2 Matemática financiera

La necesidad de efectuar numerosos y complicados cálculos dio origen a los logaritmos. Los más usados son los logaritmos neperianos, llamados así en honor de John Neper (1560 – 1617), y los decimales.

Las variaciones porcentuales, el interés simple y el compuesto, la TAE y las anualidades de capitalización y de amortización aparecen habitualmente en los cálculos financieros. Para calcular estas dos últimas es necesario conocer las progresiones geométricas, que repasamos.

La Unidad termina con los números índices, complemento y ampliación de las variaciones porcentuales, muy empleados en Economía.

Los **objetivos** que nos proponemos alcanzar con el estudio de esta Unidad son los siguientes:

1. Valorar la importancia histórica de los logaritmos en el cálculo.
2. Analizar las propiedades de los logaritmos.
3. Comprender desde distintos punto de vista la importancia de los porcentajes.
4. Distinguir entre los diversos tipos de porcentajes que se nos presentan en la vida cotidiana.
5. Comprender la importancia de las progresiones geométricas para el estudio del interés compuesto.
6. Distinguir los conceptos de anualidades de capitalización y de amortización para afrontar las situaciones económicas que nos presenta la vida cotidiana.
7. Utilizar los conocimiento adquiridos sobre capitalizaciones y amortizaciones para resolver problemas que se plantean en la vida actual.
8. Comprender que los números índices facilitan el estudio de variables sometidas a cambios temporales.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Logaritmos decimales y neperianos

1.1. Definición

Se llama **logaritmo** en base a, positiva y distinta de uno, de un número x, a otro número y, que es el exponente al que hay que elevar la base a para reproducir el número dado x; se escribe:

$$\log_a x = y \longleftrightarrow a^y = x$$

La operación para hallar logaritmos es la logaritmación, operación inversa de la potenciación, y su objeto es hallar el exponente cuando se conocen la base y el valor de la potencia.

Por ejemplo, $\log_3 81 = 4$; puesto que $3^4 = 81$

Ejemplos

1. Calcula $\log_2 32$.

Solución. Será un número y; tal que $2^y = 32$. Como $32 = 2^5$, queda $2^y = 2^5$, potencias iguales de la misma base tienen exponentes iguales, por lo que $y = 5$. Luego escribimos:

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

2. Calcula $\log_2 \frac{1}{16}$.

Solución. Será un número y, tal que $2^y = \frac{1}{16}$. Como $\frac{1}{16} = 2^{-4}$; queda $2^y = 2^{-4}$, por lo que $y = -4$. Se escribe:

$$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$$

3. Calcula $\log_3 3$.

Solución. Será un número y tal que $3^y = 3$; por tanto $y = 1$, entonces $\log_3 3 = 1$.

Observa que el logaritmo de la base es siempre 1, $\log_a a = 1 \longleftrightarrow a^1 = a$

4. Calcula $\log_3 1$

Solución. Será un numero y tal que $3^y = 3^0 = 1$; por tanto $y = 0$, entonces $\log_3 1 = 0$.

Observa que el logaritmo de 1 en cualquier base es 0, $\log_a 1 = 0 \longleftrightarrow a^0 = 1$

5. Calcula $\log_3 0$

Solución. Será un número y tal que $3^y = 0$. Como las potencias dan siempre resultados positivos, podemos afirmar:

El número cero no tiene logaritmo.

6. Calcula $\log_3(-4)$

Solución. Será un número y tal que $3^y = -4$. Como en el ejemplo anterior, recordamos que las potencias dan siempre números positivos, por tanto:

Los número negativos no tienen logaritmos.

1.2. Propiedades de los logaritmos

Los ejemplos anteriores nos han permitido enunciar algunas propiedades de los logaritmos; a continuación enunciamos otras propiedades de los logaritmos

1. El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores, esto es:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

2. El **logaritmo de un cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, esto es:

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

3. El **logaritmo de una potencia** es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base, esto es:

$$\log_a m^k = k \log_a m$$

4. El **logaritmo de una raíz** es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz, esto es:

$$\log_a \sqrt[k]{m} = \frac{\log_a m}{k}$$

Ejemplos

1. Calcula $\log_a x \cdot y$, sabiendo que $\log_a x = 3{,}23$ y $\log_a y = 2{,}34$:

Solución. Por la propiedad 1, $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y = 3{,}23 + 2{,}34 = 5{,}57$

2. Calcula $\log_a \frac{x}{y}$, con los datos del ejemplo 1.

Solución. Por la propiedad 2, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y = 3{,}23 - 2{,}34 = 0{,}89$

3. Calcula $\log_a x^4$, con los datos del ejemplo 1.

Solución. Por la propiedad 3, $\log_a x^4 = 4 \log_a x = 4 \cdot 3{,}23 = 12{,}92$

4. Calcula $\log_a x^2 \cdot y^3$, con los datos del ejemplo 1.

Solución. Por las propiedades 1 y 3, $\log_a x^2y^3 = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2\log_a x + 3\log_a y =$

$= 2 \cdot 3{,}23 + 3 \cdot 2{,}34 = 6{,}46 + 7{,}02 = 13{,}48$.

5. Calcula $\log_a \sqrt[3]{x}$, con los datos del ejemplo 1.

Solución. Por la propiedad 4, $\log_a \sqrt[3]{x} = \dfrac{\log_a x}{3} \approx \dfrac{3{,}23}{3} \approx 1{,}07$

6. Calcula $\log_a \sqrt[5]{x^2 \cdot y^4}$, con los datos del ejemplo 1.

Solución. Por la propiedades 4, 1 y 3.

$$\log_a \sqrt[5]{x^2y^4} = \frac{\log_a x^2y^4}{5} = \frac{\log_a x^2 + \log_a y^4}{5} = \frac{2\log_a x + 4\log_a y}{5} \approx \frac{2 \cdot 3{,}23 + 4 \cdot 2{,}34}{5} \approx \frac{15{,}82}{5} \approx 3{,}16$$

1.3. Logaritmos decimales y neperianos

En el cálculo de logaritmos se utilizan usualmente como bases, el número 10 y el número $e = 2{,}718281...$

Los logaritmos de base 10 se llaman **logaritmos decimales** y se escribe simplemente log; por ejemplo el $\log 1000 = 3 \longleftrightarrow 10^3 = 1000$.

