Inclusión y atención a la diversidad

- **Lo fundamental de la unidad**

  Esquema incompleto de los contenidos de la unidad

- **Fichas de trabajo A**
- **Fichas de trabajo B**
- **Soluciones de las fichas de trabajo**

www.anayaeducacion.es

En la web dispone de ejercicios con los que reforzar y ampliar los contenidos.

1	Lo fundamental de la unidad
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

NÚMEROS REALES

NÚMEROS RACIONALES

Son los que se pueden expresar como………………...

EJEMPLO: 4,3333333 = …………………………………

NÚMEROS IRRACIONALES

Son aquellos cuya expresión decimal ………….……

EJEMPLO: $\sqrt{3}$…

	INTERVALOS			SEMIRRECTAS		
NOMBRE	EXPRESIÓN	DESIGUALDAD	REPRESENTACIÓN	EXPRESIÓN	DESIGUALDAD	REPRESENTACIÓN
Abierto	(a, b)	$a < x < b$		$(-\infty, b)$		
	$[a, b]$			$(-\infty, b]$		
	$(a, b]$			$(a, +\infty)$		
	$[a, b)$			$[a, +\infty)$		

RAÍCES. FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

$\sqrt[n]{a} = b$ si … EJEMPLO: $\sqrt[5]{32} = 2$ porque … $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{\square}{\square}}$ EJEMPLO: $\sqrt[3]{7} = \dots$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{\square}{\square}}$ EJEMPLO: $\sqrt[4]{2^3} = \dots$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

① $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

EJEMPLO: $\sqrt[6]{5^3} = \dots$

② $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \dots$

③ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

EJEMPLO: $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \dots$

④ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

EJEMPLO: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \dots$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \dots$

- **Racionalizar** denominadores consiste en ....

....

APROXIMACIONES Y ERRORES

Se llaman cifras significativas a aquellas con las que se expresa ....

Solo deben utilizarse aquellas ....

Error absoluto = |Valor real – …………………|. Una cota del error absoluto es 5 unidades de ....

Error relativo = $\dfrac{\text{Error absoluto}}{}$. El error relativo es menor cuantas más ………………………………… se utilicen.

LOGARITMOS: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

- $\log_a P = x \leftrightarrow a^x = \dots$ EJEMPLO: $\log_2 16 = \dots$
- $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
- $\log_a \sqrt[n]{P} = \dfrac{1}{n} \log_a P$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$
- $\log_b P = \dfrac{\log_a P}{\log_a b}$ EJEMPLO: $\log_3 41 = \dfrac{\log 41}{\log 3} = 3{,}38$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a P^k = k \log_a P$

1	Ficha de trabajo A
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Coloca estos números en el lugar de la tabla que les corresponda:

$2{,}53$ $\quad 2{,}\widehat{53}$ $\quad 3{,}1\widehat{4}$ $\quad \pi = 3{,}141592\ldots$ $\quad 1{,}\widehat{4}$ $\quad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

NÚMEROS REALES		
RACIONALES		IRRACIONALES
NÚMERO	EXPRESIÓN FRACCIONARIA	

2. a) Escribe, ordenándolos de menor a mayor, tres números del intervalo [2; 2,25].

b) Expresa ese intervalo como una desigualdad.

3. Representa el número $\sqrt{5}$, ayudándote de reglas y compás. (Usa el teorema de Pitágoras).

4. Escribe en notación científica los números siguientes:

a) 340 mil millones $\rightarrow$

b) 84 millonésimas $\rightarrow$

c) $642 \cdot 10^5 \rightarrow$

d) $54 \cdot 10^{-7} \rightarrow$

5. Expresa en forma radical y luego simplifica las expresiones siguientes:

a) $27^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \ldots$

b) $8^{5/3}$

c) $4^{3/2}$

d) $(2^{-3})^{1/6}$

e) $\left(\dfrac{2}{81}\right)^{1/4}$

f) $(-4)^{5/15}$

6. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{7^2}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{12}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{54}{a^4}}$

e) $\sqrt{12x^5} : \sqrt{3x}$

f) $3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{12}$

7. Calcula:

a) $log_3 1$

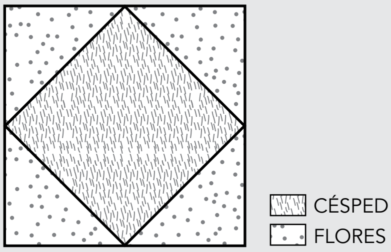
b) $log_5 125$

c) $log_2 \dfrac{1}{2}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL JARDINERO

El padre de Marta es jardinero municipal. Le encargan que prepare un jardín según las especificaciones del arquitecto. Una vez que ve los planos, se da cuenta de que la tarea va a requerir muchos cálculos y pide ayuda a su hija, que ya está en 4.° de ESO. Según el plano, el jardín será un cuadrado, con otro cuadrado más pequeño en su interior, tal como se ve en el dibujo:



1. El primer problema es que solo le han dado la superficie del cuadrado pequeño, 16 m^2. El jardinero le pregunta a Marta cuál sería el lado del cuadrado pequeño y el del grande, añadiendo que en el informe final suelen utilizar siempre tres cifras decimales.

2. Como quieren poner una valla metálica rodeando el jardín, el jardinero le dice a Marta que cuesta 12 euros el rollo de cinco metros y que si le hace el favor de calcular cuánto se van a gastar en la valla. ¿Puedes ayudar a Marta con los cálculos?

3. Mientras el jardinero está poniendo la valla, recibe una llamada de su jefa diciéndole que quiere saber la superficie que va a ocupar el jardín, especificando la zona de césped y la de flores, con vistas a introducir los datos en la memoria anual de la concejalía. Marta se ofrece a calcular el dato que piden. ¿Qué resultados obtiene Marta?

4. Marta se acuerda de que está estudiando cotas de errores en el instituto y decide pasar el rato haciendo cuentas mientras su padre acaba el trabajo. Marta calcula una cota del error absoluto y otra del error relativo de la longitud del lado del cuadrado grande.

¿Cuáles han sido las cotas halladas por Marta?

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Calcula las expresiones siguientes, sin usar calculadora:

a) $(0,\widehat{3}) + 0,\widehat{5})^2 : 0,4$

b) $0,\widehat{2} \cdot (1,\widehat{2} - 1,\widehat{1} \cdot 0,\widehat{3})$

2. Representa en la recta real, con ayuda de regla y compás, los números siguientes:

a) $\sqrt{5}$

b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. Escribe tres números (ordenándolos de menor a mayor) del interior del intervalo [1; 1,1).

4. Da el valor aproximado, con 4 cifras decimales, de $\sqrt{3}$ y halla una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

5. Opera esta expresión $\frac{0,0000025}{0,0000125}$, dando el resultado en notación científica.

6. Opera y simplifica.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} : \sqrt[4]{2}$

c) $\frac{1-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}}$

b) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)^2 : \sqrt[6]{5}$

d) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$

7. Calcula x en cada caso:

a) $log_2 \frac{1}{8} = x$

b) $log_x 13 = 1$

c) $log \frac{\sqrt[3]{100}}{10} = x$

d) $log_2 324 = x$

Nombre y apellidos: ....

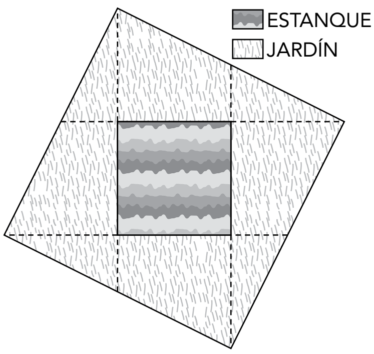
APLICA. VISITA AL MUSEO

En la primera excursión escolar, el profesor de matemáticas os lleva al Museo de la Ciencia. Espera que sea un día divertido y aprovecha para encargaros un trabajo sobre la visita. Aquí están algunas de las preguntas que os hace y que tendrás que contestar.

1. Una vez en el museo, nos enteramos de que los ordenadores de información que había en las salas tenían una memoria RAM de 4 gigabytes. Además, nos dijeron que un gigabyte tiene 1 073 741 824 bytes. Escribe el número de bytes, en notación científica, de cada ordenador.

2. En la sala de astronomía, pudimos leer que la distancia media de Saturno al Sol es de 1 433 millones de kilómetros. ¿Puedes decirme, en notación científica, cuántos metros son?

3. En el jardín del museo, hay un estanque rodeado de césped, como indica el siguiente dibujo:



a) El estanque tiene una superficie de 4 m^2. Las zonas de césped se han formado cortando cuatro tepes cuadrados, de igual tamaño que el estanque, y reordenando los trozos para rodear el estanque, formando al final otro cuadrado. ¿Cuál es el lado del cuadrado final?

b) Aproxima el valor del lado que acabas de calcular con cinco cifras decimales y da una cota del error absoluto y una del error relativo.

Unidad 1

Ficha de trabajo A

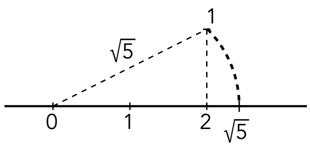
PRACTICA

1.

RACIONALES		IRRACIONALES
NÚMERO	FRACCIÓN	
2,53	$\frac{253}{100}$	π
$2,5\widehat{3}$	$\frac{251}{99}$	$\sqrt{2}$
$3,1\widehat{4}$	$\frac{283}{90}$	
$1,\widehat{4}$	$\frac{13}{9}$	

2. a) Respuesta abierta. b) $2 \le x \le 2,25$

3. $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$



4. a) $3,4 \cdot 10^{11}$ b) $8,4 \cdot 10^{-5}$
c) $6,42 \cdot 10^{7}$ d) $5,4 \cdot 10^{-6}$

5. a) 3^2 b) 2^5 c) 2^3
d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt[4]{2}}{3}$ f) $\sqrt[3]{-4}$

6. a) $\sqrt[6]{7^7}$ b) $\sqrt[10]{3}$ c) 2^2
d) $\frac{3}{a}\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$ e) $2x^2$ f) $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

7. a) 0 b) 3 c) –1

APLICA

1. Cuadrado pequeño: 4m
Cuadrado grande: $4\sqrt{2} \approx 5,657$ m

2. El perímetro mide $16\sqrt{2} \approx 22,627$ m.
Cada metro de valla cuesta 2,4 euros.
Por tanto, toda la valla cuesta 54,30 euros.

3. La parte de césped tiene una superficie de 16 m^2.
La parte de flores tiene una superficie de 16 m^2.

4. Cota del error absoluto $= \frac{0,0001}{2} = 0,0005$ m

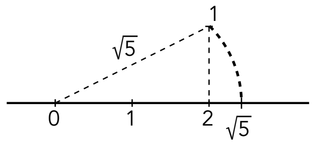
Cota del error relativo $= \frac{0,0005}{5\,657} = 0,000088$ m

Ficha de trabajo B

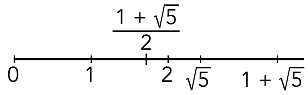
PRACTICA

1. a) $\frac{16}{9}$ b) $-\frac{4}{81}$

2. a) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$



b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



3. Respuesta abierta:
$1,01 < 1,05 < 1,057$

4. $\sqrt{3} = 1,732050\ldots \approx 1,7321$
E. abs. $= 0,00004919\ldots < 0,00005$
E. rel. $= \frac{0,00005}{\sqrt{3}} = 0,0000288\ldots < 0,00005$

5. $\frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{1,25 \cdot 10^{-5}} = 2 \cdot 10^{-1}$

6. a) $\sqrt[6]{2^5}$ b) $\sqrt[6]{5}$
c) $2 - \sqrt{2}$ d) $6\sqrt{6}$

7. a) $x = -3$ b) $x = 13$
c) $x = -\frac{1}{3}$ d) $x = 8,3$

APLICA

1. $4,295 \cdot 10^{9}$ bytes

2. $1,433 \cdot 10^{12}$ m

3. a) El lado mide $\sqrt{20}$ m.
b) $\sqrt{20} = 4,47214$

Cota de error absoluto $= \frac{0,00001}{2} =$
$= 0,000005$ m

Cota de error relativo $= \frac{0,000005}{4,47214} =$
$= 0,000001118$ m

2	**Lo fundamental de la unidad**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y producto

El resultado de sumar o multiplicar dos polinomios es otro polinomio.

Estas operaciones tienen las misma propiedades que las de los números enteros y tienen las propiedades: ...., ...

EJEMPLOS:

Si $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = -2x + 1$, entonces:

$P(x) + Q(x) =$ ....

$P(x) \cdot Q(x) =$ ....

División

En general, el cociente de dos polinomios no es un polinomio.

Si el resto es 0, la división es .... y se puede poner $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$

Si el resto no es 0, la división es .... y el resultado puede ponerse como $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + \ldots$

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio entre ....

EJEMPLO: $(3x^2 - 5x + 2) : (x^{-2})$

TEOREMA DEL RESTO. VALOR DE UN POLINOMIO PARA $x = a$

El valor que toma un polinomio para $x = a$ coincide con ....

RAÍCES DE UN POLINOMIO. DIVISIBILIDAD POR $x - a$

Un número ***a*** se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$ si ....

EJEMPLO: 1 es raíz del polinomio $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ porque ....

Si ***a*** es **raíz** de $P(x)$ entonces se puede poner $P(x) =$ ....

EJEMPLO: $3x^2 - 5x + 2 = (x - 1)$ ....

Para que un polinomio con coeficientes enteros sea **divisible por** $\boldsymbol{x - a}$, es necesario que ....

EJEMPLO: $3x^2 - 5x + 2$ es divisible por $(x - 1)$ porque ....

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar consiste en ....

Para factorizar polinomios podemos utilizar: sacar factor común, las igualdades notables, la ecuación de segundo grado y la regla de Ruffini.

EJEMPLOS: a) $4x^2 - 16 = (2x + 4)(\boxed{})$ b) $5x^4 - 2x^3 = x^3(\boxed{})$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es ....

Para simplificar una fracción algebraica dividimos ....

EJEMPLO: $(3x^2 - 5x + 2) / (x^2 - 2x + 1) = (x - 1)(3x - 2) / (x - 1)^2 = (\boxed{}) / (\boxed{})$

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas ....

Para multiplicar dos fracciones algebraicas ....

Para dividir dos fracciones algebraicas ....

2	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Divide los polinomios $(x^5 - 6x^3 - 25x) : (x^2 + 3x)$.

2. Realiza estas divisiones por la regla de Ruffini. Indica el polinomio cociente $P(x)$ y el resto R, en cada caso:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2)$

3. Aplica el teorema del resto y calcula el resto de estas divisiones sin hacerlas.

a) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

4. Factoriza estas expresiones, sacando factor común:

a) $2x^4 - 8x^2 + 4x$

b) $\frac{x^5}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3}$

5. Factoriza estas expresiones, usando identidades notables.

a) $4x^2 - 12x + 9$

b) $16x^2 + 8x + 1$

6. Encuentra, mediante Ruffini, las raíces enteras de estos polinomios y factorízalos.

a) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

b) $x^4 - 10x^2 + 9$

7. Simplifica la fracción $\frac{25x^2 - 9}{5x^3 - 3x^2}$.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. AUTOBUSES INTERURBANOS

El consorcio de autobuses interurbanos de cierta ciudad ha estudiado la afluencia de viajeros los viernes por la mañana. Después de obtener los datos y someterlos al estudio de su centro de cálculo, han llegado a la conclusión de que la afluencia de viajeros, en miles, viene dada por la expresión polinómica $V(x) = 27x^3 - 54x^2 + 27x$, donde x es la hora de la mañana según la siguiente relación: $x = 0$ se corresponde con las 6:00 h; $x = 1$, con las 9:00 h, y $x = 2$, con las 12:00 h. Una vez calculada la expresión, se la pasan a todos los institutos de la ciudad para que realicen ciertos cálculos.

1. Lo primero que vas a hacer es factorizar todo lo posible el polinomio $V(x)$. (Saca factor común, aplica las identidades notables, etc.).

2. Ahora vas a calcular cuántos viajeros llegan en cada momento a la terminal. Completa la tabla siguiente, recordando las equivalencias entre horas del día y valor de x.

(Por ejemplo: las 6 h corresponden a $x = 0$, las 7 h corresponde a $x = \frac{1}{3}$, etc.).

	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1			
V (x) (EN MILES)							

3. Entre las 6 h y las 10 h, ¿cuál es la hora punta (hora de máxima afluencia de viajeros)? ¿Y la hora de menor afluencia? ¿Cómo se pueden explicar estos datos?

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. ¿Cuánto deben valer a y b para que esta división sea exacta?

$(x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x + 1)$

2. Fíjate en la transformación que podemos hacer en esta división:

$$(x^4 - 3x^2 + 2x - 6) : (2x - 6) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 6}{2(x - 3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 6}{x - 3}$$

Fijándote en la última expresión, calcula el cociente de la primera división, por la regla de Ruffini.

