Adaptación curricular

- Unidad 1
- Unidad 2
- Unidad 3
- Unidad 4
- Unidad 5
- Unidad 6
- Unidad 7
- Unidad 8
- Unidad 9
- Unidad 10
- Unidad 11
- Unidad 12

APRENDER ES CRECER EN CONEXIÓN es un proyecto educativo de Anaya Educación para el cuarto curso de la ESO.

En la realización de este libro han intervenido:

- **Coordinación editorial:** Mercedes García-Prieto
- **Edición:** Carlos Vallejo, Beatriz Fuentes Fernández-Vegue, Joaquín Montón
- **Diseño:** Dirección de arte: Javier Serrano. Cubierta: Patricia Gómez Serrano. Interiores: Marta Gómez Peso y Paco Martín. Desarrollo gráfico de cubierta: Juan Carlos Quignón
- **Ilustraciones:** David Guirao
- **Maquetación:** José Luis Román
- **Gráficos:** José Luis Román
- **Corrección:** Mercedes Pérez
- **Edición gráfica:** Olga Sayans
- **Fotografías:**
  Age Fotostock, Archivo Anaya (Candel, C.; Canto, M.; Cosano, P.; Hernáncez Moya, B.; Martin, J.; Martín, J. A.; Moreno, C.; Padura, S.; Pozo, M.; Steel, M.), Ingimage, Thinkstock/Getty Images, 123RF.

Las normas ortográficas seguidas en este libro son las establecidas por la Real Academia Española en la *Ortografía de la lengua española,* publicada en el año 2010.

Nuestras publicaciones mantienen el rigor en el uso y en la selección de los contenidos, en las imágenes y en el lenguaje, para cumplir con la **no discriminación** por razón de género, cultura u opinión.

IMPORTANTE. Las actividades propuestas en este libro deben ser realizadas en cuadernos u hojas sueltas; **nunca en el propio libro.**

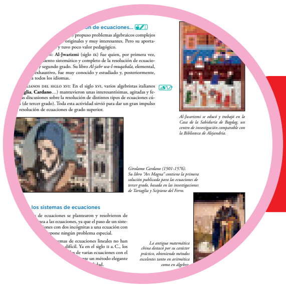
Los **enlaces a las páginas web** que aparecen en este libro han sido revisados en la fecha de su impresión. La editorial no se hace responsable de las modificaciones o las anulaciones que se produzcan en ellos con posterioridad a dicha fecha.

© Del texto: José Colera Jiménez, M.ª José Oliveira González, Ignacio Gaztelu Albero, Ramón Colera Cañas, 2016.
© Del conjunto de esta edición: GRUPO ANAYA, S.A., 2016 - C/ Juan Ignacio Luca de Tena, 15 - 28027 Madrid
ISBN: 978-84-698-1070-5 - Depósito Legal: M-28410-2016 - Printed in Spain.

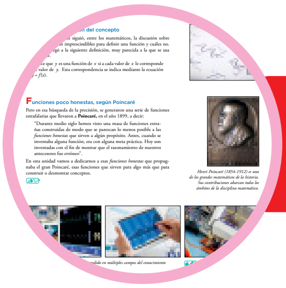
Reservados todos los derechos. El contenido de esta obra está protegido por la Ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios, para quienes reprodujeren, plagiaren, distribuyeren o comunicaren públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier tipo de soporte o comunicada a través de cualquier medio, sin la preceptiva autorización.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

ÍNDICE

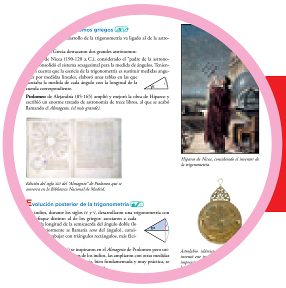


© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.



5 Funciones elementales

6 Semejanza. Aplicaciones

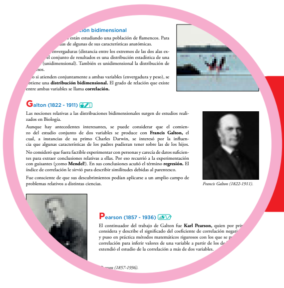


7 Trigonometría

8 Geometría analítica

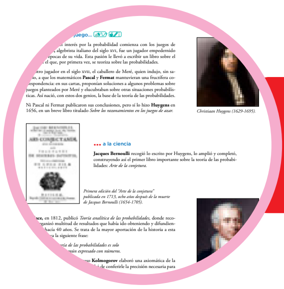
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

9 Estadística



10 Distribuciones bidimensionales

11 Combinatoria



12 Cálculo de probabilidades

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Números reales

Números racionales

Los *números naturales* han sido utilizados por todas las civilizaciones desde la más remota antigüedad.

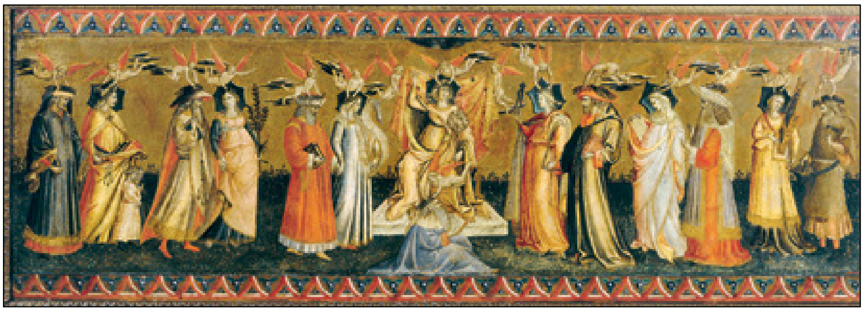
El papel de los negativos, y, sobre todo, del cero, resultó más difícil de concebir. Por ello, los *números enteros* no acabaron de tomar forma hasta finales del siglo VII, en la India. De allí nos llegaron por medio de los árabes en el siglo IX, junto con el sistema de numeración decimal-posicional.

Las *fracciones* se empezaron a utilizar desde muy antiguo, pero su uso al estilo actual se acabó de consolidar hacia el siglo XIV.

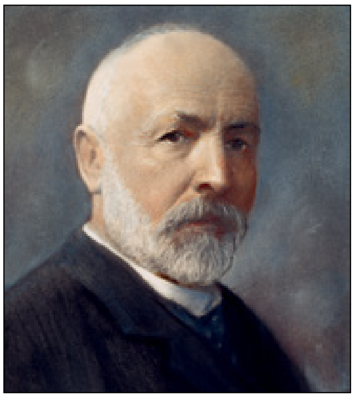
Antiguo observatorio astronómico en Ujjain (India). En esta ciudad vivió Brahmagupta (598-670), matemático y astrónomo indio que sistematizó por primera vez el cálculo con números negativos y el cero.

Los irracionales

Los números *irracionales* fueron descubiertos por los pitagóricos aproximadamente en el siglo V antes de nuestra era. Sin embargo, más que como números fueron tomados como magnitudes geométricas. Esta forma de tratarlos se extendió durante casi dos milenios.



"Las Siete Artes Liberales", Giovanni da Ponte. La segunda pareja empezando por la derecha representa a la Aritmética, portando una tabla de cálculo, junto con Pitágoras.