Los logaritmos de base e se llaman **logaritmos neperianos**, y se simbolizan por ln o L.; por ejemplo $\ln e^4 = 4 \longleftrightarrow e^4 = e^4$

Estos logaritmos los llevan incorporados las calculadoras científicas, los siguientes ejemplos te indicarán cómo utilizar la calculadora para calcular logaritmos.

Ejemplos

1. Calcula log 8.

Solución. Será un número y, tal que $10^y = 8$. Como 8 no puede expresarse como una potencia entera de base 10, para calcular su logaritmo decimal de forma aproximada, se recurre a la tecla log de la calculadora, mediante la secuencia siguiente:

8 log 0.9030899 Y escribimos: $\log 8 = 0{,}9030899$

2. Calcula ln 8.

Solución. Será un número y, tal que $e^y = 8$. Como en el ejemplo anterior, se recurre a la tecla ln de la calculadora, mediante la secuencia siguiente se determina de forma aproximada el logaritmo neperiano de 8:

8 ln 2.0794415 Se escribe: $\ln 8 = 2{,}0794415$

3. Calcula x si ln x = 2,4849066.

Solución. Se conoce la base e y el exponente que origina x; como, $x = e^{2,4849066}$; la secuencia siguiente calcula x

2.4849066 INV e^x 12 Por tanto: x = 12

Actividades

1. Calcula: **a)** $\log_3 81$; **b)** $\log_3 243$; **c)** $\log_3 729$.
2. Calcula: **a)** $\log_2 0{,}5$; **b)** $\log_2 0{,}25$; **c)** $\log_2 0{,}125$.
3. Calcula: **a)** log 10; **b)** log 100; **c)** log 1000
4. Calcula : **a)** log 0,1; **b)** log 0,01; **c)** log 0,001.
5. Se sabe que log a = 1,39794, log b = 1,77815, y log c = 2,09691. Calcula: **a)** log ($a{\cdot}b$);

   b) log ($a{\cdot}b{\cdot}c$); **c)** $\log\dfrac{a}{b}$; **d)** $\log\dfrac{ab}{c}$; **e)** log a^3; **f)** log ($a^2 \cdot b^5 \cdot c^3$); **g)** $\log\sqrt[5]{a^4b^3}$

2. Porcentajes: incrementos y disminuciones porcentuales.

Recuerda que porcentaje se representa mediante el signo % y significa "**de cada cien**"; es decir, centésimas; por este motivo, los porcentajes se pueden expresar como decimales. Por ejemplo: R = 12 %**,** significa de 12 de cada 100; por que se puede escribir en forma decimal así:

$$r = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Por otra parte, sabemos que:

- Si una mercancía cuesta inicialmente C y su valor aumenta un 8 %, su coste final será:

$$\boldsymbol{C + 0{,}08 \times C = (1 + 0{,}08) \times C = 1{,}08 \times C}$$

- Si una mercancía cuesta inicialmente C y su valor disminuye un 8 %, su coste final será:

$$\boldsymbol{C - 0{,}08 \times C = (1 - 0{,}08) \times C = 0{,}92 \times C}$$

El coste final de una mercancía que ha aumentado o disminuido un porcentaje se consigue multiplicando el coste inicial C por un número llamado **índice de variación**; en los ejemplos anteriores los índices fueron 1,08 y 0,92 respectivamente.

En los **aumentos porcentuales** del $R\%$, el índice de variación es: $1+\frac{R}{100}=1+r$

En las **disminuciones porcentuales** del $R\%$, el índice de variación es:

$$1-\frac{R}{100}=1-r$$

La cantidad final con aumento o disminución porcentual se obtiene al multiplicar la cantidad inicial por el índice de variación; es decir:

$$C_{final}=\left(1\pm\frac{R}{100}\right)\cdot C_{inicial}=(1\pm r)\cdot C_{inicial}$$

Ejemplos

1. Los precios de todos los artículos de unos almacenes se encuentran rebajados el 12% ¿Qué precio se pagará por un artículo marcado a 500 euros?

   Solución. Se aplica la fórmula; $P_f=(1-0,12)\cdot 500=0,88\cdot 500=440$ euros

2. El precio de un televisor sin IVA es de 700 euros. Calcula el precio que pagaremos si está gravado con el 16 % de IVA.

   Solución. Se aplica la fórmula; $P_f=(1+0,16)\cdot 700=1,16\cdot 700=812$ euros

3. Por una lavadora se han pagado 406 euros. Si la lavadora tiene un impuesto del 16 % de IVA, ¿cuál es su precio sin incluir el impuesto?

   Solución. Se aplica la fórmula y se despeja el precio inicial;

$$406=(1+0,16)\cdot P_i;\quad P_i=\frac{406}{1,16}=350 \text{ euros}$$

Porcentajes encadenados

A veces es necesario trabajar con varios porcentajes seguidos, como se plantea en el ejemplo siguiente:

El índice del coste de la vida subió un 14% durante 1980 y un 6% durante 1981, pero bajó un 5% durante 1982. Halla la subida del índice de coste de la vida de 1980 a 1982.

Solución:

Se parte del coste de un producto de 100 euros en enero de 1980.

Coste el 1–1–1 981 ⟶ 100 · (1,14) = 114

Coste el 1–1–1 982 ⟶ 114 · (1,06) = 120,84

Coste el 1–1–1 983 ⟶ 120,84 · (0,95) = 114,798

Por tanto el aumento ha sido de 14,79%.

Observa que si sumas 14 + 6 – 5 obtienes 15; esto es debido a que los tantos por cientos actúan sobre cantidades iniciales distintas.

Ejemplos

1. Un ordenador valía al salir al mercado 924 euros; a lo largo de un año sufrió las siguientes variaciones, bajó el 20 %, bajó un 15 %, subió un 12 % y finalmente bajó un 6 %. ¿Cuánto era su precio al final del año? ¿Cuál ha sido el índice de variación total?

Solución. El ordenador ha cambiado cuatro veces de precio.