3. a) Descompón en factores y halla el mín.c.m. y el máx.c.d. de los polinomios:

$P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 4x$ y $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 4x^2$

b) Simplifica la fracción $P(x) / Q(x)$

4. Comprueba que se verifican las igualdades siguientes:

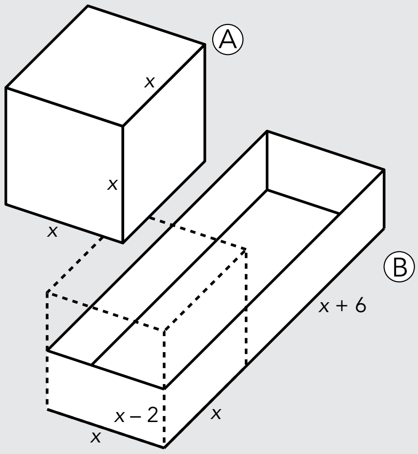
a) $$\left(\frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2x - 3}{x - 1} + 1\right) \cdot \frac{x - 1}{3x - 2} = \frac{1}{x - 1}$$

b) $$\left(\frac{x}{x - y} - 1\right) \cdot \left(\frac{x - y}{y^2}\right) : \frac{1}{y} = 1$$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. AGUA PARA EL GANADO

En una excursión os llevan a una granja-escuela. Allí veis que el encargado está construyendo unos depósitos de agua para el ganado y, viendo sus problemas, decidís ayudarle con los cálculos matemáticos. El ganadero quiere construir dos depósitos de agua. Uno de ellos de forma cúbica para almacenar el agua y el otro, comunicado con este, de modo que tenga la misma anchura, 6 m más de largo y 2 m menos de alto. Este último lo usará como bebedero. El ganadero quiere, además, que los dos tengan la misma capacidad de almacenar agua. Observa el diseño que os enseña el encargado:



1. Lo primero que tenéis que hacer es expresar el volumen de cada depósito en función de la arista, x.

2. Lo siguiente que os pregunta el encargado es de qué dimensiones debe construir cada uno de los dos depósitos para cumplir con la condición de que los dos tengan la misma capacidad.

Unidad 2

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. Cociente: $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

Resto: $2x$

2. a) $C(x) = x^2 - 4x + 6$; $R = -2$

b) $C(x) = 2x^3 + 5x^2 + 10x + 15$; $R = 27$

3. a) 0 b) 3 c) 1

4. a) $2x(x^3 - 4x + 3)$

b) $\frac{x^2}{3}\left(x^3 - \frac{x}{3} + 1\right)$

5. a) $(2x - 3)^2$

b) $(4x + 1)^2$

6. a) $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 3)$

b) $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$

APLICA

1. $V(x) = 27x \cdot (x - 1)^2$

2.

x	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
V (x)	0	4	2	0	4	20	54

3. La hora de mayor afluencia es a las 7h, cuando la gente empieza a llegar para ir a trabajar.

La hora de menor afluencia es a las 9 h, cuando la gente ya está en el trabajo.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. $a = 7$, $b = -2$

2.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 60 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 20 & \boxed{54} \end{array}$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 6x + 20) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + 3x + 10$$

3. a) $P(x) = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

$Q(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot x^2$

máx.c.d. $= x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

mín.c.d. $= x^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

b) $\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot x}$

4. a) $\left(\frac{x^2}{(x-1)^2} - \frac{2x-3}{(x-1)} + 1\right) \cdot \frac{x-1}{3x-2} =$

$$= \frac{(3x-2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)}{(3x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

b) $\left(\frac{x}{x-y} - 1\right) \cdot \left(\frac{x-y}{y^2}\right) : \frac{1}{y} =$

$$= \frac{y}{(x-y)} \cdot \frac{(x-y)}{y^2} : \frac{1}{y} = \frac{1}{y} : \frac{1}{y} = 1$$

APLICA

1. $V_A = x^3$

$V_B = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 6)$

2. El depósito A debe ser un cubo de lado 3 m.

El depósito B debe ser un prisma de lados 3 m, 1 m y 9m.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Completas

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve con la fórmula:

x = ...

Incompletas

$ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve:

x = ...

$ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve:

x = ...

OTROS TIPOS DE ECUACIONES

Bicuadradas

Para resolverlas ....

EJEMPLO: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Con x en el denominador

Para resolverlas ....

EJEMPLO: $\frac{2}{x} + 2x = 5$

Con radicales

Para resolverlas ....

EJEMPLO: $\sqrt{x+1} - 5 = 0$

Ecuaciones exponenciales

Para resolverlas se aplican diferentes procedimientos:

- Se pone el segundo miembro como $2^{x-1} = 16$
- Se toman logaritmos $3^x = 123$
- Se hace un cambio de .... $2^x + 2^{x+1} = 12$

Ecuaciones logarítmicas

Para resolverlas se aplican ....

EJEMPLO: $log_3 (2x - 1) = 2$

Tipo (...) · (...) · (...) = 0

Para resolverlas ....

EJEMPLO: $x \cdot (x + 1) \cdot (2x - 7) = 0$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas de ecuaciones lineales

Se resuelven por los métodos de:

- Sustitución: consiste en ....
  ....
- Igualación : consiste en ....
  ....
- Reducción: consiste en ....
  ....

Sistemas de ecuaciones no lineales

Para resolverlo utilizamos los mismos métodos que en los sistemas de ecuaciones lineales, y los métodos de resolución de ecuaciones no lineales.

INECUACIONES

- Una inecuación es ....
- Las soluciones de una inecuación son ....
  y se expresan en forma de ....
- Las soluciones de un sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita ....
  se obtienen mediante ....

3	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Resuelve estas ecuaciones de 2.° grado, aplicando la fórmula:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

2. Resuelve sin aplicar la fórmula.

a) $x^2 - \frac{5x}{2} = 0$ b) $8x^2 - 32 = 0$

3. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

4. Resuelve las ecuaciones, quitando primero denominadores.

a) $\frac{3}{x} + 9x = 3x + 9$ b) $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} = 5$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5^{x^2 - 2x} = 125$ b) $2\sqrt{x-1} = 4 - x$

6. Resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \cdot y = -30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x + y = 7 \end{cases}$

7. Resuelve las inecuaciones.

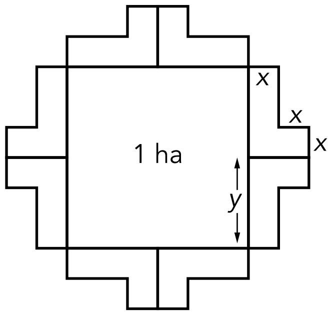
a) $6x - 4 < 2x + 3$ b) $x + \frac{x}{2} \geq 3$

Nombre y apellidos: ....

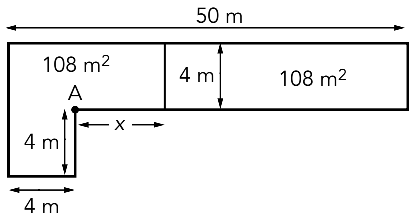
APLICA. LA URBANIZACIÓN

La profesora de matemáticas os propone que diseñéis una urbanización de pisos. Tal como se muestra en el dibujo, se pretende edificar 8 bloques de apartamentos en torno a una gran plaza cuadrada de 1 ha de superficie. Cada bloque debe ocupar 216 m^2.

1. ¿Cuáles deben ser las dimensiones x e y de cada bloque de apartamentos?



2. De cada planta se quieren sacar dos apartamentos como los que ves en el dibujo, de 108 m^2 cada uno. ¿A qué distancia de la esquina A se debe construir el tabique de separación?



3. En la plaza queremos plantar árboles y rosales. La profesora no recuerda cuántos quiere poner de cada especie, para recuerda que hay 8 rosales más que árboles. Además la suma de los cuadrados de ambos números es 424. ¿Cuál es el número de rosales y de árboles que vamos a poner en la plaza?

3

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x+1}{4} = 9$

b) $3x^2 - \frac{4x}{3} = 0$

c) $\frac{5}{x-2} + \frac{x-6}{(x-2)^2} = 2$

d) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

e) $log_2 \left(\frac{x-1}{2}\right) = -1$

f) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$

2. Resuelve los sistemas siguientes.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + xy = 21 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{array}\right\}$

3. Encuentra el intervalo de la recta real que es solución del sistema siguiente:

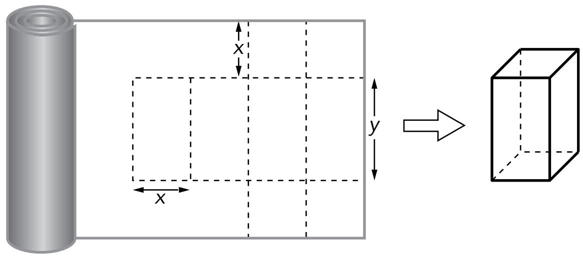
$\left.\begin{array}{r} x + 3 < 4 - x \\ \frac{x}{2} - 3x \le x + 6 \end{array}\right\}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ENVASES PARA ZUMOS

La empresa "Buenzumol" quiere lanzar al mercado envases de tetrabrick de diversas formas con una capacidad de 500 cm^3 (1/2 *l*). Resulta que la persona encargada de los cálculos es amigo de tus padres y te cuenta sus problemas para que veas que incluso un estudiante de ESO puede resolverlos. Añade que, para fabricar los envases, disponen de rollos de cartón plastificado de 30 cm de ancho.

1. La primera opción que tienen es hacer un envase con forma de prisma de base cuadrada, como se ve en el dibujo:



a) ¿Qué dimensiones tendrá el prisma para que, en su desarrollo, ocupe todo el ancho del rollo? (Recuerda que solo nos interesa la solución entera).

b) ¿Qué superficie de cartón se necesitará para cada envase?

2. La segunda opción es hacer un envase con forma de prisma hexagonal regular, cuya altura mida el doble que el lado de la base. El amigo de tus padres te reta a calcular las dimensiones del tetrabrick para que contenga el mismo volumen que en la primera opción.

a) ¿Qué superficie de cartón se necesita para hacer un envase con las medidas anteriores?

b) El amigo de tus padres ya tiene la solución, pero quiere que le digas cuál de los dos envases es más rentable.

3. Cada pack con un número determinado de envases cuesta 6 €. Pero, como oferta, te dice que van a ofrecer que llevándote 3 envases más, cada uno costará 10 céntimos menos y pagarás los 6 €. ¿Sabrías decir cuántos envases hay en el pack original?

¿Y cuál es el precio de cada tetrabrick?

Unidad 3

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $x = 4, \; x = 2$

b) $x = 2$

2. a) $x = 0, \; x = \frac{5}{2}$

b) $x = 2, \; x = -2$

3. a) $x = 3, \; x = -3$

b) $x = 2, \; x = -2$

4. a) $x = 1, \; x = \frac{1}{2}$

b) $x = 1, \; x = \frac{-4}{5}$

5. a) $x = -1, \; x = 3$

b) $x = 2$

6. a) $x = 6, \; y = -5; \; x = -5, y = 6$

b) $x = 4, y = 3$

7. a) $x < \frac{7}{4}$

b) $x \geq 2$

APLICA

1. $x = 4$ m e $y = 50$ m

2. Se debe construir a 19 m de la esquina A.

3. Habrá 18 rosales y 10 árboles.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) $x = \frac{7}{2}, \; x = -5$

b) $x = 0, \; x = \frac{4}{9}$

c) $x = 4, \; x = 3$

d) $x = 2, \; x = 3, \; x = 4$

e) $x = 2$

f) $x = 5$

2. a) $x_1 = -4, \; y_1 = 5; \; x_2 = 5, \; y_2 = -4$

b) $x_1 = \frac{1}{3}, \; y_1 = \frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{-1}{2}, \; y_2 = \frac{-1}{3}$

3. $x \in \left[\frac{-12}{7}, \frac{1}{2}\right)$

APLICA. PROBLEMAS

1. a) El lado de la base mide 5 cm y la altura, 20 cm.

b) Cada envase tiene una superficie de 450 cm^2.

2. a) El apotema de la base mide $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ cm. Así, el lado de la base mide 4,58 cm y la altura mide, 9,16 cm.

Necesitamos 360 cm^2.

b) El hexagonal, porque necesita menos cartón para el mismo volumen.

3. En el pack original había 12 envases.

Cada tetrabrick cuesta 0,5 €.

4	**Lo fundamental de la unidad**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

FUNCIONES

FORMAS DE DAR UNA FUNCIÓN

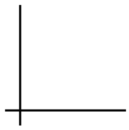
Una función puede darse por:

- Una ....
- …..
- …..
- …..

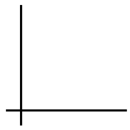
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Una gráfica representa una función si a cada valor de x le ……………………………………………………

EJEMPLOS: Función



No función



CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

Dominio de definición

Es el conjunto de valores de x ………………………

....

....

Causas que pueden limitar el dominio:

....

....

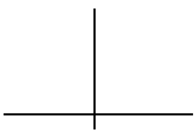
Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

- f es creciente en un intervalo si ……………………
  ………………………………………………………...
- f es decreciente en un intervalo si …………………
  ………………………………………………………...
- f tiene un máximo relativo en un punto cuando ….
  ………………………………………………………...
- f tiene un mínimo relativo en un punto cuando ….
  ………………………………………………………...

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

- Razones por las que una función puede ser discontinua en un punto:

  a) Tiene ramas ………… b) …………………… c) …………………… d) ……………………



- Se dice que una función es continua cuando …………………………………………………………

VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Pendiente de una recta

Es la variación ……………………………………………

La pendiente de una recta se halla así:

- Si conocemos dos puntos: $m =$ ....
- Si conocemos la ecuación de la recta, ...
  ………………………………………………………...

Tasa de variación media en $[a, b]$

- Es la pendiente de ……………………………………
  ………………………………………………………...

  T.V.M. $[a, b] =$ …………………………

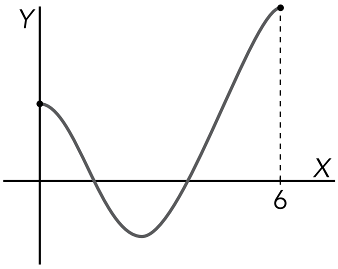
- Mide el grado de: ……………………………………
  ………………………………………………………...

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

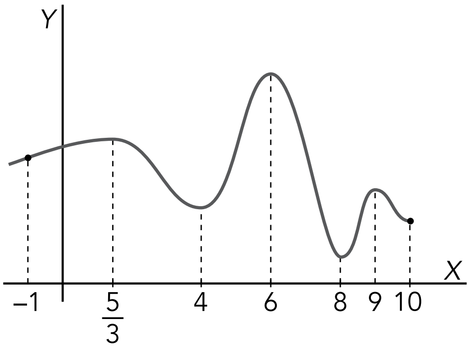
1. Halla el dominio de definición de estas funciones:

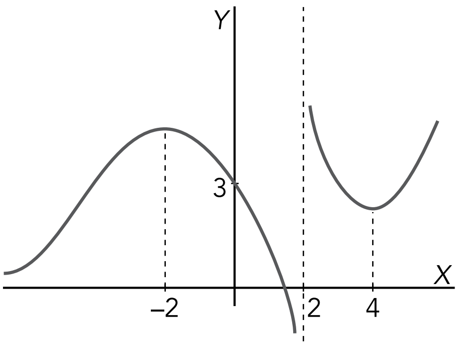
a) 

b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

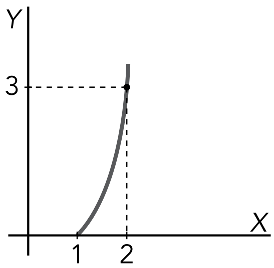
c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

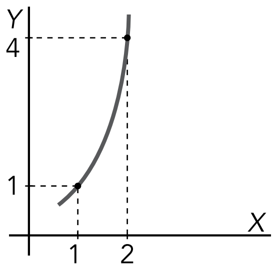
2. Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los valores de x donde las funciones presentan máximo o mínimo relativos, en cada caso.

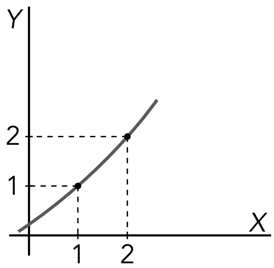
a) 

b) 

3. ¿Cuál de estas funciones crece más “rápido” en el intervalo citado? Averígualo calculando la tasa de variación media en dicho intervalo.

a) 

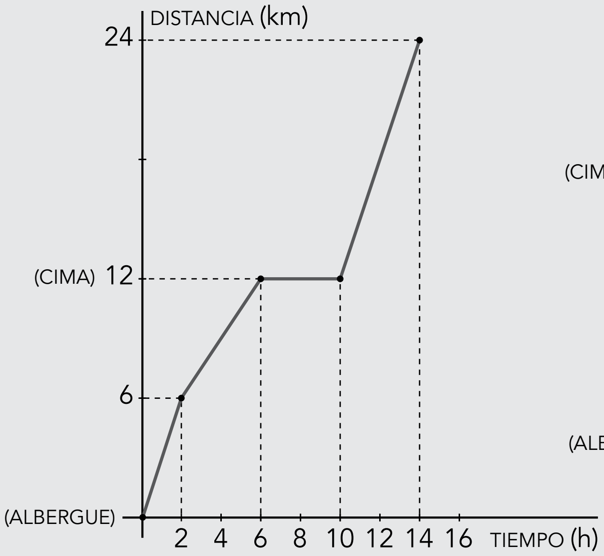
b) 

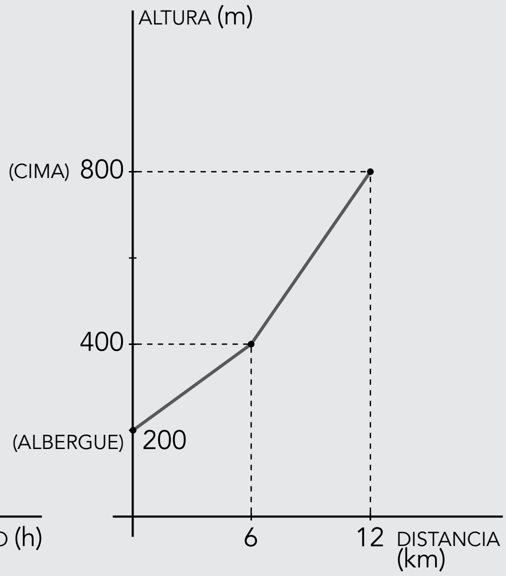
c) 

Nombre y apellidos: ....

