

CUADERNO
DE
EJERCICIOS

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES

1^o BACHILLERATO

ÍNDICE DE EJERCICIOS

	PÁG.
TEMA 1 - POLINOMIOS Y RADICALES	3
TEMA 2 - MATRICES	5
TEMA 3 - DETERMINANTES	10
TEMA 4 - SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	13
TEMA 5 - INECUACIONES	19
TEMA 6 - FUNCIONES	22
TEMA 7 - LÍMITES	24
TEMA 7 - CONTINUIDAD	29
TEMA 8 - DERIVADAS	33
TEMA 9 - REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES	37
TEMA 10 - COMBINATORIA	39
TEMAS 11 y 12 - PROBABILIDAD	42

TEMA 1 - POLINOMIOS Y RADICALES

1. Realiza las siguientes restas con polinomios:

a. $(8x^4 - 9x^3 + 1) - (2x + 3x^3 - 5x^4)$

b. $\left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 + 5x - \frac{1}{3}\right)$

Solución. a) $13x^4 - 12x^3 - 2x + 1$; **b)** $2x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 5x + \frac{10}{3}$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a. $(5x^2 + 3x - 5)(7x^3 - 6x + 3)$

b. $\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)(x^2 - 5x - 14)$

Solución. a) $35x^5 + 21x^4 - 65x^3 - 3x^2 + 39x - 15$; **b)** $x^4 - \frac{21}{4}x^3 - \frac{105}{8}x^2 + \frac{43}{8}x + \frac{21}{4}$

3. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a. $(x^7 - x) : (x + 2)$

b. $(x^5 + x - 2x^3) : (x - 1)$

c. $(3x^4 - 6) : (x + 1)$

Solución. a) $C(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$; $R(x) = -126$
b) $x^4 + x^3 - x^2 - x$; $R=0$; **c)** $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$; $R=-3$

4. Resuelve las siguientes operaciones con polinomios:

$$P(x) = x^3 + 3x - 2; Q(x) = 2x^2 - 5x + 3; R(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

a. $3P(x) + Q(x)$

c. $P(x) \cdot Q(x)$

b. $2R(x) - 3Q(x)$

d. $Q(x) \cdot R(x) - P(x)$

Solución. a) $3x^3 + 2x^2 + 4x - 3$; **b)** $2x^2 + 19x - 11$
c) $2x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 19x - 6$; **d)** $8x^4 - 17x^3 + 8x - 1$

5. Factoriza las siguientes expresiones polinómicas:

a. $3x^2 + 14x - 5$

c. $x^3 + 5x^2 + 8x$

b. $4x^5 + 2x^4 - 2x^3$

d. $2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$

Solución. a) $3(x - 1/3)(x + 5)$; **b)** $4x^3(x - 1/2)(x + 1)$; **c)** $x(x^2 + 5x + 8)$; **d)** $2(x - 1)^2(x - 3)$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a. $P(x) = -5x^2 - x$

b. $P(x) = 4x^4 + 10x^2$

c. $P(x) = 10x^3 - 250x$

Solución. a) $-x(5x + 1)$; **b)** $2x^2(2x^2 + 5)$; **c)** $10x(x + 5)(x - 5)$

7. Simplifica:

a. $\frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$

b. $\frac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100}$

c. $\frac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2}$

Solución. a) $\frac{x+7}{2}$; b) $\frac{x-5}{x+5}$; c) $\frac{1}{x+10}$

8. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\frac{21x^2}{7x-14x^2}$

c. $\frac{3x^2-4x}{x^3}$

e. $\frac{3x^2-12}{x+2}$

b. $\frac{4-x}{3x-12}$

d. $\frac{4x-8}{2x}$

f. $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

Solución. a) $\frac{3x}{1-2x}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{3x-4}{x^2}$; d) $\frac{2(x-2)}{x}$; e) $3(x-2)$; f) $\frac{x-1}{x+1}$

9. Racionaliza las siguientes expresiones:

a. $\frac{x}{2\sqrt{x}}$

b. $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

c. $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Solución. a) $\frac{\sqrt{x}}{2}$; b) $\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$; c) $\frac{-x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$

10. Reduce las sumas:

a. $3\sqrt{5} - \sqrt{80} + 2\sqrt{45} - \sqrt{125}$

b. $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27}$

Solución. a) 0 b) $13\sqrt{3}$

11. Racionaliza:

a. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

c. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

e. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}$

b. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

f. $\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}$

Solución. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-3}{6}$ d) $\frac{\sqrt{3}-3}{-2}$ e) $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ f) $\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$

12. Resuelve utilizando las propiedades de las raíces. Simplifica la respuesta lo máximo posible.

a. $\frac{\sqrt{3^4\sqrt{3^3}}}{\sqrt[5]{3^7}}$

d. $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[8]{x^3}}{\sqrt{x}}$

g. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

b. $3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}$

e. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$

h. $\sqrt[3]{16ab^2} + \sqrt[3]{250ab^2} + \sqrt[3]{2ab^2}$

c. $\frac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

f. $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}$

Solución. a) $3^{-21/40}$ b) $3^{1/8}$ c) \sqrt{ab} d) $x^{29/24} = x^{24}\sqrt{x^5}$ e) $2^{17/24}$ f) $a^{5/4}$ g) $2^{15/16}$ h) $8\sqrt[3]{2ab^2}$

TEMA 2 - MATRICES

HOJA 1

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar:

- a. $A + B$
b. $C - A + B$

- c. $A \cdot B$
d. A^2

- e. $B^t \cdot C$
f. $A \cdot B - C$

Solución. a. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$; e. $\begin{pmatrix} 6 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -8 & 27 \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar:

- a. A^2
b. B^3

- c. $B \cdot A$
d. $A \cdot B$

- e. $B^t \cdot A$
f. $A \cdot I - B$

Solución. a. $\begin{pmatrix} 3 & -18 & -5 \\ 2 & 32 & 6 \\ -5 & -11 & 4 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -25 & 48 & 18 \\ -156 & -154 & 90 \\ -9 & -294 & -4 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 2 & 17 & 5 \\ 13 & 1 & -10 \\ 9 & -36 & -17 \end{pmatrix}$;
d. $\begin{pmatrix} 31 & 20 & -16 \\ -38 & -36 & 20 \\ 21 & 35 & -9 \end{pmatrix}$; e. $\begin{pmatrix} -2 & -17 & 3 \\ -13 & -10 & 19 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -5 & -9 & 1 \\ -5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

3. Tenemos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución. $A \cdot B = \text{No se puede resolver}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 33 & 22 \\ 4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$

4. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula:

a. ABC

b. $B^t \left(\frac{1}{2}A - B \right)$

c. A^2 ; B^2 ; C^2

Solución. a. $\begin{pmatrix} 4 & -16 & -16 \\ 6 & 25 & 39 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 6 & -15/2 \end{pmatrix}$; c. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$; $C^2 = \text{No tiene}$

5. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce el modelo A: 400 unidades en terminación N, 200 unidades en terminación L y 50 unidades en terminación S.

Produce el modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S.

La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a. Representar la información en dos matrices.

b. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Solución. Matriz de producción: $\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$; **Matriz coste en horas:** $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{pmatrix}$

Horas de taller y administración para modelos: $\begin{pmatrix} 17.650 & 705 \\ 11.490 & 459 \end{pmatrix}$

6. Calcula las inversas de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

Solución. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/14 \\ -1/7 & 3/14 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 3/20 & 1/20 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/16 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. $XA = B + I$
b. $AX + B = C$

c. $XA + B = 2C$
d. $AX + BX = C$

e. $XAB - XC = 2C$

Solución. a. $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 3/7 & -4/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$; e. $\begin{pmatrix} -7/2 & 1 \\ -23/4 & 3/2 \end{pmatrix}$

8. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución. $A = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

9. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Halla el valor de x para que $B^2 = A$
- b) Halla el valor de x para que $A - I = B - I$
- c) Halla el valor de x para que $AB = I$

Solución: a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = -1$

10. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. Rango A = 2; Rango B = 3; Rango C = 2; Rango D = 1

11. Calcula el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & m \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución. A: Si $a=3$ Rango (A) = 2; Si $a \neq 3$ Rango (A) = 3; B: Si $m=-9$ Rango (B) = 2; Si $m \neq -9$ Rango (B) = 3
C: Si $a=2, 3$ Rango (C) = 1; Si $a \neq 2, 3$ Rango (C) = 2

TEMA 2 - MATRICES

HOJA 2

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

g. $2C - 3B$
h. C^2

i. $B^t \cdot C^t$
j. $A \cdot B - I$

Solución. a. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

g. B^2
h. $B \cdot A$

i. $B^t \cdot A$
j. $2A - 2B + I$

Solución. a. $\begin{pmatrix} -7 & -16 & 8 \\ 11 & -8 & -1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} -12 & 7 & -13 \\ 11 & -11 & 5 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 9 & -14 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 6 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Calcula las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. a. $\begin{pmatrix} 3/14 & 1/7 \\ -1/14 & 2/7 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 2/21 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

4. Calcula la matriz X por la que hay que multiplicar a la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, para obtener la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. Resuelve razonadamente la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

6. Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1, 0), y que verifica:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. Resuelve los siguientes sistemas:

(a)
$$\begin{cases} 3X - 5Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución. (a) $X = \begin{pmatrix} 4 & 7/2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

8. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Rango A = 3; Rango B = 2

9. Calcula el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Solución. A: Si $k=6/7$: Rango (A) = 2; Si $k \neq 6/7$: Rango (A) = 3

B: Si $k=17/4$: Rango (B) = 2; Si $k \neq 17/4$: Rango (B) = 3

10. Calcula el rango de la siguiente matriz según los distintos valores del parámetro a:
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución. Si $a = 1$: Rango (A) = 1; Si $a = -2$: Rango (A) = 2; Si $a \neq -2, 1$: Rango (A) = 3