Precio al primer cambio ⟶ (1 – 0,20) · 924 = (0,80) · 924 = 739,2 euros

Precio al segundo cambio ⟶ (1 – 0,15) · 739,2 = (0,85) · 739,2 = 628,32 euros

Precio al tercer cambio ⟶ (1 + 0,12) · 628,32 = (1,12) · 628,32 = 703,72 euros

Precio final ⟶ (1 – 0,06) · 703,72 = (0,94) · 703,72 = 661,49 euros

Partimos de la variación de 100 euros

Primera variación ⟶ (1 – 0,20) · 100 = 0,80 · 100 = 80

Segunda variación ⟶ (1 – 0,15) · 80 = 0,85 · 80 = 68

Tercera variación ⟶ (1 + 0,12) · 68 = 1,12 · 68 = 76,16

Cuarta variación ⟶ (1 – 0,06) · 76,16 = 0,94 · 76,16 = 71,5904

El índice de variación total será 0,7159

Se podía haber calculado directamente: $0{,}80 \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}94 = 0{,}7159$ y $0{,}7159 \cdot 924 =$ $= 661{,}49$ euros.

2. Un comerciante compra los lectores de CD por 450 euros y los vende con un recargo del 30 %; llega un amigo y, sobre el precio de venta, le rebaja el 30 %. ¿Ganó o perdió con la venta del lector de CD al amigo?

Solución. El comerciante los vende a: $P_v = (1+0{,}30) \cdot 450 = 1{,}30 \cdot 450 = 585$ euros

EL amigo lleva el lector de CD por: $P_v = (1-0{,}30) \cdot 585 = 0{,}70 \cdot 585 = 409{,}5$ euros; el comerciante perdió en la venta: 450 – 409,5 = 40,5 euros

Actividades

6. En la tienda A un artículo está marcado a 765 euros y tiene una rebaja del 25%. En la tienda B el mismo artículo está marcado a 742 euros y presenta un descuento del 20% ¿En qué tienda es más barato el artículo?

7. Un comercio oferta sus productos rebajados el 22%. Calcula el precio al que resultan los marcados con 35 euros, 56 euros y 85 euros, si al tanto por ciento de rebaja se le debe añadir el 16 % de IVA.

8. Si has pagado 256 euros por un producto que se encontraba rebajado el 15%, ¿qué precio marcaba el producto?

9. Después de rebajarse un artículo en un 25 %, vale 53,20 euros ¿Cuánto valía antes de la rebaja?

3. Interés simple y compuesto. T.A.E. (tasa anual equivalente)

3.1. Interés simple

Al abrir una libreta de ahorro en una entidad bancaria, en realidad prestamos un **capital *C*** a la caja o banco; préstamo que nos remuneran ofreciéndonos un determinado **rédito *R***, que es la cantidad que la entidad nos abonará anualmente, por cada 100 euros depositados. Los beneficios que se obtienen por el capital *C* depositado se llaman **interés**. Si los beneficios se retiran periódicamente estamos ante un **interés simple**.

Interés simple por años

Ejemplo: Supongamos que una persona ingresa 2 000 euros en un banco al 4% de rédito, el rédito siempre es anual. El interés que recibe al finalizar el año será:

$$i = 2000 \times 0{,}04 = 80 \text{ euros}$$

Por tanto, si mantiene los 2000 euros en el banco, al finalizar cada año recibirá 80 euros en concepto de intereses. Esto nos permite construir la siguiente tabla:

Capital inicial	El primer año	El segundo año	El tercer año	......	El año 15
2000 euros	2000 + 80	2000 + 2 · 80	2000 + 3 · 80	......	2000 + 15 · 80

Los capitales finales se obtienen mediante una relación lineal cuya variable es el tiempo que están prestados.

El capital inicial C, ingresado al R % de rédito anual simple, al cabo de t años se convierte en:

$$C_t = C + t \cdot i, \text{ donde } \quad i = C \cdot r \quad \text{o} \quad i = \frac{C \cdot R}{100}; \text{ es decir, } C_t = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{100}$$

En estas fórmulas C_t es el **capital final**, C es el capital inicial, R es el rédito anual en porcentaje, r el rédito anual en decimal y t es el número de años.

Interés simple por meses

Si tenemos en cuenta que el R% anual es el $\frac{R}{12}$ % mensual, entonces el interés mensual en decimal será $\frac{r}{12}$; con lo que:

$$C_f = C + t \cdot i, \text{ donde } \quad i = C \cdot \frac{r}{12} \quad \text{o} \quad i = \frac{C \cdot R}{1200}; \text{ es decir; } C_f = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{1200}$$

En esta fórmula t está expresada en meses

Interés simple por días

Si tenemos en cuenta que el R% anual es el $\frac{R}{360}$ % diario, entonces el interés diario en decimal es $\frac{r}{360}$; con lo que:

$$C_f = C + t \cdot i, \text{ donde } \quad i = C \cdot \frac{r}{360} \quad \text{o} \quad i = \frac{C \cdot R}{36000}; \text{ es decir, } C_f = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{36000}$$

En esta fórmula t está expresada en días

Ejemplos

1. Hallar el interés de 3 000 euros, al 4 % durante seis meses.

   Solución. Se aplica la fórmula y se tiene en cuenta que 6 meses es la mitad de un año;

   $$i = 3000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}5 = 60 \text{ euros}$$

2. Al mirar la cartilla, un ahorrador observa que le han abonado 36 euros. Si tuvo depositados 2 700 euros durante 4 meses, ¿a qué rédito le han abonado los intereses?

   Solución. Se aplica la fórmula, se simplifica y se despeja R.

   $$36 = \frac{2700 \cdot R \cdot \frac{4}{12}}{100} = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot R = 9R \qquad R = \frac{36}{9} = 4\ \%$$

3.2. Interés compuesto

Cuando los intereses no se retiran sino que se acumulan al capital y se mantiene el depósito, que es lo más corriente, estamos ante el **interés compuesto**:

Interés compuesto anual

Ejemplo: Si se depositan en un banco C euros a un 5%, al final del año tendremos el capital:

$$C_1 = C + C \cdot \frac{5}{100} = C \cdot (1 + 0{,}05)$$

Al final del segundo año el nuevo capital será: $C_2 = C_1 \cdot (1 + 0{,}05) = C \cdot (1 + 0{,}05)^2$

Al final del tercer año el nuevo capita será: $C_3 = C_2 \cdot (1+0{,}05) = C \cdot (1+0{,}05)^3$

En general, al final del año t el capital será: $C_t = C \cdot (1+ 0{,}05)^t$

Por lo tanto, si se depositan C euros al $R\%$ de rédito, el **capital final** al cabo de t años depositado a interés compuesto será: $C_t = C \cdot (1 + r)^t$

Interés compuesto mensual

Como en el caso de interés simple el rédito $R\%$ anual, se trasforma en $\frac{R}{12}\%$ mensual, lo que equivale a $\frac{r}{12}$ decimal, por lo que el capital final al cabo de t meses será:

$$C_t = C \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^t$$

Interés compuesto por días

El $R\%$ rédito anual será, $\frac{R}{360}\%$ diario, lo que equivale a $\frac{r}{360}$ decimal diario; y el capital final al cabo de t días será:

$$C_t = C \cdot \left(1 + \frac{r}{360}\right)^t$$

Cálculo de los intereses

El interés o nuestra ganancia será la diferencia entre el último capital y el capital inicial; que en el caso de capitalizar por años será:

$$i = C_t - C = C \cdot (1 + r)^t - C$$

Sacando factor común C obtenemos:

$$i = C \cdot [(1 + r)^t - 1]$$

Ejemplos

1. Hallar el capital acumulado durante 10 años a partir de 12 000 euros colocados al 4 % de interés compuesto abonando los intereses anualmente.

