6

Semejanza

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y dibujar figuras semejantes.
- Aplicar los criterios de semejanza de triángulos.
- Demostrar y utilizar los teoremas del cateto y de la altura.
- Aplicar el teorema de Pitágoras generalizado.
- Calcular áreas y volúmenes de una figura a partir de otra semejante a ella.
- Calcular distancias en planos y mapas.
- Utilizar el teorema de Tales y la semejanza para resolver problemas de medidas.

Antes de empezar.

1.Semejanza .... pág. 92
Figuras semejantes
Teorema de Tales
Triángulos semejantes

2.Triángulos rectángulos. Teoremas .. pág. 96
Teorema del Cateto
Teorema de la altura
Teorema de Pitágoras generalizado

3.Razón de semejanza .... pág. 99
Razón de semejanza en longitudes
Razón de semejanza en áreas
Razón de semejanza en volúmenes

4.Aplicaciones .... pág. 102
Escalas
Medir distancias inaccesibles

Ejercicios para practicar

Para saber más

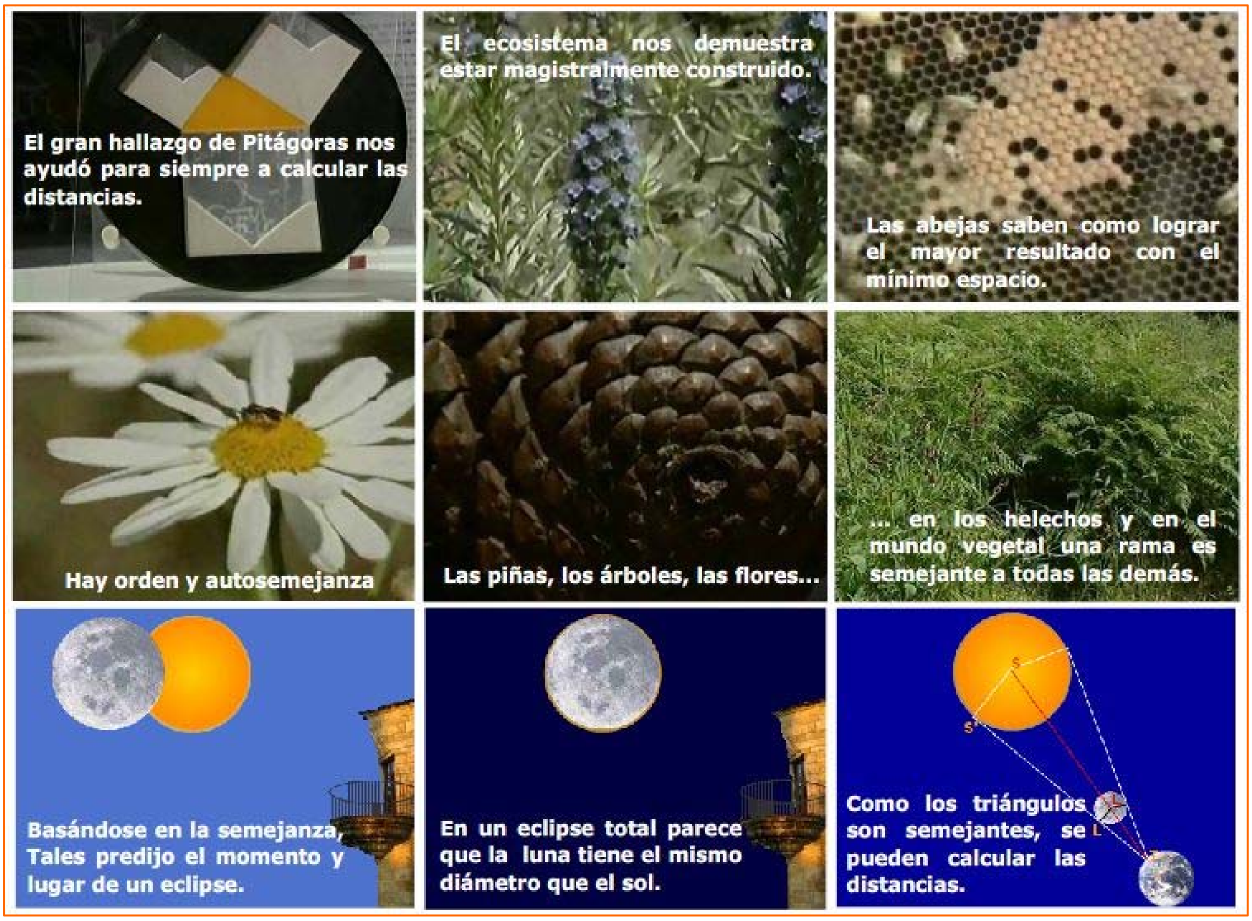
Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

ANEXO

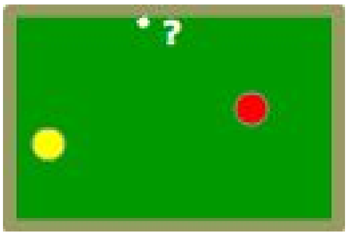
Antes de empezar



Investiga jugando

¿Cómo hacer carambola a una banda?

Si has jugado al billar, sabrás que hacer carambola a una banda significa que la bola lanzada debe dar una vez en el marco de la mesa antes de hacer carambola. Basta aplicar la semejanza para conseguirlo, ¿Cómo?



¿Hacia donde debemos dirigir la bola amarilla para que después de rebotar en la banda vaya a la bola roja?

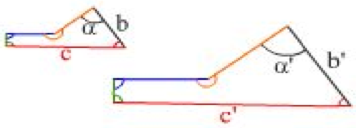
Recuerda

Antes de seguir adelante te conviene comprobar que recuerdas algo la proporcionalidad directa y algunas propiedades básicas de los triángulos.

1. Figuras semejantes

Las figuras semejantes son las que mediante el zoom (homotecias) y movimientos (giros, traslaciones y simetrías) pueden coincidir.

Un polígono está determinado por sus lados y ángulos, por tanto para que dos polígonos sean semejantes basta con que los **lados homólogos sean proporcionales** (con el zoom se multiplican todos los lados por el mismo número) **y sus ángulos iguales** (las homotecias, los giros, las traslaciones y simetrías no modifican los ángulos de las figuras).



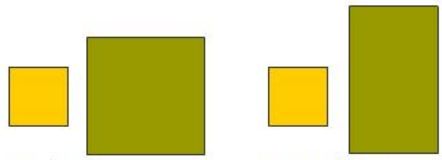
Los ángulos iguales

$\alpha = \alpha'$ ...

Los lados proporcionales

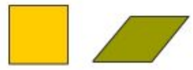
$b'/b = c'/c$ ...

Semejantes, con un giro, una homotecia, una simetría y una traslación pueden coincidir



Semejantes, ángulos iguales y lados proporcionales

No Semejantes, ángulos iguales pero lados no proporcionales



No semejantes, lados iguales, proporcionales pero ángulos distintos

Teorema de Tales

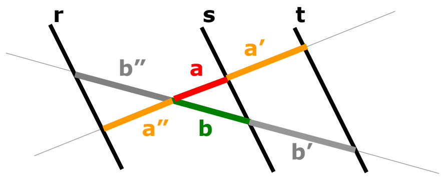
Para que dos polígonos sean semejantes se han de cumplir dos condiciones

1. Ángulos iguales
2. Lados proporcionales

Pero en los triángulos basta con que se de una condición.

El Teorema de Tales, demuestra que en **triángulos**

Ángulos iguales $\Rightarrow$ Lados proporcionales



r, s y t paralelas $\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''}$

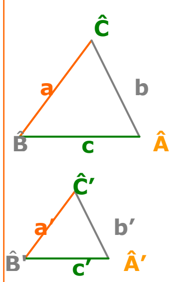
El teorema afirma que si dos rectas se cortan por paralelas, los segmentos que estas paralelas definen en las rectas guardan la misma proporción.

También se cumple el recíproco del Teorema de Tales,

Segmentos proporcionales $\Rightarrow$ paralelas.

Triángulos semejantes. Criterios

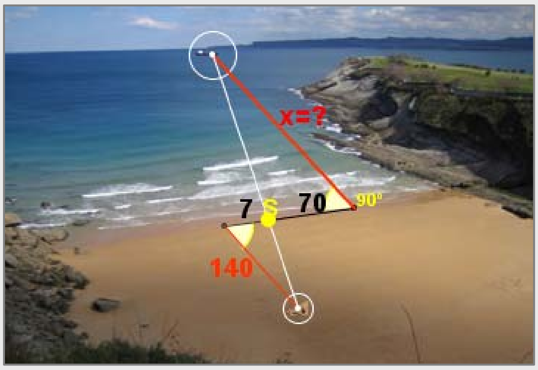
Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de los criterios de la derecha, llamados criterios de semejanza



1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

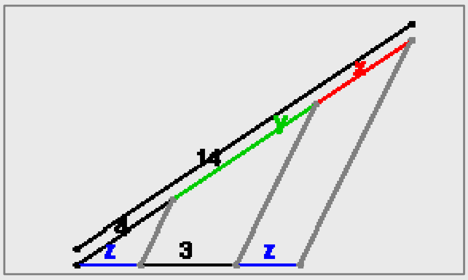
EJERCICIOS resueltos

1. Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.