TEMA 3 - DETERMINANTES

HOJA 1

1. Resuelve los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}; \quad |C| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix};$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}; \quad |E| = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}; \quad |F| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución. $|A| = -15$; $|B| = 31$; $|C| = -7$; $|D| = -56$; $|E| = -12$; $|F| = 2$

2. Resuelve los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad |C| = \begin{vmatrix} -5 & -9 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -3 & 8 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}; \quad |E| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \\ -3 & -9 & -7 \end{vmatrix}; \quad |F| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución. $|A| = -24$; $|B| = 3$; $|C| = -172$; $|D| = 18$; $|E| = -4$; $|F| = 4$

3. Calcula la matriz adjunta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución. $A = \begin{pmatrix} -21 & 4 & -20 \\ 9 & -17 & -22 \\ -11 & -3 & 15 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -15 & -2 & 8 \\ -3 & -9 & -11 \\ -11 & -14 & 9 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 35 & -45 & 20 \\ -42 & 10 & -24 \\ 41 & -15 & -8 \end{pmatrix}$

4. Calcula las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -1/45 & 1/3 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 23 \\ 12 & -3 & -17 \\ -7/2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/2 & -8/5 & 1/5 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1/7 & 2/21 \\ -1 & -1 & 7/3 \end{pmatrix}$$

5. Encuentra el valor de a para que la siguiente matriz no tenga inversa: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$

Solución. $a = 6$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. $AX + B = I$

b. $XA + B = I$

$$\text{Solución. a) } X = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -16 \\ -21 & 16 & -24 \\ -15 & 12 & -19 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } X = \begin{pmatrix} -10 & 22 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \\ 6 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Resuelve la siguiente ecuación matricial: $XA + 3B = 2C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -7 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución. } X = \begin{pmatrix} 23 & 137/11 & -155/11 \\ -2 & 2 & 0 \\ -31 & -158/11 & 212/11 \end{pmatrix}$$

8. Calcula el rango de las siguientes matrices (por determinantes):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 9 & -8 & 7 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} -12 & 18 & 6 \\ -6 & 9 & -3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. Rango (A) = 2; Rango (B) = 3; Rango (C) = 3; Rango (D) = 2; Rango (E) = 1; Rango (F) = 1

TEMA 3 - DETERMINANTES

HOJA 2

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución. $|A| = 18$; $|B| = 39$; $|C| = 63$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices (por determinantes):

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ -9 & 3 & -6 & 9 \\ 6 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & 11 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución. Rango (A) = 3; Rango (B) = 1; Rango (C) = 2; Rango (D) = 2

3. Calcula las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & -7 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -1/45 & 1/3 \\ 0 & -5/18 & 6 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 23 \\ 12 & -3 & -17 \\ -7/2 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ -1/2 & -8/5 & 1/5 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad D^{-1} = \text{No tiene}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- a. $AX + B = C - I$
- b. $XA - 2B = 3C$
- c. $XA + I = 3B - C$

Solución. a) $X = \begin{pmatrix} 38/15 & -9/5 & 37/10 \\ -29/15 & 2/5 & -13/15 \\ -10/3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -27/10 & 1/2 & 33/5 \\ -14/3 & -27/5 & 17/3 \\ 196/15 & 111/5 & -163/15 \end{pmatrix}$ **c)** $X = \begin{pmatrix} -47/15 & -14/15 & 26/15 \\ 14/5 & 4/5 & -2/5 \\ 223/30 & 81/10 & -62/15 \end{pmatrix}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Cramer

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - 3z = -10 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ -x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3z = 2 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ -x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = -5 \\ -3x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -x + 2y + z = -6 \\ 2x - 3z = 2 \\ -3x + 3y - z = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} -4x + 3y - z = 2 \\ 3x - 2z = -5 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2y + 3z = -9 \\ -x + 3y + 5z = -15 \\ 6x - 4y - 4z = 2 \end{cases}$$

Solución. a) $x = 1; y = 2; z = 6$; b) $x = -1; y = -2/3; z = -4/3$; c) $x = 2; y = -3; z = 4$;
d) $x = -26/19; y = -55/19; z = -30/19$; e) $x = 6; y = 25/2; z = 23/2$; f) $x = -1; y = 3; z = -5$.

2. Resuelve los sistemas del ejercicio anterior por el método de Gauss

3. Estudia los siguientes sistemas según el número de soluciones que tengan

$$a) \begin{cases} 4x + 3y - z = 0 \\ 8x - 5y - 5z = 10 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ 6x + 3y - 7z = 1 \\ 5y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 2 \\ 4x + 3y - 6z = -3 \\ 8x + 13y - 12z = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -x + 3y + 5z = 2 \\ 4x + z = 3 \\ 7x + 3y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 5x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x + y - 5z = 5 \\ 3y - 3z = 3 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{cases}$$

Solución. a) Sist. Compatible Indeterminado; b) Sist. Compatible Determinado; c) Sist. Incompatible;
d) Sist. Compatible Indeterminado; e) Sist. Compatible Determinado; f) Sist. Incompatible.

4. Resuelve los siguientes sistemas compatibles indeterminados por el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 6x - 4y = -3 \\ 12x + 5y - 3z = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -4x + 3y = -5 \\ -x - 5y + 6z = 2 \\ -6x - 7y + 12z = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y - 6z = 2 \\ -x + 4y + 3z = -2 \\ 3x + 14y - 9z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 6 \\ -2x + 3y + 5z = 1 \\ -2x + 6y + 17z = 9 \end{cases}$$

Solución. a) $x = \frac{11}{26} + \frac{2}{13}\alpha$; $y = \frac{18}{13} + \frac{3}{13}\alpha$; $z = \alpha$; **b)** $x = \frac{19}{23} + \frac{18}{23}\alpha$; $y = \frac{-13}{23} + \frac{24}{23}\alpha$; $z = \alpha$

c) $x = \frac{18}{13} + 3\alpha$; $y = \frac{-2}{13}$; $z = \alpha$; **d)** $x = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}\alpha$; $y = \frac{8}{3} - 4\alpha$; $z = \alpha$

5. Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + 3z = m \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = m \\ 2x - 5y + mz = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} mx + 3y = 0 \\ mx + my + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ mx - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución. a) Para $m = 2$; S. C. INDET.; Para $m = -3$; S. C. INDET.; Para $m \neq 2$ y -3 ; S. C. DETERM.

b) Para $m = 1$; S. C. INDET.; Para $m = 3$; S. C. INDET.; Para $m \neq 1$ y 3 ; S. C. DETERM.

c) Para $m = 1$; S. INCOMPATIBLE; Para $m \neq 1$; S. C. DETERMINADO

d) Para $m = -3$; S. INCOM.; Para $m = 0$; S. C. IND.; Para $m = 2$; S. INCOM.; Para $m \neq 0, 2$ y -3 ; S. C. DET.

e) Para $m = 3$; S. C. INDETERMINADO; Para $m \neq 3$; S. C. DETERMINADO

f) Para $m = 48$; S. C. INDETERMINADO; Para $m \neq 48$; S. C. DETERMINADO

6. Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro y resuélvelos para el caso que se te proponga

$$a) \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + mz = 0 \end{cases} \quad \text{Resuélvelo para } m = -32 \text{ y } m = 2$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -y + 4z = 2 \\ -2x + my - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{Resuélvelo para } m = 2$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - 3z = m \\ 2x + z = 2 \\ mx - 2y + 7z = 1 \end{cases} \quad \text{Resuélvelo para } m = 7$$

Solución. a) Para $m = -32$; S. C. INDETERMINADO; Para $m \neq -32$; S. C. DETERMINADO

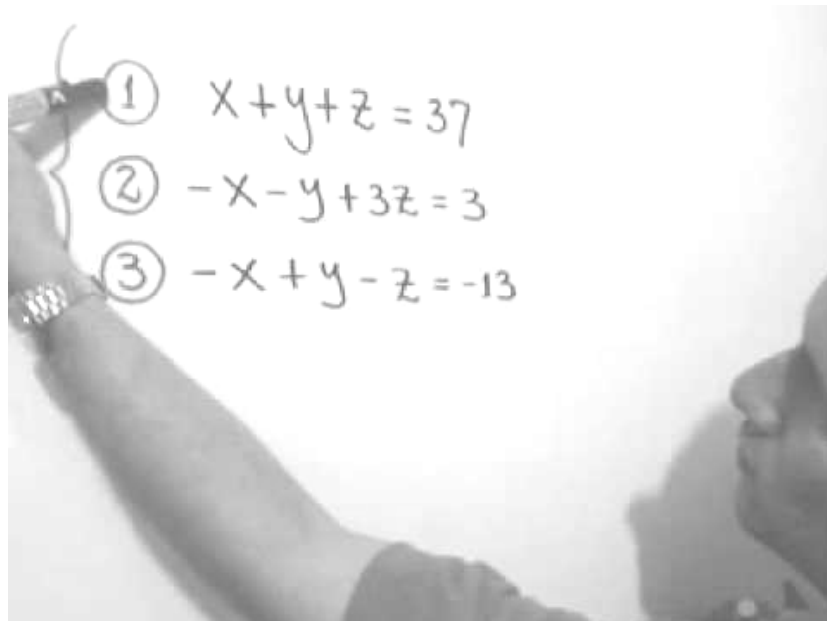
Solución para $x = -32$; $x = 3\alpha$; $y = -4\alpha$; $z = \alpha$; Solución para $x = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

b) Para $m = -5$; S. INCOMPATIBLE; Para $m \neq -5$; S. C. DETERMINADO

Solución para $x = 2$; $x = -1/28$; $y = 9/7$; $z = 23/28$

c) Para $m = 7$; S. C. INDETERMINADO; Para $m \neq 7$; S. C. DETERMINADO

Solución para $x = 7$; $x = 1 + \frac{1}{2}\alpha$; $y = 3 + \frac{7}{4}\alpha$; $z = \alpha$



1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Cramer

$$a) \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 5x + y - z = 1 \\ -2x - 3y - 3z = 5 \\ -x - y - 5z = 7 \end{cases}$$

Solución. a) $x = 3; y = 2; z = 1$; b) $x = -5; y = -4; z = 0$; c) $x = 6; y = 1; z = -7$; d) $x = 0; y = -1/3; z = -4/3$.

