3 Polinomios y fracciones algebraicas

Un polinomio es una expresión algebraica en la que las letras y los números están sometidos a las operaciones de sumar, restar y multiplicar.

Los polinomios, que serán objeto de estudio en esta Unidad, han aparecido en muchas ocasiones; expresiones como el área del rectángulo "$b \cdot h$", el área total del cilindro "$2 \cdot \pi\, r\, h + 2 \cdot \pi\, r^2$" o el volumen de la esfera "$\frac{4}{3}\pi\, r^3$", son ejemplos de polinomios.

En esta Unidad didáctica se estudiarán las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios, además de la descomposición de estos en producto de factores irreducibles.

La división de polinomios como la división entre números enteros puede ser exacta (resto cero), en cuyo caso se dice que el dividendo es un múltiplo del divisor, o entera (resto distinto de cero).

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Aprender correctamente el significado de valor numérico de un polinomio y, en especial, el significado cuando el valor es cero.
2. Realizar con soltura las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.
3. Enunciar comprensivamente los teoremas del resto y del factor .
4. Conocer operativamente las propiedades de divisibilidad de polinomios.
5. Definir y calcular comprensivamente los conceptos de m.c.d. y m.c.m. de polinimios.
6. Enunciar y comprender la propiedad fundamental de las fracciones algebraicas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Polinomios. Valor numérico

Para escribir números utilizamos usualmente el sistema de numeración decimal, que es posicional; es decir, los valores de las cifras que forman el número dependen de los lugares que ocupan; esto permite escribir los números en forma de polinomio; por ejemplo el número 3 437 escrito en forma de polinomio sería:

$$3\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 7$$

Como puedes ver las diferentes cifras aparecen multiplicados por potencias de 10; si el número anterior en lugar de ser decimal, estuviera escrito en base *x*, su expresión de polinomio sería:

$$3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 7$$

A las expresiones como la anterior que generalizan las escrituras de polinomios numéricos las llamamos simplemente polinomios de una variable.

- Los distintos sumandos que forman el polinomio son sus **términos**.
- Cada término está esta formado **por un número** o por **el producto de un número por la variable o indeterminada** elevada a alguna potencia.
- El término numérico se llama **término independiente**, y el término de mayor grado es el **grado del polinomio**.
- El polinomio anterior tiene 4 términos, su término independiente es 7 y su grado es 3.
- Los polinomios reciben nombre por el número de términos; por ejemplo,
  - **Monomio**: si tiene un término.
  - **Binomio**: si tiene dos términos.
  - **Trinomio**: si tiene tres términos.

La ideas anteriores permiten definir:

Un polinomio es una expresión en la que intervienen sumas y restas de multiplicaciones de números por potencias de la variable.

Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$. Se llama **valor numérico del polinomio** $p(x)$ para $x = 3$, al número que resulta al sustituir *x* por 3; es decir,

$$p(3) = 2\cdot 3^3 - 4\cdot 3^2 + 5\cdot 3 - 8 = 25$$

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ se determina al sustituir en el polinomio x por a.

Ejemplos

1. Indica el grado y el término independiente de los polinomios siguientes:

a) $3x^4 - 6x^2 + 8x - 12$; **b)** $2x^5 + 5x - 15$; **c)** $5x^3 - 6x + 17$; **d)** $6x^2 + 12x - 18$

Solución.

Grado: de **a)** cuatro; de **b)** cinco; de **c)** tres; de **d)** dos.

Término independiente: de **a)** -12; de **b)** -15; de **c)** +17; de **d)** -18

2. Calcula el valor numérico del polinomio $q(x) = 3x^4 + 4x^2 - 6x + 7$; para $x = 2$ y $x = -1$.

Solución.

Para $x = 2$; $q(2) = 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 48 + 16 - 12 + 7 = 59$

Para $x = -1$; $q(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 7 = 3 + 4 + 6 + 7 = 20$

Actividades

1. Indica el nombre y el grado de los siguientes polinomios:
a) $4x^3 - 7x^2 + 5$; **b)** $2x^4 - 1$; **c)** 17.

2. Calcula el valor numérico del polinomio $q(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5$ para $x = 3$; $x = 2$; $x = -2$ y $x = -1$.

2. Operaciones con polinomios

En los apartados siguientes trataremos diferentes operaciones con polinomios de una indeterminada.

2.1. Suma y resta de polinomios

Suma y resta de monomios

Se suman y restan monomios de igual grado o semejantes; sumando o restando sus coeficientes; ejemplos:

a) $(4x^2) + (5x^2) = 9x^2$; b) $(12x^4) - (7x^4) = 5x^4$; c) $(3x^4) + (2x^3) = 3x^4 + 2x^3$

En los ejemplos a) y b) se han simplificado; en el c), como los monomios no son semejantes, no se ha podido simplificar y se deja la suma indicada.

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan los monomios de igual grado o semejantes.