$$\frac{x}{140}=\frac{70}{7}\Rightarrow x=\frac{70\cdot 140}{7}=1400\,\text{m}$$

2. Aplica el Teorema de Tales para calcular las medidas de x, y, z.



Calculamos x: $\frac{x}{z}=\frac{4}{z}\Rightarrow x=4$

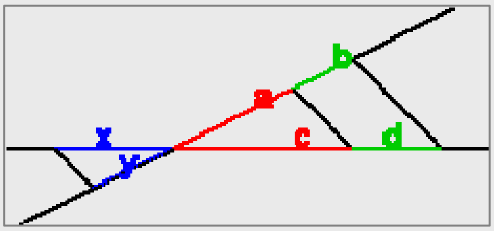
Hallamos y: $4+y+x=14$

Como $x=4$ resulta $y=6$

Y aplicando de nuevo el Teorema de Tales:

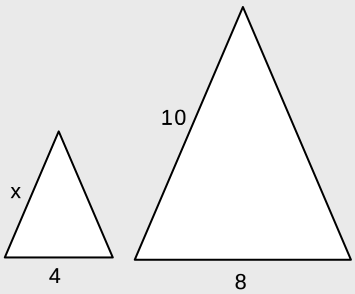
$$\frac{z}{4}=\frac{3}{y}\Rightarrow z=2$$

3. Observa las proporciones que se deducen del T. de Tales en la siguiente figura:



<u>Ciertas</u>	<u>No tienen por qué ser ciertas</u>
$y\cdot c=x\cdot a$	$y\cdot a=x\cdot c$
$\frac{a-y}{c-x}=\frac{b}{d}$	$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{d}$
$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$	$a=\frac{b}{d}$
$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}=\frac{c}{a}$
$\frac{b}{d}=\frac{y}{x}$	$\frac{b}{d}=\frac{x}{y}$

4. Los triángulos de la figura son semejantes, halla la medida del lado x

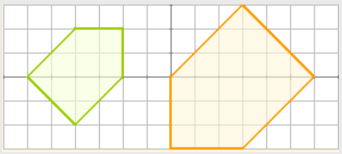


$$\frac{x}{4}=\frac{10}{8}\Rightarrow x=5$$

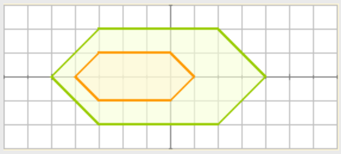
EJERCICIOS resueltos (continuación)

5. Contesta razonadamente:

a) ¿Son semejantes?



Sí, puesto que los lados están en proporción 2/3 y los ángulos son iguales.



No, los ángulos son iguales pero los lados no son proporcionales.

No, los ángulos no son iguales.

b) Un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 40º ¿es forzosamente semejante a un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 110º?

Sí, pues como los ángulos de un triángulo suman 180º, se concluye que los ángulos de los dos triángulos son iguales y por el criterio 1, son semejantes.

c) Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 9, 36 y 49 cm?

No, pues los lados no son proporcionales.

d) Un cuadrilátero de lados 3, 4, 5 y 6 cm ¿es necesariamente semejante a otro de lados 6, 8, 10 y 12 cm?

No, pues aunque los lados son proporcionales, en polígonos de más de tres lados esto no basta para que ocurra la semejanza, han de ser además los ángulos iguales.

e) Dos triángulos que tienen un ángulo de 20º y los lados que los forman en uno miden 6 y 15 cm, en otro, 4 y 10 cm ¿Son semejantes?

Sí, por el segundo criterio, ya que la proporción entre los lados que forman el ángulo igual es en ambos casos 2/5.

f) Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿son semejantes?

Sí, los ángulos son iguales, (nº de lados-2)180º/nº de lados, y los lados, proporcionales.

g) Los lados de dos triángulos miden 3, 6 y 7cm, en uno, y $\sqrt{18}$, $\frac{12}{\sqrt{2}}$ y $7\sqrt{2}$ en otro.

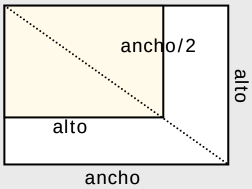
¿Son semejantes?

Sí, pues los lados son proporcionales: $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$; $\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

y en triángulos basta con esta condición (criterio 3)

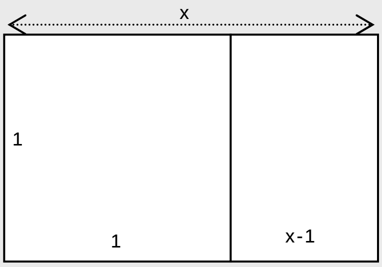
EJERCICIOS resueltos (continuación)

6. Al cortar a la mitad una hoja DIN-A, se obtiene una semejante. Deduce a partir de esto la proporción entre el ancho y el alto en estas hojas.



$$\frac{\text{alto}}{\frac{\text{ancho}}{2}} = \frac{\text{ancho}}{\text{alto}} \Rightarrow 2 = \left(\frac{\text{ancho}}{\text{alto}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\text{ancho}}{\text{alto}} = \sqrt{2}$$

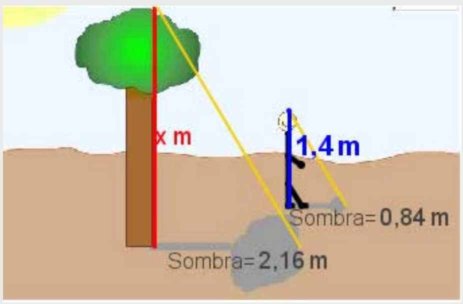
7. El rectángulo áureo que aparece en el Partenón y en la Gioconda, se caracteriza, porque al cortarle el cuadrado de lado su lado menor, se obtiene otro rectángulo semejante. Calcula la proporción entre sus longitudes.



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

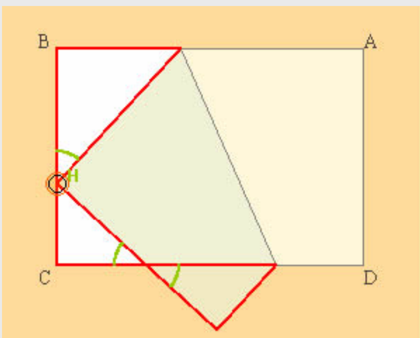
razón áurea: $\Phi \approx 1{,}62$

8. Halla la altura del árbol



$$\frac{x}{2{,}16} = \frac{1{,}4}{0{,}84} \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}16 \cdot \frac{1{,}4}{0{,}84} = 3{,}6$$

9. Al doblar un rectángulo, como indica la figura, se obtienen tres triángulos semejantes ¿por qué son semejantes?

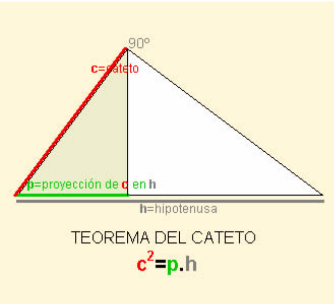


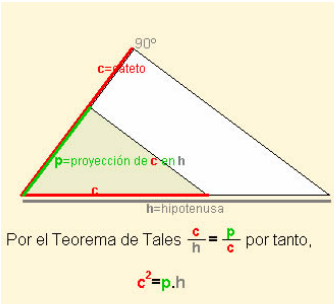
Son semejantes porque los ángulos son iguales ya que los tres son triángulos rectángulos, dos de los triángulos tienen otro ángulo igual porque son opuestos por el vértice. Y H es igual porque al añadirle 90º con la esquina que se dobla, nos da el complementario del ángulo marcado en los otros triángulos.

2. Triángulos rectángulos. Teoremas

Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo, el cuadrado del cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre ella. Esto se sigue de la semejanza entre el triángulo total y el que definen el cateto y su proyección en la hipotenusa.



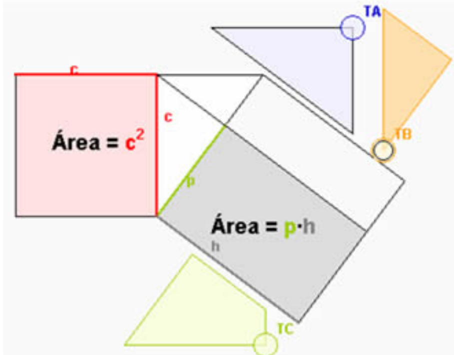


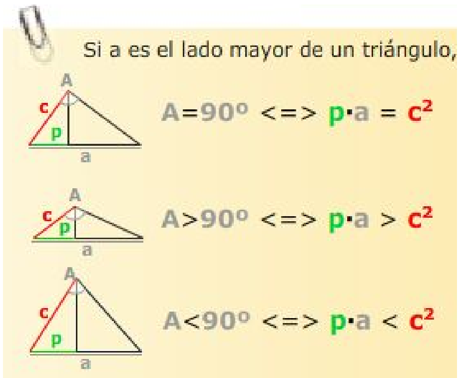
✓ Se voltea el triángulo y se gira para ponerlos en posición del Teorema de Tales.

$$\frac{c}{h}=\frac{p}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{c^2 = p\cdot h}}$$

El teorema se puede generalizar a triángulos acutángulos y obtusángulos, comparando los triángulos correspondientes.

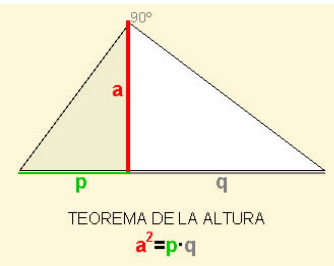
Puzzle del teorema del cateto
Recortando las tres piezas "T_" se puede completar con ellas el cuadrado o el rectángulo, comprobando que ambas áreas son iguales y por tanto el teorema.