   Solución. Se aplica la fórmula. $C_{10} = C \cdot (1+r)^{10} = 12000 \cdot (1+0,04)^{10} = 12000 \cdot 1,04^{10}$

   La siguiente secuencia en la calculadora determina el capital.

   12000 × 1.04 x^y 10 = 17762.932

   El capital acumulado será 17 762,93 euros

2. Repetir el problema anterior pero con pago de intereses cada trimestre.

   Solución. Es necesario interpretar la fórmula para generalizar. El capital *C* = 12 000; cada año se cobran cuatro veces intereses; los periodos de cobro o capitalización serán 4·10 = 40; el rédito será trimestral es decir 4/4 = 1% trimestral. Con estos razonamientos la fórmula será:

$$C_{10\cdot 4} = 12000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{10\cdot 4} = 12000 \cdot (1,01)^{40}$$

   La siguiente secuencia en la calculadora determina C

   12000 × 1.01 x^y 40 = 17866,36 euros.

   El capital acumulado en esta situación será: 17 866,36 euros.

   Se observa un aumento del capital acumulado, debido a que los intereses se convierten en capital al comenzar cada trimestre, en lugar de anualmente.

3. Calcula el tiempo a que deben estar prestados 1 000 euros al 6% de interés compuesto anual, para que se conviertan en 1 504 euros.

   Solución. Se aplica la formula y se obtiene, $1\,504 = 1\,000 \cdot (1 + 0,06)^{t}$; resolvemos la ecuación: $1,504 = 1,06^{t}$; en esta ecuación, llamada exponencial, se toman logaritmos para despejar *t*:

$$\log 1,504 = t \cdot \log 1,06 \qquad t = \frac{\log 1,504}{\log 1,06}$$

   Con esta secuencia de teclas determinamos *t*: 1,06 log M_{in} 1,504 log ÷ MR = 7,00
   El valor de *t* es 7 años.

3.3. Tasa Anual Equivalente (T.A.E.)

En la prensa diaria aparecen ofertas de depósitos o créditos en los que el % del rédito se indica seguido de las siglas T. A. E. " Tasa anual equivalente". El ejemplo que proponemos corresponde a la oferta de una caja de ahorros, y con él aclaramos el significado de las mencionadas siglas.

Ejemplo: *Si nos confía su dinero en nuestra Cuenta Ahorro le damos el 6% anual, con pagos mensuales de intereses, lo que equivale al 6,17% T. A. E.*

¿Qué significa el T. A. E. en esta oferta?

El 6 % anual equivale al $\frac{6}{12} = 0{,}5\%$ mensual.

Como el año tiene 12 meses el capital depositado, *C*, se habrá convertido en:

$$C_f = C \cdot (1 + 0{,}005)^{12} = C \cdot (1{,}005)^{12} = C \cdot 1{,}0616778$$

Como se puede observar al final de año el 6 % anual, con capitalizaciones mensuales se convierten mediante redondeo en el 6,17 %; este porcentaje es precisamente el anunciado T. A. E.

En los préstamos hipotecarios que los bancos conceden la T. A. E. es, por supuesto, superior al rédito anual anunciado.

Ejemplos

1. Calcula la T. A. E. que corresponde aun rédito anual del 12% con pagos mensuales de intereses.

Solución. Al 12% anual le corresponde el 12/12 = 1% mensual.

Cada mes, el capital se multiplica por 1,01; por tanto, en un año se multiplicará por $1{,}01^{12}$ = 1,126825 ≈ 1 + 0,1268 = 1 + $\frac{12{,}68}{100}$. Luego la T. A. E será 12,68%

Actividades

10. Calcular el tiempo que deben estar colocados 4 000 euros al 6% anual para dar un interés de 20 euros.

11. Cierto capital, colocado durante 8 meses al 10% anual, ha dado un interés de 400 euros. Calcularlo.

12. Hallar el capital que poseeremos al cabo de diez años si se coloca al 5% de interés compuesto un capital inicial de 200 000 euros. Los intereses vencen semestralmente.

13. ¿Qué capital al cabo de 6 años al 4% de interés compuesto pagadero anualmente se ha transformado en 100 000 euros?

14. Calcular la T. A. E. correspondiente al 9% de rédito anual con pagos mensuales de intereses.

4. Progresiones geométricas

Si una cuartilla la partimos por la mitad, y a las mitades las partimos por la mitad y así sucesivamente, las partes que resultan son: 2, 4, 8, 16, 32, ... Esta sucesión de números es una **progresión geométrica**, cada término es igual al anterior multiplicado por 2.

Las progresiones geométricas son sucesiones en las que un término cualquiera se obtiene del anterior al multiplicarlo por una cantidad constante ***r***, llamada razón; esto es:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Para saber cuando una sucesión de números es una progresión geométrica se comprueba si los cocientes de términos consecutivos dan el mismo resultado; este resultado es la razón de la progresión.

Ejemplos

1. Comprueba que la siguiente sucesión de números es una progresión geométrica; 2, 6,18, 54, 162, ...Calcula la razón.

Solución. Se divide cada término por el anterior, $\frac{162}{54} = \frac{54}{18} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$.

La razón es 3.

2. Forma una progresión geométrica cuyo primer término sea 40 y la razón 0,5.

Solución. 40 ; 40·0,5 = 20; 20·0,5 = 10; 10·0,5 = 5; 5·0,5 = 2,5 ...

La progresión es 40, 20, 10, 5, 2,5, ...

4.1. Término general de una progresión geométrica

Una de las propiedades de las progresiones geométricas es que el **término general** se puede dar mediante una expresión algebraica como veremos a continuación.