Para restar polinomios se suma al minuendo el opuesto del sustraendo; veamos unos ejemplos:

Sumar: $(3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) + (3x^3 - 5x^2 + 8x - 14) = (3x^4) + (6x^3 + 3x^3) +$
$+ (-5x^2) + (-4x + 8x) + (19 - 14) = 3x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 4x + 5$

Restar: $(3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) - (3x^3 - 5x^2 + 8x - 14) = (3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) +$
$+ (-3x^3 + 5x^2 - 8x + 14) = (3x^4) + (6x^3 - 3x^3) + (5x^2) + (-4x - 8x) + (19 + 14)$
$= 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 12x + 33$

Ejemplos

1. Calcula: **a)** $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^3$; **b)** $\frac{2}{3}y^4 - \frac{1}{6}y^4$; **c)** $\frac{2}{5}z^2 - \frac{3}{5}z^3$

Solución. **a)** $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^3 = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)x^3 = \frac{3}{4}x^3$; **b)** $\frac{2}{3}y^4 - \frac{1}{6}y^4 = \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{6}\right)y^4 = \frac{3}{6}y^4 = \frac{1}{2}y^4$

c) $\frac{2}{5}z^2 - \frac{3}{5}z^3$; los monomios no son semejantes y no se pueden simplificar.

2. Calcula: **a)** $(13x^3 - 6x + 5) + (4x^3 + 7x^2 + 11x + 9)$; **b)** $(3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) - (3x^2 + 7x - 3)$

Solución. **a)** $(13x^3 - 6x + 5) + (4x^3 + 7x^2 + 11x + 9) = (13x^3 + 4x^3) + 7x^2 + (-6x + 11x) +$
$+ (5 + 9) = 17x^3 + 7x^2 + 5x + 14.$

b) $(3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) - (3x^2 + 7x - 3) = (3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) + (-3x^2 - 7x + 3)$
$= 3x^3 + (9x^2 - 3x^2) + (-6x - 7x) + (7 + 3) = 3x^3 + 6x^2 - 13x + 10.$

2.2. Multiplicación de polinomios

Multiplicación de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio, cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios factores y el grado es suma de sus grados; ejemplo:

Multiplicar: $(5x^3)(3x^2) = (5 \cdot 3)(x^3 \cdot x^2) = 15x^{3+2} = 15x^5$

El producto de dos monomios es otro monomio, de grado suma de los grados de los factores.

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los monomios del polinomio factor; ejemplo:

Multiplicar: $3x^2\,(2x^3 - 3x^2 + 7x - 9) = (3x^2)(2x^3) + (3x^2)(-3x^2) + (3x^2)(7x) + (3x^2)(-9)$

$= 6x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 27x^2$

El grado del polinomio producto de un monomio por un polinomio es la suma de los grados del monomio y del polinomio.

Factor común

La operación inversa de multiplicar un polinomio por un monomio se llama sacar factor; ejemplo, sacar factor común $3x^2$ en el polinomio producto anterior.

Factor común: $6x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 27x^2 = 3x^2\,(2x^3 - 3x^2 + 7x - 9)$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor; ejemplo:

Multiplicar: $(3x^4 - 5x - 8)\,(2x^2 + 5) = 3x^4\,(2x^2 + 5) - 5x\,(2x^2 + 5) - 8\,(2x^2 + 5) =$

$= 6x^6 + 15x^4 - 10x^3 - 25x - 16x^2 - 40 = 6x^6 + 15x^4 - 10x^3 - 16x^2 - 25x - 40$

Disposición práctica:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 3x^4 & & & -5x & -8 \\
 & & & 2x^2 & & +5 \\
\hline
 & 15x^4 & & & -25x & -40 \\
6x^6 & & -10x^3 & -16x^2 & & \\
\hline
6x^6 & +15x^4 & -10x^3 & -16x^2 & -25x & -40
\end{array}$$

El *grado del polinomio producto* es la suma de los grados de los polinomios factores.

Ejemplos

1. Multiplica: **a)** $(3x^4)(7x^3)$; **b)** $\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{5}{2}x^3\right)$; **c)** $(3{,}5x^2)(2{,}6x^5)$.

Solución. **a)** $(3x^4)(7x^3) = 21x^7$; **b)** $\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{5}{2}x^3\right) = \frac{15}{8}x^5$; **c)** $(3{,}5x^2)(2{,}6x^5) = 9{,}1x^7$.

2. Calcula: **a)** $3x^2(4x^3 - 6x^2 + 14)$; **b)** $\frac{2}{3}x^2(8x^3 - 6x + 3)$

Solución.

a) $3x^2(4x^3 - 6x^2 + 14) = 3x^2 \cdot 4x^3 + 3x^2(-6x^2) + 3x^2 \cdot 14 = 12x^5 - 18x^4 + 42x^2$;

b) $\frac{2}{3}x^2(8x^3 - 6x + 3) = \frac{2}{3}x^2(8x^3) + \frac{2}{3}x^2(-6x^2) + \frac{2}{3}x^2(3) = \frac{16}{3}x^5 - \frac{12}{3}x^3 + \frac{6}{3}x^2 = \frac{16}{3}x^5 - 4x^3 + 2x^2$

3. Sacar factor común: **a)** $4x^4 - 6x^3 + 2x^2$; **b)** $9x^4 + 12x^3 - 15x$.

Solución. El término $2x^2$ es factor común en todos los sumandos en a); por tanto,

a) $4x^4 - 6x^3 + 2x^2 = 2x^2(2x^2 - 3x + 1)$.

