.
- Utilizando la notación matricial los pasos serian:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} 3^a \text{ ecuación como } 1^a \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a F \text{ por } (-2)+2^a F \\ 1^a F \text{ por } (-4)+3^a F \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 2^a F \text{ por } (-2)+3^a F \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- Esta es la matriz asociada al sistema triangular: $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 0x+y+z=0 \\ 0x+0y+0z=-3 \end{cases}$

Discusión de un sistema por el método de Gauss.

Sea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Si al reducirlo a la forma triangular escalonada aparece alguna ecuación del tipo $0z = b$ con $b \neq 0$el sistema es incompatible.

Si no sucede lo anterior, el sistema es compatible.

Si el número de ecuaciones no triviales (es decir, una vez eliminadas las de la forma 0 = 0, si las hubiera) fuera tres, igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única. Sistema compatible determinado.

Si el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones; el sistema es compatible, indeterminado; el número de parámetros del que dependen las soluciones es igual al numero de incógnitas menos el de ecuaciones.

Ejemplos

5. Discutir y resolver en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$

Solución.

- Se parte de la matriz asociada al sistema y se opera para conseguir una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^o F + 2^a F \\ 1^a F \; por \; (-2) + 3^a F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a F + 3^a F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

esta es la matriz asociada al sistema triangula: $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -y-z=4 \\ -2z=0 \end{cases}$

- La tercera ecuación tiene solución única; por lo tanto el sistema es compatible determinado.
- De la tercera ecuación $z=\frac{0}{2}=0$; se sustituye en la segunda, – y – 0 = 4; y = 4 y por último se trabaja con la primera ecuación; x + 2.4 + 0 = 3 x = –5
- La solución es: (x, y, z) = (–5, 4, 0)

6. Discutir y resolver en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+3y-2z=0 \end{cases}$

Solución.

- Se escribe la matriz asociada al sistema y se trata de escalonar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} 1^a F + 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esta es la matriz asociada al sistema: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4y-z=0 \end{cases}$
- En la segunda ecuación se puede despejar z, puesto que es la que tiene como coeficiente menos uno; con lo que la variable y se elige como parámetro. El sistema es compatible, indeterminado. Se hace $y = \lambda$ y se sustituye en la segunda ecuación; $4\lambda - z = 0$; $z = 4\lambda$.
- De la primera ecuación se calcula x; $x + \lambda + 4\lambda = 0$; $x = -5\lambda$.
- La solución será: $(x, y, z) = (-5\lambda, \lambda, 4\lambda)$

Actividades

36. Indicar de qué tipo es cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ -4x + 8y + 2z = 6 \\ -7x + 8y + 3z = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 8 \\ x + y - 2z = 4 \\ 4x - 2y - 9z = 16 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x - 6y + 8z = 3 \\ 4x - y + 2z = 15 \\ 5x - 7y + 10z = 8 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$

37. Estudiar y resolver en su caso los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -x + y - 4z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

12. Sistemas homogéneos

Recuerda que un sistema es homogéneo si todos los términos independientes son cero.

La expresión de un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas será:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Los sistemas homogéneos tienen la particularidad de que todos son compatibles, pues al menos tienen como solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, llamada impropia o trivial.

Por tanto al **discutir por Gauss un sistema homogéneo** de tres incógnitas se pueden presentar los casos siguientes:

- Si el número de ecuaciones no triviales (es decir, una vez eliminadas las de la forma 0 = 0 si las hubiera) fuera tres, igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única; por tanto la trivial (0, 0, 0). Sistema compatible determinado.
- Si el numero de ecuaciones es menor que el de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones, el sistema es compatible indeterminado; el número de parámetros es igual al número de incógnitas menos el de ecuaciones.

Ejemplo

7. Transformar el sistema homogéneo siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasificarlo y en su caso resolverlo:

$$\begin{aligned} x+y-z&=0\\ 2x-4y+2z&=0\\ -x+5y-3z&=0 \end{aligned}$$

Solución.

Se parte de la matriz asociada al sistema y se opera para conseguir una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 2 & 0\\ -1 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a\,F \text{ por } (-2)+2^a\,F \\ 1^a\,F+3^a\,F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -6 & 4 & 0\\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a\,F+3^a\,F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \\ 0 & -6 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

esta es la matriz asociada al sistema triangular: $\begin{cases} x+y-z=0\\ -6y+4z=0\\ \quad 0z=0 \end{cases}$

Como el número de ecuaciones no triviales es dos, menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

De la segunda ecuación; $-6y+4z=0 \Rightarrow -6y=-4z \Rightarrow y=\dfrac{-4z}{-6}=\dfrac{2z}{3}$; para evitar que las soluciones se expresen como fracciones, expresamos z como producto de 3 por el parámetro λ; esto es

$$z=3\lambda \Rightarrow y=\frac{2\cdot 3\lambda}{3}=2\lambda\ ;$$

$$x + 2\lambda - 3\lambda = 0,\ x = \lambda.$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$

Actividades

38.a 38.b 38.c

38. Estudiar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $\begin{cases} 2x-5y+3z=0\\ 2x-y=0\\ x+y+z=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y-z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-y+3z=0\\ 3x+y-5z=0 \end{cases}$

13. Problemas que se resuelven planteando sistemas de tres ecuaciones lineales

El lenguaje algebraico, como ya sabemos, es una potente herramienta para **resolver problemas**; en este apartado trataremos la resolución de problemas que precisan de los sistemas lineales estudiados.

Los pasos a seguir para resolver este tipo de problemas son los indicados en el apartado **5**.