2. Resuelve los sistemas del ejercicio anterior por el método de Gauss

3. Estudia los siguientes sistemas según el número de soluciones que tengan

$$a) \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ -x + 2z = -3 \\ 5x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 4y - 5z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ -x + 9y - 7z = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x + 2y - z = 3 \\ -x - y + 2z = -2 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2z = 2 \\ 6x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 3 \\ x - 3y + z = -2 \\ -3x - 7y + 5z = 6 \end{cases}$$

Solución. a) Sist. Compatible Indeterminado; b) Sist. Compatible Determinado; c) Sist. Incompatible;

d) Sist. Compatible Indeterminado; e) Sist. Compatible Determinado; f) Sist. Incompatible.

4. Resuelve los siguientes sistemas compatibles indeterminados por el método de Gauss

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + 3y + 6z = 24 \\ -3x + 5y + 9z = 40 \\ x + 2y - 3z = 16 \end{cases}$$

Solución.

a) $x = 2 + 4\alpha$; $y = -2 + 7\alpha$; $z = \alpha$; b) $x = 1/2 - \alpha/2$; $y = 0$; $z = \alpha$
c) $x = 3/2 - \alpha/2$; $y = -7/2 + 1/2\alpha$; $z = \alpha$; d) $x = 3\alpha$; $y = 8$; $z = \alpha$

5. Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - y + mz = -3 \\ -mx + 4z = 1 \\ 8x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (a-2)x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + az = 2 \\ -4y + 9z = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -3x - 2y + z = 2 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3y + p^2z = 4 \end{cases}$$

Solución. a) Para $k \neq -8$; S. C. DETERM.; Para $k = -8$; S. C. INDETERM.

b) Para $m \neq -2$ y 8 , S. C. DET.; Para $m = -2$, S. C. INDET.; Para $m = 8$, S. INCOMPAT.

c) Para $a \neq -1$ y 3 , S. C. DETERM.; Para $a = -1$; S. INCOMPATIBLE; Para $a = 3$, S. C. INDET.

d) Para $p \neq -2, 2$; S. C. DETERM.; Para $p = -2$; S. C. IND.; Para $p = 2$; S. INCOM.

6. Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro y resuélvelos para el caso que se te proponga

a)
$$\begin{cases} 3x + ay + z = a - 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ ax + y - z = a - 2 \end{cases}$$
 Resuélvelo para $a = 2$ y $a = 1$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$
 Resuélvelo para $m = -1$

c)
$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ -3x + (m+1)y + 4z = 1 \\ mx - 2y + 6z = 5 \end{cases}$$
 Resuélvelo para $m = 1$

Solución: a) Para $a \neq -2, 2$ S. C. DETERM.; Para $a=2$, S. C. INDETERM.; Para $a = -2$; S. INCOMP.

Solución para $a = 2$; $x = 3\alpha$; $y = -5\alpha$; $z = \alpha$; Solución para $a = 1$; $x = -1/3$; $y = -1/3$; $z = 1/3$

b) Para $m \neq -1$; S. C. DETERMINADO; Para $m = -1$; S. C. INDETERMINADO

Solución para $m = -1$; $x = 1 + \alpha$; $y = -1 - \alpha$; $z = t$

c) Para $m \neq 1, 2$; S. C. DETERMINADO; Para $m = 1$; S. C. INDETERMINADO; Para $m = 2$; S. INCOMP.

TEMA 4 - PROBLEMAS DE SISTEMAS

DE ECUACIONES LINEALES

1. Un alumno de 1º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicará al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar.

Solución. 0,55; 0,75; 0,30

2. Se tienen 9,50 euros en monedas de 5 céntimos, de 10 céntimos y de 50 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos excede en 9 unidades el número de monedas de 50 céntimos, y por cada 3 monedas de 10 céntimos se tienen 4 de 5 céntimos ¿Cuántas monedas se tiene de cada valor?

Solución. 28, 21, 12

3. La suma de las edades de tres hermanos es de 32 años. La edad del mayor es igual a la suma de las edades de sus hermanos menores. Dentro de 8 años, el mayor doblará la edad del menor. Calcula la edad actual de cada uno de los hermanos.

Solución. 16, 12, 4

4. La suma de las tres cifras de un determinado número es 13. La cifra de las centenas excede en 4 unidades a la cifra de las decenas. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas, el número aumenta en 495 unidades. ¿De qué número se trata?

Solución. El número es 409

5. Con 450 gr. de medicamento se fabricaron 60 pastillas de tres tipos: grandes, medianas y pequeñas. Las pastillas grandes pesan 20 gr., las medianas 10 gr. y las pequeñas 5 gr. Si el total de pastillas grandes y medianas es la mitad del número de pastillas pequeñas, ¿cuántas se fabricaron de cada tipo?

Solución. 5, 15, 40

6. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total de 2.000 euros. Si el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 20, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

Solución. 50, 25, 20

7. En un teatro, hay localidades de tres clases A, B y C, cuyos precios son 5, 10 y 12 euros, respectivamente. Cierta día, la recaudación total fue de 11.045 euros. Si se sabe, además, que de la clase A se vendieron tantas localidades como de las clases B y C juntas, y que de la clase B se vendió el doble que de la C, averigua cuántas localidades de cada clase se vendieron ese día.

Solución. 705, 470, 235

TEMA 5 - INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $x^2 - (3x + 1) \leq (x - 1)(x + 2)$ d) $\frac{3x - 5}{4} - \frac{x - 6}{12} < 1$

b) $\frac{3(x - 1)}{2} - 4x < 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ e) $\frac{x - 1}{2} > x + 1$

c) $\frac{x - 1}{-3} + \frac{1}{5} \leq \frac{x}{2} - 3$ f) $\frac{x - 4}{4} + 1 < \frac{x + 4}{8}$

Solución. a) $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$; b) $(-2, \infty)$; c) $\left[\frac{106}{25}, \infty\right)$; d) $\left(-\infty, \frac{21}{8}\right)$; e) $(-\infty, -3)$; f) $(-\infty, 4)$

2. Cierta empresa de programas informáticos cobra por sus servicios 60€ más 50€ por hora de programación. Otra de la competencia, establece sus honorarios en 600€, cualquiera que sean las horas de programación. ¿Hasta cuántas horas resulta más económica la primera?

Solución. Hasta 10,8 horas.

3. El aforo de un polideportivo es de 3.000 espectadores. En un partido con la entrada a 9 euros se recaudaron más de 20.000 euros. ¿Qué número de asistentes al partido pueden estimarse?

Solución. Entre 2.223 y 3.000 espectadores.

4. Cristina decide montar un puesto en una feria para vender los artículos de artesanía que fabrica su amiga Lola. Tiene que pagar al ayuntamiento 9€ diarios por la licencia de vendedora ambulante y a Lola 2,5€ por cada pieza. Si Cristina cobra 4€ por artículo. ¿cuántos tiene que vender como mínimo para obtener beneficios?

Solución. Tiene que vender como mínimo 7.

5. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2 + 5x > -6$ d) $3x^2 - 27 > 0$

b) $3 \geq x(2x + 1)$ e) $-x^2 + 2x + 3 > 0$

c) $\frac{x(x + 1)}{2} < 5 - x$ f) $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$

Solución. a) $(-1, 6)$; b) $\left[-\frac{3}{2}, 1\right)$; c) $(-5, 2)$;

d) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$; e) $(-1, 3)$; f) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\frac{x-3}{x-4} \geq 0$

c) $\frac{x^2+x-2}{x} \geq 0$

b) $\frac{x-2}{x+1} < 0$

d) $\frac{5-x}{x-3} > 0$

Solución. a) $(-\infty, 3] \cup (4, \infty)$; b) $(-1, 2)$; c) $[-2, 0) \cup [1, \infty)$; d) $(3, 5)$