Supongamos que la sucesión: a_1, a_2, a_3, a_4,... a_n,... es una progresión geométrica de razón *r*.

El término a_2 será: $a_2 = a_1 \cdot r$

El término a_3 será: $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

El término a_4 será: $a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

Se observa que un término cualquiera es igual al primer término por la razón elevada al subíndice del término menos la unidad; por lo tanto, el término general de dicha sucesión será: $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

La expresión anterior indica que para conocer el término general de una progresión geométrica basta con conocer el primer término a_1 y la razón r.

Ejemplos

1. Calcula el término quinto de una progresión geométrica, sabiendo que $a_1 = 2$ y $r = 3$.

   Solución. Se aplica la fórmula. $a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

2. Halla el primer término de una progresión geométrica cuyo término 4 vale 192 y la razón 4.

   Solución. Se aplica la fórmula y se despeja a_1; $a_4 = a_1 \cdot r^3$; $192 = a_1\, 4^3 = a_1\, 64$;

$$a_1 = \frac{192}{64} = 3$$

4.2. Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de n términos y razón r. Se desea encontrar una expresión para calcular la suma de estos números.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

Se multiplica por r los dos miembros de la igualdad anterior:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + ... + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r \qquad (2)$$

Restamos: (2) – (1), y queda: $r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1$

Sacamos factor común a S_n : $S_n \cdot (r - 1) = a_n \cdot r - a_1$

Y despejamos S_n:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$$

La **suma de *n* términos de una progresión geométrica** se puede expresar función de a_1 y r, para ello basta sustituir $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ en la fórmula S_n y se obtiene:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}}$$

Ejemplos

1. Calcula la suma de 12 terminos de una progresión geométrica si el primer término es 5 y la razón 2.

   Solución. Se aplica la fórmula. $S_{12} = \dfrac{a_1 \cdot (r^{12} - 1)}{r - 1} = \dfrac{5 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot (2^{12} - 1)$

   Con la secuencia siguiente de teclas encontramos la suma:

   2 x^y 12 – 1 = × 5 = 20475

2. Halla el primer término de una progresión geométrica si la suma de los 5 primeros términos es 155 y la razón 0,5.

   Solución. Se aplica la fórmula y se despeja a_1: $S_5 = \dfrac{a_1(0,5^5 - 1)}{0,5 - 1}$

$$155 = \frac{a_1(0,5^5 - 1)}{0,5 - 1} = \frac{a_1(-0,96875)}{-0,5} \quad \text{luego} \quad a_1 = \frac{155(-0,5)}{-0,96875} = 80$$

Actividades

15. Forma una progresión geométrica cuyo primer término es 800 y la razón es 0,25.

16. Encuentra progresiones geométricas entre las siguientes sucesiones:

    a) 9, 7, 5, 3, 1, ... **b)** 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, ... **c)** 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, ...,

    d) 2, 2/3, 2/9, 2/27, ...

17. Hallar la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica en la que a_1 = 200 y r = 1/100.

18. Halla los términos cuarto y octavo de la progresión geométrica : 0,008; 0,04; 0,2; ...

5. Anualidades de capitalización. Fondos

En la vida cotidiana es frecuente querer disponer de un capital al cabo de cierto tiempo mediante depósitos iguales realizados todos los años. Es el caso típico de fondos o planes de pensiones tan en boga últimamente. La cantidad, de nuestros ahorros, que depositamos todos los años es una **anualidad de capitalización**.

Supongamos que al principio de cada año se ingresa una anualidad A, y se desea calcular el capital que se ha formado al cabo de t años, al rédito R % anual.

Expresamos el rédito R en forma decimal: $r = \dfrac{R}{100}$

- La primera anualidad A, que ha estado depositada de t años, se transforma en:

$$A \cdot (1+r)^t$$

- La segunda anualidad A, que ha estado depositada $t-1$ años, se transforma en:

$$A \cdot (1+r)^{t-1}$$

- La última anualidad está depositada solo un año, y se transforma en:

$$A \cdot (1+r)$$

El capital que se obtiene es:

$$C = A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3 + \ldots + A(1+r)^{t-1} + A(1+r)^t$$

El capital se obtiene mediante la suma de n términos de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$.

$$C = \frac{A(1+r)^t \cdot (1+t) - A \cdot (1+r)}{(1+r)-1} = \frac{A \cdot (1+r) \cdot \left[\,(1+r)^t - 1\right]}{r}$$

Si se desea conocer la anualidad que se debe pagar anualmente, se despeja A en la fórmula anterior y queda:

$$A = \frac{C \cdot r}{(1+r) \cdot \left(\,(1+r)^t - 1\right)}$$

A veces los pagos se hacen en periodos no anuales; por ejemplo en semestres, trimestres o meses; en estos casos se aplica la fórmula siguiente:

$$A = \frac{C \cdot \frac{r}{n}}{\left(1+\frac{r}{n}\right) \cdot \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} - 1\right]}$$

Donde n es el número de pagos que se efectúan en un año; por tanto sus posibles valores son: *2 en pagos semestrales; 4 en pagos trimestrales y 12 en pagos mensuales*.

Ejemplos

1. Una entidad bancaria ofrece un plan de pensiones de modo que durante 15 años debemos aportar 600 euros al 8% ¿Qué capital tendremos al finalizar el plazo?

Solución. Se aplica la fórmula

$$C_{15} = \frac{A(1+r)\left[\,(1+r)^t - 1\right]}{r} = \frac{600(1+0,08)\left[\,(1+0,08)^{15} - 1\right]}{0,08} = \frac{600 \cdot 1,08(1,08^{15} - 1)}{0,08}$$

La secuencia siguiente determina C_{15}

1.08 $\boxed{x^y}$ 15 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 1,08 $\boxed{\times}$ 600 $\boxed{\div}$ 0,08 $\boxed{=}$ 17594.57

El capital acumulado será: 17 594,57 euros.

2. Repetir el problema anterior si se realizan los pagos trimestralmente.

Solución. Es necesario interpretar la fórmula para generalizar. La anualidad se va apagar en cuatro palazos 600/4 = 150 euros al trimestre; cada año se pagan cuatro cuotas con lo que rédito será: 8/4 = 2% trimestral; el número de pagos a efectuar será $15 \cdot 4 = 60$. Con estos razonamientos la fórmula será:

$$C_{60} = \frac{150(1+0,02)\left((1+0,02)^{60}-1\right)}{0,02} = \frac{150 \cdot 1,02 \cdot \left(1,02^{60}-1\right)}{0,02}$$

La siguiente secuencia calcula C_{60}.