APLICA. DÍAS DE SENDERISMO

El instituto ha llevado a hacer senderismo a los estudiantes de Bachillerato. Aprovechando la circunstancia, el profesor de matemáticas os encarga una investigación sobre el día en el campo. La marcha empezó a las 6:00 h y tuvieron que ascender por un monte situado a 12 km del albergue en el que estaban alojados. De las siguientes gráficas, la primera muestra la relación entre el espacio recorrido y el tiempo de caminata, y la segunda, el perfil geológico de la marcha.





1. a) ¿Cuál es el dominio de definición de la función tiempo empleado-distancia recorrida?

b) ¿A qué hora terminó la excursión?

2. La función es, casi siempre, creciente (a más tiempo empleado, más kilómetros recorridos). Sin embargo, se ve un periodo de tiempo donde la gráfica es un trozo de recta horizontal. ¿Cuál es? ¿Cómo interpretas esa situación durante la excursión? ¿En qué kilómetro ocurre eso?

3. A lo largo de las dos primeras horas del recorrido (intervalo [0, 2]), la gráfica crece más rápido que en el intervalo [2, 6]. ¿Cuál es la T.V.M. de la función en cada tramo? Interprétalo observando la gráfica del perfil.

4. Calcula la velocidad empleada en cada uno de los tramos de subida. ¿Cuál es la velocidad media empleada en la subida?

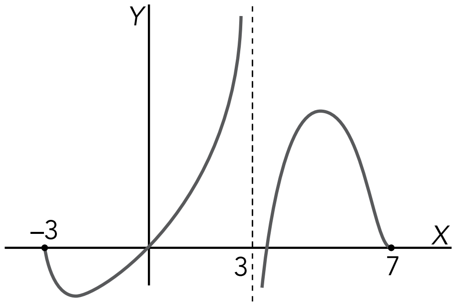
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

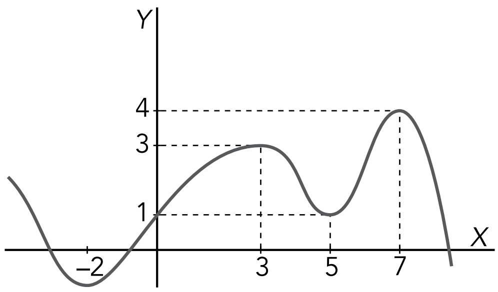
a)



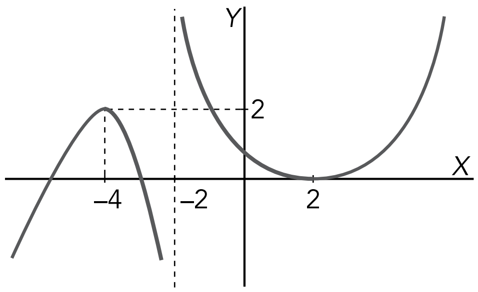
b) $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

2. Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes. ¿Cuáles son sus máximos y mínimos?

a)

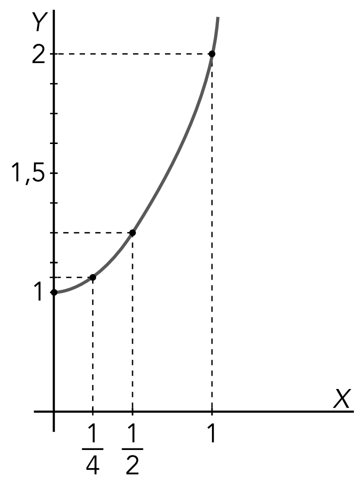


b)



3. Observa esta función. Calcula la tasa de variación media (T.V.M.) en los intervalos [0, 1], $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[0, \frac{1}{8}\right]$ (Puedes ayudarte de la expresión analítica, $y = x^2 + 1$, de la función).

¿Podrías estimar a qué valor tiende la T.V.M. para un intervalo [0, 0 + h] cada vez más pequeño?



Nombre y apellidos: ....

APLICA. CIENCIA-FICCIÓN

Trabajas en el Observatorio Astronómico. A pesar de todas las probabilidades en contra, un hecho fatídico se cierne sobre el planeta: un enorme asteroide va a chocar contra nosotros. Tus compañeros y tú habéis comprobado que cada 3 horas se acerca 4 000 kilómetros más. La única solución que se encuentra es disparar un proyectil con un explosivo de gran potencia que sea capaz de disgregar el asteroide. La ecuación que mide la altura alcanzada por el proyectil, en miles de kilómetros, en función del tiempo es $A = (-t^2/16) + 2t$. En el momento del disparo, el asteroide está a 32 000 km de nuestro planeta. Son las 9:00 h.

1. Tu jefa, con las prisas del momento, te pide que calcules la ecuación que da la distancia que nos separa del asteroide en cada momento. "Y Sánchez", te grita, "¡no olvides que, como viene hacia nosotros, la distancia decrece!"

2. Una vez que tienes la ecuación, te pide que calcules la hora en la que se prevé que el asteroide choque contra la Tierra.

3. Para poder dar el dato a los militares, con el fin de poder disparar el proyectil, tienes que elaborar dos tablas:

a) Una que relacione la distancia a la que está el asteroide según transcurre el tiempo (hazlo cada 3 horas).

b) La otra, que relacione la altura del proyectil con el tiempo transcurrido (parte de 0 y haz los cálculos cada 4 horas).

4. Para facilitar la labor a los militares, decides adjuntar, junto a las tablas, las gráficas de las trayectorias del proyectil y del asteroide. Realiza las gráficas en los mismos ejes coordenados. Además, en tu informe di si impactará el proyectil en el asteroide, a qué hora aproximada y a qué distancia de la Tierra, aproximadamente. Todo esto lo puedes hacer mirando las gráficas. ¡Adelante!

Unidad 4

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $[0, 6]$ b) $\mathbb{R} - \{2\}$ c) $x \geq 1$

2. a) Crece en $\left(-1, \frac{5}{3}\right) \cup (4, 6) \cup (8, 9)$

Decrece en $\left(\frac{5}{3}, 4\right) \cup (6, 8) \cup (9, 10)$

Máximo en $x = \frac{5}{3}$, en $x = 6$ y en $x = 9$.

Mínimo en $x = 4$ y en $x = 8$.

b) Crece: $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

Decrece: $(-2, 2) \cup (2, 4)$

Máximo en $x = -2$. Mínimo en $x = 4$.

3.
$$\left.\begin{array}{l} \text{a) T.V.M.}[1, 2] = \frac{3-0}{2-1} = \frac{3}{2} \\ \text{b) T.V.M.}[1, 2] = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{2} \\ \text{c) T.V.M.}[1, 2] = \frac{2-1}{2-1} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Crecen igual a) y b)} \\ \text{y más rápido que c).}\end{array}$$

APLICA

1. a) $0 \leq t \leq 14$

b) A las 20 h.

2. En $6 \leq t \leq 10$. Período de descanso en la cima.

3. En $[0, 2]$: T.V.M. $= \frac{6}{2} = 3 \rightarrow v = 3$ km/h

En $[2, 6]$: T.V.M. $= \frac{6}{4} = 1,5 \rightarrow v = 1,5$ km/h

En $[0, 2]$ el perfil es más suave: avanzan más rápido.

4. $v_m = \frac{12}{6} = 2$ km/h

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) $[-3, 3) \cup (3, 7]$ b) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

2. a) Crece en $(-2, 3) \cup (5, +\infty)$.

Decrece en $(-\infty, -2) \cup (3, 5)$.

Máximo en $x = 3$ y $x = 7$.

Mínimo en $x = 5$ y $x = -2$.

b) Crece en $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

Decrece en $(-4, -2) \cup (-2, 2)$.

Máximo en $x = -4$. Mínimo en $x = 2$.

3.

INTERVALOS	$[0, 1]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$
T.V.M.	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$

Podemos estimar que la T.V.M. en un intervalo $[0, 0 + h)$ cada vez más pequeño, tiende a ser 0.

APLICA

1. $d = 32 - \frac{4}{3}t$. La distancia se da en miles de kilómetros.

2. El asteroide chocará 24 h después, es decir, a las 9:00 h del día siguiente.

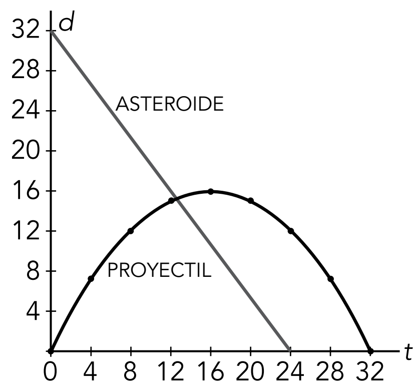
a) ASTEROIDE

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
d	32	28	24	20	16	12	8	4	0

b) PROYECTIL

t (h)	0	4	8	12	16	20	24	28	32
A	0	7	12	15	16	15	12	7	0

3.



5

Lo fundamental de la unidad

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

FUNCIONES ELEMENTALES

LINEALES

- Expresión: ....
- Gráfica: ....
- m = ...
- n es la ....

CUADRÁTICAS

- Expresión: ....
- Gráfica: ....
- Si $a > 0$, ...
- Si $a < 0$, ...
- Vértice en x = ...

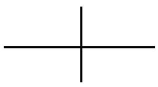
A TROZOS

Su expresión analítica es ....

....

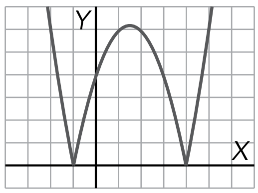
EJEMPLO:

$$\begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$$



FUNCIONES EN VALOR ABSOLUTO

La expresión analítica se obtiene ....



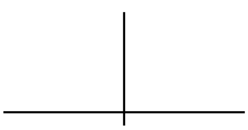
EJEMPLO: $y = |ax^2 + bx + c|$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

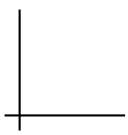
Funciones exponenciales

- Ecuación: y = ...
  - La base tiene que ser ....
  - Es creciente si .... y decreciente si ....
  - Pasa por (0, $\boxed{}$) y (1, $\boxed{}$)
- Dominio de definición: ....
- Gráfica:

a > 1

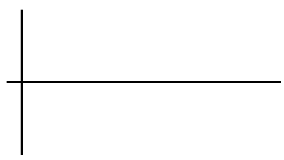


a < 1



Funciones logarítmicas

- Ecuación: y = ...
  - La base tiene que ser ....
  - Pasa por (1, $\boxed{}$) y ($\boxed{}$, $\boxed{}$)
- Dominio de definición: ....
- Su inversa es ....
- Gráfica:



5	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Representa las funciones cuadráticas siguientes:

a) $y = \frac{x^2}{4}$

b) $y = 2x^2 + 6x$

c) $y = -x^2 + 6x - 5$

2. Representa las funciones de proporcionalidad inversa:

a) $y = \frac{3}{x}$

b) $y = -\frac{2}{x}$

c) $y = \frac{1}{x+2}$

3. Representa las funciones radicales:

a) $y = \sqrt{x-1}$

b) $y = \sqrt{x+1}$

c) $y = \sqrt{4-x}$

4. Representa las funciones radicales:

a) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \left| \frac{3x-6}{2} \right|$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. NEGOCIOS

El hermano de Clara quiere abrir una tienda de fotocopias y le pide ayuda para que realice unos cálculos iniciales sobre la rentabilidad del negocio. Como Clara es amiga tuya, quedáis un día para hacer el trabajo. Clara te dice que el proveedor de su hermano asegura que la fotocopiadora trabaja según la siguiente tarifa por copia:

$$y = \frac{5x + 2}{x}$$

donde x es el número de copias e y es el precio expresado en céntimos.

1. En primer lugar, necesitáis saber cómo varía el precio de cada copia según el número de copias. Para ello decidís hacer una tabla para los valores $x = 1, 5, 10, 100, \ldots, 1\,000$, etc. Luego se os ocurre que, quizá, sería muy recomendable ver los datos reflejados en una gráfica y os ponéis a ello. ¿En torno a qué valor se estabiliza el precio por copia?

2. El hermano de Clara le dijo que los gastos que reporta la máquina por su mantenimiento son 15 € por revisarla cada 10 000 copias y 50 € por reponer el tóner de tinta cada 5 000 copias. Os pregunta cuál es el gasto por copia.

3. Se os ocurre que a su hermano le vendría muy bien conocer la función $R(x)$ que da la rentabilidad de la máquina en función del número de copias:

$$R(x) = [\text{Tarifa según el número de copias} - \text{gasto por copia}] \cdot x$$

Junto a su expresión algebraica le dais una tabla de valores y su gráfica aproximada.

4. Si la máquina le ha costado 300 €, ¿con cuántas copias comenzará a amortizarla, es decir, a partir de cuántas copias ganará más de 300 €?

5

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Resuelve, gráfica y analíticamente, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - \dfrac{1}{x-1} \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 2 \end{array}\right\}$$

2. Represente las funciones siguientes:

a)
$$y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & 0 \le x < 2 \\ \sqrt{x-2} & 2 \le x \end{cases}$$

¿Es continua? ¿Por qué?

b) $y = -3 + \sqrt{x-1}$

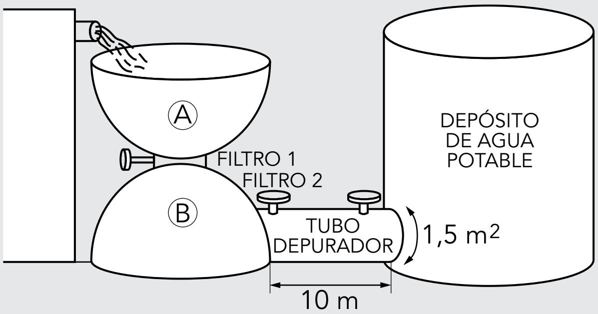
c) $y = 2^{-x} + 1$

d) $y = |x^2 - 4x|$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. INGENIERÍA HIDRÁULICA

Un vecino, que trabaja en la depuradora del ayuntamiento, te enseña el nuevo diseño que van a empezar a construir. Pero antes necesitan tener ciertos datos para ver si de verdad va a ser útil la nueva depuradora. El diseño es el siguiente:



El agua de los embalses llena el pilón A, cuya capacidad es de 90 m^3. Cuando este está lleno, se abre el filtro 1 y comienza a llenarse el pilón B.

1. Los ingenieros aseguran que el pilón A se vacía según los datos de la siguiente tabla:

***t* (h)**	0	1	2	…
V_A (m^3)	90	89,6	88,4	…

Además, suponen que sigue una función decreciente cuadrática $V_A = at^2 + c$. Tu vecino te pide que halles la ecuación de dicha función y que construyas su gráfica. ¿Cuánto tarda el pilón A en vaciarse?

2. Ahora tu vecino te pregunta cuál será la función de llenado del pilón B y en qué momento ambas piletas tienen el mismo volumen de agua.

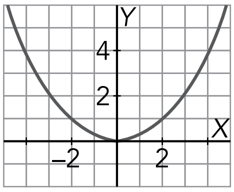
3. Una vez lleno B, se abre la válvula del filtro 2 y pasa un cierto volumen de agua al tubo depurador, cerrándose el filtro 2 una vez que el tubo está lleno. El tubo es un cilindro de sección (área de la base) 1,5 m^2 y longitud 10 m. Se estima que el tiempo de llenado y desinfección del agua es de 1 hora. ¿Qué volumen de agua se desinfecta cada hora?

Unidad 5

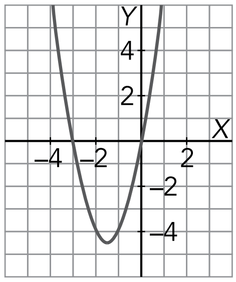
Ficha de trabajo A

PRACTICA

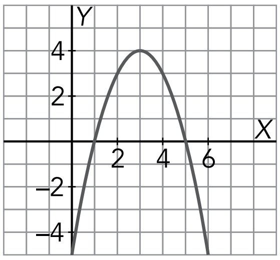
1. a)



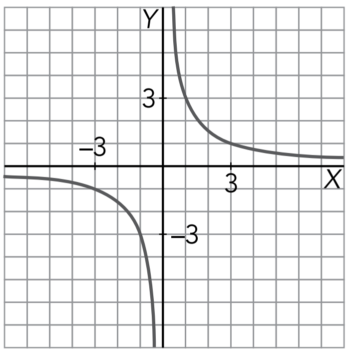
b)



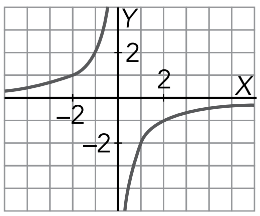
c)



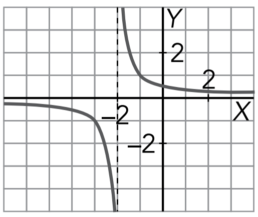
2. a)



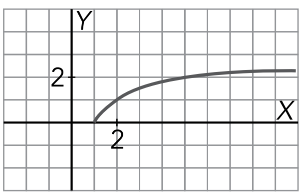
b)



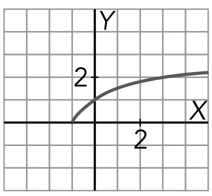
c)



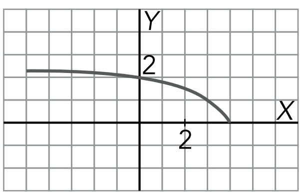
3. a)



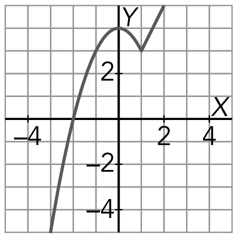
b)



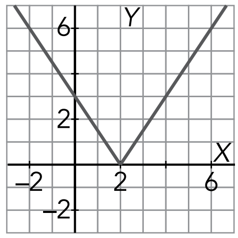
c)



4. a)



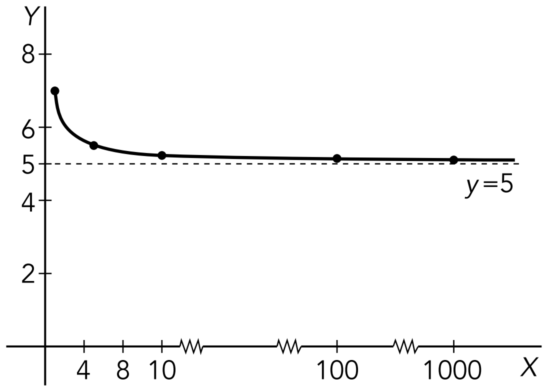
b)



APLICA

1.

x	1	5	10	100	…	1 000
y	7	5,4	5,2	5,02	…	5,002

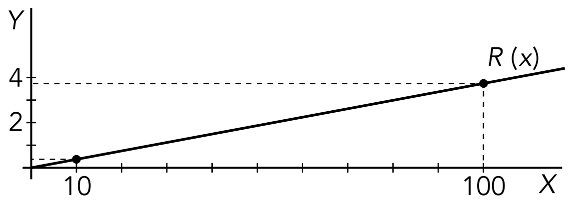


El precio se estabiliza en torno a 5 cént. por copia.