El término $3x$ es factor común en todos los sumandos en b; por tanto,

b) $9x^4 + 12x^3 - 15x = 3x(3x^3 + 4x^2 - 5)$

4. Halla: $(2x^3 + 4x^2 - 8x + 7)(3x^2 - x + 6)$.

Solución. $(2x^3 + 4x^2 - 8x + 7)(3x^2 - x + 6) = 2x^3(3x^2 - x + 6) + 4x^2(3x^2 - x + 6) -$

$- 8x(3x^2 - x + 6) + 7(3x^2 - x + 6) = 6x^5 - 2x^4 + 12x^3 + 12x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 24x^3 +$

$+ 8x^2 - 48x + 21x^2 - 7x + 42 = 6x^5 + (-2x^4 + 12x^4) + (12x^3 - 4x^3 - 24x^3) + (24x^2 +$

$+ 21x^2) + (-48x - 7x) + 42 = 6x^5 + 10x^4 - 16x^3 + 45x^2 - 55x + 42.$

2.3. División de polinomios

División de monomios

El cociente de dos monomios si el grado del monomio dividendo es mayor que el grado del monomio divisor, es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes del monomio entre el monomio divisor y su grado es la diferencia de los grados de los monomios que se dividen.

$$(ax^m):(bx^n) = \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

Dividir: $\frac{32x^6}{8x^4} = \frac{32}{8}x^{6-4} = 4x^2$

División de polinomios

En el ejemplo resuelto aparecen los pasos que se deben seguir para dividir dos polinomios.

Ejemplo: Dividir los polinomios: $D(x) = 6x^5 + 8x^4 - x^3 + 8x^2 + 6x + 7$
y $d(x) = 2x^3 - x + 3$.

Antes de comenzar la división se ordenan los polinomios de mayor a menor grado y se dejan los huecos de los términos que falten en el divisor, como se indica a continuación:

$$
\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & 6x^5 & +8x^4 & -x^3 & +8x^2 & +6x & +7 & 2x^3 - x + 3 \\
\cline{8-8}
 & -6x^5 & & +3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2 + 4x + 1 = c(x) \\
\cline{2-7}
1^{er}\ \text{Resto} & & +8x^4 & +2x^3 & -x^2 & +6x & +7 & \\
 & & -8x^4 & & +4x^2 & -12x & & \\
\cline{2-7}
2^{o}\ \text{Resto} & & & 2x^3 & +3x^2 & -6x & +7 & \\
 & & & -2x^3 & & +x & -3 & \\
\cline{2-7}
\text{Resto} & & & & 3x^2 & -5x & +4 = r(x) &
\end{array}
$$

1º Se divide el monomio de mayor grado del dividendo entre el monomio de mayor grado del divisor: $(6\,x^5) : (2x^3) = 3x^2$; este es el primer monomio del cociente.

2º Se multiplica el monomio cociente por el polinomio divisor; se van cambiando los signos de los monomios resultantes, se colocan bajo el dividendo y a continuación se suman.

3º El resultado de la suma ($8x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 7$) es el primer resto.

Se siguen los pasos anteriores 1, 2, y 3; los restos sucesivos serán los nuevos divisores hasta conseguir un resto de grado inferior al divisor, que será el resto de la división.

El grado del polinomio cociente es la diferencia entre los grados del dividendo y del divisor:

grado de $c(x)$ = grado de $D(x)$ - grado de $d(x)$

El grado del resto es menor que el grado del divisor:

grado de $r(x)$ < grado de $d(x)$

División entera y división exacta

En el ejemplo anterior, la división de $D(x)$ (dividendo) entre $d(x)$ (divisor), se han obtenido dos polinomios; $c(x)$ (cociente) y $r(x)$ (resto). Se cumple:

$D(x) = d(x)\,c(x) + r(x)$ o bien $\dfrac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$

Si al realizar la división de dos polinomios se obtiene un cociente y un resto no nulo la división es entera.

Si al realizar la división el resto es cero la división es exacta.

Ejemplos:

División entera. El ejemplo anterior se puede expresar como sigue

$$\frac{6x^5+8x^4-x^3+8x^2+6x+7}{2x^3-x+3}=3x^2+4x+1+\frac{3x^2-5x+4}{2x^3-x+3}$$

División exacta

$$\frac{6x^6-16x^5+23x^4-36x^2+57x-40}{2x^2-4x+5}=3x^4-2x^3+5x-8$$

Ejemplos

1. Calcula los siguientes cocientes: **a)** $\dfrac{32x^6}{8x^2}$; **b)** $\dfrac{30x^4}{6x^3}$; **c)** $\dfrac{56y^3}{7y}$

Solución. Se dividen los coeficiente y se restan los exponentes,

a) $\dfrac{32x^6}{8x^2}=4x^4$; **b)** $\dfrac{30x^4}{6x^3}=5x$; **c)** $\dfrac{56y^3}{7y}=8y^2$

2. Calcula: **a)** $(15x^5 - 10x^4 + 20x^3) : 5x^3$; **b)** $(12x^6 + 15x^4 - 24x^3): 3x^2$

Solución. Se divide cada término de dividendo entre el monomio divisor,

a) $\dfrac{15x^5-10x^4+20x^3}{5x^3}=\dfrac{15x^5}{5x^3}-\dfrac{10x^4}{5x^3}+\dfrac{20x^3}{5x^3}=3x^2-2x+4$

b) $\dfrac{12x^6+15x^4-24x^3}{3x^2}=\dfrac{12x^6}{3x^2}+\dfrac{15x^4}{3x^2}-\dfrac{24x^3}{3x^2}=4x^4+5x^2-8x$

3. Calcula: **a)** $(x^4 + 6x^2 - 4x + 5) : (x^2 + 2x + 3)$

Solución. Se dejan espacios para los términos que faltan en el divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +6x^2 & -4x & +5 & x^2+2x+3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & -3x^2 & & & x^2-2x+7 \longrightarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +3x^2 & -4x & +5 & \\
 & +2x^3 & +4x^2 & +6x & & \\ \cline{1-5}
 & & 7x^2 & +2x & +5 & \\
 & & -7x^2 & -14x & -21 & \\ \cline{1-5}
 & & & -12x & -16 & \longrightarrow \text{Resto}
\end{array}$$

Actividades

3. Dados los polinomios $p(x) = 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 10x - 5$ y $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 9$.