El conjunto de los números reales

Es muy reciente, pues, la idea de que todos estos números forman parte de un único conjunto con estructura y características muy interesantes. El concepto de *número real*, como ahora lo manejamos, se fue concibiendo y construyendo al evolucionar el estudio de las funciones. Su formalización definitiva se debe al alemán **Cantor** (1871).

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemán considerado el padre de la teoría de conjuntos.

6

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

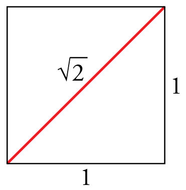
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Números irracionales

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos algunos.



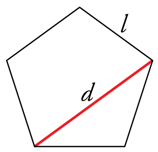
El valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es irracional.

Irracionales expresados mediante radicales

Si p no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{p}$ es irracional.

Y, en general, si p no es una potencia n-ésima exacta, $\sqrt[n]{p}$ es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[5]{10}$ son números irracionales.

El número de oro: $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$



$\dfrac{d}{l} = \Phi$

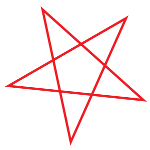
La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $\left(\sqrt{5}+1\right) : 2$ que, evidentemente, es irracional. Además, es, históricamente, el primer número del que se tuvo conciencia de que lo era.

En el siglo v a. C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las proporciones entre ellos (fracciones), pero al descubrir que no era así les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron irracional (contraria a la razón) a esta relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Más adelante, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **proporción áurea,** y a Φ, **número áureo.**

El nombre, Φ (fi, letra F en griego), es la inicial de **Fidias,** escultor griego del siglo v a. C. que utilizó reiteradamente esta proporción.

Estrella pitagórica



Esta figura, formada con las cinco diagonales de un pentágono regular, era el símbolo de los pitagóricos.

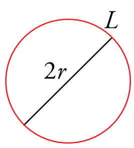
El número π

Como sabes, π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Este número lo conoces y lo utilizas desde hace muchos años.

Has utilizado para él las siguientes aproximaciones: 3,14, redondeando por defecto, o 3,1416, redondeando por exceso. Si le preguntas su valor a una calculadora (π suele compartir tecla con EXP), te dará muchas cifras: $\boxed{3.14159265359}$

Se trata de un número irracional y, por tanto, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

π es la letra griega correspondiente a la “P”. ¿Por qué este nombre? La palabra griega *perifereia* significa circunferencia (la periferia del círculo).



$\dfrac{L}{2r} = \pi$

Observa

A diferencia de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, Φ, y otros números irracionales, el número π no se puede representar de forma exacta sobre la recta real.

En la web

Curiosidades sobre el número π y otros irracionales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Números reales: la recta real

Ejercítate

1. a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2. a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por $\mathbb{R}$.

Es decir, tanto los **racionales** como los **irracionales** son números **reales.** Y estos son todos. Con el conjunto $\mathbb{R}$ podemos completar la tabla de conjuntos numéricos:

- REALES $\mathbb{R}$
  - RACIONALES $\mathbb{Q}$
    - ENTEROS $\mathbb{Z}$
      - NATURALES $\mathbb{N}$ → $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
      - ENTEROS NEGATIVOS → $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-8}$
    - FRACCIONARIOS → $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}\widehat{83};\ -\frac{3}{10}$
  - IRRACIONALES → $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que se hacen con los racionales: suma, resta, multiplicación y división (salvo por el cero) y se mantienen las mismas propiedades. También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

La recta real

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, *a cada punto de la recta le corresponde un número real.* Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real.**

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi-1$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	24; 28/7 = 4
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	24; –5; $-\sqrt{9}$ = –3; 28/7 = 4
FRACCIONARIOS	0,71; $0{,}7\widehat{1}$; 3/5
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	24; 0,71; $0{,}7\widehat{1}$; –5; 3/5; $-\sqrt{9}$ = –3; 28/7 = 4
IRRACIONALES	$\sqrt{7}$; $\pi - 1$

Piensa y practica

1. Sitúa cada uno de los siguientes números en una tabla como la del ejercicio resuelto anterior. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (HAZLO EN TU CUADERNO).

$$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi-3$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

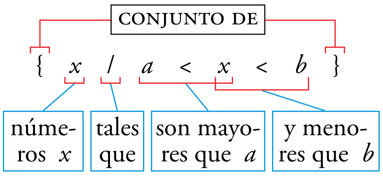
3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

En el mundo científico, con frecuencia es necesario precisar el ámbito de validez de una cierta variable. Por ejemplo, “el periodo de tiempo comprendido entre 3 s y 11 s”. Para ello, hemos de aprender a designar algunos tramos de la recta real con una nomenclatura adecuada.

Intervalo abierto

$(a, b) = \{x \,/\; a < x < b\}$

La expresión anterior se lee así:



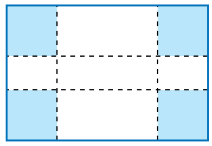
Intervalo abierto

El **intervalo abierto** (a, b) es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b: $\{x \,/\; a < x < b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $(-2, 1)$ está formado por los números reales comprendidos entre -2 y 1, sin incluir ni -2 ni 1: $\{x \,/\; -2 < x < 1\}$.

Otro ejemplo: para construir una caja con una cartulina de 10 cm × 15 cm, hemos de cortar de sus esquinas cuatro cuadrados iguales y, después, plegar. El lado de los cuadrados debe ser, pues, menor que 5 cm $\rightarrow$ $(0, 5)$.



Intervalo cerrado

$[a, b] = \{x \,/\; a \le x \le b\}$

Intervalo cerrado

El **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, ambos incluidos: $\{x \,/\; a \le x \le b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $[-2, 1]$ está formado por los números reales comprendidos entre -2 y 1, incluyendo el -2 y el 1: $\{x \,/\; -2 \le x \le 1\}$.

Otro ejemplo: solo admitimos paquetes que pesen 2 kg o más, pero que no superen los 5 kg $\rightarrow$ $[2, 5]$.

Intervalo semiabierto

$(a, b] = \{x \,/\; a < x \le b\}$

$[a, b) = \{x \,/\; a \le x < b\}$

Intervalo semiabierto

- El **intervalo** $(a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo b pero no a: $\{x \,/\; a < x \le b\}$.

  Se representa así:

- El **intervalo** $[a, b)$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo a pero no b: $\{x \,/\; a \le x < b\}$.

  Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $(3, 4]$ está formado por los números reales comprendidos entre 3 y 4, incluyendo el 4 pero no el 3: $\{x \,/\; 3 < x \le 4\}$.

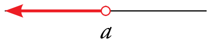
Otro ejemplo: en esta guardería se admiten niños que hayan cumplido 1 año pero que aún no tengan 4 años $\rightarrow$ $[1, 4)$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

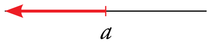
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Semirrectas

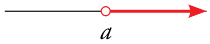
$(-\infty, a) = \{x \,/\; x < a\}$



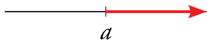
$(-\infty, a] = \{x \,/\; x \le a\}$



$(a, +\infty) = \{x \,/\; x > a\}$

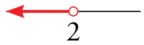


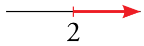
$[a, +\infty) = \{x \,/\; x \ge a\}$



Semirrectas y recta real

$(-\infty, a)$ son los números menores que a: $\{x \,/\; x < a\}$.
$(-\infty, a]$ son los números menores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \le a\}$.
$(a, +\infty)$ son los números mayores que a: $\{x \,/\; x > a\}$.
$[a, +\infty)$ son los números mayores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \ge a\}$.