1,02 x^y 60 – 1 = × 1,02 × 150 ÷ 0,02 = 17 449,88

El capital acumulado será 17 449,88 euros

En este caso el capital acumulado es menor debido a que se entrega menor cantidad inicial.

3. Podemos ahorrar todos los años 500 euros, y un plan de jubilación nos ofrece un interés del 6% ¿Cuánto tiempo debemos pagar para obtener un capital de 12 336 euros?

Solución. Se aplica la formula y se despeja *t*, tomando logaritmos.

$$12336 = \frac{500(1+0,06)\left((1+0,06)^t-1\right)}{0,06} \quad ; \quad 12\,336 \cdot 0,06 = 500 \cdot 1,06(1,06^t - 1);$$

$$740 = 530(1,06^t - 1)\ ; \quad \frac{740}{530} = 1,06^t - 1\ ; \quad \frac{74}{53} + 1 = 1,06^t$$

Se toman logaritmos y queda: $t \cdot \log 1,06 = \log\left(\frac{74}{53}+1\right)$; $t = \dfrac{\log\left(\frac{74}{53}+1\right)}{\log 1,06}$

La siguiente secuencia calcula *t*:

1,06 log Min 74 ÷ 53 = + 1 = log ÷ RM = 14,9976

El tiempo redondeando será: *t* =15 años

Actividades

19. Una persona ingresa 1.000 euros cada año a un 7 % de interés anual compuesto. ¿Qué cantidad tendrá al cabo de 8 años?

20. Deseamos multiplicar por 12 un capital que anualmente vamos a entregar a un interés del 6% anual. Hallar el número de años que deberemos esperar.

21. ¿Cuántos años tendremos que ahorrar 450 euros, si nos abonan el 8 % y deseamos formar un capital de 1577,75 euros?

22. Una persona desea hacer un plan de pensiones; para ello abona todos los meses durante 15 años 50 euros. Si el banco le ha abona el 6 % anual, ¿qué cantidad le abonará al cumplir los 15 años?

6. Anualidades de amortización. Préstamos

De manera similar, pero con mayor frecuencia, se solicita un préstamo que hemos de devolver en un determinado plazo de tiempo, abonando cantidades iguales en ciertos periodos de tiempo. Es el caso típico de crédito hipotecario, para el pago de un bien comprado a plazos. Estos pagos reciben el nombre de **anualidades de amortización**.

Supongamos que al final de cada año se abona una anualidad A, para pagar una deuda D en t años al tanto por ciento anual R.

Se transforma el tanto por ciento R en decimal; $r = R/100$ y si contraemos una deuda D, ésta se convierte al cabo de t años de tiempo en: $D(1 + r)^t$

Por otra parte, como las anualidades se entregan al final de la unidad de tiempo, la primera anualidad A se convierte, después de $t - 1$ años, en: $A(1 + r)^{t-1}$

La segunda se convertirá en: $A(1 + r)^{t-2}$

Con la última anualidad A se cancela la deuda.

La suma de las cantidades anteriores deben coincidir con: $D(1 + r)^t$

$$D(1 + r)^t = A + \ldots + A(1 + r)^{t-2} + A(1 + r)^{t-1}$$

El segundo miembro de la igualdad es la suma de t términos de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$; por lo que:

$$D \cdot (1+r)^t = \frac{A \cdot (1+r)^{t-1} \cdot (1+r) - A}{(1+r) - 1} = \frac{A \cdot \left((1+r)^t - 1 \right)}{r}$$

De esta igualdad se puede despejar tanto A (**valor de la anualidad**) como D (**valor de la deuda**).

$$A = \frac{D \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \quad \text{y} \quad D = \frac{A\left((1+r)^t - 1 \right)}{r(1+r)^t}$$

Como en la anualidades de capitalización, los pagos a veces no se hacen en periodos anuales y como se hizo allí generalizamos las fórmulas.

$$A = \frac{D \dfrac{r}{n}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}}{\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt} - 1} \quad \text{y} \quad D = \frac{A\left[\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt} - 1\right]}{\dfrac{r}{n}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}}$$

Donde n es el número de pagos que se efectúan en un año; por tanto, sus posibles valores son: 2, en pagos semestrales; 4, en pagos trimestrales y 12, en pagos mensuales.

Ejemplos

1. Para pagar un préstamo hipotecario sobre una vivienda de 7 000 euros en un plazo de 14 años a un interés de 6%, ¿qué cantidad se debe pagar anualmente?; ¿y trimestralmente?

Solución. Se aplica la fórmula $A = \dfrac{7000 \cdot 0,06(1+0,06)^{14}}{(1+0,06)^{14}-1} = \dfrac{7000 \cdot 0,06 \cdot 1,06^{14}}{1,06^{14}-1}$

La secuencia siguiente de teclas determina la anualidad:

1,06 [x^y] 14 [-] 1 [=] [Min] [+] 1 [=] [×] 0,06 [×] 7000 [÷] [MR] [=] 753,09435

La anualidad que corresponde pagar es de 753,09 euros.

Para responder a la segunda pregunta es necesario generalizar la fórmula.

Se debe pagar 7 000 euros, mediante pagos trimestrales; por tanto, en 14 años deben realizarse 14·4 = 56 pagos; el 6% anual, equivale a 6/4 = 1,5% trimestral; con estos nuevos datos aplicamos la fórmula.

$$A = \frac{7000 \cdot 0,015(1+0,015)^{56}}{(1+0,015)^{56}-1} = \frac{7000 \cdot 0,015 \cdot 1,015^{56}}{1,015^{56}-1}$$

La secuencia determina el pago trimestral

1,015 [x^y] 56 [–] 1 [=] [Min] [+] 1 [=] [×] 0,015 [×] 7000 [÷] [MR] [=] 185,64745

El pago trimestral será 185,66 euros.

2. Mediante el pago de 4 000 euros anuales al 8% de interés compuesto durante 5 años, ¿qué deuda hemos saldado?

Solución. Se aplica la fórmula: $D = \dfrac{4000\left((1+0,08)^5-1\right)}{0,08(1+0,08)^5} = \dfrac{4000(1,08^5-1)}{0,08 \cdot 1,08^5}$

La siguiente secuencia calcula la deuda:

1,08 [x^y] 5 [×] 0,08 [=] [Min] [÷] 0,08 [-] 1 [=] [×] 4000 [÷] [MR] [=] 15970,841

En la práctica, la deuda saldada es de 15 970,84 euros.