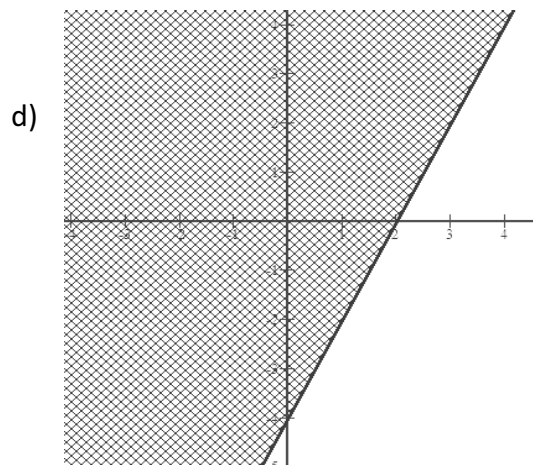
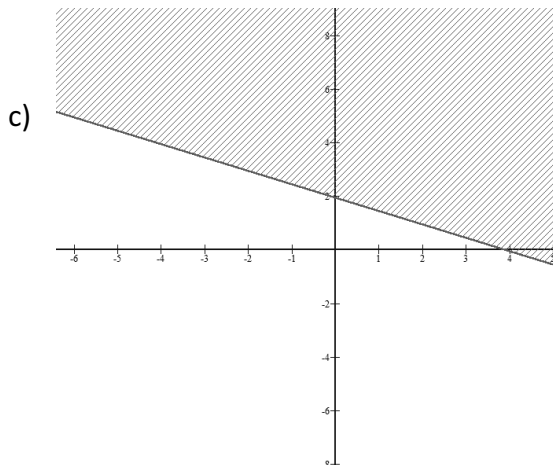
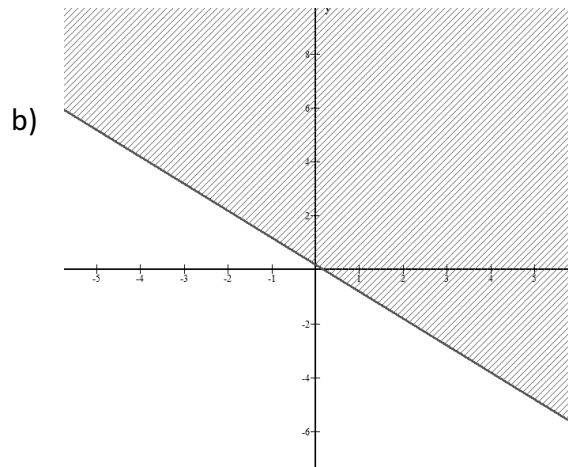
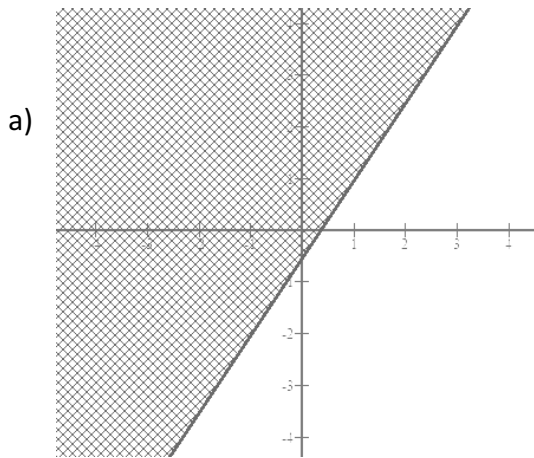
7. Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

a) $3x - 2y \leq 1$

c) $\frac{x}{2} + y \geq 2$

b) $\frac{1-4x}{4} < y$

d) $2x - y \leq 4$



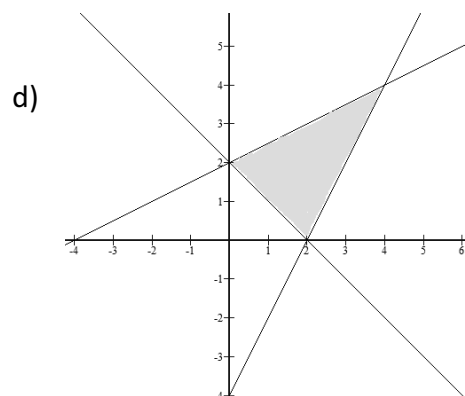
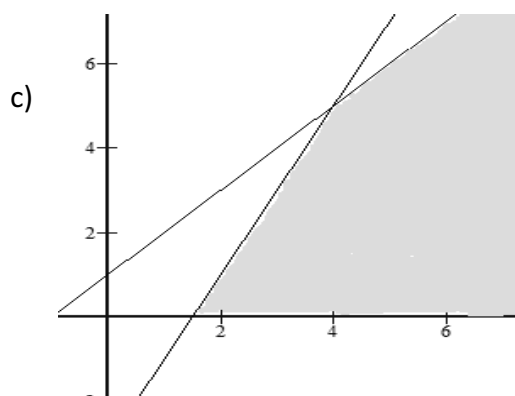
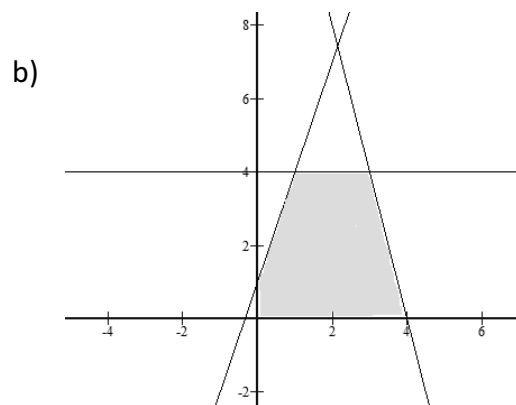
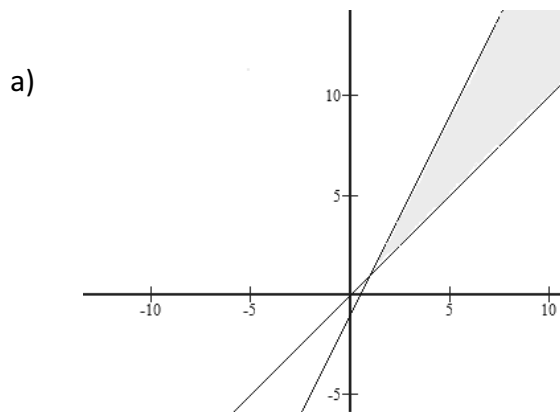
8. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

a)
$$\begin{cases} 2x - y > 1 \\ x \leq y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y - x \leq 1 \\ y - 2x \leq -3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -3x + y \leq 1 \\ 4x + y \leq 16 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ \frac{x}{2} \geq y - 2 \end{cases}$$



TEMA 6 - PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x - 4}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2 + x - 12}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 1}$

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

e) $f(x) = \sqrt{x-8}$

j) $f(x) = \frac{x+2}{1-\sqrt{1-x}}$

Solución. a) $R - \{-1, 1\}$; b) $R - \{-1, 4\}$; c) R ; d) $R - \{1\}$; e) $[8, \infty)$;
 f) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; g) $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$; h) $[-7, \infty) - \{-4, 3\}$; i) $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$; j) $(-\infty, 1] - \{0\}$

2. Calcula la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^3 - 4}$

b) $f(x) = 2x^3 + x$

f) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

g) $f(x) = \frac{4x+1}{x^2+2}$

d) $f(x) = \frac{x^4 - 2}{-3x}$

h) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + 1}$

Solución. a) F. par; b) F. impar; c) No tiene; d) F. Impar; e) No tiene; f) F. par; g) No tiene; h) No tiene

3. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

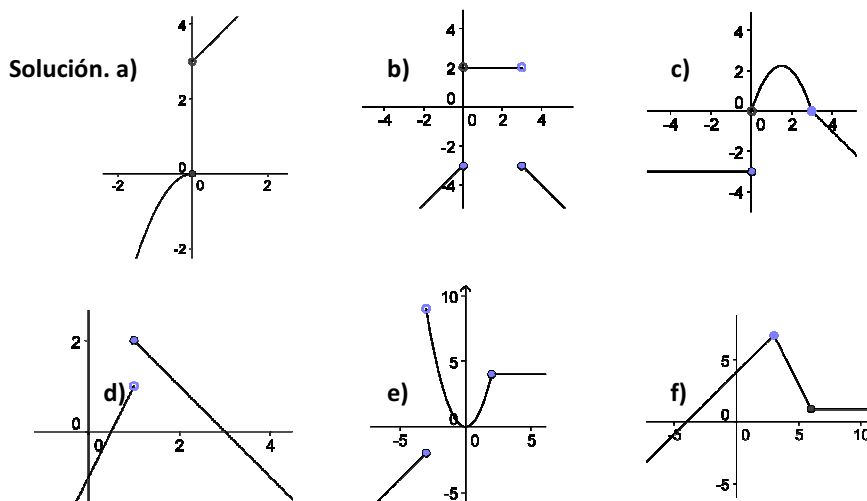
$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 3x & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 3 \\ 7-2(x-3) & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



4. Calcula el signo de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\text{c) } f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

$$\text{b) } f(x) = -x^2 + 4x - 4$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución. a) Es positiva en: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$; **b)** Siempre negativa;
c) Es positiva en: $(-1, 5)$; **d)** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; **e)** Es positiva en: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

TEMA 7 - LÍMITES

HOJA 1

1. Calcula los siguientes límites

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución: 2

$$b. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Solución: No existe límite

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 4x^2 + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: 3 y No existe límite

$$d. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Solución: 2

2. Resuelve los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2} =$$

Solución: 1

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} =$$

Solución: ∞

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 7x + 8}{3x^6 - 5x^2 - 6x} =$$

Solución: 0

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3} =$$

Solución: 0

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + x - 7} =$$

Solución: ∞

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 8}{-2x^3 + 3x^2 - 1} =$$

Solución: -2

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2 - 5x + 1}{x^2 + 7}} =$$

Solución: 3

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 - x + 2}{-3x^2 - 2x} =$$

Solución: 2

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - x} =$$

Solución: -4

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

Solución: 2

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + 1} =$$

Solución: 1

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$$

Solución: 3/2

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^2 - 1}{x^2} =$$

Solución: 2

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} =$$

Solución: 1/4

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{x} \right) =$$

Solución: 5

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} =$$

Solución: 1/3

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}} =$$

Solución: -2

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x =$$

Solución: 1/2

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x =$$

Solución: 0

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9x^2 + 3} - 3x =$$

Solución: 0

$$21. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} \right) =$$

Solución: -1/2

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x-1} =$$

Solución: No existe límite

$$23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{(x-2)^2} =$$

Solución: ∞

$$24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+1} =$$

Solución: No existe límite

$$25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} =$$

Solución: $-\infty$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+1} =$$

Solución: 1

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2-3} \right) =$$

Solución: 1

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{8x^3-2}} =$$

Solución: 1/2

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^2+1}} =$$

Solución: 0

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} =$$

Solución: No existe límite

3. Halla las asíntotas de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$
Soluc.: A.V: $x = -2$
A.H: $y = -3$

b. $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$
Soluc.: A.H: $y = 0$

c. $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$
Soluc.: A.V: $x = -1$
A.O: $y = x - 1$

d. $f(x) = \frac{4x^2+1}{2x+2}$
Soluc.: A.V: $x = -1$
A.O: $y = 2x - 2$

TEMA 7 - LÍMITES

HOJA 2

1. Calcula los siguientes límites

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: No existe límite

$$b. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Solución: 0

$$c. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución: 2

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{si } f(x) \begin{cases} e^{2x} + x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: 1