- $(-\infty, 2)$ es el conjunto $\{x \,/\; x < 2\}$ $\rightarrow$ 

- $[2, +\infty)$ es el conjunto $\{x \,/\; x \ge 2\}$ $\rightarrow$ 

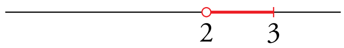
- Para votar, hay que tener 18 años cumplidos $\rightarrow$ $[18, +\infty)$. Naturalmente el $+\infty$, en este contexto real, hay que relativizarlo.

La propia recta real se representa en forma de intervalo así: **$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.**

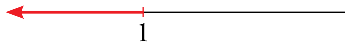
Ejercicios resueltos

1. ***Escribir en forma de intervalo y representar:***
a) $2 < x \le 3$ b) $x \le 1$
c) $x > 0$

a) Intervalo semiabierto $(2, 3]$



b) Semirrecta $(-\infty, 1]$



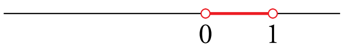
c) Semirrecta $(0, +\infty)$

2. ***Escribir en forma de desigualdad y representar:***
a) $[-2, 0]$ b) $[-1, +\infty)$
c) $(0, 1)$

a) $\{x \,/\, -2 \le x \le 0\}$

b) $\{x \,/\, x \ge -1\}$

c) $\{x \,/\, 0 < x < 1\}$

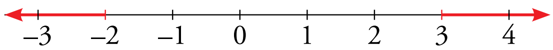


3. ***¿Para qué valores de x son válidas las expresiones siguientes?***
a) $\sqrt{x-3}$
b) $\sqrt{(x+2)(x-3)}$

a) $\sqrt{x-3}$ puede efectuarse siempre que x valga 3 o más: semirrecta $[3, +\infty)$.

b) La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es cero o positivo. Y esto ocurre cuando uno de los factores es cero, ambos son negativos o ambos son positivos. Es decir, si $x \le -2$ o si $x \ge 3$.

$(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$



Piensa y practica

En la web — Practica la representación de intervalos en la recta real.

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.
b) Mayores que 7.
c) Menores o iguales que –5.

2. Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\; 3 \le x < 5\}$ b) $\{x \,/\; x \ge 0\}$
c) $\{x \,/\; -3 < x < 1\}$ d) $\{x \,/\; x < 8\}$

3. Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $(-1, 4]$ b) $[0, 6]$ c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Raíces y radicales

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1024} = 2$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical;** a, **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

Cuando manejes expresiones como esta, habrá ocasiones en las que debas calcular el valor numérico. Para ello, deberás tener en cuenta la definición, como en las que se proponen en este margen, o bien recurrir a la calculadora. Pero en otros casos deberás mantener el radical, simplificarlo, operar con otros radicales, etcétera.

Algunas peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, solo existen sus raíces de índice impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Forma exponencial de los radicales

Los radicales se pueden expresar como potencias:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pues } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pues } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt[6]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2 = (3^{3/6})^2 = 3^{6/6} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

Atención

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

En la web

Actividades para recordar las propiedades de las potencias.

Piensa y practica

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$ f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

5 Operaciones con radicales

Los radicales tienen una serie de propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura. Las iremos enumerando en el margen de esta página. Todas ellas son consecuencias inmediatas de conocidas propiedades de las potencias.

Y prestaremos especial atención a las operaciones que con ellas se propician.

Propiedad 1

$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, pues:

$\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

■ SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Expresando los radicales en forma de potencia, vemos que, a veces, se pueden simplificar. Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Hemos aplicado la propiedad 1 (ver margen).

Propiedad 2

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, pues:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} =$

$= a^{1/n} \cdot b^{1/n} =$

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

■ EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DE UNA RAÍZ

Para simplificar algunos radicales, y para sumarlos y restarlos, a veces será necesario sacar factores fuera de una raíz. Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 2 (ver margen).

■ PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO ÍNDICE

Por ejemplo:

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300}$$

Hemos aplicado la propiedad 2 (ver margen).

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{15}{20}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Hemos aplicado la propiedad 3 (ver margen).

Propiedad 3

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, pues:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

■ POTENCIA DE UN RADICAL

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6 = 64$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

Hemos aplicado la propiedad 4 (ver margen).

Propiedad 4

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, pues:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = (a^{1/n})^p = a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$

■ RAÍZ DE UN RADICAL

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 5 (ver margen).

Propiedad 5

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, pues:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Recuerda

Solo se pueden sumar los radicales idénticos.

En la web

- Empareja expresiones con radicales y potencias.
- Suma y resta de radicales.

En la web

Actividades para reforzar tus conocimientos sobre radicales.

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Únicamente pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ \sqrt{7}-\sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$$ Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.

Sí puede simplificarse la expresión siguiente:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales queda oculta. Previamente, deberemos sacar los factores que podamos fuera de las raíces, o simplificarlas. Por ejemplo:

$$\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}=\sqrt{2^5}+\sqrt{3^2\cdot 2}-\sqrt{5^2\cdot 2}=$$

$$=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8}+\sqrt[4]{4}=\sqrt{2^3}+\sqrt[4]{2^2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Eliminación de un radical del denominador

Es costumbre en los resultados matemáticos en los que intervienen radicales evitar que estos estén en el denominador. Veamos unos casos en los que esto se consigue de forma sencilla.

En cada caso, nos haremos esta pregunta: *¿por qué expresión he de multiplicar el denominador para que el producto no tenga radicales?* Una vez encontrada la expresión, también multiplicaremos por ella el numerador para que el resultado final no varíe.

Observa

Se multiplica el denominador por el radical necesario para que desaparezca la raíz:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2;\quad \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}=7$$

Lógicamente, el numerador se multiplica por la misma expresión.

1.^{er} CASO: RAÍCES CUADRADAS. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.° CASO: OTRAS RAÍCES. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{7}\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{7}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Piensa y practica

1. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\,b^5\,c}}{\sqrt{ab^3\,c^3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ e) $\left(\sqrt{x}\right)^3\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

3. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[10]{a^4\,b^6}$

4. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3\,b^5\,c}$ c) $\sqrt[3]{64}$

5. Efectúa.

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$

6. Suprime el radical del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

En la web Practica el producto y el cociente de expresiones con $a+b\sqrt{c}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

6 Números aproximados. Errores

Observa

a) 34 m tiene 2 cifras significativas.

b) 0,0863 hm^3 tiene 3 cifras significativas.

c) 53 000 l es posible que solo tenga 2 cifras significativas si los ceros del final solo han servido para designar el número. En tal caso, lo mejor sería poner 53 miles de litros.

Observa

a) $\begin{cases} \text{Medición: } 34 \text{ m} \\ \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ m} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Medición: } 0,0863 \text{ hm}^3 \\ \text{Error abs.} < 0,00005 \text{ hm}^3 \\ \text{Es decir, error abs.} < 50 \text{ m}^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Medición: } 53 \text{ miles de } l \\ \text{Error absoluto} < 500\ l \end{cases}$

Observa

Los errores relativos de las mediciones anteriores son:

a) $\text{E.r.} < \dfrac{0,5}{34} < 0,015 = 1,5\,\%$

b) $\text{E.r.} < \dfrac{0,00005}{0,0863} < 0,0006 = 0,06\,\%$

c) $\text{E.r.} < \dfrac{500}{53\,000} < 0,0095 < 0,01 = 1\,\%$

Aproximación y errores

En las aplicaciones prácticas se suelen manejar números aproximados. Recordemos algunos conceptos y procedimientos con los que se controla su uso.