2. $\frac{15}{10\,000} + \frac{50}{5\,000} = \frac{115}{10\,000} = 0{,}0115$ e = 1,15 cént.

3. $R(x) = 3{,}85x + 2$

x	10	…	100	…	1 000
***R* (cént.)**	40,5	…	387	…	3 852
***R* (euros)**	0,40	…	3,87	…	38,52



4. A partir de 7 792 copias.

Unidad 5

Ficha de trabajo B

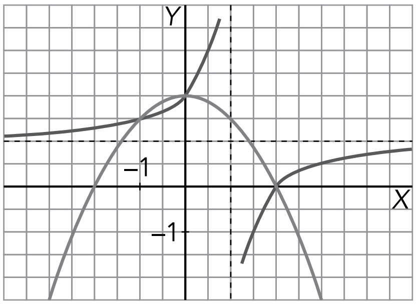
PRACTICA

1. Soluciones de la ecuación $1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{2} + 2$ son:

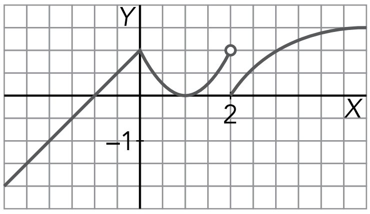
$x = 0,\ y = 2$

$x = 2,\ y = 0$

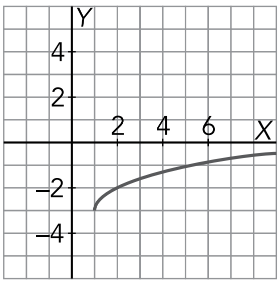
$x = -1,\ y = \frac{3}{2}$



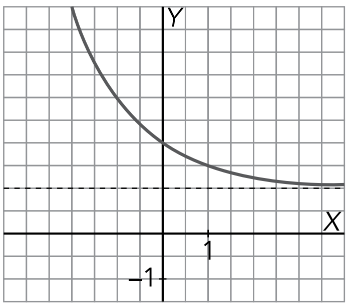
2. a)



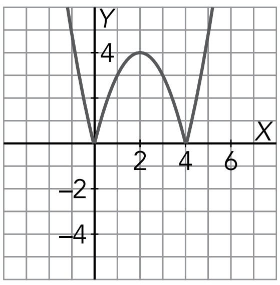
b)



c)



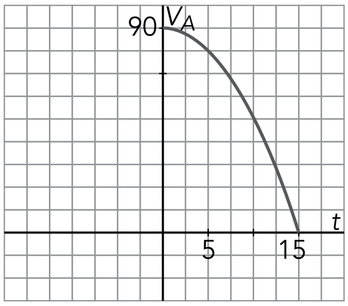
d)



APLICA

1. $V_A = -0{,}4t^2 + 90$

Se vacía en $t = 15$ h.



2. $V_B = 0{,}4t^2$

El volumen de ambos se iguala cuando

$0{,}4t^2 = -0{,}4t^2 + 90 \rightarrow t = 10{,}6$ horas

3. 15 m^3

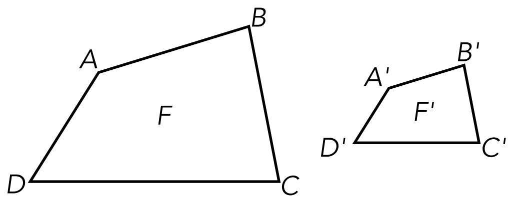
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son ....

y sus distancias ....



Por ejemplo, si las figuras F y F' son semejantes, entonces $\widehat{A}$ = …, $\widehat{B}$ = …, … = …, … = …

Además, si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{A'B'}$, entonces $\overline{BC}$ = ..., $\overline{CD}$ = ..., $\overline{DA}$ = ..., $\overline{AC}$ = ...

y la razón de semejanza es ....

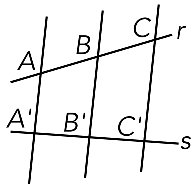
La **relación entre las áreas** de dos figuras semejantes es ....

La **relación entre los volúmenes** de dos figuras semejantes es ....

TEOREMA DE TALES

Dos rectas, r y s, cortadas por segmentos paralelos determinan segmentos .... Es decir:

.... = ... = ...



TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES

Los triángulos ABC y $AB'C'$ están en posición de Tales porque tienen un ángulo .... y los lados opuestos ....

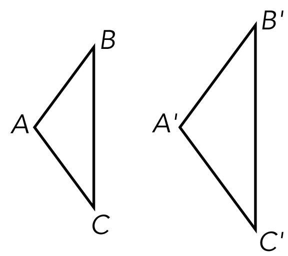
Los triángulos en posición de Tales son ....

y se verifica que .... = ... = ...

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

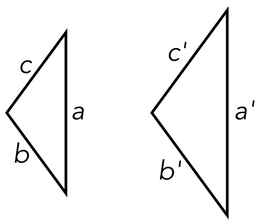
Dos triángulos son semejantes si cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Tienen dos ángulos ....



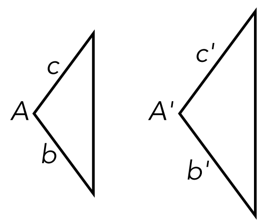
$\widehat{A}$ = …, $\widehat{B}$ = …, $\widehat{C}$ = …

- Sus lados son ....



$\dfrac{a}{a'}$ = … = …

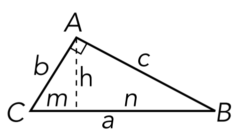
- Tienen un ángulo igual y los lados ....



$\widehat{A}$ = …, $\dfrac{b}{b'}$ = …

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen ....

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

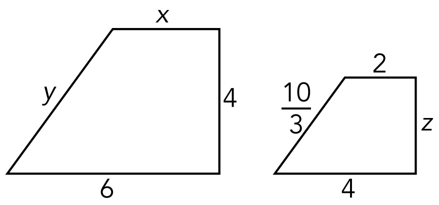
Teorema del cateto: $c^2 = a \cdot n$; $b^2 = a \cdot m$

Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$

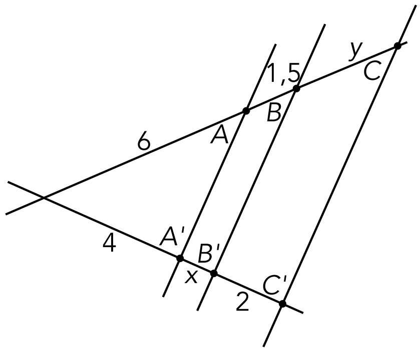
6	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

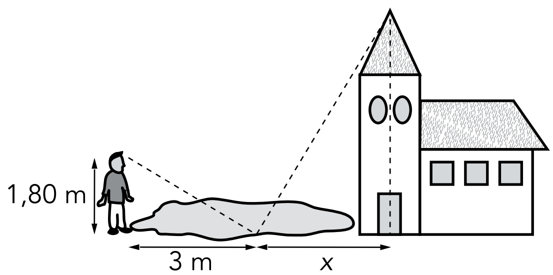
1. Calcula los datos que faltan, sabiendo que estos polígonos son semejantes:



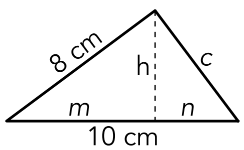
2. Aplica el teorema de Tales y calcula la longitud de los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{BC}$.



3. Ramiro observa que la torre de la ermita (30 m) se refleja distorsionada sobre el agua del estanque que la rodea. Situándose en la orilla opuesta y tomando las medidas que se indican, ¿cuál es la anchura máxima del estanque?



4. Calcula las medidas que faltan en el triángulo rectángulo siguiente:

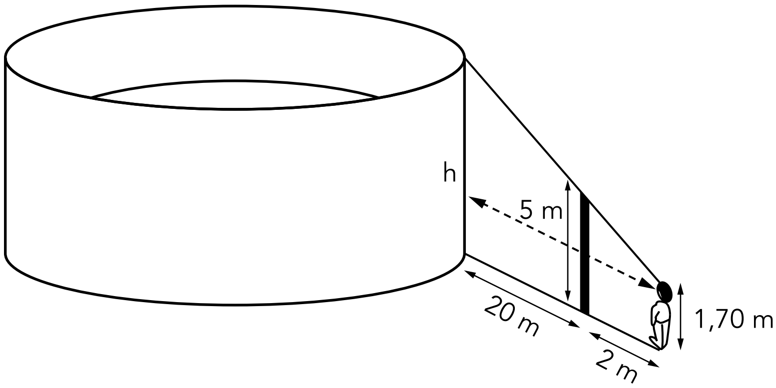


Nombre y apellidos: ....

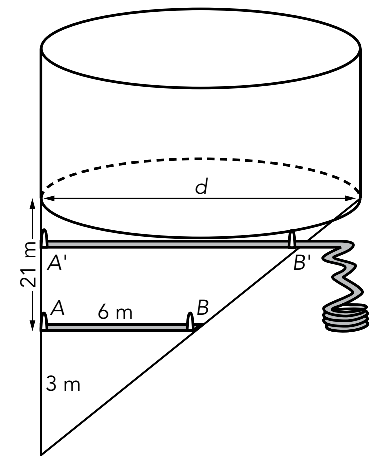
APLICA. LA PLAZA DE TOROS

En una localidad han decidido reformar la plaza de toros. Para ello quieren alicatarla por fuera con azulejos esmaltados, además de otras reformas. La profesora de matemáticas os propone en clase que sigáis los mismos pasos que han seguido los técnicos para realizar su tarea.

1. En primer lugar, se necesita saber la altura de la plaza, pero los planos con los que se construyó se han perdido y hay que medir todo de nuevo. Deciden hacerlo ayudándose de la semejanza de triángulos, tal como se indica en el dibujo. La profesora os informa de que el operario medía 1,70 m. ¿Cuál es la altura de la plaza?



2. Ahora necesitamos conocer el diámetro de la plaza. Para medirlo, se fija una tangente a la plaza, $A'B'$ y, a continuación, una cuerda entre dos estacas, AB, paralela a la tangente, como puedes ver en el dibujo. ¿Cuál es el valor del diámetro?



3. Con los datos de los dos problemas anteriores, calcula cuál es la superficie que deben alicatar los operarios.

Ficha de trabajo B

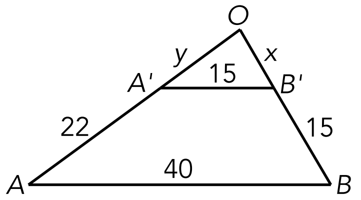
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

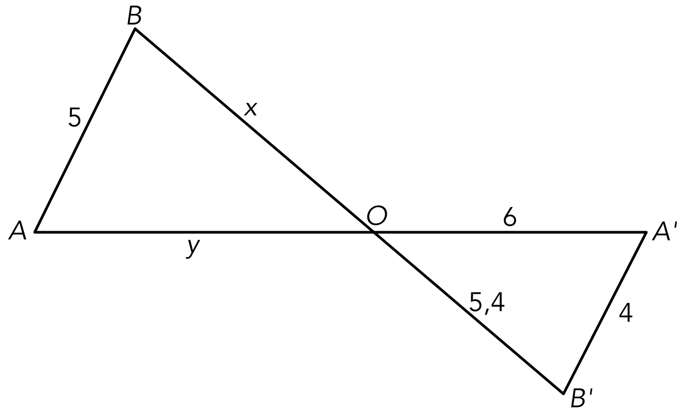
PRACTICA

1. Calcula la longitud de los datos que faltan en estas figuras.

a)



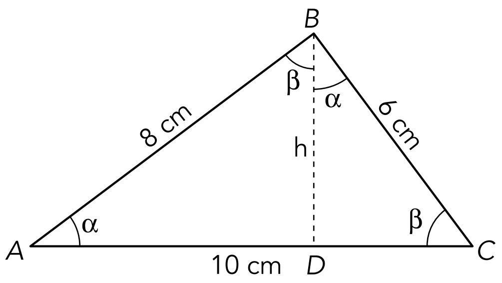
b)



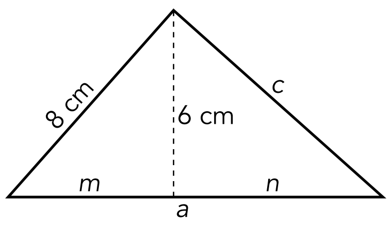
2. Observa esta figura ($\widehat{ABC}$ es triángulo rectángulo).

a) ¿Por qué son semejantes $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABD}$? ¿Y $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BDC}$?

b) Aplica el apartado anterior para calcular h, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$.



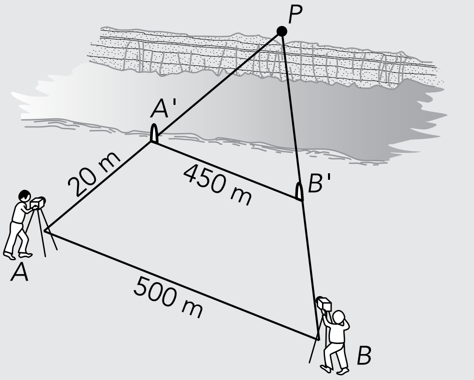
3. Calcula el área del triángulo de la figura. ¿Cuál será el área de un triángulo semejante a él y de perímetro 58,4 m?



Nombre y apellidos: ....

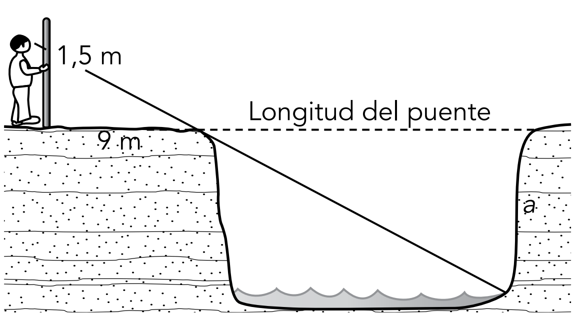
APLICA. CONSTRUYENDO UN PUENTE

El gobierno autonómico va a construir un puente sobre el río a las afueras de tu localidad. Una tarde te pasas por allí para ver cómo lo hacen. Ves que los topógrafos han tomado posiciones delimitando un trapecio, desde cuyos vértices *A* y *B* se ve un punto *P* en la otra orilla del río, tal como aparece en el dibujo de la derecha:

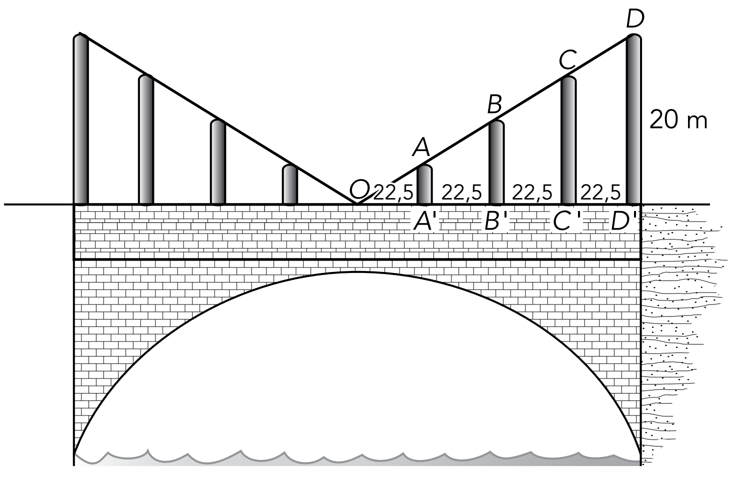


1. A la vista del dibujo y de los datos que te aporta, ¿cuál será la longitud del puente *A'P*?

2. Mientras ves cómo empiezan a trabajar los topógrafos, te preguntas cómo se las apañarán para calcular la altura mínima que debe tener el puente. Por suerte estás cerca de un par de técnicos y les oyes decir que usando un bastón marcador de 1,5 m y alejándose 9 m de la orilla, pueden ver el fondo de la orilla opuesta (observa el dibujo). ¿Cuál es la altura del talud?



3. Por último, te enteras de que van a poner postes de acero verticales en los laterales del puente, tal como ves en el dibujo. Has oído a uno de los técnicos que el más alto será de 20 m, pero te preguntas cuánto medirán los otros.



Unidad 6

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. $x = 3$, $y = 5$, $z = 2{,}67$

2. $x = 1$, $y = 3$

3. $x = 50$ m → La anchura es 53 m.