2. Resuelve los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x^2 + 3x + 8}{3x^3 - x^2 - 2} =$$

Solución: 2

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{2x^2 - 1} =$$

Solución: ∞

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 + x} =$$

Solución: 0

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{4x^3 - x^2 - 2x} =$$

Solución: 1/2

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{4x^4 + x^3 - x^2}} =$$

Solución: 1

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 2x - 3}}{2x^2 - 2} =$$

Solución: 1

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5}} =$$

Solución: 2

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x-1} - \frac{x^2 + 2}{x+1} =$$

Solución: ∞

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 - 3x} =$$

Solución: 1/2

$$10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} =$$

Solución: -2

$$11. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6} =$$

Solución: 4/5

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{(x - 1)^2} =$$

Solución: ∞

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 5} - \sqrt{x} =$$

Solución: 0

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{(x^2 - 4)^2} =$$

Solución: $-\infty$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{3x} =$$

Solución: ∞

$$18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} =$$

Solución: 4

$$14. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{x - 4} =$$

Solución: No existe límite

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{x^2} - 1} =$$

Solución: 6

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x^2 - 4} =$$

Solución: No existe límite

$$20. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} =$$

Solución: -2/3

3. Halla las asíntotas de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{x + 2}{2x + 2}$
Soluc.: A.V: $x = -1$
A.H: $y = 1/2$

c. $f(x) = \frac{2x^4 + x - 2}{x^2 + x - 2}$
Soluc.: A.V: $x = 1$; $x = -2$

b. $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 4}$
Soluc.: No tiene asíntotas

d. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$
Soluc.: A.V: $x = 2$
A.O: $y = x + 2$



1. Comprueba si son continuas las siguientes funciones

$$a. f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f. f(x) \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$b. f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$g. f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c. f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$h. f(x) \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$d. f(x) \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -3 \\ -2 & \text{si } x = -3 \\ x^2 - 11 & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

$$i. f(x) \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$e. f(x) \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$j. f(x) \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución: a), d), e), h), j) son continuas y b), c), f), g), i) no son continuas

2. Halla los valores de k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a. f(x) \begin{cases} kx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soluc.: k = 1

$$c. f(x) \begin{cases} 2k + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 3x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soluc.: k = -7/2

$$b. f(x) \begin{cases} kx^2 + k & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soluc.: k = 3

$$d. f(x) \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ (k+1)x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soluc.: k = 2

3. Halla los valores de a y b para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a. f(x) \begin{cases} x + a & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soluc.: a = -2 y b = 3/2

$$b. f(x) \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2ax & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Soluc.: $a = 1$ y $b = 2$

4. Estudia el tipo de discontinuidad que encontramos en cada una de estas funciones

a. $f(x) \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soluc.: Disc. esencial de 1ª especie o salto finito en $x = 0$

d. $f(x) \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Soluc.: Disc. de 2ª especie en $x = 0$ y de 1ª especie o salto finito en $x = 1$

b. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Soluc.: Disc. evitable en $x = 0$

e. $f(x) \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soluc.: Disc. evitable en $x = 0$

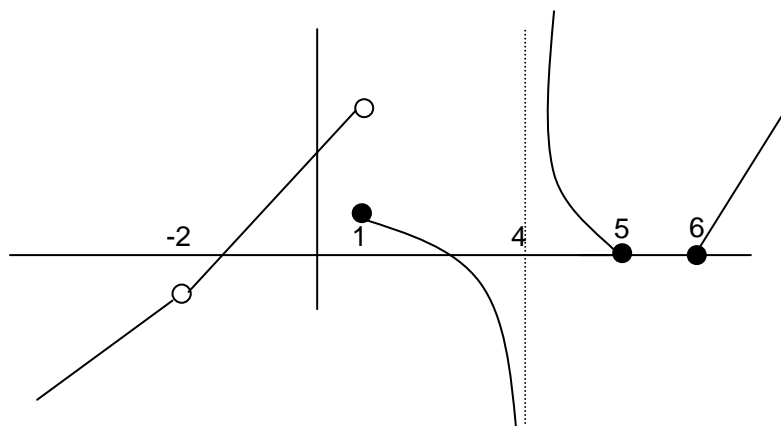
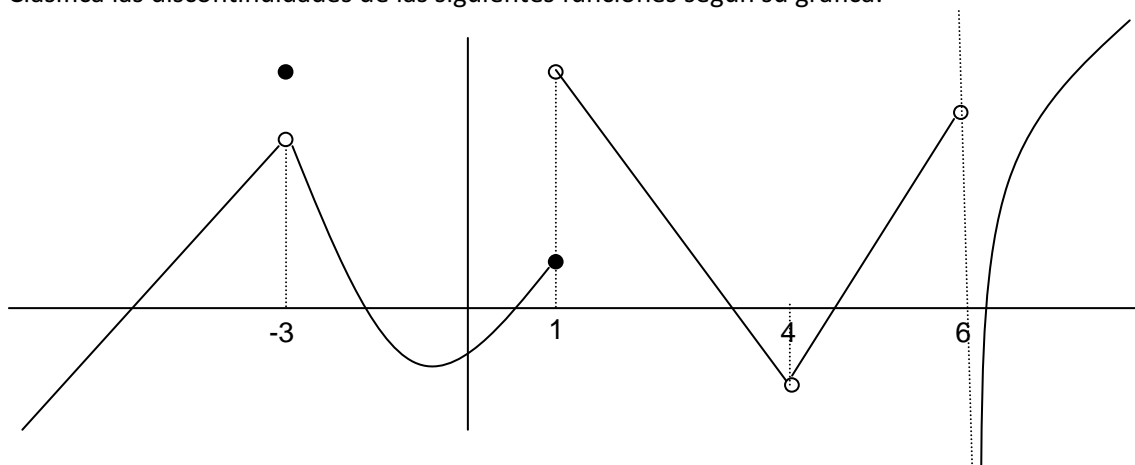
c. $f(x) \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soluc.: Disc. esencial de 2ª especie en $x = 0$

f. $f(x) \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Soluc.: Disc. esencial de 2ª especie en $x = 1$

5. Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones según su gráfica:



1. Comprueba si son continuas las siguientes funciones

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } f(x) \begin{cases} e^{x^2} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} & \text{f. } f(x) \begin{cases} \frac{x^2 + 2}{x} & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x = -1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \\
 \text{b. } f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{g. } f(x) \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \text{c. } f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases} & \text{h. } f(x) \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \\
 \text{d. } f(x) \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x - 2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -2x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{i. } f(x) \begin{cases} 3x^3 - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases} \\
 \text{e. } f(x) \begin{cases} 3x + 8 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > -2 \end{cases} & \text{j. } f(x) \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}
 \end{array}$$

Solución: a), d), e), h), i), j) son continuas y b), c), f), g), no son continuas

2. Halla los valores de k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } f(x) \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 4 & \text{si } x < 0 \end{cases} & \text{b. } f(x) \begin{cases} x^2 + 3mx & \text{si } x \leq 1 \\ 4x + m & \text{si } x > 1 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluc.: k = -5

Soluc.: m = 3/2

3. Halla los valores de a y b para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } f(x) \begin{cases} 2ax - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ bx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{b. } f(x) \begin{cases} x^2 + 2ax & \text{si } x < 1 \\ bx & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ ax^2 & \text{si } x > 3 \end{cases} \\
 \text{Soluc. : } a = -3/2 \text{ y } b = 0 & \text{Soluc. : } a = 1 \text{ y } b = 3
 \end{array}$$

4. Estudia el tipo de discontinuidad que encontramos en cada una de estas funciones

$$a. f(x) \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ 3x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soluc.: Disc. esencial de 1ª especie o salto finito en $x = -2$

$$b. f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Soluc.: Disc. evitable en $x = -1$

$$c. f(x) \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soluc.: Disc. esencial de 2ª especie o salto infinito en $x = 1$

$$d. f(x) = \frac{2}{x-2}$$

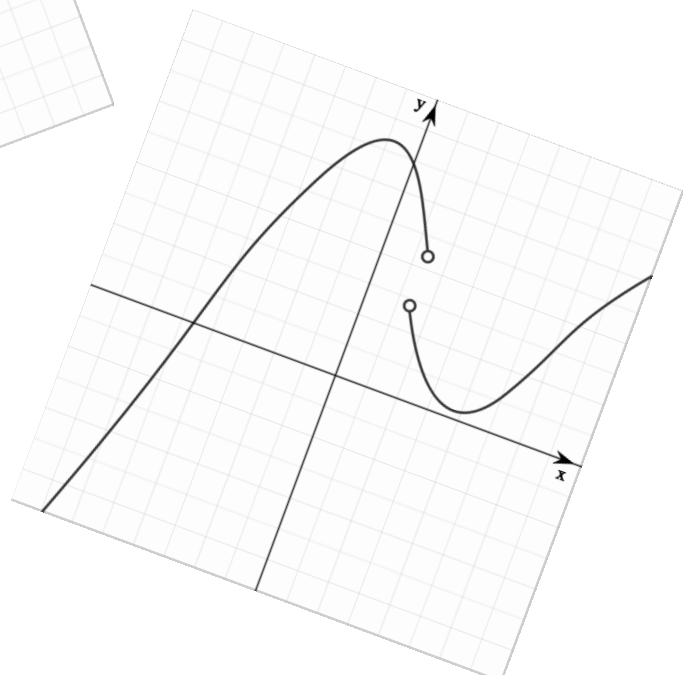
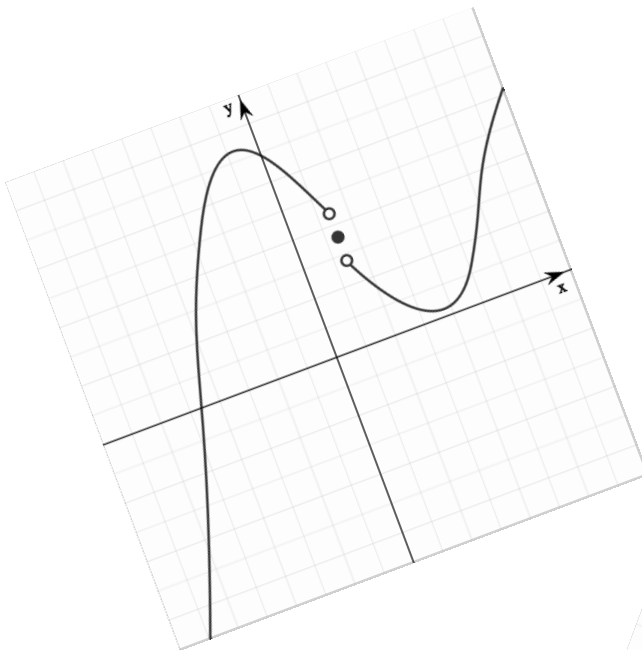
Soluc.: Disc. de 2ª especie en $x = 2$