Se llaman **cifras significativas** las que se usan para expresar un número aproximado. Solo se deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste y de modo que sean relevantes para lo que se desea transmitir.

Por ejemplo, si al medir la capacidad de una piscina se obtiene 718 900 l, sería más razonable decir que tiene 719 m^3, utilizando solo 3 cifras significativas. Pero si la medición no fue muy fina, lo propio sería decir 720 m^3 o, mejor, 72 decenas de m^3.

Error absoluto de una medida aproximada es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo: **el error absoluto es menor que…** Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.

En el ejemplo anterior (capacidad de la piscina: 719 m^3), la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto *es menor que medio metro cúbico* (error < 0,5 m^3).

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real. Es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan. El error relativo también se suele expresar en tantos por ciento (%).

En el ejemplo, el error relativo es menor que $\dfrac{0,5}{719} < 0,0007 = 0,07\,\%$

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar con un número razonable de cifras significativas las siguientes cantidades:***

a) Visitantes en un año a una pinacoteca: 183 594.

b) Asistentes a una manifestación: 234 590.

c) Número de bacterias en 1 dm³ de cierto preparado: 302 593 847.

a) Puede ser razonable que esta cantidad se dé con tanta precisión, pues los asistentes a un museo pagan una entrada que, lógicamente, se contabiliza. Suponemos que ese número, 183 594, es el de entradas vendidas.

No obstante, para cierto tipo de comunicaciones podría simplificarse la cifra: "casi doscientos mil", "más de ciento ochenta mil" son valoraciones adecuadas.

b) Es imposible que nadie haya contado los manifestantes con tanta precisión. Aunque la cifra no esté "hinchada" o "achicada" por razones sectarias, no se puede afinar tanto en estas valoraciones. Razonable sería decir, por ejemplo, "más de doscientos mil", o bien "entre 200 000 y 250 000".

c) Una o, como mucho, dos cifras significativas es lo que este tipo de cantidades permite afinar: 3 cientos de millones de bacterias o 30 decenas de millones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2. ***Dar una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido en cada una de las valoraciones que se han dado en las cantidades del ejercicio anterior.***

a) Si decimos que el número de visitantes es 180 mil (o mejor, 18 decenas de miles) cometemos un error absoluto de 183 594 – 180 000 = 3 594 personas. Lo sabemos con precisión porque conocemos la cantidad exacta. Sin embargo, quien reciba la información (18 decenas de miles) deberá entender que puede haber un error de hasta 5 unidades de la primera cifra no utilizada: 5 000 personas. Resumiendo:

Valoración: 180 mil

Error absoluto < 5 000

Error relativo $< \frac{5\,000}{180\,000} < 0{,}028 < 0{,}03 \rightarrow$ E.r. $< 0{,}03 = 3\,\%$

b) Valoración: 200 000

Error absoluto < 50 000

Error relativo $< \frac{50\,000}{200\,000} = 0{,}25 = 25\,\%$

c) Valoración: 3 cientos de millones = 300 millones

Error absoluto < 0,5 decenas de millones = 5 millones

Error relativo $< \frac{5}{300} < 0{,}017 < 0{,}02 \rightarrow$ E.r. $< 0{,}02 = 2\,\%$

Números en notación científica

Los números $3{,}845 \cdot 10^{15}$ y $9{,}8 \cdot 10^{-11}$ están en notación científica porque:

— Están descritos mediante dos factores: un número decimal y una potencia de 10.

— El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.

— La potencia de 10 es de exponente entero.

El primero, $3{,}845 \cdot 10^{15} = 3\,845\,000\,000\,000\,000$, es un número "grande".

El segundo, $9{,}8 \cdot 10^{-11} = 0{,}000000000098$, es un número "pequeño".

Esta forma de expresión resulta muy cómoda para tratar con cantidades aproximadas muy grandes o muy pequeñas, pues:

- De un solo golpe de vista se aprecia el "tamaño" del número. Se ve en el segundo factor y lo da el exponente del 10.
- Se constata la precisión con la que se da la cantidad. Depende del número de cifras significativas del primer factor.

Por ejemplo, apreciamos que $7{,}6 \cdot 10^8$ y $7{,}603 \cdot 10^8$ son aproximadamente iguales ("tamaños muy parecidos") pero la segunda está dada con más precisión.

Ejercítate

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000 b) 0,00000319

c) $25 \cdot 10^6$ d) $0{,}04 \cdot 10^9$

e) $480 \cdot 10^{-8}$ f) $0{,}05 \cdot 10^{-8}$

Otro ejemplo

$7{,}6 \cdot 10^8$ y $7{,}60 \cdot 10^8$, aparentemente iguales, no lo son, pues la segunda es más precisa y está dada con una cifra significativa más.

Piensa y practica

1. Efectúa. Después, repasa con la calculadora:

a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6})$

b) $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6})$

c) $7{,}92 \cdot 10^6 + 3{,}58 \cdot 10^7$

d) $6{,}43 \cdot 10^{10} + 8{,}113 \cdot 10^{12} - 8 \cdot 10^{11}$

2. La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.

a) Exprésala en notación científica.

b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.

c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.

d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Números racionales e irracionales

1. a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos enteros?

$$-2;\ 1,7;\ \sqrt{3};\ 4,\overset{\frown}{2};\ -3,7\overset{\frown}{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2. a) Clasifica en racionales o irracionales.

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0,8\overset{\frown}{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

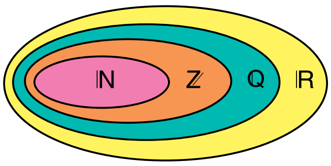
c) ¿Cuáles son números reales?

3. Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:

$1;\ 7,\overset{\frown}{23};\ 1-\sqrt{2};$

$3,5;\ \dfrac{11}{9};\ \sqrt{\dfrac{1}{4}};$

$\sqrt{6};\ \dfrac{\pi}{4};\ -104$



Intervalos y semirrectas

4. Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

5. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$A = [-2, 4]$ $\quad B = (1, 6)$ $\quad C = [-7, -3)$

$D = (0, 5]$ $\quad E = (-\infty, 1]$ $\quad F = (-1, +\infty)$

6. Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:

a) $-3 \le x \le 2$ $\quad$ b) $5 < x$ $\quad$ c) $x \ge -2$

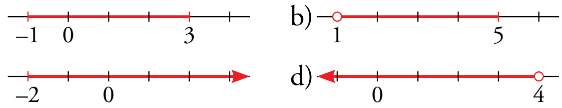
d) $-2 \le x < 3/2$ $\quad$ e) $4 < x < 4,1$ $\quad$ f) $-3 \le x$

7. Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

a) $(1;\ 2,5)$ $\quad$ b) $[-2, 3]$ $\quad$ c) $[-7, 0)$

d) $[-3, +\infty)$ $\quad$ e) $(2, +\infty)$ $\quad$ f) $(-5, 2]$

8. Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:



9. a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:

$$-3;\ 10;\ 0,5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6,\overset{\frown}{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$(-3, 5)$ $\quad [2, 7)$ $\quad [5, 7]$ $\quad (5, 7)$