4. $C = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$c^2 = a \cdot n$; $36 = 10 \cdot n$; $n = 3{,}6$

$m = 6{,}4$; $h = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8$

APLICA

1. La altura es de 38 m.

2. El diámetro es de 48 m.

3. La superficie lateral es de 5730,265 m^2.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) $x = 8{,}75$; $y = 12{,}75$

b) $x = 6{,}75$; $y = 7{,}5$

2. a) $\widehat{ABC} \sim \widehat{ABD}$ por tener dos ángulos iguales. Análogamente, $\widehat{ABD} \sim \widehat{BDC}$ (ángulos respectivamente iguales).

b) Comparando $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABD}$ tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}};\ \frac{10}{8} = \frac{8}{x} \begin{cases} x = 6{,}4 = \overline{AD} \\ \overline{DC} = 3{,}6 \end{cases}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}};\ \frac{10}{6} = \frac{8}{h} \left\{ h = 4{,}8 \right.$$

3. $m^2 = 8^2 - 6^2 = 28$; $m \simeq 5{,}3$

$h^2 = m \cdot n$; $36 = 5{,}3 \cdot n$; $n \simeq 6{,}8$

$a = m + n \simeq 12{,}1$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq 9{,}1$

Perímetro = 29,2 m. Área = 36,3 m^2.

Si el nuevo perímetro es $58{,}4 = 2 \cdot 29{,}2$, el área será 4 veces mayor: 145,2 m^2.

APLICA

1. La longitud del puente es de 180 m.

2. La altura es de 30 m.

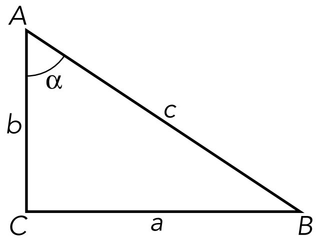
3. Habrá dos postes de 20 m, dos de 15 m, dos de 10 m y dos de 5 m.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

TRIGONOMETRÍA

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO



sen α = ...

cos α = ...

tg α = ...

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

	30°	45°	60°
sen **α**			
cos **α**			
tg **α**			

RELACIONES FUNDAMENTALES

Son: I) ....

II) ....

Sirven para obtener ....

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS

Resolver un triángulo es hallar ....

- Triángulos rectángulos: para resolverlos se utiliza ....
- Triángulos oblicuángulos: para resolverlos es necesario trazar ....

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ENTRE 0° Y 360°

Representación de ángulos

- Se utiliza una circunferencia de radio .... y centro en .... que se llama ....
- Para representar un ángulo en la circunferencia se procede así:
  - – Su vértice en ....
  - – Uno de sus lados sobre ....
  - – Para situar el otro lado se mide el ángulo en sentido ....

Unidades de medida angular

El radián es un ángulo tal que .... 1 rad = ...°

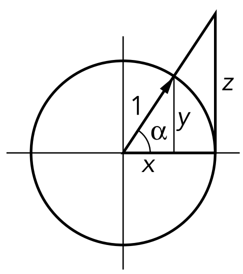
Para pasar de grados a radianes se utiliza α° = ...

Seno, coseno y tangente

Si $0° \leq a \leq 360°$:

sen α = ... *cos* α = ... *tg* α = ...

Los ángulos que no tienen tangente son los de..........................



Ficha de trabajo A

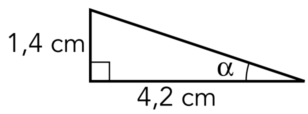
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

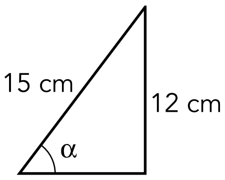
PRACTICA

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada caso:

a)



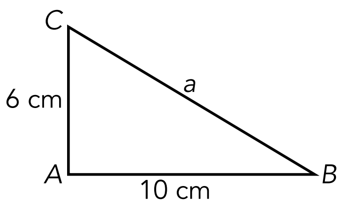
b)



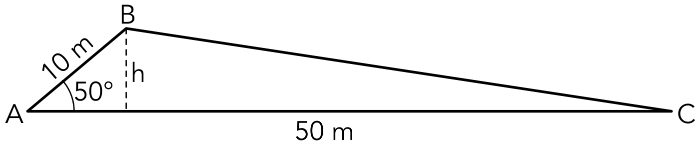
2. Si $sen\, \alpha = \frac{2}{5}$, calcula $cos\, \alpha$ y $tg\, \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales $(0 < \alpha < 90°)$.

3. Sabiendo que $tg\, \alpha = 2$, calcula, en forma de radical, el valor de $sen\, \alpha$ y $cos\, \alpha$ $(\alpha < 90°)$.

4. Resuelve (halla los lados y ángulos desconocidos) el siguiente triángulo:



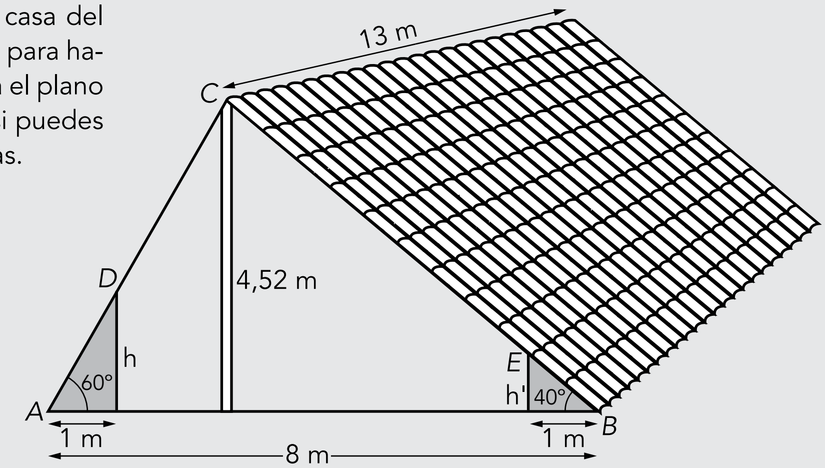
5. Calcula el área de este triángulo (calcula primero la altura sobre la base).



Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA BUHARDILLA

Unos tíos tuyos quieren construir una buhardilla sobre su casa del pueblo y te piden ayuda para hacer los cálculos. Observa el plano que te da tu tía y a ver si puedes contestar a sus preguntas.



1. ¿A qué distancia de A y de B habrá que poner la viga de máxima altura?", te pregunta tu tía. ¿Qué le contestas?

2. "Oye, me vendría bien que me dijeras cuál va a ser la altura de las puertas de los armarios, h y h', para comprar la madera". Halla el dato que te pide tu tío.

3. Una vez hechos los armarios, tus tíos quieren forrar de madera toda la superficie de los techos y te preguntan cuál es esa superficie. (Son rectángulos de longitud 13 m y anchura $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$ respectivamente).

4. Además, quieren poner radiadores para calentar la buhardilla. Te dicen que cada uno calienta unos 30 m^3. ¿Cuántos radiadores necesitarán para toda la buhardilla? (Debes calcular el volumen útil de la buhardilla, esto es, descontando el volumen de los armarios).

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Dibuja dos ángulos en la circunferencia goniométrica cuyo seno sea $\frac{3}{4}$, y halla su coseno y su tangente.

2. Sabiendo que $tg\ \alpha = -3$ y que $0 < a < 180°$, halla, $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$. ¿Cuál es el ángulo α?

3. Sabiendo que $sen\ 40° \simeq 0,64$, calcula:

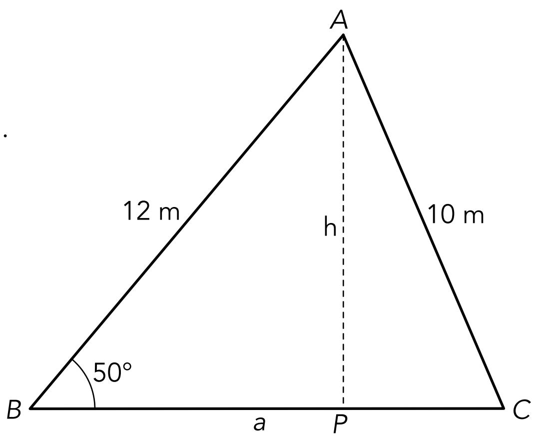
a) $cos\ 40°$ b) $tg\ 130°$ c) $sen\ 220°$ d) $cos\ 320°$

4. En el triángulo de la figura, calcula:

a) Altura h. b) Longitud $\overline{BP}$.

c) Longitud $\overline{PC}$. d) Longitud $\overline{BC}$ = a.

e) Área.

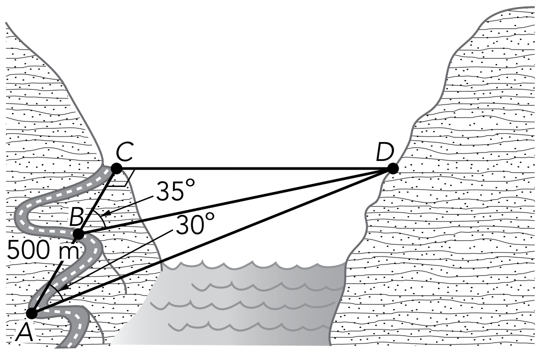


Nombre y apellidos: ....

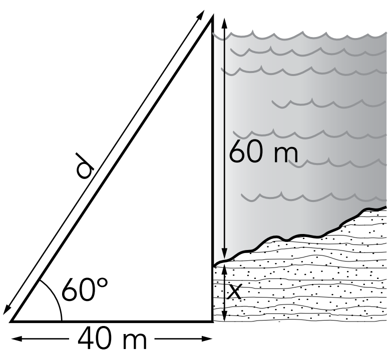
APLICA. LA GRAN PRESA

Paula suele veranear todos los años en un pueblo, cerca del cual van a construir una presa. Curiosamente, una amiga de su madre está en el equipo de trabajo y un día la lleva a ver las obras. Paula aprovecha para hacerle muchas preguntas sobre cómo se diseña y se construye una presa de este tipo.

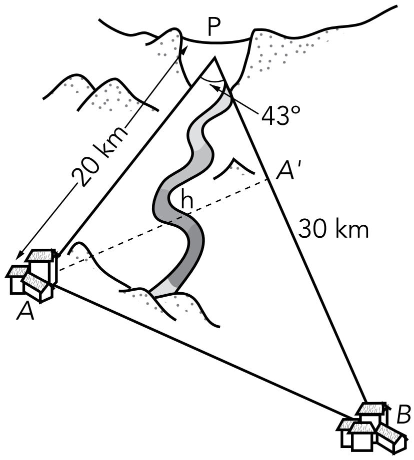
1. En primer lugar, Paula quiere saber cómo calculan la anchura de la presa. Su amiga le enseña los dibujos preliminares y le dice. "Bueno, con estos datos, hasta tú puedes calcular la anchura, CD, de la presa". ¿Cuál es esa anchura?



2. Después, Paula le pregunta por la construcción de la presa. Observa el dibujo que vio Paula y calcula la altura, *x*, de los cimientos. Aprovecha, también, para calcular la longitud *d* de la rampa de caída.



3. Paula se ha enterado de que la presa va a dar servicio eléctrico a los pueblos *A* y *B*, tendiendo cables de alta tensión entre la presa y cada uno de los pueblos, y entre los propios pueblos. Esta vez no hace falta que pregunte nada, porque su amiga le asegura que, desde la presa, los pueblos se ven bajo un ángulo de 43°. ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos? (Calcula primero $\overline{AA'}$).



Unidad 7

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $tg\ \alpha = 0{,}33$ $\quad cos\ \alpha = 0{,}95$

$sen\ \alpha = 0{,}32$

b) $sen\ \alpha = 0{,}8$ $\quad cos\ \alpha = 0{,}6$

$tg\ \alpha = 1{,}3$

2. $cos\ \alpha = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = 0{,}92$ $\quad tg\ \alpha = 0{,}43$

3. $1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha}$; $\ cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$sen\ \alpha = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. $a = 11{,}66$

$\widehat{B} = 30°\ 57'\ 50''$ $\quad \widehat{C} = 59°\ 2'\ 10''$

5. $h = 7{,}66 \rightarrow A = 191{,}5\ m^2$

APLICA

1. A 2,61 m de *A* y a 5,39 m de *B*.

2. h = 1,73 m

h' = 0,84 m

3. La parte izquierda del techo es un rectángulo de 13 m de ancho y 3,22 de alto. Su superficie es de 41,86 m^2.

La parte derecha tiene 13 m de ancho y 5,74 m de alto. Su superficie es de 74,62 m^2.

4. La altura de la viga más alta es de 4,52 m.

El volumen de la buhardilla es 235,04 m^3.

El volumen de los armarios es 11,245 m^3 y 5,46 m^3, respectivamente.

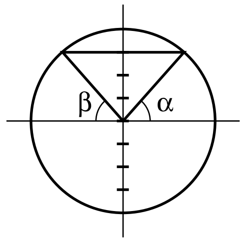
Por tanto, el volumen que se debe calentar es de 218,335 m^3.

Así, se necesitan 218,335 : 30 = 7,28 ≈ 8 radiadores.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1.



$cos\ \alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$cos\ \alpha = 0{,}66$

$cos\ \beta = -0{,}66$

$tg\ \alpha = 1{,}13$

$tg\ \beta = -1{,}13$

2. $cos\ \alpha = -0{,}31$

$sen\ \alpha = 0{,}9$

$\alpha = 108°\ 26'$

3. a) $cos\ 40° = 0{,}77$ $\quad$ b) $tg\ 130° = -1{,}19$

c) $sen\ 220° = sen\ (180° + 40°) = -sen\ 40° = -0{,}64$

d) $cos\ 320° = cos\ (360° - 40°) = cos\ 40° = 0{,}77$

4. $h = 12 \cdot sen\ 50° \simeq 9{,}19$ m

$\overline{BP} = 12 \cdot cos\ 50° \simeq 7{,}71$ m

$\overline{PC} = \sqrt{10^2 - h^2} = 3{,}94$ m

$\overline{BC} = 11{,}65$ m

Área = 53,53 m^2

APLICA

1. La anchura de la presa es 1,67 km.

2. Los cimientos medirán 9,28 m de altura.

La rampa mide 80 m.

3. La distancia entre los pueblos es de 20,55 km.

8	**Lo fundamental de la unidad**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

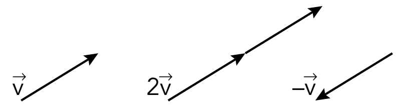
GEOMETRÍA ANALÍTICA

VECTORES EN EL PLANO

- Dos vectores **son iguales** cuando ....
- Las **coordenadas del vector** $\overrightarrow{AB}$ son ....
- El **módulo del vector** $\overrightarrow{AB}$ es ....
- Si dos vectores tienen **la misma dirección,** sus coordenadas ....

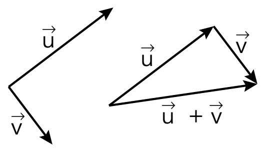
- El producto de un vector por un número es...........

EJEMPLO:



- Para sumar dos vectores ....

EJEMPLO:

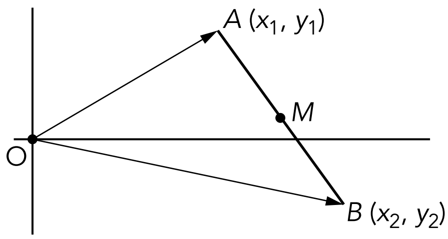


PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio M de un segmento de extremos A y B son:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\rightarrow$ $M(\boxed{}, \boxed{})$

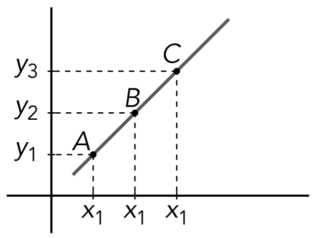
Por ejemplo, si $A(3, -6)$ y $B(-1, 4)$, entonces las coordenadas del punto medio son: $M(\boxed{}, \boxed{})$



PUNTOS ALINEADOS

Los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ...., es decir, si sus coordenadas son ....

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\boxed{}}$

Por ejemplo, si $A(3, -7)$ y $B(8, 5)$, entonces d = ...

ECUACIONES DE LA RECTA

- Las ecuaciones de la recta que pasa por $P(p_1, p_2)$ y tiene como vector dirección $\vec{v}\,(d_1, d_2)$ son:

  Ecuación vectorial: .... **Ecuación en forma continua:** ....

  Ecuaciones paramétricas: .... **Ecuación explícita:**...................................

- La relación entre la **pendiente de r y su vector dirección** es ....
- Si dos rectas son **paralelas,** sus pendientes ....
- Si dos rectas son **perpendiculares,** sus pendientes ....

8	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Dados los puntos $A(-3, 5)$ y $B(5, 3)$, halla:

a) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.

b) El punto medio del segmento AB.

2. Comprueba si están alineados los puntos A, B, C, en los casos siguientes:

a) $A(2, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-2, -5)$

b) $A(2, 3)$, $B(3, 7)$, $C(-2, -3)$

3. Calcula el perímetro del triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(8, 0)$ y $C(11, 8)$.

4. En el ejercicio anterior, calcula la ecuación de la recta AC y la ecuación de la recta perpendicular a ella que pasa por B. ¿En qué punto, D, ambas rectas se cortan?

5. Dada la recta $3x - 2y + 5 = 0$, calcula su pendiente y halla:

a) Ecuación de la recta r paralela a ella que pasa por $A(1, -5)$.

b) Ecuación de la recta s perpendicular a ella por $B(-3, 4)$.