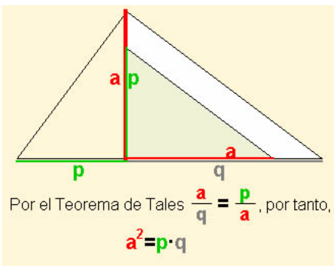




Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura que descansa sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

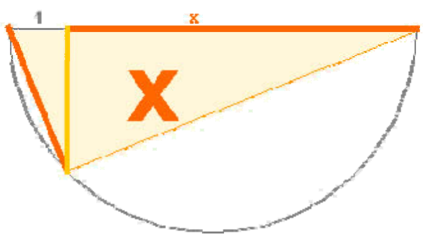




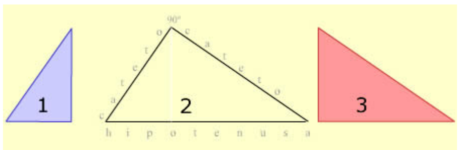
✓ Se gira el triángulo para ponerlos en posición de Tales. Entonces por el citado Teorema:

$$\frac{a}{q}=\frac{p}{a} \text{ y por tanto } \mathbf{a^2=p\cdot q}$$

La altura del triángulo es $\sqrt{x}$

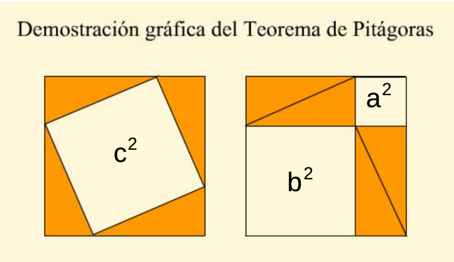


Recuerda

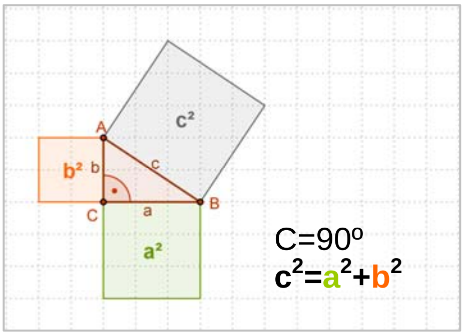


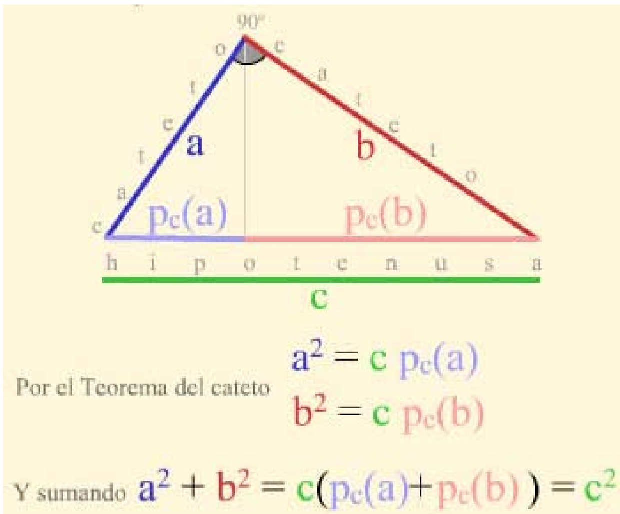
Tres triángulos semejantes.
Comparando 1 y 2 => T. del cateto
Comparando 1 y 3 => T. de la altura

Teorema de Pitágoras generalizado

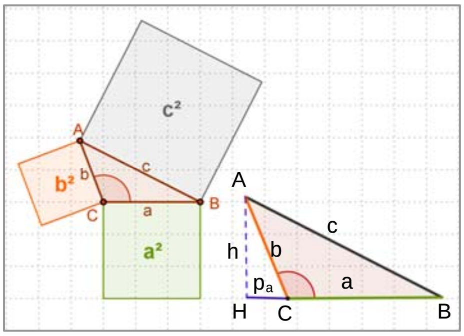


Teorema de Pitágoras. $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$





El teorema se generaliza a triángulos obtusángulos y acutángulos:



✓ Si **C>90º** entonces **$c^2 > a^2+b^2$**

$c^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot p_a$

Demostración

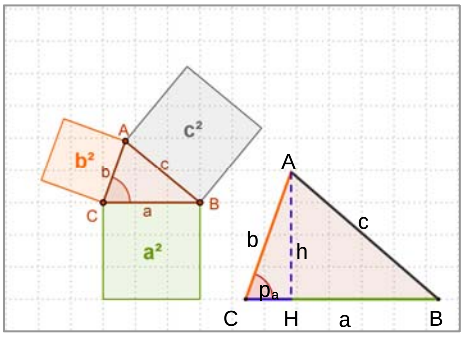
Trazando la altura se forman dos triángulos rectángulos, AHB y AHC, en los que aplicar el Teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo mayor: $c^2 = (a+p_a)^2+h^2$

En el triángulo rectángulo menor: $b^2 = p_a{}^2+h^2$

Restando las dos igualdades: $c^2 - b^2 = a^2+2p_a\cdot a$

Y despejando: $c^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot p_a$



✓ Si **C<90º** entonces **$c^2 < a^2+b^2$**

$c^2 = a^2+b^2 - 2\cdot a\cdot p_a$

Demostración

Trazando la altura se forman dos triángulos rectángulos, AHB y AHC, en los que aplicar el Teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo mayor: $c^2 = (a - p_a)^2+h^2$

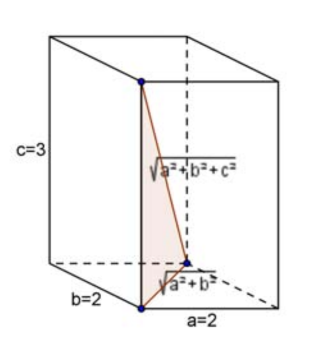
En el triángulo rectángulo menor: $b^2 = p_a{}^2+h^2$

Restando las dos igualdades: $c^2 - b^2 = a^2-2p_a\cdot a$

Y despejando: $c^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot p_a$

EJERCICIOS resueltos

10. Calcula la diagonal de un ortoedro con ocho aristas de 2 dm y el resto de 3 dm.



La diagonal del ortoedro, la diagonal de la base y la altura forman un triángulo rectángulo.
La diagonal de la base se calcula por el Teorema de Pitágoras:

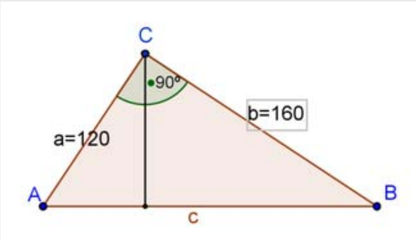
$$\sqrt{2^2+2^2}$$

y volviendo a aplicar el teorema al triángulo mencionado, se concluye que la diagonal es $\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}\approx 4{,}12$

11. Decide si es rectángulo, obtusángulo o acutángulo el triángulo de lados 3 cm, 6 cm y 8 cm.

Hay que decidir si el ángulo mayor del triángulo es obtuso, recto o agudo. Se aplica el teorema generalizado de Pitágoras y se compara $8^2=64$ con $3^2+6^2=9+36=45$.
Como 64 es mayor que 45, se concluye que el triángulo es obtusángulo.

12. En el triángulo de la figura calcula la hipotenusa, las proyecciones de los catetos y la altura.



Aplicando el *Teorema de Pitágoras*:

$$\text{Hipotenusa}=\sqrt{120^2+160^2}=200$$

Aplicando el *Teorema del Cateto*:

$p_c(a)=120^2/200=72$ y $p_c(b)=200-72=128$

Con el *Teorema de la Altura*:

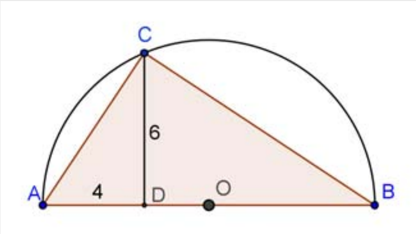
$$\text{alt}=\sqrt{72\cdot 128}=96$$

13. Comprueba que si M, N (M>N) son dos valores enteros (M^2-N^2, 2MN, M^2+N^2) es una terna pitagórica.

Tomamos p.e. M=3, N=2 y sustituimos $M^2-N^2=5$, $2MN=12$, $M^2+N^2=13$
Ahora comprobamos que es pitagórica: $5^2+12^2=169=13^2$

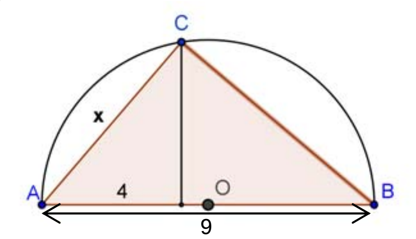
Otras ternas pitagóricas que puedes comprobar: 3, 4, 5 ; 7, 24, 25 ; 8, 15, 17 ; etc

14. Calcula el radio de la semicircunferencia de la figura.



Aplicando el Teorema de la altura, $6^2=4\cdot p \Rightarrow p=9$
Luego el diámetro = 9+4=13
y el radio = 6,5

15. Calcula la medida del cateto x en la figura.

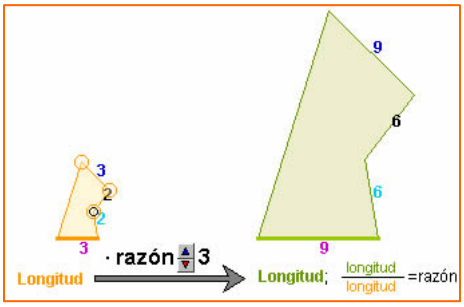


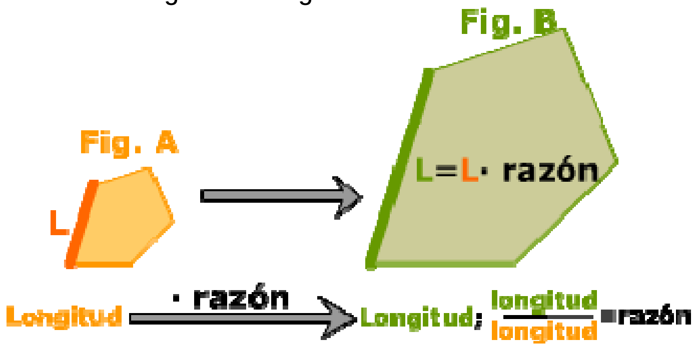
Por el Teorema del cateto,
x^2= diámetro·4=9·4=36
Por tanto x=6

3. Razón de semejanza

Longitudes

Si dos figuras A y B son semejantes, se llama razón de semejanza de la figura B sobre la A al cociente entre la longitud de un segmento de la figura B y la de su homólogo en la figura A.