3. Si pagamos 3 000 euros anuales para amortizar una deuda de 18 629,38 euros al 6%, ¿cuántos años tendremos que pagar?

Solución. Se aplica la formula $3000 = \dfrac{18629,38 \cdot 0,06 \cdot 1,06^t}{1,06^t-1}$; se opera sobre esta ecuación para transformarla en otra en la que se puedan tomar logaritmos.

$$3000(1,06^t-1) = 1117,628 \cdot 1,06^t, \qquad 1,06^t - 1 = 0,3726 \cdot 1,06^t;$$

$$(1-0,3726) \cdot 1,06^t = 1; \quad 0,6274 \cdot 1,06^t = 1; \quad 1,06^t = \frac{1}{0,6274}$$

Se toman logaritmos: $t \cdot \ln 1,06 = -\ln 0,6274$; de donde $t = \frac{-\ln 0,6274}{\ln 1,06}$

La siguiente secuencia calcula t: 1,06 ln Min 0,6274 ln ± ÷ MR = 8,00033

El valor de t, redondeando al entero más próximo, es 8 años .

Actividades

23. Para comprar una moto solicitamos un préstamo de 12 000 euros al 6%. Nuestra situación económica nos permite dedicar a este pago anualmente 2 500 euros. ¿Durante cuántos años tendremos que pagar?

24. Solicitamos un préstamo de 100 000 euros para devolverlo en diez años al 8%. ¿Qué cantidad deberemos pagar cada año? ¿Cuánto pagaremos por el citado préstamo? ¿Cuántos intereses pagaremos?

25. Una inmobiliaria vende pisos a 120 000 euros. A la entrega de llaves se pagan 20 000 euros y el resto es un préstamo a pagar en 15 años al 6,20%. Si los pagos se realizan al final de cada año; se pide: ¿Cuánto se pagará anualmente? ¿Cuánto se habrá pagado por el piso?

26. Compramos un coche por 13 520 euros, mediante un préstamo al 9 %. Para pagarle mediante pagos mensuales durante 2 años, ¿cuánto pagaremos mensualmente? ¿Cuánto pagaremos por el coche?

7. Números índices

7.1. Índices simples

Cuando interesa conocer la evolución en el tiempo de una variable o una magnitud medible, se emplean los números índices. Los **números índices** muestran los cambios de una variable entre dos periodos temporales de los que uno de ellos se toma como base o referencia.

Por ejemplo, la tabla siguiente nos da el número de reclusos en las cárceles españolas entre 1997 y 2002.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Nº presos	42.756	44.370	44.197	45.501	47.571	51.882

Si quisiéramos averiguar la variación de la población reclusa del año 1998 tomando como base el año 1997, la obtendríamos del cociente

$$\frac{44370}{42756} = 1{,}037$$

Del mismo modo, la variación de la población reclusa del año 2002 con respecto al año 1997 sería:

$$\frac{51882}{42756} = 1{,}213$$

¿Cómo interpretamos estos cocientes? En el año 1998 se ha incrementado la población reclusa, respecto a 1997, en un 3,7%, mientras que en el periodo 1997-2002, el incremento fue del 21,3%.

Sea X una variable o magnitud cuya evolución a lo largo del tiempo queremos estudiar. Supongamos que tenemos una serie de registros temporales que simbolizaremos por 0, 1, 2, 3, ..., t; y que los valores de X en cada uno de estos registros temporales sean x_0, x_1, x_2,..., x_t. Se llama índice de la variable X en el periodo t (periodo actual), tomado como base el periodo 0, al cociente x_t/x_0, y se simboliza por

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0}$$

Para hacer una lectura más fácil del índice se acostumbra a expresarlo multiplicado por 100,

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100$$

En el caso del índice de la población reclusa en los años 1998 y 2002, tomando como base 1997, sería

$$I_{1998/1997} = \frac{44370}{42756} \cdot 100 = 103{,}7$$
$$I_{2002/1997} = \frac{51882}{42756} \cdot 100 = 121{,}3$$

Con lo que, sin tantos decimales, es más fácil ver que la población reclusa aumentó un 3,7% entre 1997 y 1998, y un 21,3% entre 1997 y 2002. Al multiplicar por 100 es como si asignáramos valor 100 al índice de referencia o base; los demás índices mayores que 100 indican aumentos y los menores que 100 indican disminución.

Ejemplo

La tabla siguiente muestra el número de alumnos matriculados en España en educación universitaria.

Curso	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004	2004/2005	2005/2006
Nº alumnos	1.554.972	1.526.907	1.507.147	1.488.574	1.449.136	1.422.561

Calcular los índices tomando como base el número de matriculados en el curso 2000/2001

Solución.

Se efectúan los cálculos: $\frac{1554972}{1554972} \cdot 100 = 100$, $\frac{1526907}{1554972} \cdot 100 = 98{,}195$,....,etc.

Completamos la tabla así:

Curso	2000/1	2001/2	2002/3	2003/4	2004/5	2005/6
Alumnos	1.554.972	1.526.907	1.507.147	1.488.574	1.449.136	1.422.561
Índices	100	98,1	96,9	95,7	93,1	91,4

Interpretamos el resultado diciendo que en el curso 2001/2 ha habido una disminución de matriculados de aproximadamente un 1,9%, mientras que en el curso 2005/6 la disminución del número de alumnos matriculados fue del 8,6% (100 – 91,4 = 8,6).

Los índices que hemos visto hacen referencia a una única variable, número de presos, número de alumnos matriculados; se llaman índices simples.