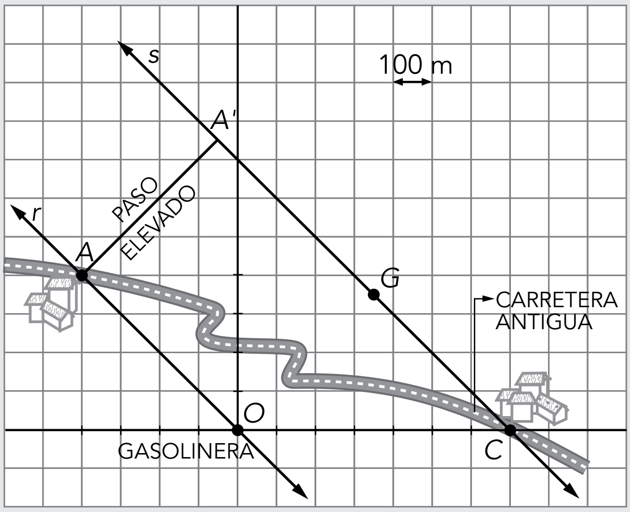
c) ¿Cómo son las rectas r y s, entre sí? (Observa la pendiente de ambas).

d) Escribe un vector dirección de r y otro de s.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. INFRAESTRUCTURAS VIARIAS

En un estudio de ingeniería civil se van a proyectar unas autovías que sustituyan a una antigua carretera en muy mal estado y con muchas curvas. La antigua carretera va desde A hasta C, y ahora quieren construir dos ramales paralelos, uno que pase por A y otro que pase por C. Para hacer el informe, se han colocado unos ejes coordenados con centro en O (la gasolinera).



1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa el ramal r?

2. ¿Y cuál es la ecuación del ramal s?

3. Desean diseñar otro ramal que comunique A con A', perpendicular a ambas autovías. ¿Qué ecuación tendrá la recta AA'? ¿Cuáles son las coordenadas de A'? ¿Qué longitud tendrá el paso elevado?

4. Quieren construir otra gasolinera, G, en la autovía s y que esté en la perpendicular a r pasando por O. ¿Qué coordenadas tendrá G? Es conveniente que calcules primero la ecuación de la recta OG.

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Calcula las coordenadas del punto A', simétrico de $A(-4, 5)$, respecto al punto $P(-6, -3)$.

2. Dado el triángulo de vértices $A(-5, 1)$, $B(-2, -4)$ y $C(4, 5)$, halla:

a) Su perímetro.

b) La ecuación de la recta r perpendicular a AB que pasa por C.

c) Punto D de corte de AB con r.

d) Distancia $\overline{CD}$.

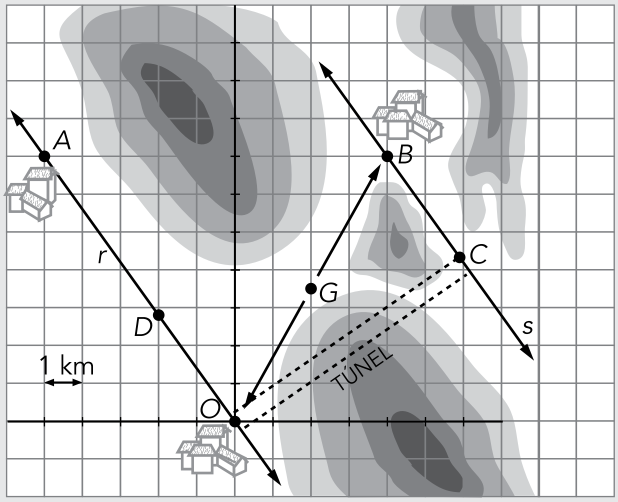
e) Área del triángulo $\widehat{ABC}$.

3. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -4)$ y tiene como vector dirección $\overrightarrow{PA}$, siendo $A(-3 , 2)$.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CARRETERAS DE MONTAÑA

En una zona de montaña, las autoridades quieren proyectar un nuevo sistema de carreteras. Pretenden construir dos tramos paralelos de autovía por los valles de la zona. Los topógrafos han elaborado un mapa orográfico sobre unos ejes coordenados para facilitar los cálculos de los ingenieros. Sofía está en el equipo de planificación y os enseña el mapa para que la ayudéis con los cálculos. El centro del sistema de coordenadas lo han puesto en una localidad cercana. Este es el mapa:



1. "Vamos a ver, chicos. Según el plano, ¿cuáles son las coordenadas de *O* y de *A*? Una vez que las hayáis calculado, ¿cuál es la ecuación de la carretera *r*?"

2. "Supongo que ahora os resultará más fácil decirme cuál es la ecuación de la autovía *s* que pasa por *B*".

3. "Acaban de decirme que quieren construir un nuevo ramal entre *O* y *B* con una gasolinera, *G*, en su punto medio. Tenemos que calcular la ecuación de este nuevo ramal, las coordenadas de *G* y la distancia de la gasolinera hasta *B* (mirad, en el plano, a qué distancia equivale una unidad)".

4. "Los ingenieros quieren construir un túnel que una las autovías *r* y *s*, y que sea perpendicular a ambas. Una de las entradas debe estar en *O*. ¿Qué ecuación tendrá? ¿Qué coordenadas tendrá la otra salida del túnel, *C*?"

Unidad 8

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $\overrightarrow{AB}(8, -2)$; $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{17}$

b) $M(1, 4)$

2. a) Sí están alineados.

b) No están alineados.

3. $P = d(A, B) + d(B, C) + d(A, C) =$

$= \sqrt{45} + \sqrt{73} + \sqrt{106} \approx 25{,}54$

4. Recta AC: $y = \frac{5x}{9} + \frac{17}{9}$

- Recta perpendicular a AC por B:
  $y = \frac{9x}{5} + \frac{72}{5}$
- Punto D de corte:
  $y = \frac{5x}{9} + \frac{17}{9} = -\frac{9x}{5} + \frac{72}{5}$
  $D = \left(\frac{563}{106}, \frac{513}{106}\right)$

5. $m = \frac{3}{2}$

a) $y + 5 = \frac{3}{2}(x - 1)$

b) $y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 3)$

c) Perpendiculares.

d) Por ejemplo, $\vec{d_r} = (2, 3)$ y $\vec{d_s} = (-3, 2)$

APLICA

1. $y = -x$

2. $y = -x + 7$

3. La recta AA' tiene como ecuación $y = x + 8$.

Las coordenadas de A' son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

El paso elevado tendrá, aproximadamente, 495 m.

4. La ecuación de OG es $y = x$.

Las coordenadas de G son $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. $A'(-8, -11)$

2. a) 26,41 u

b) $y - 5 = \frac{3}{5}(x - 4)$

c) $D\left(\frac{-149}{34}, \frac{-1}{34}\right)$

d) $d(C, D) = 9{,}78$ u

e) $A = \frac{d(A, B)\cdot d(C, D)}{2} \approx 28{,}09\ u^2$

3. Vectorial: $(x, y) = (1, -4) + t(-2, 3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{3}$

Explícita: $y = \frac{-3x}{2} - \frac{5}{2}$

APLICA

1. Las coordenadas de O son (0, 0); las de A, (–5, 7). La ecuación es $y = -\frac{7}{5}x$.

2. La ecuación es $y = -\frac{7}{5}x + \frac{63}{5}$.

3. La ecuación del nuevo ramal es $y = \frac{7}{4}x$.

Las coordenadas de G son $\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

La distancia de la gasolinera a O es 4,03 km.

4. La ecuación del túnel es $y = \frac{5x}{7}$.

Las coordenadas de C son $\left(\frac{441}{74}, \frac{2\,205}{518}\right) \simeq$
$\simeq (5{,}96; 4{,}26)$.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA. NOCIONES GENERALES

- Población: es el conjunto ....
- Individuo: es cada uno de ....
- Muestra: es un subconjunto ....
- Caracteres: son los aspectos ....

EJEMPLOS:

- Variables cuantitativas son las que ....
  ....

  Puedes ser de dos tipos:
  - Discretas si ....
  - Continuas si ....
- Variables cualitativas son las que ....

EJEMPLOS:

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Media: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$

x_i son los valores de .... en datos aislados o la .... en datos agrupados.

f_i son las ....

Varianza: *Var* = ...

Desviación típica σ = ...

Coeficiente de variación CV = ...

EJEMPLOS:

Calcular $\bar{x}$, *Var*, σ y CV para los datos siguientes:

3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9

MEDIDAS DE POSICIÓN

Cada una de las medidas de posición es un parámetro que divide a la población en dos trozos de tamaños previstos.

- La mediana, *Me*, parte a la población en dos trozos ....

Es decir, el ...... % de la población mide menos que *Me* y el ...... % mide más.

- El cuartil inferior, Q_1, deja por debajo al ...... % y por encima al ...... %.
- El cuartil superior, Q_3, deja por debajo al ...... % y por encima al ...... %.

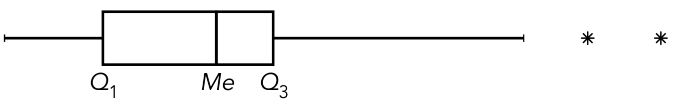
EJEMPLO: Di cuáles son la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

2, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

DIAGRAMAS DE CAJA

Los diagramas de cajas se construyen del siguiente modo:

- La población total se parte en .... trozos.
- El .... % de los valores centrales se representan en una ....
- Los valores extremos se representan mediante ....



Q_1 es el .... ; Q_3 es el .... ; M_e es la ....

Ficha de trabajo A

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Dada la distribución:

3 3 3 4 4 5

5 6 6 8 8 8

Completa la tabla siguiente:

x_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
3			
4			
5			
6			
8			

2. Con ayuda de la tabla, calcula los parámetros $\bar{x}$, σ y C.V.

3. Completa ahora esta otra tabla:

x_i	f_i	F_i	EN %
3			
4			
5			
6			
8			

4. Con los datos de la segunda tabla, calcula Q_1, Me y Q_3.

5. Haz el diagrama de caja correspondiente a esta distribución.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CONTROL DE LIMITACIÓN DE VELOCIDAD

En un punto conflictivo de una carretera existe un limitador de velocidad a 90 km/h. Se ha hecho un estudio estadístico, midiendo por radar la velocidad de los vehículos que han pasado por allí durante una hora. El resultado, correspondiente a 30 coches, ha sido el siguiente:

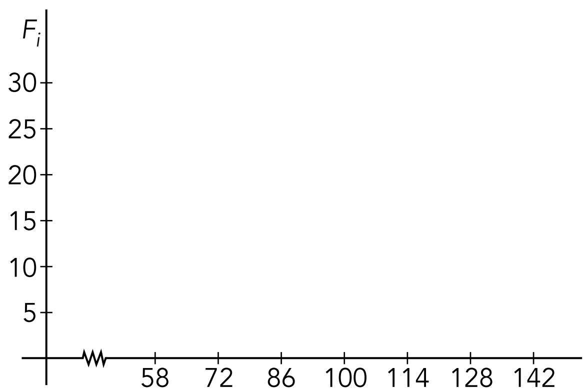
100	110	120	120	130	110	90	95
95	80	85	70	65	75	85	105
100	110	80	90	90	95	130	140
140	140	60	60	60	70		

1. El departamento de estudios estadísticos necesita agrupar los datos en una tabla para poder empezar con los cálculos. ¿Puedes ayudarles completando la siguiente tabla?

INTERVALO	MARCAS x_i	f_i	F_i	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[58, 72)						
[72, 86)						
[86, 100)						
[100, 114)						
[114, 128)						
[128, 142)						

2. Necesitan que calcules los parámetros $\bar{x}$, *Var*, σ y C.V.

3. Para poder elaborar un informe preciso, tienen que construir el polígono de frecuencias acumuladas. Haz este trabajo por ellos.



4. ¿Hasta qué velocidad transitan el 25 % de los vehículos muestreados?

5. ¿De qué velocidad no exceden el 50 % de los vehículos?

9 Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

En la tabla siguiente se muestran los datos de un estudio hecho sobre las calificaciones obtenidas por un grupo de 30 alumnos en una prueba de Matemáticas.

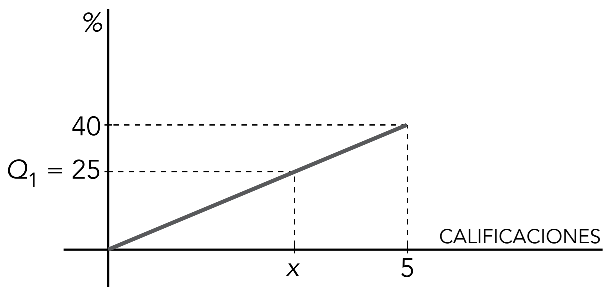
CALIFICACIONES	f_i
[0, 5)	12
[5, 7)	8
[7, 9)	6
[9, 10)	4

1. Completa la siguiente tabla:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	F_i	EN %

2. Calcula $\bar{x}$ y σ.

3. Calcula Q_1, Q_2 y Q_3. Utiliza un procedimiento geométrico como hacemos aquí con Q_1:



Por semejanza:

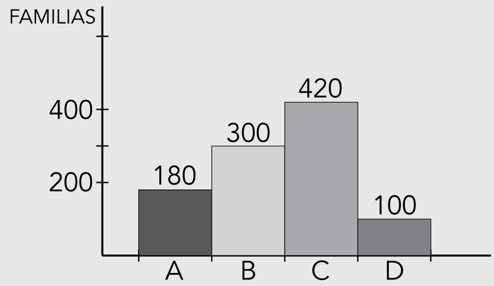
$$\frac{40}{5} = \frac{25}{x} \rightarrow x = \ldots$$

Nombre y apellidos: ....

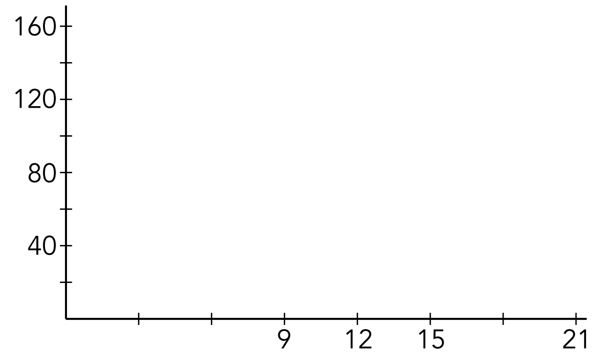
APLICA. NIVEL ECONÓMICO DE UNA REGIÓN

El profesor de Geografía de una de tus amigas les ha pedido que hagan un trabajo sobre el nivel económico de vuestra región. A tu amiga le hacen falta unas cuantas herramientas matemáticas que tú conoces, por lo que le ayudas a hacer su trabajo.

El diagrama de barras que te muestra indica el nivel de ingresos anuales de 1 000 familias encuestadas. Los niveles A, B, C y D corresponden a los intervalos de ingresos (en miles de euros) [0, 9), [9, 12), [12, 15) y [15, 21), respectivamente.



1. Lo primero que necesita tu amiga es un histograma, teniendo en cuenta que los intervalos no tienen todos el mismo ancho. Constrúyeselo.



2. Realiza ahora un estudio estadístico completando una tabla de datos y los parámetros $\overline{x}$, *Var*, σ y C.V.

INTERVALO	x_i	f_i	F_i	%	x_i^2	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[0, 9)							
[9, 12)							
[12, 15)							
[15, 21)							

3. ¿Cuántas familias están por debajo de la media de ingresos anuales?

4. Tu amiga necesita tu ayuda para calcular los niveles de ingresos correspondientes a Q_1, Q_2 y Q_3. Necesita, además, interpretar los resultados. Ayúdala.

Unidad 9

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1.

x_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
3	3	9	27
4	2	8	32
5	2	10	50
6	2	12	72
8	3	24	192

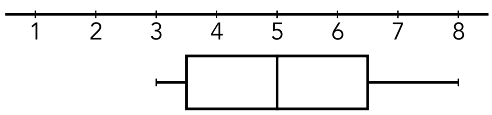
2 $\bar{x} = 5{,}25$, $\sigma = 1{,}88$; C.V. = 2,79

3.

x_i	f_i	F_i	EN %
3	3	3	25
4	2	5	41,67
5	2	7	58,33
6	2	9	75
8	3	12	100

4. $Q_1 = 3{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 6{,}5$

5.



APLICA

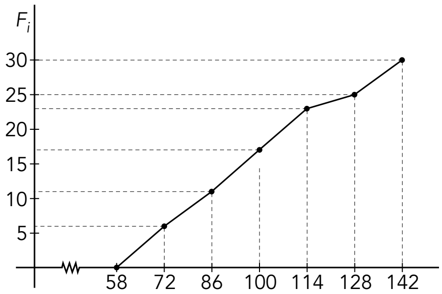
1.

x_i	f_i	F_i	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
65	6	6	20	390	25 350
79	5	11	36,7	395	31 205
93	6	17	56,7	558	51 894
107	6	23	76,7	642	68 694
121	2	25	83,3	242	29 282
135	5	30	100	675	91 125

2 $\bar{x} = 96{,}73$ km/h; $Var = 561{,}61$; $\sigma = 23{,}7$;

C.V. = 0,25 ≈ 25 %

3.



4. El 25 % circulan a 76,19 km/h o menos.

5. No exceden de 95,31 km/h.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1.

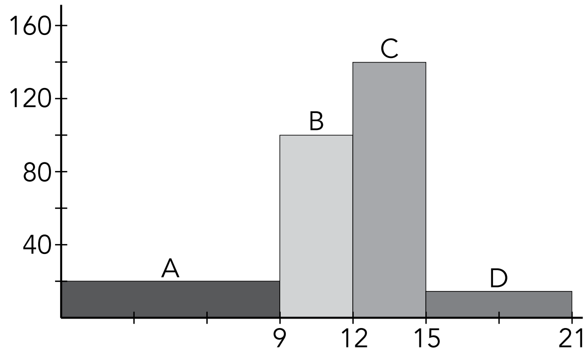
x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	F_i	EN %
2,5	12	30	75	12	40
6	8	48	288	20	66,67
8	6	48	384	26	86,68
9,5	4	38	361	30	100
	30	164	1 108		

2 $\bar{x} = \dfrac{164}{30} = 5{,}47$, $\sigma = \sqrt{\dfrac{1108}{30} - 5{,}47^2} = 2{,}65$

3. $Q_1 = 3{,}125$; $Q_2 = Me = 5{,}75$; $Q_3 = 7{,}83$

APLICA

1.