Potencias y raíces

10. Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$ $\quad$ b) $\sqrt{2}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{10^6}$ $\quad$ d) $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ $\quad$ f) $\sqrt[4]{a}$ $\quad$ g) $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ $\quad$ h) $\sqrt[15]{a^5}$

11. Pon en forma de raíz.

a) $5^{1/2}$ $\quad$ b) $(-3)^{2/3}$ $\quad$ c) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ $\quad$ e) $(a^{1/2})^{1/3}$ $\quad$ f) $(a^{-1})^{3/5}$

12. Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{343}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ $\quad$ f) $\sqrt[3]{0,001}$

13. Obtén con la calculadora.

a) $\sqrt[3]{-127}$ $\quad$ b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{1,5^3}$

d) $12^{-2/3}$ $\quad$ e) $\sqrt[6]{3^{-5}}$ $\quad$ f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

14. Calcula.

a) $25^{1/2}$ $\quad$ b) $27^{1/3}$ $\quad$ c) $125^{2/3}$ $\quad$ d) $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ $\quad$ f) $16^{5/4}$ $\quad$ g) $49^{3/2}$ $\quad$ h) $8^{5/3}$

15. Expresa los radicales como potencias de exponente fraccionario y efectúa como en el ejemplo resuelto:

- $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{2} = 2^{3/4} : 2^{1/3} = 2^{3/4-1/3} = 2^{5/12}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ $\quad$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9}$ $\quad$ c) $3\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ $\quad$ f) $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Radicales

16. Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

17. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6 b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2 b^4}$

18. Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

19. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

20. Divide y simplifica.

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\dfrac{21}{5}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} : \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}} : \sqrt[3]{\dfrac{45}{4}}$

21. Reduce a un solo radical.

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

22. Calcula y simplifica si es posible.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ c) $\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}$ f) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^6$

23. Ejercicio resuelto

Expresa como un solo radical:

$$\boldsymbol{\sqrt{63} - 5\sqrt{28} + \sqrt{112}}$$

Descomponemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{63} &= \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \\ \sqrt{28} &= \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} \\ \sqrt{112} &= \sqrt{2^4 \cdot 7} = 4\sqrt{7} \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} &3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = \\ &= 3\sqrt{7} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = \\ &= -3\sqrt{7} \end{aligned}$$

24. Efectúa.

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

25. Efectúa.

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$ d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$

26. Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ e) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

27. Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

Números aproximados. Notación científica

28. Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de estas aproximaciones sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:

a) 128 mil euros b) 25 millones de euros

c) 648 500 € d) 3 200 €

29. Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

30. Escribe en notación científica.

a) 752 000 000 b) 0,0000512

c) 0,000007 d) 15 000 000 000

31. Expresa en notación científica.

a) $32 \cdot 10^5$ b) $75 \cdot 10^{-4}$ c) $843 \cdot 10^7$

d) $458 \cdot 10^{-7}$ e) $0{,}03 \cdot 10^6$ f) $0{,}0025 \cdot 10^{-5}$

32. Calcula mentalmente.

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$ d) $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

33. Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

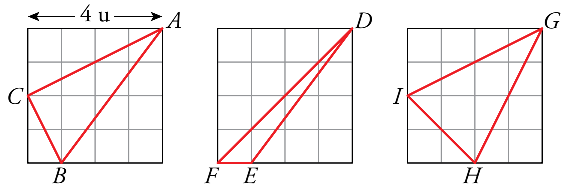
34. El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es $60\,\pi\ \text{cm}^3$.

a) ¿Cuánto mide su radio?

b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

35. Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 de generatriz. Da el valor exacto.

36. Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.



37. Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

38. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ b) $\sqrt[3]{k} = -2$ c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125} = -5$ e) $\sqrt[3]{k} = -1$ f) $\sqrt[k]{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

39. Da una cota del error absoluto de estas aproximaciones y compara sus errores relativos:

a) $8 \cdot 10^5$ b) $5{,}23 \cdot 10^6$ c) $1{,}372 \cdot 10^7$

d) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ e) $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ f) $4 \cdot 10^{-5}$

40. El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

41. El consumo de agua en España es, aproximadamente, de 142 litros por habitante y día.

¿Cuál es el consumo anual, en metros cúbicos, de toda la población? Da el resultado en notación científica con una cota del error absoluto y otra del error relativo.

42. Durante los años de la crisis financiera, una vivienda, que costaba 250 000 € en 2008, se fue devaluando un 4 % anual durante 5 años. A partir de 2013 subió un 3,5 % hasta que se vendió 2 años después.

a) ¿Cuál fue el precio de venta? Exprésalo en miles de euros y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido.

b) ¿Cuál fue el índice de variación? Di si corresponde a un aumento o a una disminución.

Autoevaluación

1. Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y reales:

$$7{,}53;\ \sqrt{64};\ \frac{\sqrt{7}}{2};\ -5;\ \frac{\pi}{4};\ 3{,}2\widehat{3};\ \frac{7}{11}$$

2. a) Escribe como intervalo y representa $-3 < x \le 5$.

b) Escribe como desigualdad y representa $(-\infty, 8]$.

c) Escribe en forma de intervalo y representa "los números mayores que -1".

d) Expresa como una desigualdad el conjunto de números representado:

3. Simplifica y, si es posible, extrae factores:

a) $\sqrt[3]{2^{15}}$ b) $\sqrt[n]{6^{10}}$ c) $\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{18}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

4. Halla el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 7$ b) $\sqrt[k]{-125} = -5$ c) $\sqrt[3]{2^{15}} = k$

5. Opera:

a) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$

6. Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}}$

7. Expresa en notación científica y, con ayuda de la calculadora, opera. Escribe el resultado con tres cifras significativas.

$$\frac{1500000 \cdot 25 \cdot 10^{17}}{0{,}00007 \cdot (2000)^4}$$

Después, da una cota del error absoluto y otra del error relativo del valor aproximado obtenido.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

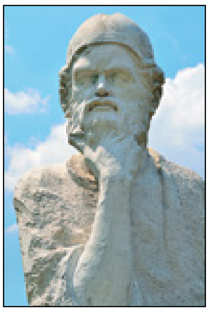
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Polinomios y fracciones algebraicas

Tres grandes fases en la evolución del lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico actual es sencillo, cómodo y operativo. En el largo camino para llegar a él, cabe considerar tres grandes etapas.

Álgebra primitiva o retórica. En ella, todo se describe con lenguaje ordinario. Babilonios, egipcios y griegos antiguos la practicaban; y también los árabes, quienes, entrado ya el siglo IX, retornaron a ella.



Estatua de Omar Jayyam en Bucarest. Este matemático persa estudió las ecuaciones cúbicas aportando una solución geométrica para algunas de ellas en el siglo XI.

Álgebra sincopada. **Diofanto** (siglo III) fue el pionero, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos.

Durante el Renacimiento (siglos XV y XVI), el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias...

Álgebra simbólica. Consiste en una simbolización completa. **Vieta**, a finales del XVI, mejoró lo que ya había, de modo que su lenguaje algebraico fue predecesor del actual. Y **Descartes,** en el siglo XVII, lo acabó de perfeccionar.

François Vieta (1540-1603). Matemático francés que publicó en 1591 la obra "In Artem Analyticam Isagoge", donde introdujo el uso habitual de letras en fórmulas matemáticas.