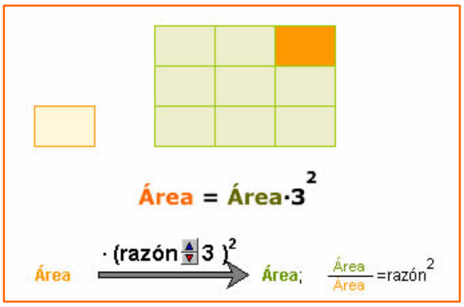


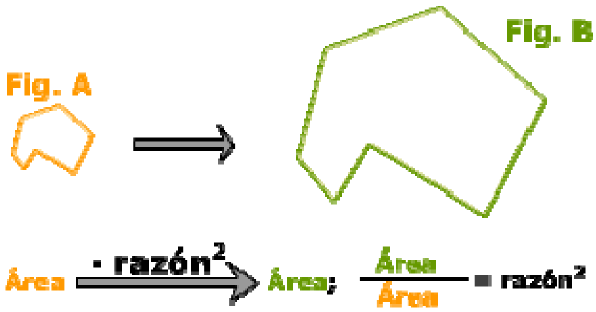


La razón de semejanza define la homotecia que transforma la figura A en la B.

Áreas

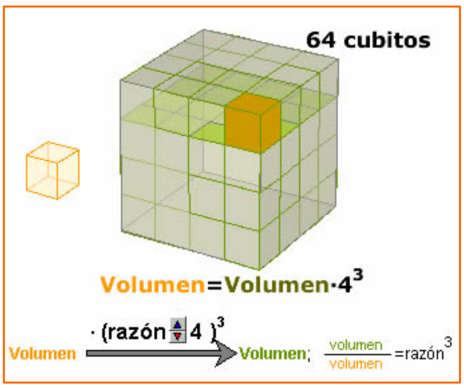
Si dos figuras A y B son semejantes, el cociente entre el área de B y el área de A es el cuadrado de la razón de semejanza de la figura B sobre la A.

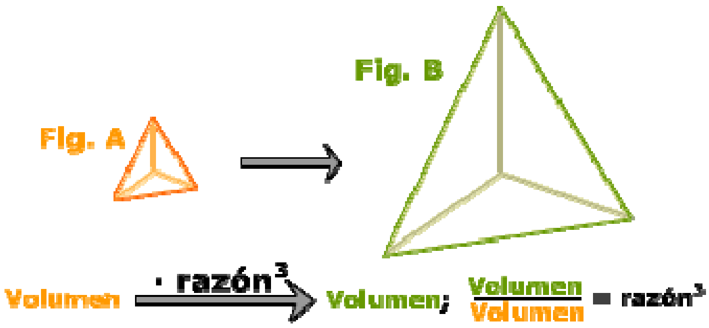




Volúmenes

Si dos figuras A y B son semejantes, el cociente entre el volumen de B y el de A es el cubo de la razón de semejanza de la figura B sobre la A.



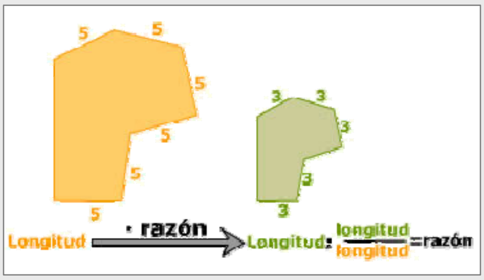


EJERCICIOS resueltos

16. ¿ Cuál es la razón de una semejanza que convierte un segmento de longitud 5 m en otro de longitud 3 m?

La razón de semejanza es el cociente entre longitudes homólogas.

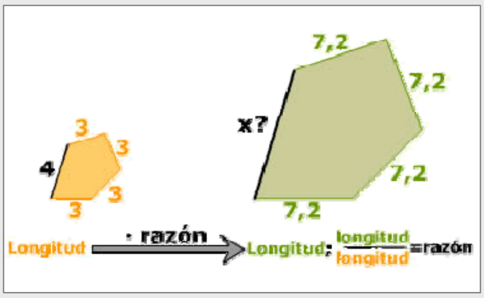
Razón = 3/5=0,6



17. Calcula la longitud del segmento homólogo al de 4 m, sabiendo que al aplicar la semejanza de esa misma razón, un segmento de 3 m se transforma en uno de 7,2 m.

Razón =7,2/3=2,4

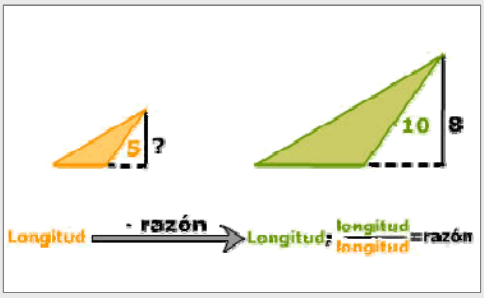
x=4·razón=4·2,4=9,6 m



18. En una semejanza un segmento de 5m se transforma en otro de 10m. En la figura transformada hay un segmento de longitud 8m ¿Cuál es la longitud del segmento del que proviene?

Razón =10/5=2

x·razón=8 => x·2=8; x= 4

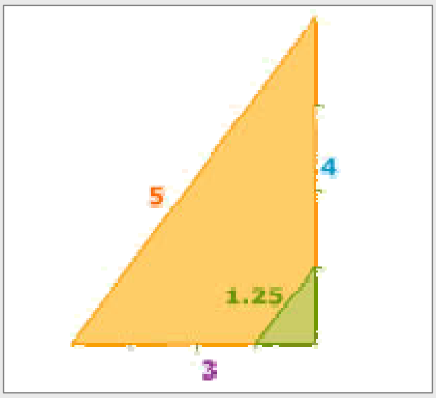


19. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm y aplícale una semejanza de razón ¼ para obtener otro semejante. Calcula la longitud de la hipotenusa en cada triángulo.

Por el T. de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

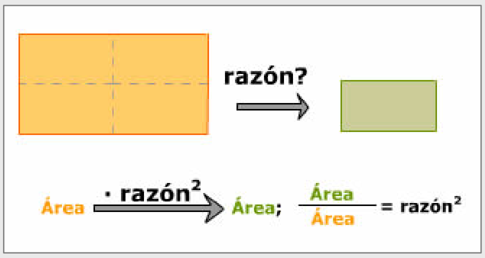
Si aplicamos la semejanza de razón 1/4, hipotenusa=5·1/4=1,25



EJERCICIOS resueltos

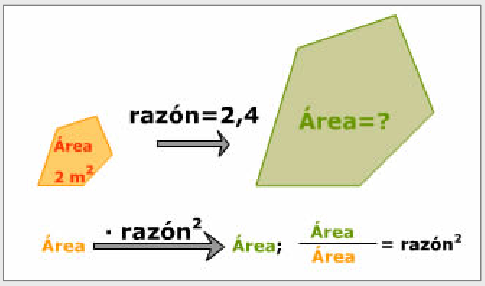
20. ¿ Cuál es la razón de una semejanza que convierte una figura en otra de área la cuarta parte?

$$\text{razón}^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{razón} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



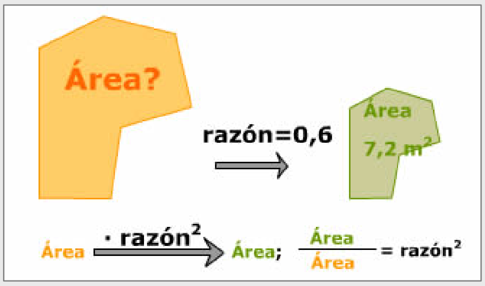
21. ¿Cuál es el área de una figura que se obtiene al aplicar a otra de área 2 m^2, una semejanza de razón 2,4?

Área = 2 m^2 · razón^2 = $2{\cdot}2{,}4^2$ = 11,52 m^2



22. En una semejanza de razón 0,6 se obtiene una figura de área 7,2 m^2 ¿cuál es el área de la figura inicial?

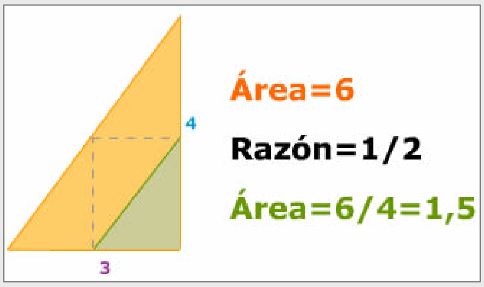
$$\text{Área} = \frac{7{,}2\ m^2}{0{,}6^2} = 20\ m^2$$



23. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm y otro semejante pero de área la cuarta parte.