2.

x_i	f_i	F_i	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
4,5	180	180	18	810	3 645
10,5	300	480	48	3 150	33 075
13,5	420	900	90	5 670	76 545
18	100	1 000	100	1 800	32 400

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{N} = 11{,}43$; $Var = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{N} - x^2 = 15{,}025$

$\sigma = 3{,}88$; C.V. $= \dfrac{\sigma}{x} = 0{,}34 \approx 34\,\%$

3. Por debajo de la media de ingresos están el 47,43 % de las familias.

4. $Q_1 = 9{,}7$: El 25 % de las familias están por debajo de 9 700 € anuales.

$Q_2 = 12{,}143$: El 50 % de las familias están por debajo de 12 143 € anuales.

$Q_3 = 13{,}929$: El 75 % de las familias están por debajo de 13 928 € anuales.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Distribución bidimensional: A cada individuo le asignamos ....

Nube de puntos: es la representación gráfica de una ....

También se le llama diagrama de ....

Correlación: Si los puntos de la nube están ....

Puede ser:

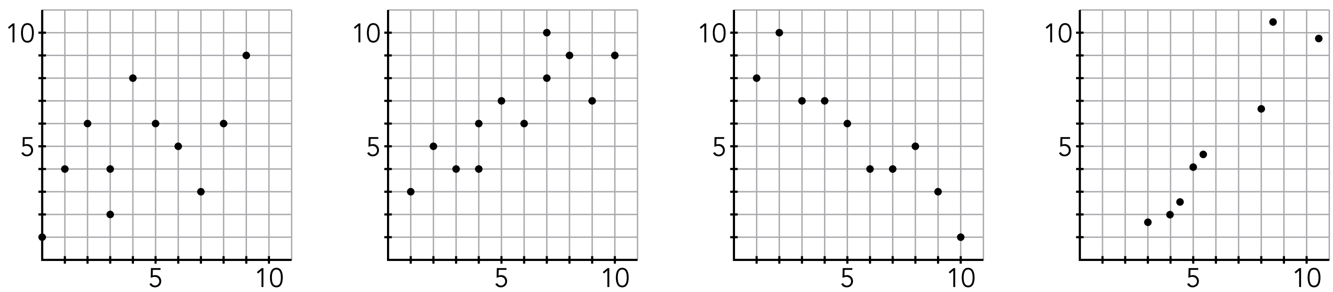
- Fuerte cuando ....

- Débil cuando ....

- Positiva cuando ....

- Negativa cuando ....

EJEMPLOS: Di, en cada caso, si existe correlación, y si esta es fuerte, débil, positiva o negativa.



Coeficiente de correlación r, es un número que mide ....

Su valor está comprendido entre ....

Recta de regresión: Es la recta que ....

Su pendiente tiene el mismo .... que el coeficiente de ....

Estimaciones con la recta de regresión: La recta de regresión nos permite estimar el valor de ....

La **fiabilidad de la estimación** es mayor si $|r|$ es .... y si el punto sobre el que hacemos la estimación está ....

Ficha de trabajo A

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. En cada uno de los siguientes casos indica si se trata de una distribución bidimensional y cuáles son las variables que se relacionan.

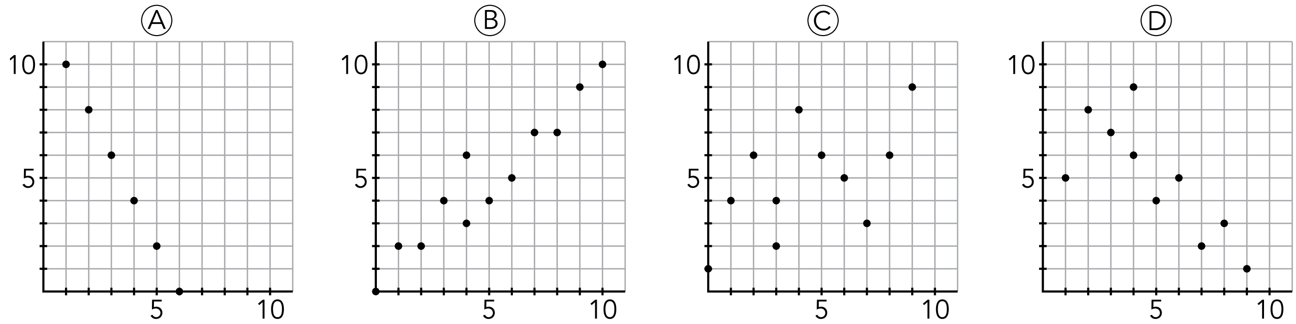
a) Estatura media de los padres-estatura de los hijos mayores de 18 años

b) Ingresos de una familia-gasto en alimentación.

c) Tiempo que tarda un tren en hacer un recorrido-precio del billete

d) Número de personas que viven en un piso-litros de agua consumida en un año

2. Indica , en cada caso, si la correlación es fuerte o débil y si es positiva o negativa



3. Una distribución bidimensional viene dada por la siguiente tabla:

HORAS DE ESTUDIO	1	2	3	4	5	5
HORAS DE VIDEOJUEGOS	5	4	3	3	1	2

a) Representa la nube de puntos.

b) Di si hay correlación y de qué tipo es.

c) Explica si el coeficiente de correlación puede ser 0,8.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO EN ESPAÑA

El **índice de desarrollo humano (IDH)** es un indicador social elaborado por el *Programa de las Naciones Unidas* para el Desarrollo compuesto por tres parámetros: vida larga y saludable, educación y nivel de vida digno.

En la siguiente tabla se muestran algunos indicadores sociales, entre los que está el IDH, de 9 provincias españolas en 2010.

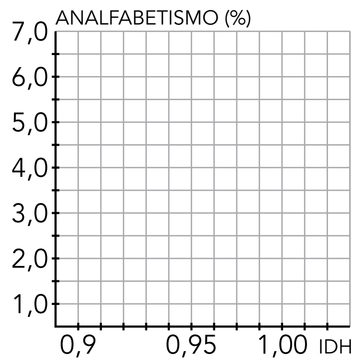
IDH	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91
ESPERANZA DE VIDA	83,1	84,2	83,6	83,2	82,9	82,4	81,8	82,0	81,1
ANALFABETOS (%)	0,7	0,9	1,0	1,3	2,1	2,3	2,7	4,2	4,8
RENTA PER CÁPITA (MILES DE €)	28,6	29,6	27,1	26,3	26,7	22,6	19,4	16,1	16,9

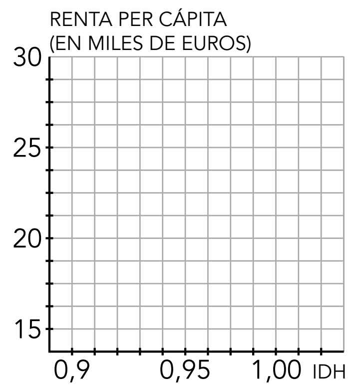
Nos vamos a centrar en las siguientes distribuciones bidimensionales:

1. IDH – Esperanza de vida
2. IDH – Porcentaje de analfabetismo
3. IDH – Renta per cápita

1. ¿Cuál crees que es positiva y cuál negativa?

2. Represente las nubes de puntos en unos ejes como estos y verifica la predicción que hiciste en la actividad anterior:





3. Traza, de forma aproximada, la recta de regresión sobre cada nube de puntos.

4. ¿Qué lectura extraes de este estudio?

5. Investiga en Internet en qué puesto del mundo está España según su IDH. ¿Qué otros criterios te parece conveniente tomar para medir el índice de desarrollo humano?

10	**Ficha de trabajo B**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Las horas de estudio semanales que un grupo de estudiantes dedicó a preparar un examen global y la nota obtenida en la prueba, vienen dadas en la siguiente tabla

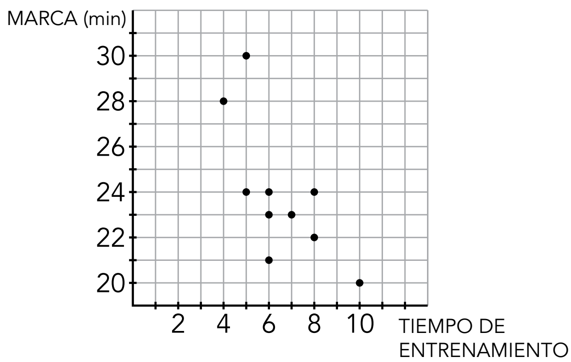
HORAS DE ESTUDIO	21	15	10	15	20	30	18	20	25	16
NOTA	9	7	5	2	7	8	8	6	5	4

a) Representa el diagrama de dispersión

b) ¿Cuál de estos valores te parece más adecuado para el coeficiente de correlación:

0,92; –0,51; –0,85; 0,44

2. Se ha medido el número medio de horas de entrenamiento a la semana de un grupo de 10 atletas y el tiempo, en minutos, que han hecho en una carrera, obteniendo los siguientes resultados:



a) Traza la recta de regresión que te parezca más adecuada.

b) Estima el tiempo que tardaría un atleta que ha entrenado 3 horas y otro que ha entrenado 15 horas.

c) Si el coeficiente de correlación es –0,71, ¿te parecen fiables las estimaciones anteriores?

Nombre y apellidos: ....

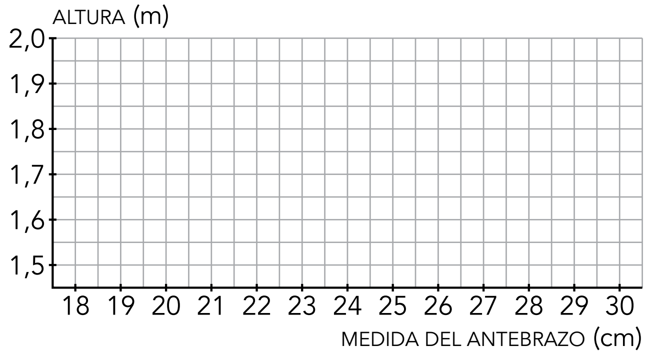
APLICA. MEDIDAS CORPORALES

Existen estudios que han detectado una alta correlación entre varias partes de la anatomía humana: entre otras, las medidas del antebrazo de las personas y su correspondiente altura.

En una consulta médica se ha querido comprobar este hecho, a modo de curiosidad y con el consentimiento de los pacientes. Para ello, se han tomado al azar 10 varones de distintas edades menores de 65 años. Se ha medido la altura y la longitud del antebrazo de cada uno. Estos son los resultados:

MEDIDA DEL ANTEBRAZO (cm)	22	31	25	18	30	24	27	29	20	23
ALTURA (m)	1,60	1,92	1,70	1,50	1,89	1,64	1,75	1,83	1,53	1,60

1. Representa en unos ejes como estos la nube de puntos correspondiente:



2. La recta de regresión tiene como ecuación $y = 0,033x + 0,88$. Represéntala sobre la nube de puntos del ejercicio anterior.

3. Uno de los siguientes valores es el coeficiente de correlación. Indica cuál es:

$r = –0,99$ $\quad$ $r = 0,85$ $\quad$ $r = –0,99$ $\quad$ $r = 1$

4. Estima, a partir de la recta de regresión, las alturas de las personas que tienen las siguientes medidas de antebrazo:

a) 12 cm $\qquad$ b) 25,5 cm $\qquad$ c) 40 cm

5. ¿Qué grado de fiabilidad tienen las estimaciones que has realizado en la actividad anterior?

Unidad 10

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. Son todas bidimensionales. a) Estatura media de los padres - estatura de los hijos mayores de 18 años; b) Ingresos de la familia – gasto en alimentación; c) Tiempo que tarda el recorrido – precio del billete; d) N° de personas que viven en el piso – litros de agua consumida.

2. A. Negativa y funcional. B. Positiva y fuerte.

   C. Positiva y débil. D. Negativa y fuerte.

3. a)

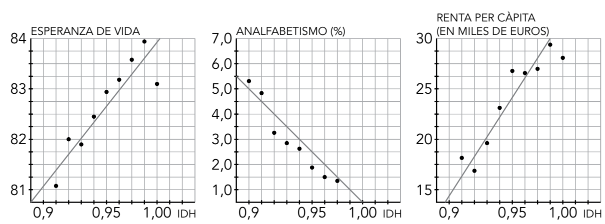
   b) La correlación es negativa y fuerte.

   c) No, debe ser negativa.

APLICA

1. Serán positivas las distribuciones 1 y 3. La distribución 2 será negativa.

2. y 3.



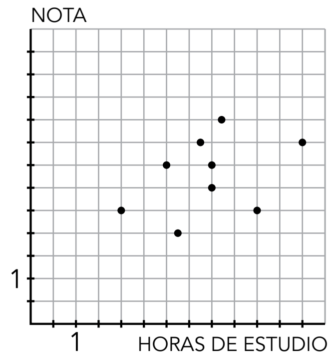
4. Hay una clara correlación entre el IDH y los indicadores sociales estudiados.

5. Experiencia práctica.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a)



   b) 0,44

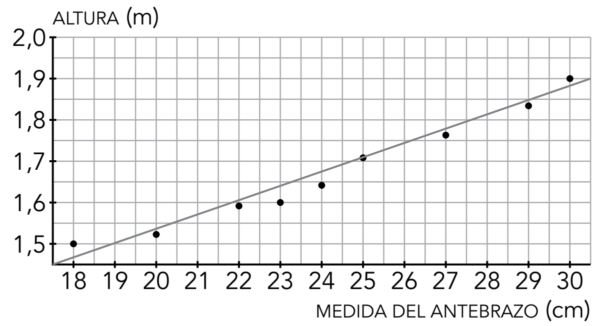
2. a) Se debe trazar una recta que se ajuste al conjunto de puntos.

   b) Respuesta que dependerá de la recta trazada en el apartado anterior.

   c) No serán fiables. 3 y sobre todo 15 son valores que no están en el intervalo de datos disponibles.

APLICA

1. y 2.



3. 0,99

4. a) $\widehat{y}(12) = 1,276$ m

   b) $\widehat{y}(25,5) = 1,7215$ m

   c) $\widehat{y}(40) = 2,2$ m

5. La de 25,5 m es muy fiable. las de 12 cm y 40 cm son menos fiables porque son datos alejados de los disponibles.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

COMBINATORIA

ESTRATEGIAS BASADAS EN EL PRODUCTO

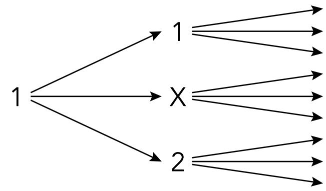
Estrategia del casillero

Si tenemos varios conjuntos *A*, *B*, *C*… con *m*, *n*, *p* elementos cada uno, ¿de cuántas formas podemos elegir un elemento de cada uno de ellos?................

Ejemplo: En un restaurante podemos elegir entre 3 primeros platos, 2 segundos y 4 postres. ¿Cuántos pedidos distintos de puedes hacer, eligiendo uno de cada grupo? ....

Diagrama en árbol

Nos permite pensar en las posibilidades que se dan en cada paso.



VARIACIONES CON REPETICIÓN

Son las agrupaciones ordenadas de *n* elementos que se pueden formar a partir de *m* elementos distintos. Pueden repetirse e influye el orden.

El número de variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* es:

$VR_{m,\,n}$ = ...

EJEMPLO: ¿Cuántos resultados pueden salir al tirar una moneda dos veces? $VR_{2,\,2}$ = ...

¿Y tres veces? ....

VARIACIONES

Son las agrupaciones ordenadas de *n* elementos no repetidos que se pueden formar a partir de *m* elementos distintos.

El número de variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* es:

$V_{m,\,n}$ = ...

EJEMPLO: ¿De cuántas maneras 6 atletas pueden quedar primero, segundo y tercero en una carrera?

....

PERMUTACIONES

Son las distintas formas en que se pueden ordenar los m elementos de un conjunto.

El número de permutaciones de m elementos es:

P_m = ...

EJEMPLO: ¿De cuántas maneras puedo colocar tres libros en una estantería, de izquierda a derecha?

....

COMBINACIONES

Son los distintos subconjuntos de *n* elementos que se pueden obtener con un conjunto de *m* elementos. No influye el orden. No se pueden repetir.

El número de combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n* es:

$C_{m,\,n}$ = ...

EJEMPLO: ¿Cuántos tríos puedo escoger de un grupo de cinco alumnos?

....

Números combinatorios $\binom{m}{n}$ son los que se obtienes al aplicar la fórmula de ....

Sus propiedades se resumen en el triángulo de Tartaglia:

Ficha de trabajo A

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Cuatro equipos de fútbol-sala *A*, *B*, *C*, *D* se enfrentan entre sí, todos contra todos, en un torneo. ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar al final el 1.º y el 2.º? Utiliza un diagrama de árbol.

2. En una liga de 10 equipos de balonmano, ¿de cuántas formas pueden quedar clasificados los tres primeros? ¿En cuántas de ellas *A* es campeón?

3. Lanzo un tetraedro (4 caras) numerado. ¿Cuántos resultados pueden salir? ¿Y si lo lanzo dos veces? ¿Y si lo lanzo tres veces?

4. Con dos colores: *A* (azul) y *R* (rojo), ¿cuántas banderas de dos franjas verticales puedes formar? ¿Y con tres colores para tres franjas?