Calcula: $2p(x) + q(x)$ y $3p(x) - 2q(x)$.

4. Calcula: **a)** $3x^2(x^3 - 4x - 2)$; **b)** $3x^3(5x^2 + 7x - 6)$; **c)** $0{,}5x(4x^3 + 6x + 16)$.

5. Saca factor común: **a)** $6x^4 - 4x^3 + 8x^2$; **b)** $3x^6 + 12x^5 - 18x^3$.

6. Calcula: **a)** $(x^2 + 5x + 2)(x + 3)$; **b)** $(x^4 - 2x^2 + 6x - 4)(x^2 + 2x + 3)$;
c) $(2x^3 - 3x^2 + 4)(x^2 + 3)$; **d)** $(4x^4 + 5x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 6)$

7. Calcula: **a)** $(2x + 3)^2$; **b)** $(3x - 2)^2$; **c)** $(3x + 2)(3x - 2)$; **d)** $(2x^2 + x - 3)^2$

8. Calcula: **a)** $(36x^4 - 16x^3 + 8x^2) : (4x^2)$; **b)** $(24x^5 - 12x^3 + 18x) : (-3x)$

9. En la división $D(x) : d(x)$ se sabe que el grado del dividendo es seis y el grado del divisor es dos. ¿Cuál es el grado del cociente? ¿Qué puedes decir del grado del resto?

10. Comprueba que las divisiones siguientes son exactas.

a) $(2x^3 + x^2 + 6x + 3) : (x^2 + 3)$; **b)** $(2x^3 - 2) : (x^2 + x + 1)$.

11. Calcula a y b para que la división

$(x^4 + 2x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x + 2)$ sea exacta.

12. Halla el cociente y el resto de la divisiones siguientes y expresa el resultado en la forma:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{c(x)}{d(x)}$$

a) $(4x + 6) : (2x + 3)$; **b)** $(6x + 12) : 2x$;

c) $(4x^2 - 2x + 8) : (x + 3)$; **d)** $(6x^3 - 17x^2 + 5x + 8) : (3x^2 - 4x + 1)$;

e) $(2x^4 - 6x^3 + 5x + 4) : (x^2 + 3x - 2)$; **f)** $(2x^5 + 4x^3 - x + 12) : (x^2 - 2x)$.

13. Calcula *a* y *b* para que la siguientes divisiones den de resto $x + 7$

a) $(2x^3 - 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 3)$

b) $(4x^3 + 2x^2 + ax + b) : (x^2 + 2x - 4)$.

3. División de un polinomio por (x - a): Regla de Ruffini

En este apartado vamos a dar una regla que simplifica la división de polinomios por el binomio $x - a$; para ello se debe seguir el siguiente ejemplo:

Calcular el cociente y el resto de la división: $(2x^3 - 6x^2 + 5x + 7) : (x - 2)$.

Solución:

Al realizar la división se dejan las operaciones indicadas, con el fin de encontrar relaciones que nos permitan nuevas disposiciones prácticas.

$$\begin{array}{llll|l}
2x^3 & -6x^2 & +5x & +7 & x-2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 + & (2\cdot 2)\,x^2 & & & 2x^2 + (-6+2\cdot 2)x + (5-6\cdot 2+2\cdot 2^2) = \textbf{Cociente} \\ \cline{1-3}
 & (-6+2\cdot 2)x^2 & +5x & & \\
 & -(-6+2\cdot 2)x^2 & +(-6\cdot 2+2\cdot 2^2)x & & \\ \cline{2-4}
 & & (5-6\cdot 2+2\cdot 2^2)x & +7 & \\
 & & -(5-6\cdot 2+2\cdot 2^2)x & +(5\cdot 2-6\cdot 2^2+2\cdot 2^3) & \\ \cline{3-4}
 & & \textbf{Resto} = & 7+5\cdot 2-6\cdot 2^2+2\cdot 2^3 = 9 &
\end{array}$$

La prueba de la división permite escribir: $2x^3 - 6x^2 + 5x + 7 = (x - 2)(2x^2 - 2x + 1) + 9$

Disposición práctica:

Observa los coeficientes del cociente y el resto y comprenderás que la siguiente disposición facilita los cálculos.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -6 & +5 & +7 \\
2 & & 2\cdot 2 & -6\cdot 2+2\cdot 2^2 & 5\cdot 2-6\cdot 2^2+2\cdot 2^3 \\ \hline
 & 2 & (-6+2\cdot 2) = -2 & (5-6\cdot 2+2\cdot 2^2) = 1 & (7+5\cdot 2-6\cdot 2^2+2\cdot 2^3) = 9
\end{array}$$

Los números 2, - 2 y 1 son los coeficientes del polinomio cociente; el último número 9 es el resto de la división, a esta disposición practica se la llama **Regla de Ruffini**.