El álgebra geométrica

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener o demostrar relaciones algebraicas. Muchos de ellos (griegos, árabes, …) se valieron, para ello, de figuras geométricas, dando lugar al *álgebra geométrica*.

Detalle de La Escuela de Atenas, de Rafael, donde destaca la imagen de Hipatia de Alejandría. Considerada la primera científica de la historia, comentó extensamente los trabajos algebraicos de Diofanto en el siglo IV.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Recuerda

- Para sumar dos polinomios, se reducen los términos semejantes.
- Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Observa cómo sumamos y restamos los polinomios $A = x^4 - 7x^3 + 4x + 5$ y $B = 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1$:

$$\begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ + B \rightarrow & 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 \\ \hline A + B \rightarrow & x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ - B \rightarrow & - 2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 \\ \hline A - B \rightarrow & x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4 \end{array}$$

También podemos operar directamente, quitando paréntesis y agrupando los términos semejantes:

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) + (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 6x + 5 + 1 = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6$$

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 - 2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 - 2x^3 + 8x^2 + 4x - 6x + 5 - 1 = x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

Producto de un polinomio por un monomio

Recuerda

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Multiplicamos el polinomio $M = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ por 3 y por $N = 4x^3$:

$$\begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times 3 \rightarrow & \times 3 \\ \hline 3M \rightarrow & 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times N \rightarrow & \times 4x^3 \\ \hline M \cdot N \rightarrow & 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3 \end{array}$$

También podemos multiplicar directamente:

$$3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 3 = 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9$$

$$4x^3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 4x^3 \cdot 2x^3 - 4x^3 \cdot 5x^2 + 4x^3 \cdot 4x - 4x^3 \cdot 3 =$$
$$= 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3$$

Piensa y practica

1. Quita paréntesis y reduce.

a) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x) + (4x^3 - 9x^2 + 7x - 1)$

b) $(5x^4 - 5x^2 - 3x) - (x^3 + 3x^2 + 6x - 11)$

c) $(7x^2 - 9x + 1) - (x^3 - 5x^2 - 4) + (x^3 - 4x^2)$

2. Efectúa.

a) $2 \cdot (3x^2 - 4x)$ b) $-5 \cdot (x^3 - 3x)$

c) $x \cdot (-2x + 3)$ d) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

3. Sean $P = x^5 - 3x^4 + 5x + 9$, $Q = 5x^2 + 3x - 11$.

Halla: a) $P + Q$ b) $P - Q$ c) $2P - 3Q$

4. Halla los productos siguientes:

a) $3x \cdot (2x + y + 1)$ b) $3a \cdot (a^2 + 2a^4)$

c) $ab^2 \cdot (a - b)$ d) $-5x^3 \cdot (3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y \cdot (2x - y + 2)$ f) $7x^2y \cdot (3x + y)$

g) $5x^3y^3 \cdot (x^2 + x - 1)$ h) $3a^2b^3 \cdot (3a - b + 1)$

5. Calcula el polinomio P en cada caso.

a) $2 \cdot P = 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$

b) $x \cdot P = x^3 - 3x^2 - 5x$

c) $4x^2 \cdot P = -12x^5 + 4x^3 - 8x^2$

d) $2xy^2 \cdot P = 2x^2y^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Producto de polinomios

Recuerda

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro, y se suman los monomios semejantes obtenidos.

Vamos a multiplicar los polinomios $P = x^3 - 4x - 5$ y $Q = 2x^2 + x - 3$.

(Observa que cuando falta algún término, se incluye un monomio de coeficiente 0 en el lugar correspondiente).

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & x^3 + & 0x^2 - & 4x - & 5 & \leftarrow P \\
 & & \times & 2x^2 + & x - & 3 & \leftarrow Q \\
\hline
 & & -3x^3 + & 0x^2 + & 12x + & 15 & \leftarrow \text{Producto por } -3 \\
 & x^4 - & 0x^3 - & 4x^2 - & 5x & & \leftarrow \text{Producto por } x \\
2x^5 + & 0x^4 - & 8x^3 - & 10x^2 & & & \leftarrow \text{Producto por } 2x^2 \\
\hline
2x^5 + & x^4 - & 11x^3 - & 14x^2 + & 7x + & 15 & \leftarrow P \cdot Q
\end{array}
$$

Cuando se multiplican polinomios de pocos términos, se suele operar directamente:

$$(5x^2 - 2) \cdot (2x - 3) = 10x^3 - 15x^2 - 4x + 6$$

División de polinomios

Nomenclatura

Si un polinomio P depende de la variable x, se le suele designar $P(x)$.

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales. Veamos cómo se procede en la práctica dividiendo dos polinomios concretos:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 \qquad Q(x) = 2x + 3 \qquad P(x) : Q(x)$$

$$
\begin{array}{lrrrr|l}
 & 2x^3 - & 7x^2 & -11x + & 13 & 2x + 3 \\
\cline{6-6}
\text{Restamos } x^2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & -2x^3 - & 3x^2 & & & x^2 - 5x + 2 \\
\cline{2-3}
 & & -10x^2 & -11x & +13 & \\
\text{Restamos } -5x \cdot (2x + 3) \longrightarrow & & 10x^2 & +15x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 4x & +13 & \\
\text{Restamos } 2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & & & -4x & -6 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 7 &
\end{array}
$$

$(2x^3) : (2x) = x^2$

$(-10x^2) : (2x) = -5x$

$(4x) : (2x) = 2$

DIVIDENDO = DIVISOR · COCIENTE + RESTO

Por tanto: $2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 = (2x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 2) + 7$

Piensa y practica

6. Dados los polinomios $P = 5x^2 - 3$, $Q = x^2 - 4x + 1$, $R = -5x + 2$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $Q \cdot R$ c) $P \cdot Q$

7. Opera y simplifica:

a) $3x^2(2x^3 - 1) + 6(4x^2 - 3)$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) - x^2(2x^3 + 5x^2)$

c) $(x - 3)(2x + 5) - 4(x^3 + 7x)$

8. Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:

$P(x) = Q(x) \cdot$ COCIENTE + RESTO

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5$ $Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4$ $Q(x) = 5x - 2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 División de un polinomio por $(x - a)$

La regla de Ruffini

Vas a aprender ahora un sencillo procedimiento para realizar con rapidez las divisiones de polinomios cuyos divisores son del tipo $(x - a)$.

Veámoslo con un ejemplo: $(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

La división que conoces sería así:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 0x^2 & +\ 11x & -\ 2 & x - 3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +\ 6x^3 & & & & 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-2}
 & -\ x^3 & +\ 0x^2 & & & \\
 & +\ x^3 & -\ 3x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 3x^2 & +\ 11x & & \\
 & & +\ 3x^2 & -\ 9x & & \\ \cline{3-4}
 & & & +\ 2x & -\ 2 & \\
 & & & -\ 2x & +\ 6 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4 &
\end{array}
$$

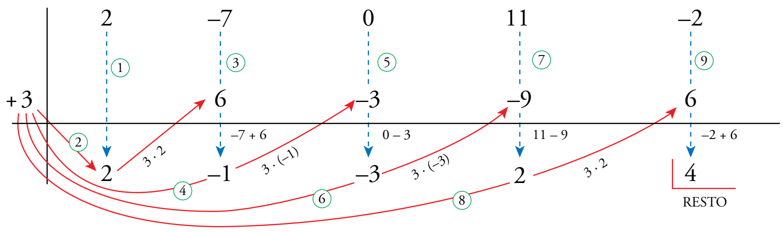
Esa misma división se puede realizar, sintéticamente, del siguiente modo:

$(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -7 & 0 & 11 & -2 \\
3 & & 6 & -3 & -9 & 6 \\ \hline
 & 2 & -1 & -3 & 2 & \boxed{4}
\end{array}
$$

Resto

Cociente: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$



COCIENTE: 2 –1 –3 2 → significa: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$

RESTO: 4

Los pasos numerados en verde son los que se dan en la división de arriba.