Si el área es la cuarta parte, la razón de semejanza que aplicaremos será:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



24. El volumen de una casa es de 1200 m^3 y en una maqueta dicha casa ocupa 150 dm^3 ¿Cuál es la escala de la maqueta?

El cociente de los volúmenes es el cubo de la razón, $r^3 = \dfrac{150\ dm^3}{1200\ m^3}$

Pasando el denominador a dm^3 y simplificando queda: $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8000}} = \dfrac{1}{20}$

4. Aplicaciones

Escalas

Los mapas o planos de viviendas suelen indicar la escala de esta manera:

1:2500000 en algún mapa de carreteras
o 1:250 en el plano de una vivienda.

Para saber aplicar las escalas a longitudes áreas y volúmenes solo hay que recordar las siguientes fórmulas:

> Escala=1:l
> l = Distancia real /Distancia en plano
> l^2= Área real /Área en el plano
> l^3= Volumen real/Volumen en maqueta

1) Calcular la escala del plano de la figura 1

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia plano}} = \frac{6844\text{ cm}}{3{,}2\text{ cm}} = 2139$$

Escala= 1:2139

Fig.1

2) La escala es 1:120, ¿cuál es la superficie real del salón de la casa?

$6{\cdot}4{\cdot}120^2=345600\text{ cm}^2=34{,}56\text{ m}^2$

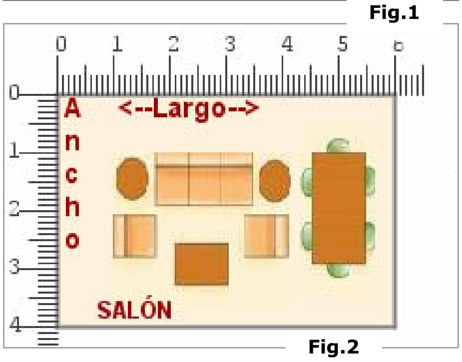


Fig.2

3) El volumen real de una de las torres es 139650 m^3 si la escala es 1:700, ¿cuál es el volumen de la maqueta?

Volumen de la maqueta: $\dfrac{139650}{700^3} = 407{,}14\text{ cm}^3$

Fig.3

Distancias inaccesibles

Como ya hiciera Tales al calcular la altura de la pirámide midiendo su sombra, podemos aplicar la semejanza al cálculo de distancias inaccesibles.
Anteriormente ya vimos cómo calcular la distancia a un barco o a un punto inaccesible.

4) *Se desea calcular la distancia entre los puntos A y B, para ello se han tomado las medidas de la figura: QM=1 m, XM=0,69 m y QB=5,67 m*

Aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{x}{QB} = \dfrac{XM}{QM}$

Con lo que x=5,67·0,69=3,91 m

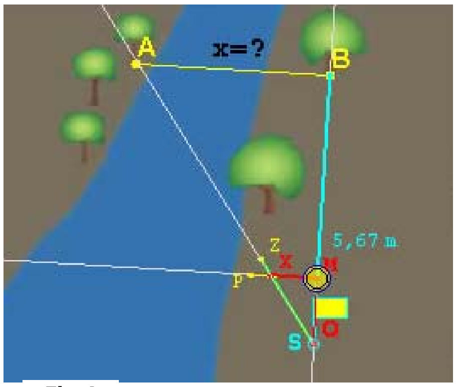


Fig.4

5) *¿Cuál es la longitud del hilo de pescar?*

Con el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la caña hasta el punto de apoyo:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

y aplicando la semejanza: $\dfrac{x - 4{,}3}{3} = \dfrac{7}{5}$

obtenemos: x=8,5 m

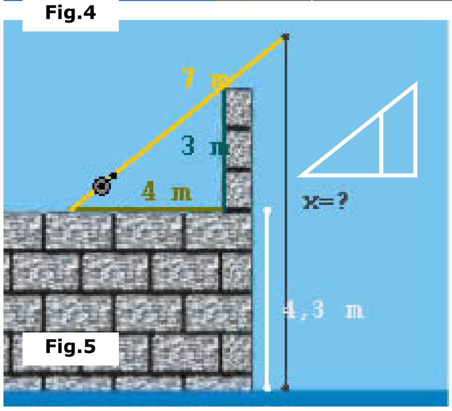
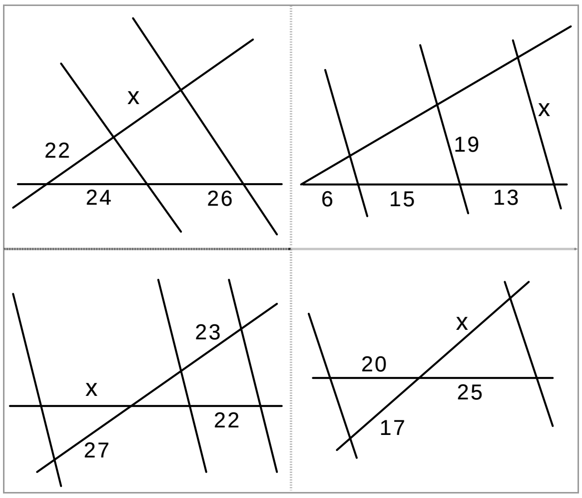


Fig.5

Para practicar

1. Halla x en cada caso

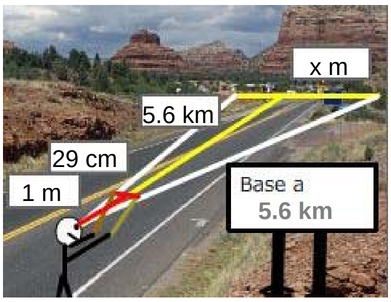


2. Las medidas de tres lados homólogos de dos cuadriláteros semejantes son:

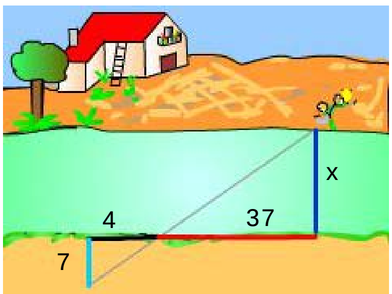
4 cm	x cm	7 cm
20 cm	10 cm	y cm

Halla x e y

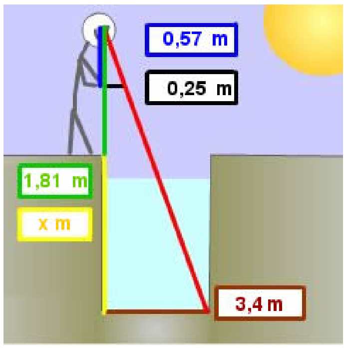
3. La base de un monte se observa a una distancia de 5,6 km. Se mueve una regleta de 29 cm hasta cubrir con ella visualmente la base y en ese momento la distancia de la regleta al ojo del observador es de 1 m.
Calcula la anchura de la base del monte.



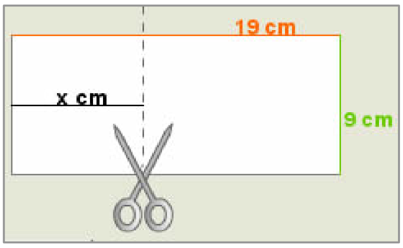
4. Calcula la anchura del río.



5. Calcula la profundidad del pozo.



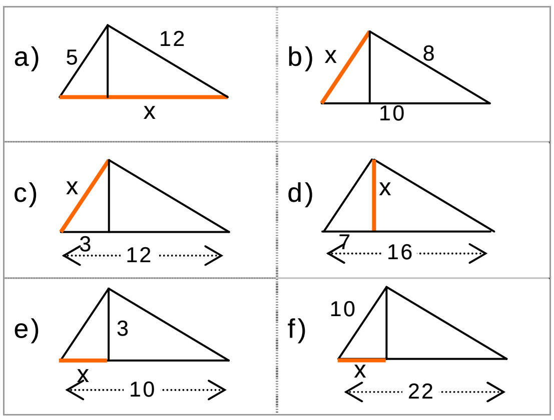
6. ¿Por dónde se ha de cortar la hoja para que el trozo de la izquierda sea semejante a la hoja entera?.