La disposición anterior se puede simplificar como sigue:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -6 & 5 & 7 \\
2 & & 4 & -4 & 2 \\ \hline
 & 2 & -2 & 1 & \underline{|\,9}
\end{array}$$

Cociente y **Resto**

A partir de los datos de la disposición práctica simplificada se escriben el cociente y el resto de la división teniendo en cuenta:

- El grado del cociente es una unidad menor que grado del divisor; en nuestro ejemplo el grado del cociente será dos y se escribe: $2x^2 - 2x + 1$.
- El grado del resto es cero; por tanto, un número: 9

Ejemplos

Calcula mediante la Regla de Ruffini el cociente y el resto de la divisiones siguientes:

a) $(3x^3 - 6x + 8) : (x + 3)$; **b)** $(2x^2 - 8x + 9) : (x - 3)$

Solución. Al realizar la disposición práctica, se deben poner ceros en los términos que no figuran en el divisor y se cambia de signo el término independiente del divisor.

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -6 & 8 \\ -3 & & -9 & 27 & -63 \\ \hline & 3 & -9 & 21 & -55 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -8 & 9 \\ 3 & & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -2 & 3 \end{array}$$

a) Cociente : $3x^2 - 9x + 21$. Resto: -55

b) Cociente: $2x - 2$. Resto: 3

3.1. Teorema del resto

El resto de la división tanto en la disposición usual como en la regla de Ruffini viene dado por la expresión $(7 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3) = 9$, que coincide con el valor numérico del polinomio $2x^3 - 6x^2 + 5x + 7$ para $x = 2$. La generalización de este resultados generalizado se llama Teorema del Resto que dice:

El resto de la división de un polinomio por $x - a$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; es decir, $p(a) = r$.

Con este teorema y los conocimientos anteriores tienes dos formas de calcular el valor numérico de un polinomio.

- **Sustituir x por a en el polinomio y efectuar los cálculos.**
- **Dividir el polinomio por el binomio $x - a$ y el resto será el valor numérico para $x = a$.**

Demostración: Si al polinomio $p(x)$ se le divide por el binomio $x - a$, se obtiene un cociente $c(x)$ y un resto r (que es un número). La propiedad de la división permite escribir: $p(x) = c(x)(x-a) + r$

El valor numérico del polinomio para $x = a$, se consigue sustituyendo x por a, resulta: $p(a) = c(a)(a - a) + r$

Se opera: $\longrightarrow$ $p(a) = c(a) \cdot 0 + r$

El producto por cero es cero: $\longrightarrow$ $p(a) = 0 + r$

Se simplifica: $\longrightarrow$ $p(a) = r$

Ejemplo

Calcula mediante divisiones el valor numérico del polinomio $q(x) = x^4 - 4x^2 + 6x - 9$, para $x = 2$. Comprueba que el valor obtenido es correcto.

Solución. Se divide $q(x)$ entre $(x - 2)$ y el resto será $q(2)$.

$$\begin{array}{c|ccccl} & 1 & 0 & -4 & 6 & -9 \\ 2 & & 2 & 4 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 6 & 3 = \text{Resto} = q(2) \end{array}$$

Comprobación: $q(2) = (2)^4 - 4 \cdot (2)^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 3$

3.2. Teorema del factor

Si al efectuar la división del polinomio $p(x)$ por el binomio $(x - a)$ el resto resulta 0; la división es exacta, lo que permite escribir: $p(x) = (x - a)\, c(x)$

Demostración:

Como la división es exacta se tiene que: $p(x) = (x - a) \cdot c(x)$

Para $x = a$; se cumple: $p(a) = (a - a) \cdot c(a) = 0 \cdot c(a) = 0$.

A este resultado se le llama **teorema del factor**.

Ejemplos

1. Comprueba que la división de $p(x) = (2x^3 + 3x^2 - 4x + 15)$ entre $(x + 3)$ es exacta.

a) Escribe el dividendo como producto de factores. **b)** ¿Cuál es el valor numérico del dividendo para $x = -3$?

Solución. Se aplica la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccl} & 2 & 3 & -4 & 15 \\ -3 & & -6 & 9 & -15 \\ \hline & 2 & -3 & 5 & 0 = \text{Resto} \end{array}$$

a) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 15 = (x + 3)(2x^2 - 3x + 5)$

b) Por el teorema del resto el valor numérico del dividendo para $x = -3$ es cero; $p(-3) = 0$

3.3. La regla de Ruffini con calculadora

La calculadora es un instrumento que facilita los cálculos que aparecen al aplicar la regla de Ruffini; el siguiente ejemplo aporta la idea para aplicar la calculadora.

Calcula el valor numérico del polinomio: $p(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 13$ para $x = 7$

Se aplica la regla de Ruffini para calcular el valor numérico.

	4	6	- 8	13
7		28	238	1610
	4	34	230	1623
	$\downarrow$ *a*	$\downarrow$ *b*	$\downarrow$ *c*	$\downarrow$ Resto o valor numérico

Los coeficientes del cociente y del resto se calculan como se indica a continuación: $a = 4$; $b = a \cdot 7 + 6 = 34$; $c = b \cdot 7 - 8 = 230$; Resto $= c \cdot 7 + 13 = 1623$.