Ejemplos

1. Una multinacional de seguros tiene delegaciones en Madrid, Barcelona y Valencia. El número total de altos ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de altos ejecutivos de la delegación de Barcelona fuese igual al de Madrid, tendrían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Además, el número de los de Madrid excede en uno a la suma de los destinados en las otras dos ciudades. ¿Cuántos altos ejecutivos están destinados en cada ciudad?

Solución.

Sean *x*, *y*, *z* los altos ejecutivos de Madrid, Barcelona y Valencia

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=31 \\ x-y \qquad =6 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

El sistema triangular asociado a la matriz será: $\begin{cases} x+\ y+\ z=31 \\ \quad -2y-z=-25 \\ \qquad\quad -z=-5 \end{cases}$

La solución será: $z = 5$; $-2y - 5 = -25$; $-2y = -20$; $y = 10$; $x + 10 + 5 = 31$; $x = 16$

Por lo que los ejecutivos de la multinacional son: 16 en Madrid; 10 en Barcelona y 5 en Valencia

2. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros. Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución.

Sean x, y, z los precios de los productos A, B y C antes de la oferta.

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 0,96x+0,94{\cdot}2y+0,95{\cdot}3z=(135+y+2z)-16 \\ 0,92{\cdot}3x+0,90y+0,94{\cdot}5z=(135+2x+4z)-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=135 \\ 0,96x+0,88y+0,85z=119 \\ 0,76x+0,90y+0,70z=106 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 96x+88y+85z=11900 \\ 76x+90y+70z=10600 \end{cases}$$

Matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 96 & 88 & 85 & 11900 \\ 76 & 90 & 70 & 10600 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a F \; por \; (-96)+2^a F \\ 1^a F \; por \; (-76)+3^a F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 14 & -6 & 340 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a F \; por \; 14+3^a F \; por \; 8 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 0 & -202 & -12120 \end{pmatrix} \text{esta es la matriz asociada al sistema triangular} \begin{cases} x+y+z=135 \\ -8y-11z=-1060 \\ -202z=-12120 \end{cases}$$

La solución será:

$$z=\frac{-12120}{-202}=60; \quad -8y-11\cdot 60=-1060; \quad -8y=-400; \; y=\frac{-400}{-8}=50$$

$x + 50 + 60 = 135$; $x = 135 - 110$; $x = 25$.

Los precios iniciales serán: A = 25 euros; B = 50 euros y C = 60 euros.

3. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264.000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución.

Sean *x*, *y*, *z* respectivamente los euros, dólares y libras esterlinas el dinero que la empresa desea disponer.

$$\begin{cases} x+1,1y+1,5z=264000 \\ x=2(1,1y) \\ \dfrac{x}{10}=1,5z \end{cases}$$

resolver el sistema planteado, por el método más sencillo.

$$\begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \\ x - 15z = 0 \end{cases} \text{; sumar 1ª ecuación y tercera } \begin{cases} 11x + 11y = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \end{cases}$$

sumar la primera ecuación multiplicada por dos más la segunda;

$$32x = 5280000 : x = \frac{5280000}{32} = 165000.$$

$$y = \frac{10x}{22} = \frac{1650000}{22} = 75000 \text{;} \quad z = \frac{x}{15} = \frac{165000}{15} = 11000$$

La empresa dispone de 165000 euros; 75000 dólares y 11000 libras esterlinas.

Actividades

39. Para distribuir un lote de objetos, se le da igual número de ellos a cada una de las 15 personas presentes; pero llega una persona más y hay que dar a cada una un objeto menos, sobrando ahora 11 objetos. Calcula los objetos del lote y los que corresponden a cada persona de las presentes al final.

40. Dos grifos tardan en llenar un recipiente sin desagüe 27 y 54 horas respectivamente. ¿Cuánto tardarán los dos grifos juntos?.

41. Se desea cercar un campo rectangular con 1 200 m de alambrada. Un río corre a lo largo de un lado del campo y no es necesario vallarlo. Sabiendo que el área del campo es de 160 000 metros cuadrados, ¿qué dimensiones tiene el campo?

42. Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

43. La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de !as decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. Calcula dicho número.

44. Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad A de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

45. Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.

46. Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2 kilómetros y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres, fue de 45 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno?

47. Juana y Mercedes tenían 20000 € cada una para invertir. Cada una de ellas distribuye su dinero de la misma forma en tres partes P, Q y R y las ingresan en una entidad financiera. Al cabo de un año, a Juana le han dado un 4% de interés por la parte P, un 5% por la parte Q y un 4% por la parte R y a Mercedes le han dado un 5% por la parte P, un 6% por la parte Q y un 4% por la parte R. Juana ha recibido en total 850 € de intereses, mientras que Mercedes ha recibido 950 €. ¿De qué cantidad de euros constaba cada una de las partes P, Q y R?

48. Tres hermanos tienen edades diferentes, pero sabemos que la suma de las edades de los 3 hermanos es de 37 años, y la suma de la edad del mayor más el doble de la edad del mediano más el triple de la edad del menor es de 69 años.

a) Expresa las edades de los tres hermanos en función de la edad del hermano menor.

b) Es posible que el hermano menor tenga 5 años? y 12 años? Razona la respuesta.

c) Calcula las edades de los tres hermanos.

49. Una fábrica de helados elabora tres tipos de helados, H1, H2 y H3, a partir de tres ingredientes A, B y C. Se desea saber el precio unitario de cada ingrediente sabiendo que el helado H1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidad de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0,9 euros. El helado H2 se elabora con 1 unidad de A, 2 unidades de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0,8 euros. El helado H3 se compone de 1 unidad de A, 1 unidad de B y 2 unidades de C y supone un coste de 0,7 euros.