$$e. f(x) \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x = 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soluc.: Disc. evitable en $x = 2$

$$f. f(x) \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x+2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Soluc.: Disc. esencial de 1ª especie o salto finito en $x = -1$



Deriva las siguientes funciones:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $y = \sqrt{2x+3}$ | 2. $y = (x^2 - 3x + 2)^4$ | 3. $y = (2x^2 + 3)(3x - 4)$ |
| 4. $y = \frac{5x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1}$ | 5. $y = \sqrt[3]{(3x^2 + 2x)^2}$ | 6. $y = \text{Ln}(3x^4 - 5x + 6)$ |
| 7. $y = e^{5x^2+7}$ | 8. $y = a^{\frac{2x+1}{x}}$ | 9. $y = \text{sen}(3x^2 + 5x - 1)$ |
| 10. $y = \cos\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)$ | 11. $y = \text{tag}\sqrt{x+2}$ | 12. $y = \text{sen } x^3$ |
| 13. $y = (\text{sen } x)^3$ | 14. $y = (x + x^2)^4(x - 3)^2$ | 15. $y = \text{sen}^2 2x + \cos^3 3x$ |
| 16. $y = \frac{x^2 + \text{sen } x}{x + \cos x}$ | 17. $y = \text{Ln}\left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right)$ | 18. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| 19. $y = \text{Ln}(\cos(x^2 + 3x - 1))$ | 20. $y = (\text{sen } 3x)^{\frac{1}{2}}$ | 21. $y = \text{sen}(\text{sen } 2x)$ |
| 22. $y = \text{sen}(\text{Ln}(3x + 5))$ | 23. $y = \text{sen}\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)$ | 24. $y = \text{sen}(\text{tag } \sqrt{x})$ |
| 25. $y = \text{sen } x \cdot e^x$ | 26. $y = \cos^2 3x \cdot e^{x^2}$ | 27. $y = \frac{2}{x^3}$ |
| 28. $y = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$ | 29. $y = \frac{1}{e^x}$ | 30. $y = \text{tag}(2x + 3)$ |

1. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 7x + 2$ en el punto $x = 0$

Solución: $y = 7x + 2$

2. Halla la ecuación de la recta tangente de $y = 2x^2 - 5x - 4$ y cuya pendiente es igual a 3.

Solución: $y = 3x - 12$

3. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^2 + 5x$ y que sea paralela a la recta de ecuación $y = -3x + 2$

Solución: $y = -3x - 4$

4. Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones:

- | | | |
|----------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $f(x) = 3x^7$ | b. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ | c. $f(x) = 4e^{x^2}$ |
| d. $f(x) = 4\cos 3x$ | e. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ | f. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ |

Solución: a) $126x^5$; **b)** $2/x^3$; **c)** $e^{x^2} \cdot (16x^2 + 8)$; **d)** $-36 \cos(3x)$; **e)** $6/(x+1)^3$; **f)** $(6x^2 - 6)/(x^2 + 3)^3$

5. Calcula el máximo y mínimo de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ c. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$
 d. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ e. $f(x) = 4 + 3x - x^3$ f. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

Solución: a) $m(-3/2, -1/4)$; b) No tiene; c) $M(1, 8), m(3, 4)$
 d) $M(1, 1)$; e) $M(1, 6); m(-1, 2)$; f) $M(0, -3/4)$

6. Resuelve por la regla de L'Hopital los siguientes límites

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - x + 5}{4x^4 - x^2 + x + 2} =$ d. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x + 7}{2x^2 - 2} =$

Solución: 0

Solución: -11/4

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 8}{-2x^3 + 3x^2 - 1} =$ e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} =$

Solución: -2

Solución: 1

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$ f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x^2 - 2x} =$

Solución: 2

Solución: -1/2

7. Halla la función $f(x) = ax^2 + bx + 2$, sabiendo que tiene un mínimo en el punto (1,-3)

Solución: $a = 5$ y $b = -10$

8. Halla la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por el punto (0,4) y tiene un máximo en el punto (-1,-2)

Solución: $a = 6$; $b = 12$ y $c = 4$

9. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) \begin{cases} -4x - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ c. $f(x) \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Solución: Continua y derivable

Solución: Continua y no derivable

b. $f(x) \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x = 2 \\ 4x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ d. $f(x) \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solución: Continua y derivable

Solución: No continua

10. Calcula el valor de a y b para que las siguientes funciones sean continuas y derivables:

a. $f(x) \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **Solución:** $a=2$ y $b=-1$

b. $f(x) \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **Solución:** $a=3$ y $b=-3$

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = (\sqrt{x} + 1)^4$

2. $y = (3x + 2)^7$

3. $y = \sqrt[3]{3x^2 - 9}$

4. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$

5. $y = (1 + 4x)^3 \cdot (1 + 2x^2)$

6. $y = \sqrt{x^2 + 4}$

7. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

8. $y = \frac{e^{2x}}{\cos 2x}$

9. $y = \frac{x+3}{x+2}$

10. $y = \sqrt{\tan x}$

11. $y = (x^2 + 2) \cdot e^x$

12. $y = \frac{-e^{\tan x}}{2}$

13. $y = \frac{x^2}{\sin^2 x}$

14. $y = \ln^3 x$

15. $y = \frac{\sin x}{2 \cdot \cos^2 x}$

16. $y = e^{4x+5}$

17. $y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

18. $y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

19. $y = (\cos x^2)^2 \cdot e^{3x+2}$

20. $y = \sin\left(\frac{x^3+1}{x}\right)$

21. $y = (\sin 5x^2)^{\frac{1}{3}}$

22. $y = \frac{1 + \sin x}{x + \cos x}$

23. $y = \frac{4}{2x^5}$

24. $y = \sin(3x^2 + 5)$

25. $y = \cos(\ln(x^3 + 1))$

26. $y = \ln(\sin(2x^2 + 4))$

27. $y = \cos(\sin(\sqrt{x}))$

28. $y = \tan(\cos 2x + 3)$

29. $y = \cos x^3 \cdot \ln x^2$

30. $y = x^3 \cdot \ln x$

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 3x - 3$ en el punto $x = 3$

Solución: $y = -3x + 6$

2. Calcula la ecuación de la recta tangente de $y = x^2 - 4x + 1$ y cuya pendiente es igual a 2.

Solución: $y = 2x - 8$

3. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ y que tengan una pendiente igual a 3.

Solución: $y = 3x - 1$; $y = 3x + 37/27$

4. Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^5$

b. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

c. $f(x) = 3 \sin 3x$

Solución: a) $f''(x) = 80x^3$; b) $f''(x) = -6x^2/(x^2 + 1)^4$; c) $f''(x) = -27 \sin(3x)$

5. Calcula el máximo y mínimo de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 + 6x + 2$

b. $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$

c. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

d. $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$

e. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

f. $f(x) = -3x^3 + 3x$

Solución: a) $m(3, -7)$; b) $M(1, 4)$; c) $M(-1, 3), m(1, 0)$
d) No tiene; e) $M(-1, -2); m(1, 2)$; f) $M(1, 1), m(-1, -1)$

6. Resuelve por la regla de L'Hopital los siguientes límites

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} =$

Solución: 7

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln e^x - x}{x^2 - 1} =$

Solución: 0

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x} =$

Solución: ∞

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} =$

Solución: $-1/6$

7. Hallar a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax + b$, tenga un mínimo en el punto (1,1)

Solución: $a = -3$ y $b = 3$

8. Halla una función polinómica de grado 3, sabiendo que tiene un extremo relativo en (0, 1) y un punto de inflexión en (1, -1).

Solución: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

9. Halla una función polinómica de 2º grado sabiendo que pasa por el punto P(0, 1) y que la pendiente de la recta tangente a f(x) en Q(2, -1) vale 0.