Se observa que:

- El número 7 se repite tres veces como factor.
- Cada valor obtenido se utiliza para calcular el siguiente.

Esta observaciones sugieren la secuencia siguiente con calculadora:

7 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ **4** $\boxed{+}$ **6** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ **8** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ **13** $\boxed{=}$

4 $\quad$ 34 $\quad$ 230 $\quad$ $1623 = p(7)$

Ejemplo

Calcula el valor numérico del polinomio $p(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 13$, para $x = 3$.

Solución. Se repite la secuencia anterior cambiando 7 por 3.

3 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ **4** $\boxed{+}$ **6** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ **8** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ **13** $\boxed{=}$

4 $\quad$ 18 $\quad$ 46 $\quad$ $151 = p(3)$

El valor numérico del polinomio para $x = 3$ es, $p(3) = 151$.

Actividades

14. Mediante la regla de Ruffini calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(x^3 + 4x^2 - 6x + 9) : (x - 1)$; **b)** $(2x^3 - 4x + 6) : (x - 2)$;

c) $(4x^3 - 10x + 4) : (x + 3)$; **d)** $(x^4 - 3x^2 + 5x + 7) : (x + 2)$.

15. Calcula el valor numérico de los polinomios dividendos de la actividad anterior para:

a) $x = 1$, **b)** $x = 2$, **c)** $x = -3$ y **d)** $x = -2$.

16. Calcula con calculadora los resultados de la actividad 15.

17. Halla m para que el polinomio $2x^3 - 8x^2 + 9x + m$ sea divisible: **a)** por $x - 3$; **b)** por $x + 2$.

18. En el polinomio $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + a$. Determina a para que al dividirlo por $x + 2$ se obtenga de resto 130.

19. Calcular a y b para que el polinomio $3x^4 - 6x^2 + bx + a$ sea divisible por $x - 2$ y de resto 5 al dividirle por $x + 3$.

20. En el polinomio $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 9$. Halla $p(1)$; $p(2)$ y $p(-2)$ utilizando la calculadora.

21. Comprueba que el primer polinomio es factor del segundo.

a) $x - 2$; $5x^3 - 8x^2 - x - 6$. **b)** $x - 4$; $4x^3 - 13x^2 - 17x + 20$.

c) $x - 3$; $x^5 - 4x^4 + 6x^2 - 20x - 33$. **d)** $x + 1$; $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$.

4. Divisibilidad de polinomios

La divisibilidad de polinomios se estudia de forma análoga a la divisibilidad entre números enteros que ya conoces, como veremos a continuación.

Si la división $D(x) : d(x)$ es exacta, como en el caso de los número enteros se dice, que $D(x)$ es un múltiplo de $d(x)$ o bien que $d(x)$ es divisor o factor de $D(x)$.

Un polinomio es **compuesto** si admite polinomios divisores de grado superiores o iguales a uno; el polinomio $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ es un polinomio compuesto.

Un polinomio es **primo o irreducible** si no admite polinomios divisores de grado uno o superior; los polinomios $2x + 5$ y $x^2 + 1$ son polinomios irreducibles ; por tanto los polinomios irreducibles pueden ser de primero o segundo grado.

Los polinomios compuestos se pueden descomponer de forma única en producto de polinomios irreducibles.

En los apartados que siguen veremos diversas formas de realizar esta descomposición.

4.1. Raíces de un polinomio

Se dice que un número a es raíz del polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$. Las raíces del polinomio son $p(x)$ son las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

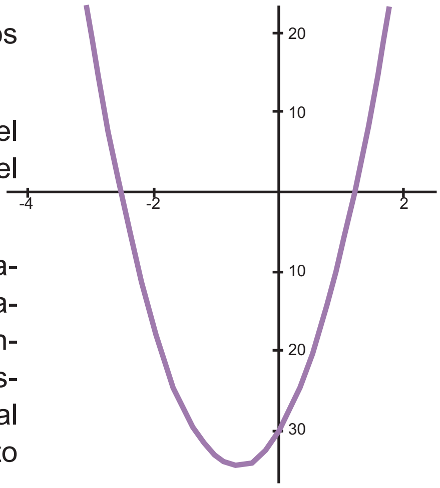
Por el teorema del factor si a es raíz del polinomio significa que $x - a$ es un divisor de $p(x)$; esto es: $p(x) = (x - a) \cdot c(x)$

Puedes preguntarte, ¿cuántas raíces tiene un polinomio? ¿cómo calcularlas? La respuesta a la primera pregunta se encuentra en el teorema siguiente, que es objeto de demostración en cursos superiores:

En un polinomio de grado *n* se deben buscar como máximo *n* raíces reales.

Para comprender su significado vemos algunos ejemplos; el polinomio:

$p(x) = x^2 - 4$; tiene dos raíces $x = 2$ $x = -2$ el polinomio: $p(x) = x^2 + 4$, no tiene raíces reales, y el resultado no contradice el teorema.



La repuesta a la segunda pregunta es complicada; no obstante, con calculadoras gráficas o programas de ordenador se puede representar gráficamente polinomios; el representado en la figura corresponde al polinomio $p(x) = 10x^2 + 13\,x - 30$ y corta al eje de abscisas en $x = -2{,}5$ y $x = 1{,}2$; por tanto $p(-2{,}5) = 0$ y $p(1{,}2) = 0$.