Este método, en el que solo intervienen los coeficientes y solo se realizan las operaciones que realmente importan, se llama **regla de Ruffini** en honor al matemático italiano que lo divulgó.

Ejercicio resuelto

Obtener el cociente y el resto en estas divisiones de polinomios:

a) $(4x^3 - 9x^2 + 6x + 5) : (x - 2)$

b) $(5x^4 - 2x^2 - 5) : (x + 1)$

a)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -9 & 6 & 5 \\
2 & & 8 & -2 & 8 \\ \hline
 & 4 & -1 & 4 & \boxed{13}
\end{array}
$$

$C(x) = 4x^2 - x + 4$

$R = 13$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & -2 & 0 & -5 \\
-1 & & -5 & 5 & -3 & 3 \\ \hline
 & 5 & -5 & 3 & -3 & \boxed{-2}
\end{array}
$$

$C(x) = 5x^3 - 5x^2 + 3x - 3$

$R = -2$

Piensa y practica

1. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^3 - 7x^2 + 9x - 3) : (x - 5)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 4) : (x + 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$

d) $(4x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

e) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Valor de un polinomio, $P(x)$, para $x = a$

Volviendo al polinomio que aparece como dividendo en el ejemplo de la página anterior, $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 11x - 2$, observa que el valor que toma para $x = 3$ coincide con el resto de su división entre $(x - 3)$:

$$P(3) = 2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 11 \cdot 3 - 2 = 162 - 189 + 33 - 2 = 4$$

Resto de la división $P(x) : (x - 3) \rightarrow 4$

La coincidencia de esos valores no es casual, y su justificación es sencilla. Atendiendo a las relaciones entre los términos de la división, $D = d \cdot C + R$, vemos que:

$$P(x) = (x - 3) \cdot C(x) + \underbrace{4}_{\text{RESTO}}$$

$$P(3) = \overbrace{(3 - 3)}^{0} \cdot C(3) + 4 = 4$$

Y lo dicho para el ejemplo se puede generalizar para cualquier división de un polinomio entre $(x - a)$, como puedes ver a la izquierda.

> El valor de un polinomio para $x = a$ coincide con el resto que se obtiene al dividirlo entre $(x - a)$.

Según estos resultados, podemos calcular el valor de un polinomio para $x = a$ con ayuda de la regla de Ruffini: lo dividimos entre $(x - a)$ y tomamos el resto de la división.

Ten en cuenta

La notación $P(a)$ significa: valor del polinomio P para $x = a$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \cline{2-2} \dots & C(x) \\ R & \end{array}$$

$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$

$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R =$

$= 0 \cdot C(a) + R = R$

Ejercicio resuelto

Calcular el valor del polinomio $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 6x + 2$ para los valores siguientes:

a) $x = 2$

b) $x = -5$

a) Dividimos $Q(x) : (x - 2)$ y tomamos el resto:

	1	7	6	–6	2
2		2	18	48	84
	1	9	24	42	86

$Q(2) = 86$

b) Dividimos $Q(x) : (x + 5)$ y tomamos el resto:

	1	7	6	–6	2
–5		–5	–10	20	–70
	1	2	–4	14	–68

$Q(-5) = -68$

En la web Regla de Ruffini: ejemplos y ejercicios.

Piensa y practica

2. Sea el polinomio $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$.

a) Calcula $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8$.

b) Divide, con la regla de Ruffini, $M(x) : (x - 4)$.

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resto de la división que has realizado en b).

3. El valor de un polinomio, $A(x)$, para $x = 7$ es 54. ¿Qué puedes decir de la división $A(x) : (x - 7)$?

4. Del polinomio $H(x)$ sabemos:

$H(5) = 18 \qquad H(-5) = 13$

a) ¿Cuál es el resto de la división $H(x) : (x - 5)$?

b) ¿Y el de la división $H(x) : (x + 5)$?

5. Considera los polinomios siguientes:

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$

Calcula, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(3)$ b) $P(-1)$ c) $Q(3)$ d) $Q(-1)$

6. Calcula, con ayuda de la regla de Ruffini, el valor del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ para:

a) $x = -2$ b) $x = -3$ c) $x = 5$

7. De un polinomio $P(x)$, sabemos que se anula para el valor $x = 8$, es decir, $P(8) = 0$.

¿Qué puedes decir de la división $P(x) : (x - 8)$?

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Factorización de polinomios

Raíces de un polinomio

Un número, a, se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Para localizar las raíces enteras de un polinomio, probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.

Una vez localizada una raíz, a, puesto que $P(x)$ es divisible por $x - a$, podremos ponerlo así: $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$. Las restantes raíces las buscaremos en $P_1(x)$.

Cálculo mental

Di si 0, 1, –1, 2 o –2 son raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^4 - x^3 - 2x^2$

c) $x^3 + x^2 - 25x - 25$

d) $x^5 - 5x^3 + 4x$

Precedimiento para factorizar un polinomio

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Veamos, prácticamente, cómo factorizar $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$:

- Para localizar las raíces de $P(x)$, iremos probando con los divisores (positivos y negativos) de 2. Empecemos por 1 y por –1:

	4	–4	–9	1	2
1		4	0	–9	–8
	4	0	–9	–8	$\boxed{-6}$

1 no es raíz.

	4	–4	–9	1	2
–1		–4	8	1	–2
	4	–8	–1	2	$\boxed{0}$

–1 sí es raíz.

Escribimos $P(x)$ factorizado: $P(x) = (x + 1)(4x^3 - 8x^2 - x + 2)$

- Ahora buscamos las raíces de $P_1(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$:

  1 ha quedado descartado. Probamos de nuevo con –1 y resulta que no lo es (es decir, –1 es una *raíz simple*). A continuación, probamos con 2:

	4	–8	–1	2
2		8	0	–2
	4	0	–1	$\boxed{0}$

2 sí es raíz de $P_1(x)$ [y, por tanto, de $P(x)$]

$P_1(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)$

- Cuando queda un polinomio cuyas raíces se pueden localizar por otros medios, al hacerlo se concluye el proceso. En nuestro caso, reconocemos que $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Por tanto, el resultado final es:

  $P(x) = (x + 1)(x - 2)(2x + 1)(2x - 1) = 4(x + 1)(x - 2)(x + 1/2)(x - 1/2)$

Igualdades notables

Las **igualdades notables,** así como la extracción de **factor común,** son procedimientos sencillos que ayudan en la factorización de polinomios.

Hay polinomios para cuya factorización no es necesario aplicar la regla de Ruffini. Por ejemplo, $Q(x) = x^4 - x^3 - 20x^2$.