Solución: $f(x) = 1/2x^2 - 2x + 1$

10. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución: Continua y derivable

b. $f(x) \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Solución: No continua

c. $f(x) \begin{cases} -5x^2 + 5x & \text{si } x < 1 \\ -5x + 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución: Continua y derivable

d. $f(x) \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Solución: Continua y no derivable

11. Calcula el valor de a y b para que las siguientes funciones sean continuas y derivables:

a. $f(x) \begin{cases} ax^2 + 2bx + 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

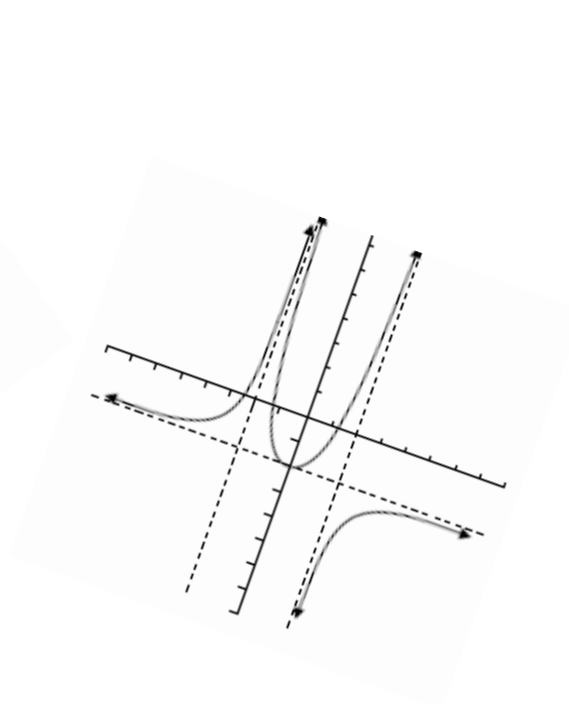
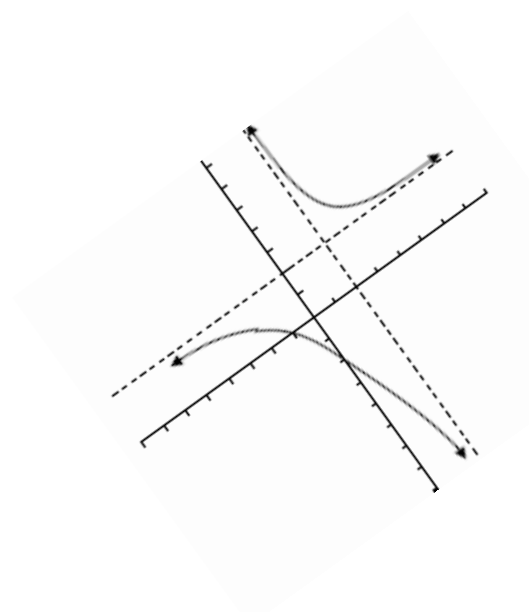
Solución: $a=2/3$ y $b=-2$

b. $f(x) \begin{cases} 3ax^2 + 2bx & \text{si } x \leq 2 \\ (a+1)x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$

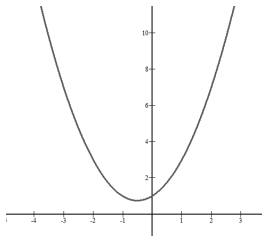
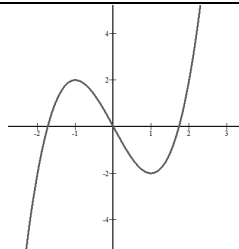
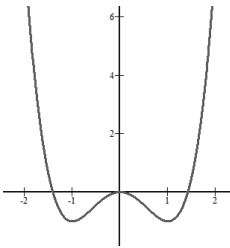
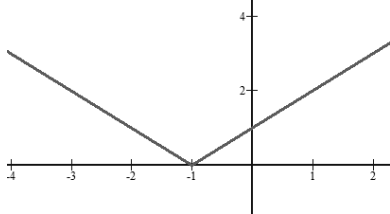
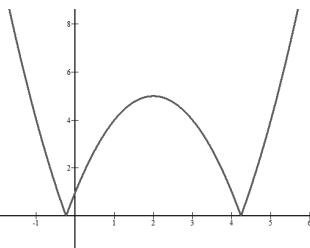
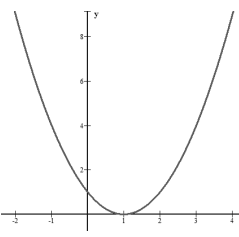
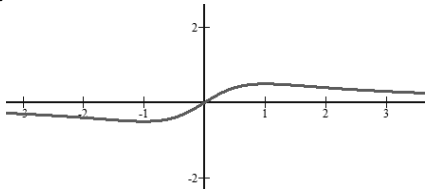
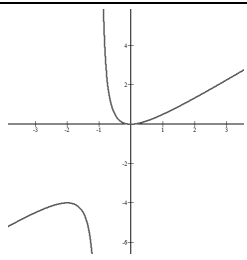
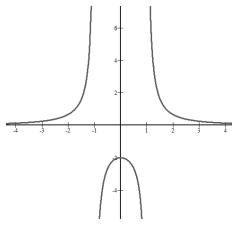
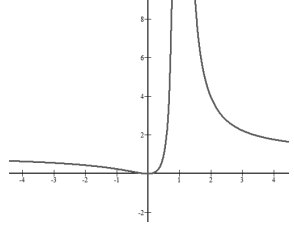
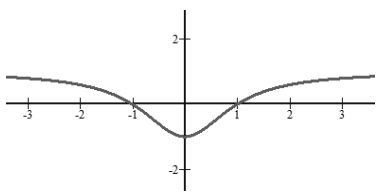
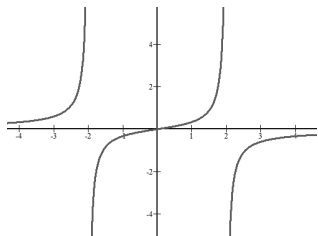
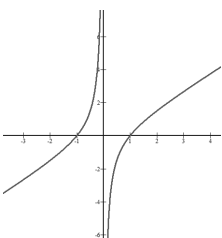
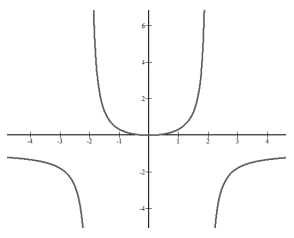
Solución: $a = -1/13$ y $b=12/13$

TEMA 9 - REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

1. $f(x) = x^2 + x + 1$	2. $f(x) = x^3 - 3x$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$	4. $f(x) = x+1 $
5. $f(x) = -x^2 + 4x + 1 $	6. $f(x) = x^2 + 2x - 1 $
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	8. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
9. $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$	10. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$
11. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	12. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
13. $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$	14. $f(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$



SOLUCIÓN REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

<p>1.</p> 	<p>2.</p> 
<p>3.</p> 	<p>4.</p> 
<p>5.</p> 	<p>6.</p> 
<p>7.</p> 	<p>8.</p> 
<p>9.</p> 	<p>10.</p> 
<p>11.</p> 	<p>12.</p> 
<p>13.</p> 	<p>14.</p> 

TEMA 10 - COMBINATORIA

HOJA 1

1. ¿Cuántas banderas distintas de tres franjas puedo formar con los siete colores del arco iris?

Solución: 210 banderas

2. Se lanzan tres dados. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

Solución: 216 resultados

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$

Solución: $x = 7$

b. $V_{x,5} = 6 \cdot V_{x,3}$

Solución: $x = 6$

c. $P_x = 42 \cdot p_{x-2}$

Solución: $x = 7$

4. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar con las cinco vocales de manera que no se puedan repetir?

Dibuja un diagrama en árbol.

Solución: 20 parejas

5. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar con las cinco vocales de manera que se puedan repetir?

Dibuja un diagrama en árbol.

Solución: 25 parejas

6. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club de baloncesto sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

Solución: 1.320 posibilidades

7. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras pares 2, 4, 6, 8 sin que se repita ninguna? ¿Cuántos terminan en 64? ¿Cuántos habrá que sean mayores de 500?

Solución: 24 números. Dos terminan en 64. 12 números mayores que 500

8. ¿De cuántas formas se pueden colocar 10 cantores de un coro si dos de ellos tienen que estar siempre en los extremos?

Solución: 80.640

9. Consideramos escritas en orden alfabético las permutaciones de las letras a, b, c, d y e. ¿Qué lugar ocupa la permutación "bdace"? ¿Cuál es la permutación que ocupa el lugar 50?

Solución: 120 permutaciones. "bdace" ocupa el lugar 37. El lugar 50 lo ocupa "cabed"

10. Permutando de todos los modos posibles las cifras del número 111 223 ¿cuántos números resultan?

Solución: 60 números

11. A una reunión acuden 30 personas. Se decide constituir comisiones de seis personas para estudiar un cierto plan. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

Solución: 593.775 comisiones

12. ¿Cuántas jugadas diferentes se pueden obtener si se sacan 8 cartas de una baraja de 40 cartas?

Solución: 76.904.685 jugadas

TEMA 10 - COMBINATORIA

HOJA 2

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 discos en un estante?
Solución: 720
2. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse, tengan o no sentido, usando las letras de la palabra CUADERNO?
Solución: 6.720
3. ¿Cuántas palabras pueden formarse, tengan o no sentido, usando todas las letras de la palabra CUADERNO?
Solución: 40.320
4. ¿Cuál es el número total de palabras que pueden formarse con las letras de MATEMATICA?
Solución: 151.200
5. En un edificio en el que viven 25 personas adultas hay que formar una comisión interna de 3 personas. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?
Solución: 2.300
6. ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 6 puntos, tales que no haya 3 alineados?
Solución: 20
7. Un estudiante para aprobar un examen que consta de 10 preguntas, debe contestar 7 de ellas. ¿De cuántas maneras puede hacer la selección para aprobar el examen?
Solución: 120
8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los dígitos del 1 al 9?
Solución: 3.024
9. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en una fila?
Solución: 120
10. Calcula el número de quinielas de fútbol que hay que hacer para acertar 14 con seguridad.
Solución: 4.782.969
11. ¿De cuántas maneras se pueden extraer tres cartas de un conjunto de cuarenta?
Solución: 9.880
12. Con las cifras 0, 1, 2, 3 y 4, ¿cuántos números de cinco cifras pueden escribirse?
Solución: 96
13. Dado el conjunto $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, ¿cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar? ¿Cuántos de ellos son pares?
Solución: 720 y 360

TEMA 10 - COMBINATORIA

HOJA 3

1. ¿Cuántas letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos podría tener el alfabeto Morse?