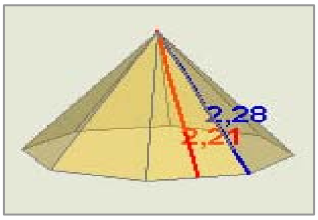
7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 69º y uno de los lados que lo forman de 9 cm. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

8. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 56º y el cociente de los lados que lo forman igual a 3. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

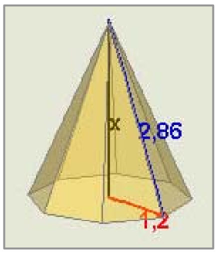
9. Calcula el valor de x en cada triángulo:

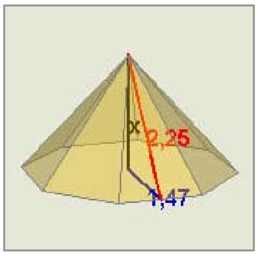


10. Calcula el lado de la base de la pirámide

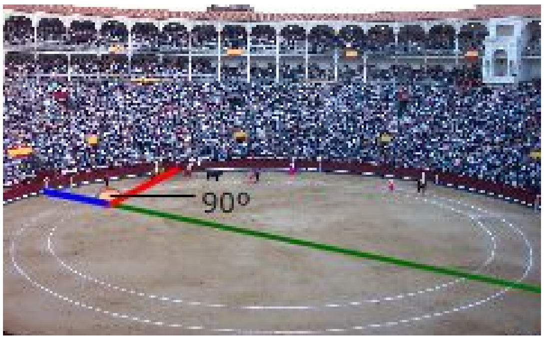


11. Calcula la altura de la pirámide en cada caso.

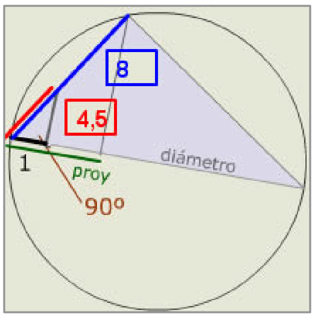




12. En una plaza de toros se puede calcular su diámetro midiendo tan solo unos metros. En dirección de un diámetro (lo define la visual con los espectadores de enfrente) se miden 9m y girando 90º se avanza en esa dirección hasta el callejón, resultando la medida de este recorrido igual a 28,3 m. Calcula el diámetro del ruedo de la plaza de toros

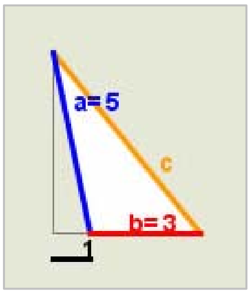


13. Calcula el diámetro de la circunferencia de la figura

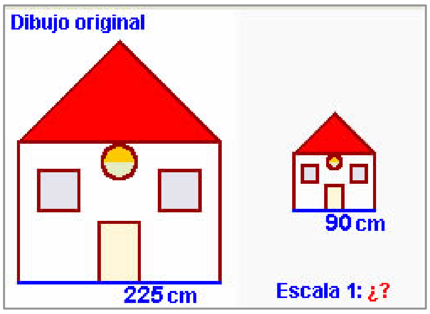


14. Halla la distancia entre los puntos de coordenadas (-1,-1) y (-4,3).

15. Aplica el teorema generalizado de Pitágoras para hallar la medida del lado c en el triángulo de la figura.



16. En la figura se ve una copia del dibujo original. ¿Cuál es la escala de la copia?



17. Al medir sobre el mapa con el curvímetro la distancia por carretera entre dos pueblos obtenemos 9,5 cm, la escala del mapa es 1:470000. ¿Cuántos km. Tendrá la carretera que une esos dos pueblos?

18. Al observar un mapa de escala 1:210000 descubrimos que falta un pueblo, B, en una carretera. Si sabemos que B dista 73,3 km de otro pueblo A que vemos en el mapa, ¿a cuántos cm de A por la carretera del mapa colocaremos el punto que represente a B?

19. El volumen de una torre es de 2925 m^3 calcula el volumen de su representación en una maqueta de escala 1:500.

20. El área de la base de una torre es de 275 m^2 calcula el área de la misma en una maqueta de escala 1:350.

21. El área de una torre es de 125 m^2 y en una maqueta ocupa una superficie de 55 cm^2 . Halla la escala de la maqueta.

22. El área de la base de una torre es de 25 cm^2 en una maqueta de escala 1:350. Calcula el área real de la base.

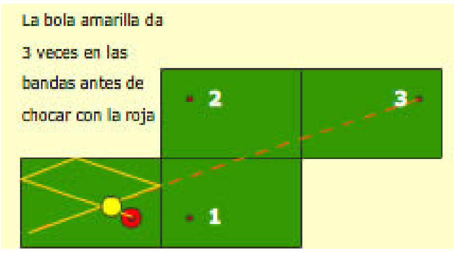
23. El volumen de una torre es de 3300 m^3 y en una maqueta ocupa un volumen de 412 cm^3. Halla la escala de la maqueta.

24. El volumen de una torre es de 27 cm^3 en una maqueta de escala 1:450. Calcula el volumen real de la torre.

Para saber más

Billar a tres bandas

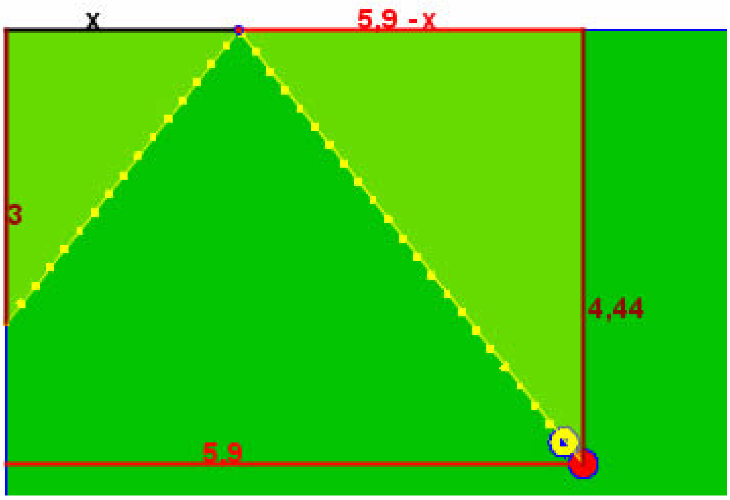
Construimos los rectángulos iguales al billar, después los puntos simétricos a la bola roja, el camino más corto entre dos puntos es la linea recta que al plegarla en el billar nos da el recorrido deseado



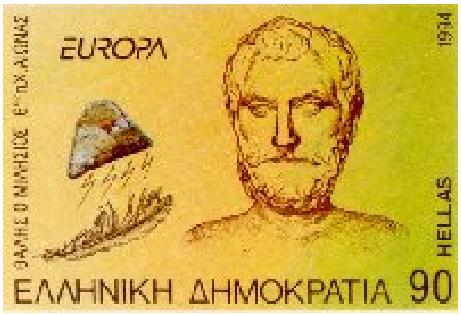
¿Cómo asegurar la carambola a una banda?

Como la bola incide en la banda con el mismo ángulo que rebota, habrá que conseguir que los triángulos sean semejantes, y esto se puede lograr ¡a ojo! o con precisión resolviendo la ecuación de proporcionalidad asociada a la semejanza.

$$\frac{x}{3} = \frac{5{,}9 - x}{4{,}44} \Rightarrow 4{,}44 \cdot x = 3 \cdot (5{,}9 - x); \qquad x = \frac{3 \cdot 5{,}9}{3 + 4{,}44} = 2{,}37$$



Geometría griega



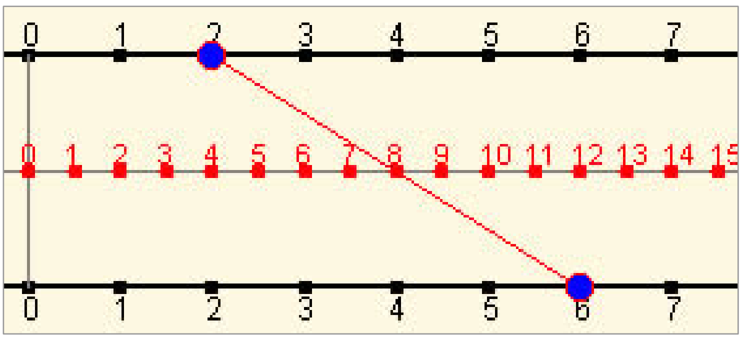
La tradición atribuye a Thales (600 años antes de nuestra era) la introducción en Grecia de la geometría egipcia. **T**hales fue un precursor sobre todo preocupado de problemas prácticos (cálculo de alturas de monumentos con ayuda de un bastón y de la proporcionalidad de las sombras).

La geometría griega que fue un éxito asombroso de la ciencia humana dando pruebas de un ingenio excepcional, estuvo marcada por dos Escuelas: la de Pitágoras y la de Euclides.

Ver más en:
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm

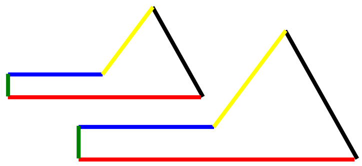
Con el Teorema de Tales se pueden realizar "geométricamente" las operaciones básicas, en la imagen vemos un calculadora geométrica para sumar.

Se basa en que la abscisa del punto medio de un segmento es la semisuma de las abscisas de los extremos.



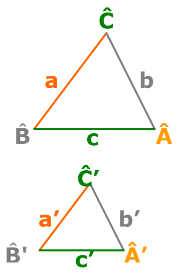
Recuerda lo más importante

Figuras semejantes
Si se puede pasar de una a otra mediante una homotecia y movimientos.

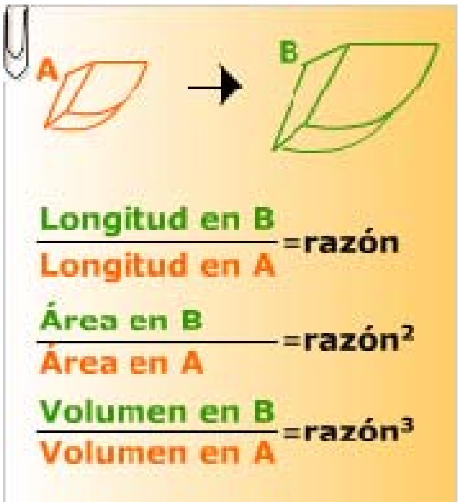


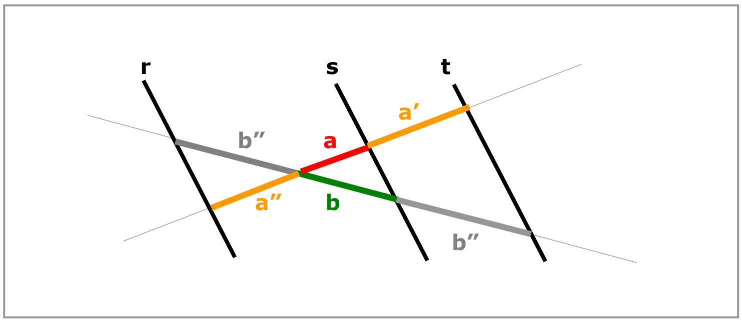
Polígonos semejantes
Si tienen y los lados proporcionales y los ángulos iguales.