Mediante métodos algebraicos se calculan con facilidad las raíces enteras de polinomios con coeficientes enteros como se indica en el apartado siguiente.

4.2. Raíces enteras de un polinomio

Muchos polinomios con los que trabajamos tienen coeficientes enteros; veamos que para estos polinomios las raíces entera son divisores del término independiente. Realicemos la división exacta $(x^3 - 6x^2 + 14x - 15) : (x - 3)$ y comprobaremos que $x = 3$ es raíz.

	1	- 6	14	- 15
3		3	- 9	3·5
	1	- 3	5	0 = Resto

Los números de la última columna - 15 y 3·5 son opuestos; - 15 es múltiplo de 3 y 3 es divisor de -15, por lo que escribimos: $x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(x^2 - 3x + 5)$.

La generalización afirma:

Si un polinomio es divisible por *x* - *a*, la raíz entera *a* se encuentra entre los divisores del término independiente.

Demostración

La demostración se realiza para un polinomio de grado dos; pero el razonamiento utilizado sirve para polinomios de cualquier grado.

Sea el polinomio $p(x) = bx^2 + cx + d$, que tiene por raíz el número entero a.

Valor numérico para $x = a$: $p(a) = ba^2 + ca + d = 0$

Despejar d: $d = - ba^2 - ca$

Sacar factor común a: $d = a(\underbrace{-ba - c}_{n}) = an$

En el segundo miembro de la igualdad figura a como factor, por lo que a (raíz de $p(x)$), es un divisor de d (término independiente de $p(x)$).

Ejemplo

Halla las raíces entera del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ y descomponer el polinomio en producto de factores.

Solución. Las posibles raíces se encuentran entre los divisores de $9 = \{\pm 1, \pm 3\}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio y a los sucesivos cocientes:

	1	-1	-9	9
3		3	6	-9
	1	2	-3	0
-3		-3	3	
	1	-1	0	
1		1		
	1	0		

Las raíces del polinomio son $x = 3$, $x = -3$ y $x = 1$; y por la sucesivas divisiones el polinomio se descompone en los productos siguientes:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(x + 3)(x - 1)$$

Desde esta descomposición se localizan con facilidad las raíces del polinomio.

Actividades

22. ¿Cuántas raíces puede tener el polinomio siguiente? $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Calcula las que puedas.

23. Dados lo polinomios $p(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$ y $q(x) = (x - 3)(x - 3{,}5)(x - 4{,}4)$, ¿cuáles son sus raíces?

24. Halla las raíces enteras de los polinomios. **a)** $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, **b)** $x^3 + 2x^2 - 5x + 12$.

25. Calcula a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 - 5x + b$, tenga por raíces $x = 3$ y $x = -1$.

5. Factorización de polinomios

Se trata de sustituir un polinomio por otro igual pero escrito como producto de polinomios irreducibles. Para obtener éxito se deben utilizar diversas estrategias, como se indica en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. Descomponer en factores el polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Solución 1. Se buscan las posibles raíces enteras, que se encuentran entre los divisores de -6; esto son {±1, ±2, ±3, ±6}.

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio y a los sucesivos cocientes y se obtienen sus raíces que son: $x = -1$; $x = 2$ y $x = -3$.

La descomposición del polinomio en producto de polinomios irreducibles será:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$.

Solución 2. Se busca una raíz mediante la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & & -1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

El polinomio divisor se puede escribir: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$; como el cociente es un polinomio de segundo grado, sus raíces son las de la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

La descomposición sería: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$.

2. Descomponer en factores el polinomio $q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2$.

Solución. Se combinan los procedimientos de sacar factor común y el cálculo de raíces enteras.

- Se saca factor común $3x^2$: $q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x^3 - 2x^2 + x - 2)$.
- Las raíces enteras del polinomio $x^3 - 2x^2 + x - 2$, se encuentran entre los divisores del 2 y son $\{\pm 1, \pm 2\}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

El polinomio $x^3 - 2x^2 + x - 2$, se decompone $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$, como x^2+1 es irreducible, la descomposición de $q(x)$ será:

$q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 3x^2(x-2)(x^2+1)$.

3. Descomponer en productos: **a)** $x^2 + 8x + 16$, **b)** $4x^2 - 12x + 9$, **c)** $16x^2 - 9$.

Solución. Estos polinomios se descomponen recordando las siguientes igualdades notables:

Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Teniendo en cuenta estas igualdades resulta:

a) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$; **b)** $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$; **c)** $16x^2 - 9 = (4x + 3)(4x - 3)$.

M C D y M C M de dos polinomios

Como en los números enteros se define y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos polinomios.

El máximo común divisor $d(x)$ de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio de mayor grado que es divisor de ambos. M C D $[p(x), q(x)] = d(x)$

Para calcular el máximo común divisor de dos polinomios se descomponen en factores primos y se forma el producto de los factores comunes con sus menores exponentes.

El mínimo común múltiplo $m(x)$ de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio de menor grado que es múltiplo de ambos. M. C. M. $[p(x), q(x)] = m(x)$

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos polinomios se descomponen en factores primos y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con sus mayores exponentes.