7.2. Propiedades de los índices simples

Las propiedades de los índices simples son una consecuencia de su definición como cociente indicado o razón.

a) Propiedad de inversión. Si

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0} = \frac{1}{\frac{x_0}{x_t}} = \frac{1}{I_{0/t}}$$

entonces

$$I_{t/0} = \frac{1}{I_{0/t}}$$

Es decir, si cambiamos el periodo base con el periodo actual, el nuevo índice es inverso del inicial.

b) Propiedad circular. Si tenemos tres periodos temporales, 0, *t*, *t´*, siendo *t* intermedio entre 0 y *t´*, se cumple que:

$$I_{t/0} \cdot I_{t'/t} \cdot I_{0/t'} = 1$$

Esto es consecuencia de

$$\frac{x_t}{x_0} \cdot \frac{x_{t'}}{x_t} \cdot \frac{x_0}{x_{t'}} = 1.$$

Esta última propiedad se emplea para hacer un cambio de base del índice. Si se conocen dos índices en los periodos temporales *t* y *t´* respecto a la base 0, entonces podemos calcular el índice del periodo *t´* tomando como base el periodo temporal *t*. Despejando $I_{t'/t}$ en $I_{t/0} \cdot I_{t'/t} \cdot I_{0/t'} = 1$, resulta

$$I_{t'/t} = \frac{1}{I_{t/0} \cdot I_{0/t'}} = \frac{1}{I_{t/0} \cdot \frac{1}{I_{t'/0}}} = \frac{1}{\frac{I_{t/0}}{I_{t'/0}}} = \frac{I_{t'/0}}{I_{t/0}}$$

o simplemente

$$I_{t'/t} = \frac{x_{t'}}{x_t} = \frac{x_{t'}/x_0}{x_t/x_0} = \frac{I_{t'/0}}{I_{t/0}}$$

El índice del periodo *t´* tomando como nueva base el periodo *t* se calcula dividiendo $I_{t'/0}$ entre $I_{t/0}$. El cambio de base se realiza cuando el periodo base pierde representatividad, al ir alejándose el periodo actual del periodo base, en cuyo caso se toma como base un periodo más cercano al actual.

Ejemplo

La tabla siguiente refleja la producción anual de aceitunas en miles de toneladas.

2001	2002	2003	2004	2005
6.982,5	4.414,9	7.553,6	5.200,0	4.021,7

Calcula los índices tomando como base la producción en 2001, en 2005 y 2003.

Solución.

Completamos la tabla teniendo en cuenta que $I_{t/2005} = \frac{I_{t/2001}}{I_{2005/2001}}$ y $I_{t/2003} = \frac{I_{t/2001}}{I_{2003/2001}}$.

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Producción	6.982,5	4.414,9	7.553,6	5.200,0	4.021,7
$I_{t/2001}$	100	63,2	108,1	74,4	57,5
$I_{t/2005}$	173,6	109,7	187,8	129,2	100
$I_{t/2003}$	92,4	58,4	100	68,8	53,2

7.3. Índices compuestos

Se emplean los **índices compuestos** cuando queremos estudiar una variable o una magnitud X que tiene muchos componentes. Por ejemplo, si queremos estudiar la evolución de los precios en un país, no sólo tendríamos que analizar el precio de un producto sino los precios de un conjunto de productos, los que consumen los habitantes de ese país, y cuyas magnitudes simbolizamos por $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Hay varios modos de calcular el índice de esta variable compleja X. Uno consiste en hallar la media aritmética de los índices $I_{t/0}(X_1),\ldots\ldots,I_{t/0}(X_k)$ entre los periodos temporales 0 y t, para cada magnitud.

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1) + \ldots + I_{t/0}(X_k)}{k}$$

Pero ocurre que no todos los productos que consumimos, y por tanto sus magnitudes, tiene la misma importancia, por lo que es preciso asignarles una medida de su importancia mediante lo que se llama una ponderación o peso. Simbolizaremos estos pesos por $w_1, w_2, \ldots, w_k$, con lo que el índice compuesto ponderado de la magnitud X, se define así:

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1)\cdot w_1 + \ldots + I_{t/0}(X_k)\cdot w_k}{k}$$

Los índices más conocidos son índices compuestos ponderados. El Índice de precios de Consumo, que calcula mensualmente el Instituto Nacional de Estadística, mide la evolución de los precios de un conjunto de bienes y servicios que consume la población española. El cálculo actual se hace tomando como periodo base enero de 2001. Otros índices relevantes son: Índice de producción industrial, Índices de precios industriales, miden la evolución de los precios de los bienes de equipo, Índices de comercio exterior, miden la evolución de la balanza comercial. Unos índices muy populares son los índices de cotización de valores en la Bolsa. El más conocido, el Ibex-35, es un índice compuesto ponderado que refleja la evolución de las cotizaciones de las 35 principales empresas de la Bolsa española. Además del índices Ibex -35, diariamente se publican el precio de las acciones, en euros, de las empresas que cotizan en Bolsa y la tasa de variación con respecto a la cotización del cierre del mercado del día anterior.

Ejemplo

Si leemos que el valor de una acción de Telefónica es 21,1 € y a su lado aparece +6% , esto quiere decir que la tasa de variación, del precio de una acción de Telefónica, tomando como base el precio de cierre del día anterior, fue del 6% de aumento

Solución.

La tasa de variación, si el precio de la acción de Telefónica el día anterior terminó en 19,9 €, se calcula así:

$$Tasa\ de\ variación = \frac{21{,}1 - 19{,}9}{19{,}9} = \frac{1{,}2}{19{,}9} = 0{,}0601$$

Que, expresado en porcentaje, resulta 0,0601·100 = 6,01 ≈ 6% de aumento del precio de la acción.

Actividades

27. El paro registrado en España, en los últimos años, según el INE, viene dado por la tabla:

años	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Parados (en miles)	1930,1	2049,6	2096,9	2113,7	2069,9	2039,4

Calcula los índices tomando como base el paro registrado en 2001, y calcula los índices tomando como base el paro registrado en 2004.

28. De un determinado producto alimentario se conocen los siguientes índices de precios $I_{2004/2001}$ y $I_{2007/2004} = 90$

a) Calcular $I_{2007/2001}$.

b) Sabiendo que el precio medio durante 2004 fue 5,8 € / kg, ¿qué precio medio tenía en 2001 y en 2007?

29. El precio del barril de petróleo, que ahora está por las nubes, no era tan alto hace unos pocos años. La tabla refleja el precio medio de un barril de petróleo en dólares.

año	1986	1990	1995	1999	2000	2001	2002	2003
precio	14,4	23,8	17,8	18,2	29	24,7	25	28,8

a) Calcula $I_{2004/2001}$ y $I_{2007/2004}$.

b) Si sabemos que $I_{2000/1980} = 78{,}8$. Tomando como base el precio en 1980, calcula $I_{1995/1980}$ y $I_{2002/1980}$.

c) Calcula el precio medio del petróleo en 1980.

30. Calcula la tasa de variación del Ibex -35 si empezó la semana en 13.290 y terminó el viernes en 12.980.