Triángulos semejantes
En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los tres criterios:



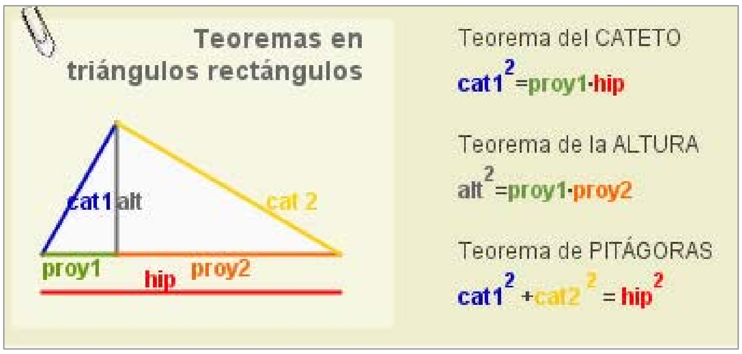
1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$





Teorema de Tales
Los segmentos que determinan rectas paralelas en dos secantes son proporcionales.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$



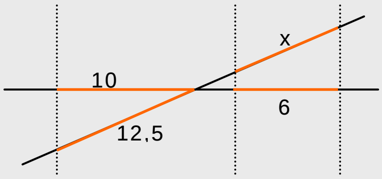
Teorema de Pitágoras generalizado

Si C>90º $c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot p_a(b)$

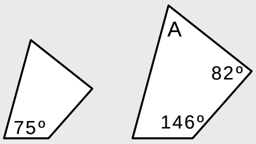
Si C<90º $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot p_a(b)$

Autoevaluación

1. Aplica la semejanza para calcular el valor de x.

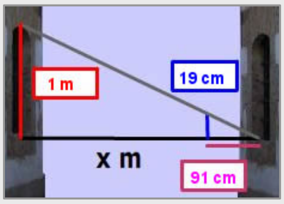


2. Sabiendo que los ángulos de un cuadrilátero suman 360º, calcula el ángulo A.



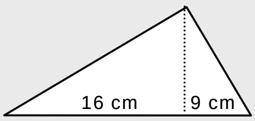
3. Los polígonos de la figura, ¿son semejantes?.

4. Como la ventana de la casa de enfrente es igual que la mía puedo saber su altura, y con la visual de una varilla calcular la anchura de la calle. Calcúlala.

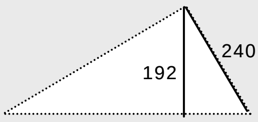


5. Si los lados de un triángulo miden 6, 8 y 11 cm, ¿qué tipo de triángulo es?

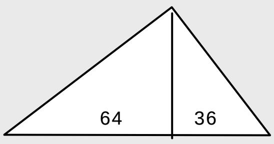
6. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 16 y 9 cm.



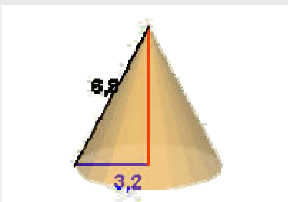
7. En un triángulo rectángulo un cateto mide 240 cm y la altura sobre la hipotenusa 192 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?.



8. Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 64 y 36 cm.



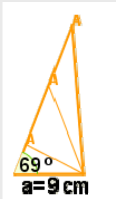
9. La generatriz de un cono recto mide 6,8 cm y el radio de la base 3,2 cm. Halla la altura de un cono semejante a éste realizado a escala 1:2.



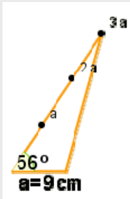
10. Calcula la superficie en m^2 de un piso del que tenemos un plano a escala 1:300, si el piso en el plano ocupa 17 cm^2.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 23,83 b) 30,76
   c) 25,82 d) 21,25
2. x=2 y=35
3. 1624 m
4. 64,75
5. 5,94 m
6. 4,26 cm



Prob. 7



Prob.8

7. No tienen porqué ser semejantes
8. Son semejantes
9. a) 13 b) 6 c) 6
   d) $\sqrt{63} \approx 7,9$ e) 1 f) 4,54
10. 1,12
11. 2,59 1,70
12. 97,98 m
13. 36
14. 5
15. $c^2=a^2+b^2+2b\cdot p_b(a)=40$;
    $c=\sqrt{40} \approx 6,32$
16. 1:2,5
17. 44,65 km
18. 34,90 cm
19. 23,4 cm^3
20. 22,44 cm^2
21. 150,75 cm^2
22. 306,25 cm^2
23. 1:200
24. 2460,37 m^3

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

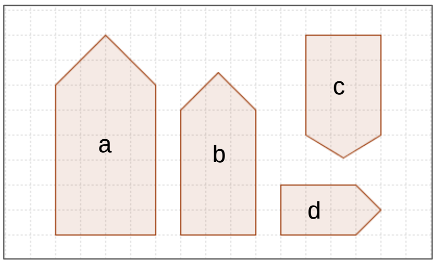
1. 7,5
2. 57º
3. No son semejantes
4. 91/19 m = 4,78 m
5. Obtusángulo $11^2>6^2+8^2$
6. 60 cm
7. 400 cm
8. 4800 cm^2
9. 3 cm
10. 153 m^2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

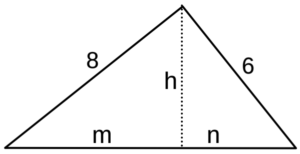
ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 6	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Indica cuáles de las siguientes figuras son semejantes:



2. En el triángulo rectángulo de la figura calcula las longitudes h, m y n.

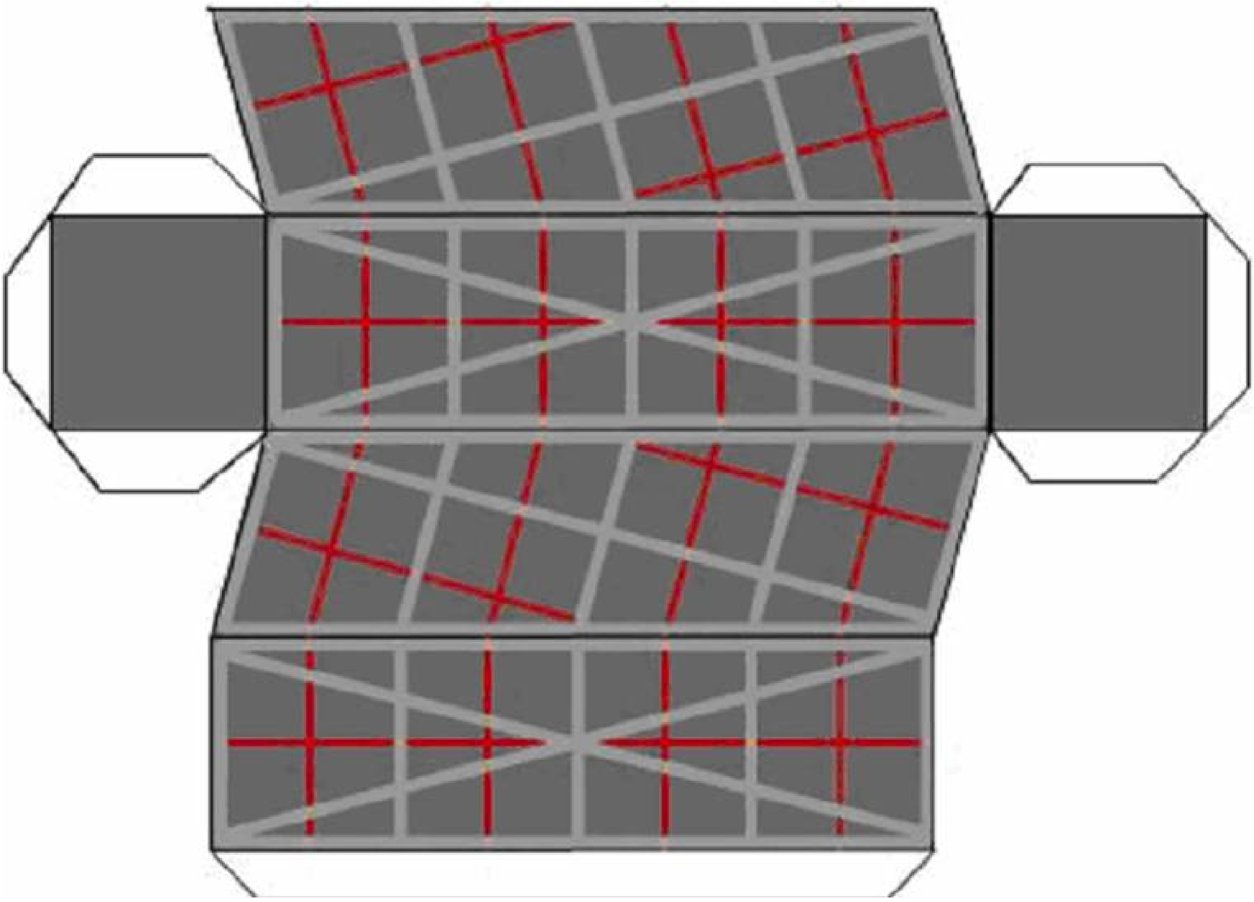


3. La escala del plano de una vivienda es 1:200, el salón tiene forma rectangular de dimensiones en el plano 2 cm y 3,5 cm. Halla el área real del salón.