Ejemplos

1. Calcula el M.C.D. y el M.C.M. de los polinomios $p(x) = (x -2)^2(x -1)(x^2 + 1)$ y $q(x) = (x -2)(x -1)^2(x +5)$

Solución. Para calcular el máximo común divisor se toman los factores comunes con menor exponente; por ello: M.C.D $[p(x)\ q(x)] = (x -2)(x -1)$

El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente; por ello M.C.M $[p(x)\ q(x)] = (x - 2)^2(x - 1)^2(x + 5)(x^2 + 1)$

Actividades

26. Descomponer en factores: **a)** x^3+6x^2-x-30; **b)** x^3+2x^2-5x-6; **c)** x^3+5x^2+7x+3, **d)** x^4-10x^2+9.

27. Factorizar: **a)** $x^2 - 8x + 16$; **b)** $x^4 + 12x^2 + 36$; **c)** $x^2 - 25$; **d)** $9x^2 - 25$.

28. Descomponer en producto de factores irreducibles los polinomios siguientes:

a) $2x^3+11x^2 + 2x -15$; **b)** $3x^4 -18x^2 + 15x$; **c)** $4x^2 + 12x + 9$, **d)** $25x^2 - 4$.

29. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios: $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$.

30. Calcula el M.C.D. y el M.C.M. de los polinomios: $p(x) = x^4 -15x^3 + 75x^2 -125x$ y $q(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3$.

6. Fracciones algebraicas

Las fracciones numéricas se pueden considerar como el cociente de dos números enteros; de la misma forma llamamos fracción algebraica al cociente de dos polinomios.

Son fracciones algebraicas las siguientes: a) $\dfrac{5x^2-4x+5}{2x+5}$; b) $\dfrac{5}{3x-6}$

Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Simplificación de fracciones

Para simplificar fracciones se divide el numerador y el denominador por el mismo polinomio.

Ejemplos:

a) $\dfrac{6x^2+5x}{3x^2}=\dfrac{x(6x+5)}{3xx}=\dfrac{6x+5}{3x}$; b) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-x-6}=\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$

Fracciones equivalentes

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si una se obtiene de la otra por simplificación; o cuando al simplificarlas, dan lugar a la misma fracción.

Las fracciones $\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ y $\dfrac{3x}{3x^2-3x}$ son equivalentes; al simplificarlas se obtiene la fracción $\dfrac{1}{x-1}$.

6.1. Suma y resta de fracciones

- **Para sumar fracciones algebraicas se transforman los sumandos en fracciones equivalentes con el mismo denominador si es que eran diferentes; se deja el denominador común y se suman los numeradores.**
- **Para restar dos fracciones se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.**

Ejemplos

1. Calcula: $\dfrac{2x+4}{x^2+5}+\dfrac{5}{x^2+5}$

Solución. como las fracciones tienen el mismo denominador se suman los numeradores

$$\frac{2x+4}{x^2+5}+\frac{5}{x^2+5}=\frac{2x+9}{x^2+5}$$

2. Calcula: $\dfrac{3x+4}{x^2-9}+\dfrac{2x+1}{x^2-3x}$

Solución. Como tienen distinto denominador se calculan fracciones equivalentes con denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores.

- Se descomponen los denominadores en productos; $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ y $x^2 - 3x = x(x-3)$.
- El mínimo común múltiplo es: $x(x+3)(x-3)$

$$\frac{3x+4}{x^2-9}+\frac{2x+1}{x^2-3x}=\frac{(3x+4)x}{x(x+3)(x-3)}+\frac{(2x+1)(x+3)}{x(x+3)(x-3)}=\frac{3x^2+4x+2x^2+6x+x+3}{x(x+3)(x-3)}=\frac{5x^2+11x+3}{x(x+3)(x-3)}$$

3. Calcula: $\dfrac{3x}{x^2+2}-\dfrac{2x-4}{x^2+2}$

Solución. Tienen el mismo denominador; por tanto, se deja y se restan los numeradores.

$$\frac{3x}{x^2+2}-\frac{2x-4}{x^2+2}=\frac{3x-(2x-4)}{x^2+2}=\frac{x+4}{x^2+2}$$

6.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para multiplicar dos fracciones se pone por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Para dividir fracciones se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.

$$\text{Dividir}: \frac{x^2}{x+3} : \frac{x-3}{x+4} = \frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{x+4}{x-3} = \frac{x^2(x+4)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^3+4x}{x^2-9}$$

Ejemplos

1. Calcula: $\frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1}$

Solución. $\frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{x^2+3x-2x-6}{2x^2-x+2x-1} = \frac{x^2+x-6}{2x^2+x-1}$

2. Calcula: $\frac{x^2}{x+3} : \frac{x-3}{x+4}$

Solución. Se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.

$$\frac{x^2}{x+3} : \frac{x-3}{x+4} = \frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{x+4}{x-3} = \frac{x^2(x+4)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^3+4x^2}{x^2-9}$$

Actividades

31. Simplifica: **a)** $\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}$; **b)** $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+7x^2+16x+12}$

32. Calcula: **a)** $\frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$; **b)** $\frac{x-2}{x^2+x+1} - \frac{2x}{x^3-1}$; **c)** $\frac{4}{x^2-2x+1} + \frac{x+2}{x^2-1}$

d) $\frac{3}{x^2+5x+6} - \frac{x-2}{x^2-x-6}$

33. Efectúa y simplifica: **a)** $\frac{x^2-4x+4}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x-2}$; **b)** $\frac{x^2-4x+4}{x^2-1} : \frac{x-1}{x-2}$