5. Queremos que tres pueblos *A*, *B*, *C* tengan todos entre sí línea telefónica. ¿Cuántas líneas tenemos que instalar? ¿Y si fueran cuatro pueblos? ¿Y si fueran diez pueblos?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. FABRICACIÓN DE YOGURES

En una fábrica de yogures tienen el siguiente sistema para codificar los distintos productos que elaboran. Hay tres sabores: Natural (N), Fresa (F) y Plátano (P). Por cada sabor producen dos tipos de yogures: Entero (código 0) y Desnatado (código 1). De cada tipo fabrican dos modalidades: con cereales (código 0) y sin cereales (código 1). A su vez, pretenden utilizar dos tipos de envases: de un cuarto de litro (código 0) y de un litro (código 1).

1. E Un día encontraron unas etiquetas que decían "P101". ¿A qué producto pertenecen?

2. El departamento de compras quiere saber cuántas etiquetas distintas deben elaborar para todos los productos. ¿Puedes decírselo?

3. Han decidido fabricar otros dos sabores: Kiwi (K) y Melocotón (M). ¿Cuántos tipos de productos lanzará ahora al mercado la empresa?

4. En el laboratorio han observado que los yogures obtenidos al mezclar dos sabores entre los cinco elaborados dan un resultado excelente. ¿Cuántas mezclas pueden obtener?

11 Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Cinco atletas A, B, C, D, E participan en la final de los 100 m. ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar a meta? ¿En cuántas de ellas sería A el 3.º?

2. En un juego de cartas, de una baraja de 40, cada jugador recibe en cada mano 5 cartas. ¿Cuántas manos diferentes puede recibir un jugador al empezar?

3. Un entrenador de baloncesto dispone de 2 jugadores para el puesto de base, 4 para los dos puestos de aleros y 3 para los dos puestos de pívot. ¿Cuántos equipos distintos podrá formar?

4. Calcula:

a) $\dfrac{P_{20}}{P_{18}}$

b) $\dfrac{V_{6,\,4}}{C_{5,\,3}}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. RESOLVER UN ENIGMA ES ENCONTRAR UN TESORO

Vincent MacArrow dedica toda su vida a buscar un tesoro oculto. Sus pesquisas le llevan a una cripta que se abre con una cerradura formada por cinco cilindros giratorios, cada uno de ellos con los dígitos del 0 al 9 en su superficie. Solo una de las combinaciones numéricas abrirá la puerta. Sería imposible probar todas las combinaciones, pero MacArrow ha ido recorriendo medio mundo para recoger cinco pistas que, al resolverlas, le darán las cinco cifras clave para abrir la cripta.

PRIMER ACERTIJO (CIFRA DE LAS DECENAS DE MILLAR)

"Con las letras de TESORO,

tantas palabras que terminan en O menos las que empiezan en consonante,

resta las cifras de la cantidad resultante".

SEGUNDO ACERTIJO (CIFRA DE LAS UNIDADES DE MILLAR)

"Juega con dos dados y con tres ducados.

¿Cuántos resultados tendrás?

¡Su 48.a parte calcularás!"

TERCER ACERTIJO (CIFRA DE LAS CENTENAS)

"¡Oh, dodecaedro hermoso

20 vértices estamos

ni yo, ni mis 9 vecinos nos hablamos

calcula 1/20 de los caminos (diagonales) que contamos!"

CUARTO ACERTIJO (CIFRA DE LAS DECENAS)

"Acuérdate de Tartaglia.

Sin desarrollar combinatoria,

halla x y sigue hacia la gloria"

$$\binom{9}{x} = \binom{9}{x+1}$$

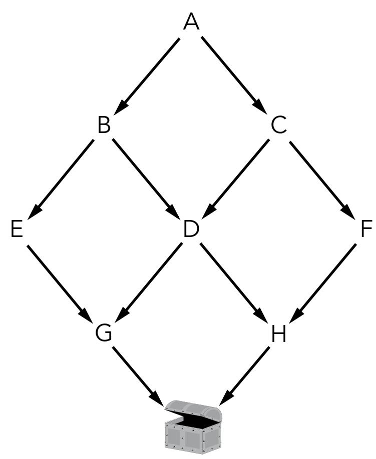
QUINTO ACERTIJO (CIFRA DE LAS UNIDADES)

"Desde A hasta el tesoro irás.

Nunca subir podrás.

¿De cuántos caminos

dispondrás?"



"¿Ya tienes el número mágico?

La cerradura abrirás

si con sus cifras 5^2 sumaras".

Unidad 11

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. De 12 formas ($V_{4,\,2}$).

2. $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Fijando A en el 1.°, quedan 9 equipos para quedar 2.° y 3.°, y esto ocurrirá de $V_{9,\,2} = 9 \cdot 8 = 72$ formas.

3. 1 vez $\to$ 4 resultados

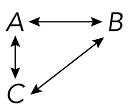
2 veces $\to 4^2 = 16$

3 veces $\to 4^3 = 64$

4. *AR*, *RA* $\to$ 2 banderas

ABC, *ACB*, *BAC*, *BCA*...: $P_3 = 3! = 6$

5.



$\left.\begin{array}{c|c} AB & \\ & BC \\ AC & \end{array}\right\}\; C_{3,\,2} = 3$

Para 4 pueblos: $C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ líneas

Para 10 pueblos: $C_{10,\,2} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ líneas

APLICA

1. Es un yogur de plátano, desnatado, con cereales y de un litro.

2. Para cada sabor, el total de etiquetas es:

$VR_{2,\,3} = 23 = 8$.

Como hay 3 sabores, habrá, en total, $8 \cdot 3 = 24$ etiquetas.

3. Ahora tenemos 5 sabores. Habrá, en total, $5 \cdot 2^3 = 40$ tipos de productos distintos.

4. Al mezclar dos sabores, tenemos:

$C_{5,\,2} = 10$ mezclas.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

A sería 3.° en los casos (__ __ A __ __)

$P_4 = 24$ casos.

2. $V_{40,\,5} = \dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 658\,008$

3. $C_{2,\,1} \cdot C_{4,\,2} \cdot C_{3,\,2} = 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2} \cdot \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 36$ equipos

4. a) $\dfrac{P_{20}}{P_{18}} = \dfrac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$

b) $\dfrac{V_{6,\,4}}{C_{5,\,3}} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 36$

APLICA

PRIMER ACERTIJO: Fijada una O como última letra, hay $P_5 = 120$ palabras que terminan en O. De estas últimas, las que empiezan por una consonante fijada son $P_4 = 24$. Como hay 3 consonantes, hay $24 \cdot 3 = 72$ palabras que empiezan por consonante.

Restando: $120 - 72 = 48$

Restando cifras: $8 - 4 = 4$.

El primer número es el 4.

SEGUNDO ACERTIJO: Con dos dados hay 36 resultados. Con 3 ducados hay $VR_{2,\,3} = 8$ resultados. Con los dos dados y los tres ducados hay $36 \cdot 8 = 288$ resultados. Por tanto, el segundo número es $288 : 48 = 6$.

TERCER ACERTIJO: De cada vértice salen 10 diagonales. Por tanto, en total habrá 200 diagonales. Como así contamos dos veces cada diagonal, tendremos 100 diagonales. Por tanto, el tercer número es $100/20 = 5$.

CUARTO ACERTIJO:

$$\frac{9!}{x!\,(9-x)} = \frac{9!}{(x+1)!\,(9-x-1)!} \;\to$$

$$\to\; (x+1)!\,(9-x-1)! = x!\,(9-x)! \;\to\; x+1 = 9-x$$

Por tanto, $x = 4$.

QUINTO ACERTIJO: Hay 6 caminos hasta el tesoro.

Uniendo todas las soluciones, nos queda el número 4 6 5 4 6, que abre la cripta. Si sumamos sus cifras, nos da $25 = 5^2$.

12	**Lo fundamental de la unidad**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

Experiencia aleatoria es aquella ....

Espacio muestral o suceso seguro es ....

....

Suceso es cualquier subconjunto..............................

La probabilidad de un suceso $P(S)$ indica el grado de confianza ....

$P(S)$ es un número comprendido entre ....

Unión de sucesos: el suceso $A \cup B$ ocurre cuando

....

Intersección de sucesos: el suceso $A \cap B$ ocurre cuando ....

Dos sucesos son **incompatibles** cuando ....

....

Un suceso es el **contrario** de otro cuando ....

....

PROBABILIDADES EN EXPERIENCIAS SIMPLES

En experiencias irregulares, hay que experimentar muchas veces y asignar a cada suceso su ....
.... como probabilidad.

En experiencias regulares, podemos aplicar la Ley de Laplace:

LEY DE LAPLACE

- Si realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular (dado no trucado, moneda, etc.), la probabilidad de un suceso S es el cociente $p = \dfrac{\textit{número de casos favorables a } S}{\textit{números de casos posibles}}$

  EJEMPLO: Probabilidad de sacar n.º primo al tirar un dado: $S = \{2, 3, 5\}$

  $p =$ ....

EXPERIENCIAS COMPUESTAS

El cálculo de probabilidades en una experiencia compuesta se simplifica si se descompone en experiencias simples. Estas pueden ser independientes o dependientes.

Experiencias independientes. Dos experiencias son **independientes** cuando ....
....

En este caso, $P[S_1$ en la 1.ª y S_2 en la 2.ª$]$ = ...
....

Experiencias dependientes. Dos experiencias son **dependientes** cuando ....
....

En este caso, $P[S_1$ en la 1.ª y S_2 en la 2.ª$]$ = ...

EJEMPLOS:

- Las experiencias "lanzar un dado" y "lanzar una moneda" son ....
  Por tanto, P[3 en el dado y cara en la moneda] = ...
- Si tenemos una bolsa con 3 bolas blancas y 2 negras y realizamos dos extracciones, las experiencias "color de la 1.ª bola" y "color de la 2.ª bola" son ....
  Por tanto, P[blanca la 1.ª y blanca la 2.ª] = ...

12	**Ficha de trabajo A**
	Nombre y apellidos: ....
	Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Si lanzas una moneda 3 veces:

a) ¿Cuántos resultados posibles obtienes?

b) ¿Qué probabilidad tienes de sacar solo dos caras?

c) ¿Y de no sacar más de una cruz?

2. Extraemos una carta de una baraja de 40. Calcula:

a) Probabilidad de que sea AS.

b) Probabilidad de que sea AS o FIGURA.

c) Probabilidad de sacar AS o COPAS.

3. De una urna con 5 bolas rojas, 3 negras y 2 blancas extraemos una bola, la reponemos a la urna y luego hacemos una 2.ª extracción.

a) ¿Qué probabilidad hay de que no salga blanca en ambas?

b) ¿Y si después de la 1.ª extracción no reponemos la bola?

4. En un juego, el jugador gana si, al lanzar una moneda 3 veces y extraer una carta de una baraja, el resultado sea: “No sacar más de una cruz” y “No salgan espadas”. En caso contrario pierde. ¿Qué probabilidad tiene el jugador de ganar?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. FIESTAS EN EL BARRIO

Durante las fiestas del barrio, vas con tus amigas y amigos a la feria. Allí os paráis ante una caseta donde el feriante os propone la siguiente apuesta:

"¡Apueste y gane! Tiraré una moneda cuatro veces y luego sacaré una carta de la baraja.

— Si sale cara 2 o 3 veces y la carta es de BASTOS o ESPADAS, me llevo su apuesta.

— Si sale cara 0, 1 o 4 veces y la carta es de OROS o COPAS, entonces le daré a usted un 50 % más de lo que apostó.

— Si sale otro resultado, ¡seguimos jugando!"

El juego parece muy beneficioso para el apostador, pero hay algo que os preocupa y decidís hacer unos cuantos cálculos.

1. En primer lugar, os preguntáis cuál será la probabilidad de sacar cara 0, 1 o 4 veces.

2. Luego, queréis calcular la probabilidad de sacar 2 o 3 caras.

3. Pasáis a las cartas. Os ponéis a calcular la probabilidad de sacar OROS o COPAS al extraer una carta de la baraja.

4. ¿Qué probabilidad tenéis de ganar la apuesta? ¿Y de perderla? ¿Y de seguir jugando sin ganar ni perder?

5. ¿Qué se espera que ocurra si el apostador pone x euros en el platillo? Os dais cuenta de que tenéis que analizar la función de ganancia o pérdida $E(x) = 1,5xp - xq$, donde p es la probabilidad de ganar y q es la probabilidad de perder.

6. ¿Cuál será el resultado más probable si apostáis 100 euros entre todos? ¿Y si pudierais jugar 1 000 euros?

12

Ficha de trabajo B

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1. Tengo 6 tarjetas *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

a) ¿De cuántas formas distintas puedo escoger dos de ellas?

b) ¿Cuántas de esas formas tienen solo una vocal?

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos consonantes?

2. En una serie semifinal de 100 m lisos de atletismo, se clasifican los dos primeros para la final. Participan 6 atletas.

a) ¿De cuántas formas distintas pueden clasificarse?

b) De los 6 atletas, tres son del mismo equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos clasificados sean del mismo equipo?

3. Para una oposición, el temario consta de 25 temas y, para aprobarla, hay que contestar bien a dos temas extraídos al azar. Luis ha preparado 15 temas.

a) ¿De cuántas formas distintas le pueden salir dos temas estudiados?

b) ¿Qué probabilidad tiene de aprobar?

c) ¿Es más probable que apruebe Begoña que, en su oposición de 30 temas, ha preparado 17?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. FIESTAS EN EL BARRIO

Durante las fiestas del barrio, vas con tus amigas y amigos a la feria. Allí os paráis ante una caseta donde el feriante os propone la siguiente apuesta:

"¡Apueste y gane! Tiraré una moneda cuatro veces y luego sacaré dos cartas de la baraja.

— Si sale cara 2 o 3 veces y las cartas son de BASTOS o ESPADAS, me llevo su apuesta.

— Si sale cara 0, 1 o 4 veces y las cartas son de OROS o COPAS, entonces le daré a usted un 30% más de lo que apostó.

— Si sale otro resultado, ¡seguimos jugando!"

El juego parece muy beneficioso para el apostador, pero hay algo que os preocupa y decidís hacer unos cuantos cálculos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara 0 veces? ¿Y la de sacarla una vez? ¿Y dos veces? ¿Y tres veces? ¿Y cuatro veces?

2. ¿De cuántas formas distintas pueden extraerse dos cartas cualesquiera de una baraja?

3. ¿De cuántas formas pueden salir OROS o COPAS?

[Analiza el número de veces que puede salir (O, O), (C, O) o (C, C)].

4. ¿Cuál es la probabilidad de que gane la apuesta el participante? ¿Y de que pierda?

5. Si apostáis 1 euro, ¿qué se espera que ocurra? Tenéis que analizar la expresión $E(x) = 1{,}3\,xp - xq$ para $x = 1$, donde p es la probabilidad de ganar y q la de perder.

6. ¿Y qué ocurrirá si apostáis 1000 euros?

Unidad 12

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $2^3 = 8$ resultados

b) {CC+, C+C, +CC} $\rightarrow p = \frac{3}{8}$

c) {CCC, CC+, C+C, +CC} $\rightarrow p = \frac{4}{8}$

2. a) $p = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

b) $p = \frac{4}{40} + \frac{12}{40} = \frac{16}{40}$

c) $P[A \text{ o } C] = P[A] + P[C] - P[\text{AS DE COPAS}] =$

$= \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$

3. a) $P[\overline{B} \text{ y } \overline{B}] = \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{64}{100}$

b) $P[\overline{B}_1 \text{ y } \overline{B}_2] = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90}$

4. $P[\text{NO SACAR MÁS DE UNA CRUZ}] = \frac{4}{8}$

$P[\text{NO ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

$P[\text{GANAR}] = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

APLICA

1. $P[0, 1 \text{ o } 4] = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

2. $P[2 \text{ o } 3] = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

3. $P[\text{OROS O COPAS}] = \frac{1}{2}$

4. $P[\text{GANAR}] = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

$P[\text{PERDER}] = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

$P[\text{SEGUIR JUGANDO}] = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

5. Se espera que el resultado sea:

$$E(x) = 1{,}5x \cdot \frac{6}{32} - \frac{10x}{32} = \frac{-x}{32}$$

El apostador perderá 1/32 de lo que apueste.

6. $E(100) = -3{,}13$ €

$E(1\,000) = -31{,}25$ €

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) $C_{6,\,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

b) Con una vocal (*A* o *E*) hay 4 formas distintas. Luego hay 8 formas distintas con una vocal cualquiera.

c) Dos consonantes se extraen de $C_{4,\,2} = 6$ formas.

Luego $p = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

2. a) $C_{6,\,2} = 15$

b) Tres de ellos se clasifican de $C_{3,2} = 3$ formas.

Luego $p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

APLICA

1. $P[\text{SACAR CARA 0 VECES}] = \frac{1}{16}$

$P[\text{SACAR CARA 1 VEZ}] = \frac{4}{16}$

$P[\text{SACAR CARA 2 VECES}] = \frac{6}{16}$

$P[\text{SACAR CARA 3 VECES}] = \frac{4}{16}$

$P[\text{SACAR CARA 4 VECES}] = \frac{1}{16}$

2. $C_{40,\,2} = 780$ formas distintas.

3. OROS y COPAS salen de $C_{10,\,1} \cdot C_{10,\,1} = 100$ maneras.

COPAS y COPAS salen de $C_{10,\,2} = 45$ formas.

OROS y OROS salen de $C_{10,\,2} = 45$ formas.

Por tanto, OROS o COPAS saldrán de 190 formas.

4. La probabilidad de ganar, p, es de $\frac{19}{208} = 0{,}09$.

La probabilidad de perder, q, es de $\frac{95}{624} = 0{,}15$.

5. $E(1) = -0{,}033$, es decir, se perderá 3 cént.

6. En ese caso, se perderán 30 euros.