4. Calcula razonadamente la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros a la misma hora que un palo de 1,2 m proyecta una sombra de 1,5 m.

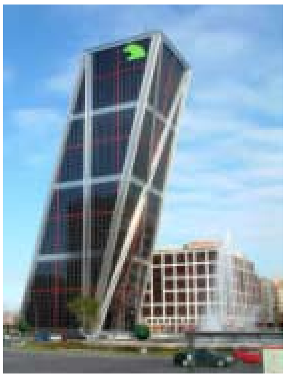
Para finalizar se propone un problema para repasar la semejanza sobre una maqueta de las TORRES KIO (Plaza Castilla, Madrid).

✓ Puedes comenzar por recortar y construir la maqueta de una de las torres.



1.¿Cuál es la altura de la torre en la maqueta? Indícalo sobre la imagen.

La altura real de la torre es de 114 m. ¿Cuál es la escala de la maqueta?



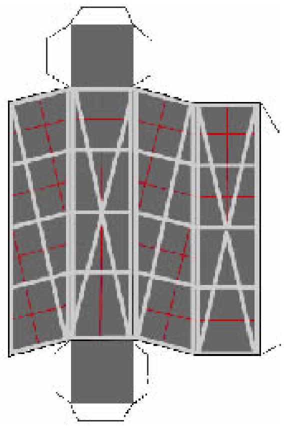
2. Mide con el transportador la inclinación de la torre-maqueta.

¿Cuál es la inclinación de la torre real?

3. Halla el área del cuadrado de la base del desarrollo.

¿Cuál es el área de la base en la torre real?

4. Halla el área total de la torre en la maqueta. Indica el área de cada cara en el desarrollo.



¿Cuál es el área total de la torre real?

5. Halla el volumen de la torre-maqueta. Explica los cálculos realizados

¿Cuál es el volumen total de la torre Kio en la Plaza Castilla?

6. Comprueba que se verifica el teorema de Pitágoras en las medidas de las aristas y de la altura de la maqueta. Escribe aquí las medidas y los cálculos

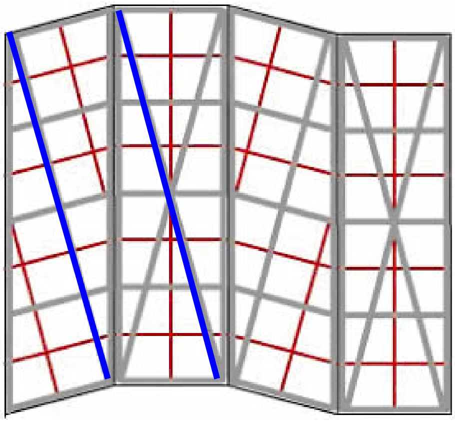
Arista mayor = su cuadrado =

Arista menor = su cuadrado =

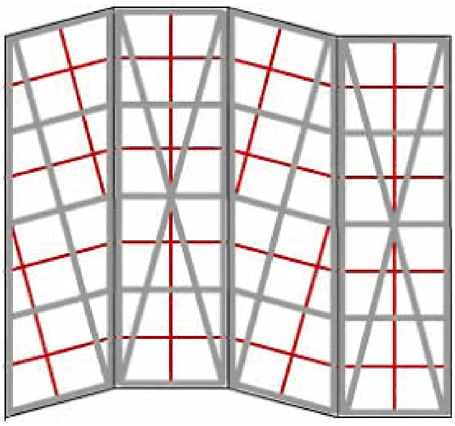
Altura = su cuadrado =

Teorema de Pitágoras→

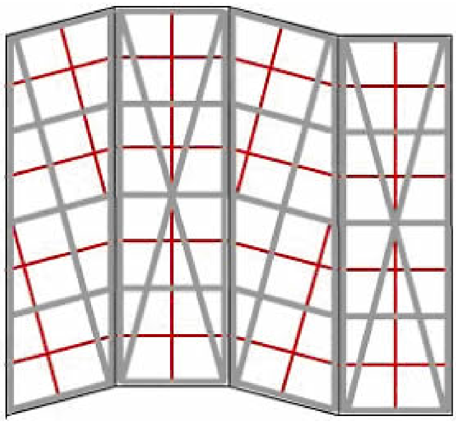
7. ¿Son paralelas las diagonales de las caras laterales señaladas en azul?



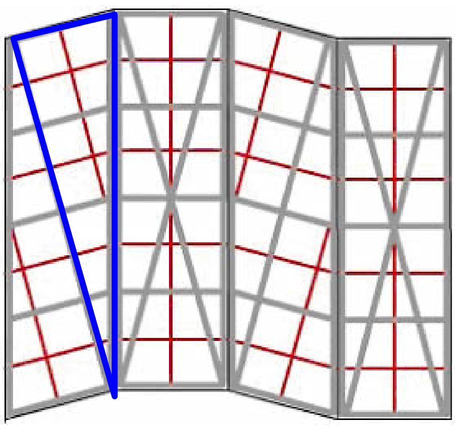
8. Enuncia el Teorema de Tales sobre algunos triángulos y segmentos del desarrollo de la fachada



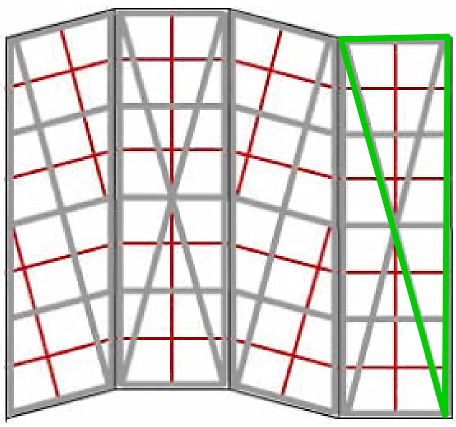
9. Busca triángulos semejantes en la fachada



10. Explica el teorema del cateto sobre el triángulo rectángulo azul.



11. Aplica el teorema de la altura al triángulo verde, marcado a la derecha.



SOLUCIONES

1. Las medidas que hemos realizado sobre la maqueta dan los siguientes datos con los que hemos realizado los ejercicios. Los errores inevitables de medida darán otras soluciones.

Arista de la base cuadrada 2,8 cm   Altura de la torre 9,12 cm

La altura señalada en la maqueta es 9,12cm

11400cm/9,12cm=1250. Escala=1:1250

2. 15º. La inclinación en la torre real es la misma, las semejanzas conservan los ángulos.

3. Área base maqueta =7.84 cm^2 que al multiplicarla por 1250^2 da el Área de la base en la realidad = 1225 m^2

4. El área de las bases es de $2·2{,}8^2$ cm^2 = 15,68 cm^2

Área paralelogramo = arista de la base · altura = 2,8·9,12 = 25,536 cm2

Área rectángulo = arista de la base · arista lateral = 2,8·9,54 = 26,712 cm2

Área total = 15,68+ 2 · (25,536 + 26,712) = 120,176 cm^2

Área real: 120,176 cm^2 · 1250^2 = 18777,5 m^2

5. Área base · altura = 7,84 cm^2 · 9,12 cm = 71,5008 cm^3 ~ 71,5 cm^3

Volumen total de la torre Kio ~ 71,5 cm^3 · 1250^3 ~ 139648,5 m^3

6. Arista mayor = 9,54   su cuadrado = 91,01

Arista menor = 2,8   su cuadrado = 7,84

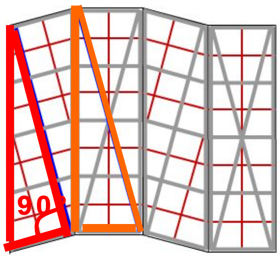
Altura = 9,12   su cuadrado = 83,17

Teorema de Pitágoras→ 91,01 - 7,84 = 83,17

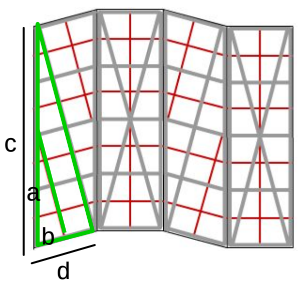
7. No son paralelas pues en ese caso los triángulos serían semejantes y los lados proporcionales y no lo son ya que:

$$\frac{\text{cateto pequeño izda}}{\text{cateto pequeño dcha}} = \frac{2{,}8}{2{,}8} = 1$$

$$\frac{\text{cateto grande izda}}{\text{cateto grande dcha}} = \frac{9{,}54}{9{,}12} \neq 1$$

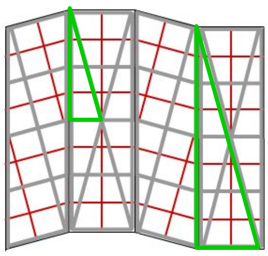


8. Hay muchos ejemplos, señalamos uno.

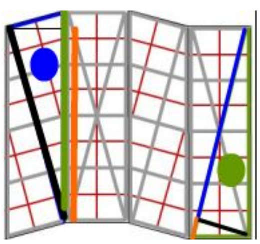


$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

9. También hay muchos ejemplos.



10. 11.



T. del cateto $\mathbf{c^2}$ = hip · proy.

T. de la altura $\mathbf{alt^2}$ = proy. 1 · proy.2