Solución: 10 letras

2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra AMASAS?

Solución: 60

3. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Solución: 2880

4. Se tienen 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca, y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos; entre los siete dados, suponiendo que no existan razones para preferir alguno.

Solución: 210

5. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegir las 4 primeras son obligatorias?

Solución: 120 y 20 maneras.

6. En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras y los tres últimos son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras, ¿cuántas historias clínicas podrán hacerse si no hay restricciones sobre letras y números?

Solución: 625.000

7. ¿Cuántos números mayores que un millón pueden escribirse con las cifras 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4?

Solución: 360

8. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 7 comensales a una mesa redonda con la condición de que dos de ellos estén siempre juntos?

Solución: 720

9. ¿Cuántos números de tres cifras no repetidas se pueden formar con las nueve cifras significativas?

Solución: 504

10. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con 7 puntos del plano, con la condición que tres de ellos nunca estén alineados?

Solución: 35

11. Con las letras de la palabra EUROPA, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden formarse que empiecen y terminen por consonante? ¿Cuántas que empiecen y terminen por vocal?

Solución: a) 48; b) 288

12. Se lanzan tres dados de distintos colores una vez, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?

Solución: 216

TEMA 11 - 12 - PROBABILIDAD

HOJA 1

1. Tenemos los siguientes sucesos: $A = \{2,5,6\}$; $B = \{1,3,4,5\}$; $C = \{4,5,6\}$. Calcular:

- | | | | |
|---------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a. $A \cup B$ | d. $A \cup (B \cap C)$ | g. $\overline{A \cap B}$ | j. $A \cap (B \cup \overline{C})$ |
| b. $A \cap C$ | e. $\overline{A \cup B}$ | h. $\overline{A} \cup \overline{B}$ | k. $\overline{A} \cap (B \cap C)$ |
| c. $B \cup C$ | f. $\overline{A} \cap \overline{B}$ | i. $A \cup (B \cap \overline{C})$ | l. $(\overline{A \cap B}) \cap C$ |

2. Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?

- Que salga la sota de bastos o el rey de espadas.
- Que salga un oro o una figura.
- Que salga un oro o un no oro.
- Que salga una figura o una no figura.

Solución: a) 1/40; b) 1/4 y 3/10; c) 1/4 y 3/4; d) 3/10 y 7/10

3. Se lanzan dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:

- Obtener dos caras.
- Obtener dos cruces.
- Obtener al menos una cara.

Solución: a) 1/4; b) 1/4; c) 3/4

4. Se lanzan al aire tres monedas. Determinar la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.

Solución: 1/2

5. Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es directamente proporcional a los números de estas. Se pide:

- La probabilidad de cada una de las caras.
- La probabilidad de sacar un número par.

Solución: a) 1/21, 2/21, ..., 6/21; b) 12/21

6. Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es inversamente proporcional a los números de estas. Se pide:

- La probabilidad de cada una de las caras.
- La probabilidad de sacar un número múltiplo de 3.

Solución: a) 60/147, ...; b) 30/147

7. A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar puedan entenderse sin intérpretes?

Solución: 75/99

8. En el banquete de boda se sientan en la mesa presidencial 10 personas al azar, entre ellas los novios. Hallar la probabilidad de que los novios estén juntos.

Solución: 0,2

9. Lanzamos un dado. Consideremos los siguientes sucesos: A = Salir impar y B = Salir primo. Calcula la probabilidad de la unión y la intersección de los sucesos A y B.

Solución: 2/3 y 1/3

TEMA 11 - 12 - PROBABILIDAD

HOJA 2

1. Sean los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio tales que $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/3$ y $p(A \cap B) = 1/4$. Hallar $p(A/B)$ y $p(B/A)$.

Solución: a) 3/4; b) 1/2

2. Consideremos los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio tales que $p(A) = 3/8$, $p(B) = 5/8$ y $p(A \cup B) = 3/4$. Hallar $p(A/B)$ y $p(B/A)$.

Solución: a) 2/5; b) 2/3

3. Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $p(A) = 0,6$ y $p(B) = 0,3$. Hallar la probabilidad del suceso intersección de A y B.

Solución: 0,18

4. En el colegio Los Peñascales los alumnos de 1º de Bachillerato pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución: 0,69 (69%)

5. De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas. Calcular la probabilidad de que:
- Las dos sean copas.
 - Al menos una sea copas.
 - Una sea copas y la otra espadas.

Solución: a) 0,059; b) 0,441, c) 0,128

6. Una urna contiene tres bolas rojas y dos verdes, y otra contiene dos bolas rojas y tres verdes. Se toma al azar una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color? ¿Y la de que sean de distinto color?

Solución: a) 0,48; b) 0,52

7. Ante un examen, un alumno solo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Este se realiza extrayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

Solución: 0,85

8. En dos urnas, A y B, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también al azar una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A, si la bola escogida resultó ser blanca?

Solución: 8/11

9. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:
- Probabilidad de que la segunda bola sea verde.
 - Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Solución: a) 0,58; b) 0,41

TEMA 11 - 12 - PROBABILIDAD

HOJA 3

1. Se extraen tres cartas a la vez de una baraja española de 40 cartas. Calcular las probabilidades de: a) Que sean las tres del mismo palo, b) Que salga un as al menos, c) que ninguna sea oros.

Solución: a) 0,048; b) 0,28; c) 0,41

2. Cuatro equipos llegan a semifinales en un campeonato. Los dos primeros tienen el doble de probabilidad de ganar el campeonato que los dos últimos, y los dos primeros la misma probabilidad, así como los dos últimos. Calcular la probabilidad de que gane el campeonato uno de los que más probabilidades tiene de ganar.

Solución: 1/3

3. En una urna hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. Se saca una bola de la urna y se reemplaza por otra del otro color. Se extrae una segunda bola. Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

Solución: 0,59

4. En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, y sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola que resulta negra. Calcular la probabilidad de que la primera bola sea negra también.

Solución: 1/6

5. Una leyenda cuenta que a los condenados a muerte se les concedía la gracia de perdonarles si sacaban una bola blanca en el siguiente sorteo: se ponían 50 bolas blancas en una urna y 50 bolas negras en otra. En una ocasión un reo pidió que las bolas se distribuyeran del siguiente modo: una bola blanca en una urna, y en la otra las 49 blancas restantes y las 50 negras. ¿Cuál es la probabilidad de salvar de esta segunda forma la vida? ¿Tiene mayor probabilidad ahora que antes?

Solución: a) 74/99 b) Sí

6. Un sistema mecánico está formado por tres máquinas. El funcionamiento de cada máquina es independiente de las restantes. La probabilidad de que funcione cada una de ellas es de $1/3$. Para que el sistema funcione bien tienen que funcionar simultáneamente las tres máquinas. Calcular la probabilidad de que no funcione el sistema.

Solución: 26/27

7. La probabilidad de que una bomba lanzada por un avión haga blanco en el objetivo es $1/3$. Hallar la probabilidad de alcanzar el objetivo si se tiran tres bombas seguidas.

Solución: 19/27

8. Disponemos de dos monedas: una correcta y otra con dos caras; y también una urna con 4 bolas blancas y 6 negras. Sacamos dos bolas (sin reemplazamiento), si son del mismo color, escogemos la moneda correcta y la lanzamos al aire. En otro caso, elegimos la incorrecta y la lanzamos al aire. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: a) Que las dos bolas sean del mismo color, b) Obtener cara en el lanzamiento de la moneda, c) Si el lanzamiento ha sido cruz, hallar la probabilidad de que las dos bolas elegidas sean de distinto color.

Solución: a) 7/15; b) 23/30; c) 0

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tal que: $p(A) = 3/8$, $p(B) = 1/2$ y $p(A \cap B) = 1/4$. Se pide:
- a) $P(A \cup B)$ b) $P(\bar{A})$ c) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ d) $P(\bar{B})$
e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ f) $P(A \cap \bar{B})$ g) $P(\bar{A} \cap B)$

Solución: a) 5/8; b) 5/8; c) 3/4; d) 1/2; e) 3/8; f) 1/8; g) 1/4

10. La probabilidad de que un hombre viva 20 años es $1/4$ y la de que su mujer viva 20 años es $1/3$. Se pide calcular la probabilidad: a) De que ambos vivan 20 años, b) De que el hombre viva 20 años y su mujer no, c) De que ambos mueran antes de los 20 años.

Solución: a) 1/12; b) 1/6; c) 1/2

11. Tenemos tres urnas idénticas. Dos de ellas contienen 8 bolas rojas y 2 bolas negras, y la tercera contiene 4 bolas rojas y 6 bolas negras. Se elige al azar una urna, de la que también al azar se extrae una bola que resulta ser negra. Hallar la probabilidad de que esa bola negra proceda de la tercera urna.

Solución: 3/5

12. Se lanza un dado dos veces consecutivas:

- a. Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea 4.
b. Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido 1, sabiendo que la suma de los resultados sea 4.

Solución: a) 1/12; b) 1/3

13. Una cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera es un tercio, si se elige una congresista al azar:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que desayune té?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

Solución: a) 9/32; b) 8/9; c) 7/23

14. La probabilidad de los tornillos que fabrica una determinada empresa sean defectuosos, es del 10%, pero que un tornillo sea defectuoso es independiente de que otro lo sea o no. Los tornillos se empaquetan en caja de 5 unidades. Calcula la probabilidad de que en una caja no haya ningún tornillo defectuoso.

Solución. 0,59

15. En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

- a. Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.
b. Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Solución. a) 1/30; b) 8/15

16. En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar. Se pide: a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?; b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

Solución: 3/4; 20/79