- Empecemos por extraer x^2 como factor común: $Q(x) = x^2(x^2 - x - 20)$
- Ahora hallamos las raíces de $x^2 - x - 20 = 0$: $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$.

  Por tanto, $Q(x) = x^2(x - 5)(x + 4)$.

Notas

- Si llegamos a un polinomio de segundo grado sin raíces, dicho polinomio queda como un único factor (no se puede descomponer en dos).
- Si un polinomio tiene más de dos raíces no enteras, entonces, aunque pueda factorizarse, nosotros no sabremos hacerlo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios resueltos

1. ***Factorizar y decir cuáles son las raíces.*** ***$P(x) = 12x^5 - 36x^4 + 27x^3$***	Todos los sumandos tienen el factor x^3. Los coeficientes 12, –36 y 27 son múltiplos de 3. Por tanto, podemos sacar $3x^3$ como factor común. $P(x) = 3x^3(4x^2 - 12x + 9)$ Observamos que $4x^2 - 12x + 9$ es igual a $(2x - 3)^2$. $P(x) = 3x^3(2x - 3)^2$ Obtenemos las raíces igualando a 0 cada factor. Las raíces de $P(x)$ son 0 (raíz triple) y 3/2 (raíz doble).
2. ***Factorizar.*** ***$Q(x) = 4x^2 - 8x + 3$***	Buscamos las raíces igualando a 0 y resolviendo la ecuación: $4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2};\ x = \frac{3}{2}$ Por tanto: $Q(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$, o bien: $Q(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)2\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x - 1)(2x - 3)$
3. ***Factorizar.*** ***$R(x) = x^3 - x + 6$***	Utilizamos la regla de Ruffini para localizar una raíz entre los divisores de 6: $\begin{array}{r\|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$ –2 es una raíz de $R(x)$. Buscamos raíces de $x^2 - 2x + 3$: $x^2 - 2x + 3 = 0$ no tiene solución. Hemos llegado a un polinomio de segundo grado que no tiene raíces. Entonces: $R(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

Piensa y practica

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $3x^5 - 48x$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^3 - 2x^2 - 15x$

f) $2x^3 - x^2 - x + 2$

2. Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $49 + 14x + x^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2$

3. Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$ b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$ d) $4x^2 - 1$

4. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$ d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$ f) $3x^2 + 30x + 75$

5. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$ b) $x^3 - 4x$

c) $9x^3 + 6x^2 + x$ d) $4x^2 - 25$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Fracciones algebraicas

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios.

Por ejemplo: $\dfrac{x}{3x^2-5}$, $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3x+1}{x^2+6x-3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma muy similar a las fracciones numéricas, como veremos a continuación.

Simplificación

Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así otra fracción equivalente.

Por ejemplo: $\dfrac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)} = \dfrac{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{x}\cdot x\cdot \cancel{(x+1)}} = \dfrac{x+1}{2x}$

Reducción a común denominador

Para reducir varias fracciones a común denominador, se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador. Este será múltiplo de todos los denominadores.

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{5}{x-2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}, \quad \frac{5\cdot x}{(x-2)\cdot x}$$

Denominador común: $x\cdot(x-2)$

Observa que en cada fracción se han multiplicado numerador y denominador por el factor apropiado para obtener el denominador común que se desea.

Atención

Para sumar (o restar) fracciones algebraicas con el mismo denominador, se suman los numeradores y se mantiene el denominador común.

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x+1} = \frac{3+x-(x-2)}{x+1} = \frac{5}{x+1}$$

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador común.

Por ejemplo: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x-2} = \dfrac{3(x-2)}{x(x-2)}+\dfrac{5x}{x(x-2)} = \dfrac{3x-6+5x}{x(x-2)} = \dfrac{8x-6}{x^2-2x}$

Ejercicio resuelto

a) $\dfrac{3x+5}{2x+3}-\dfrac{x-7}{2x+3}$

b) $\dfrac{5x+4}{x}+\dfrac{x-2}{2x}$

c) $\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+3}{x}$

d) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$

a) $\dfrac{3x+5}{2x+3}-\dfrac{x-7}{2x+3} = \dfrac{3x+5-(x-7)}{2x+3} = \dfrac{2x+12}{2x+3}$

b) $\dfrac{5x+4}{x}+\dfrac{x-2}{2x} = \dfrac{2(5x+4)}{2x}+\dfrac{x-2}{2x} = \dfrac{10x+8+x-2}{2x} = \dfrac{11x+6}{2x}$

c) $\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x(x+3)}{x\cdot x} = \dfrac{3+x^2+3x}{x^2} = \dfrac{x^2+3x+3}{x^2}$

d) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{(x+1)\cdot 3x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{(x-1)\cdot 2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x^2+3x-(2x-2)}{(x+1)(x-1)} =$

$= \dfrac{3x^2+x+2}{x^2-1}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Producto

El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{5x+1}{x^2} = \frac{2x \cdot (5x+1)}{(x-3) \cdot x^2} = \frac{10x^2+2x}{x^3-3x^2}$

Definición

Se llama **inversa** de una fracción algebraica a la que se obtiene intercambiando numerador y denominador:

La inversa de $\frac{5}{x+2}$ es $\frac{x+2}{5}$.

Cociente

El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (producto cruzado de términos).

Por ejemplo: $\frac{3}{x} : \frac{5}{x+2} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x+2}{5} = \frac{3(x+2)}{5x} = \frac{3x+6}{5x}$

Ejercicio resuelto

a) $\frac{2x-7}{x} \cdot \frac{3}{x+1}$

b) $\frac{5}{x-3} : \frac{x}{x^2+1}$

c) $\frac{3}{x} \cdot \left(\frac{5x+3}{x-1} : \frac{5x+3}{x}\right)$

a) $\frac{2x-7}{x} \cdot \frac{3}{x+1} = \frac{3(2x-7)}{x(x+1)} = \frac{6x-21}{x^2+x}$

b) $\frac{5}{x-3} : \frac{x}{x^2+1} = \frac{5}{x-3} \cdot \frac{x^2+1}{x} = \frac{5(x^2+1)}{(x-3)x} = \frac{5x^2+5}{x^2-3x}$

c) $\frac{3}{x} \cdot \left(\frac{5x+3}{x-1} : \frac{5x+3}{x}\right) = \frac{3}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{5x+3}}{x-1} : \frac{\cancel{x}}{\cancel{5x+3}} = \frac{3}{x-1}$

Piensa y practica

1. Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\frac{15x^2}{5x^2(x-3)}$ b) $\frac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$

c) $\frac{3x^2-9x^3}{15x^3-3x^4}$ d) $\frac{9(x+1)-3(x+1)}{2(x+1)}$

e) $\frac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$ f) $\frac{x(3x^3-x^2)}{(3x-1)x^3}$

2. Opera y simplifica.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} + \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \frac{7x}{x-3} + 3$

d) $\frac{5x^3+15x^2}{x+3} - \frac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

3. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:

a) $\frac{x^2-1}{x} : (x-1)$ b) $\frac{x(x-2)}{x} : \frac{x^2-4}{x+2}$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x} : \frac{x-1}{x}$ d) $6x^2 \cdot \frac{x-3}{x^3}$

e) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ f) $\frac{2x}{x-1} : \frac{4x^2}{2x-2}$

g) $\frac{x+5}{10} \cdot \frac{5}{(x+5)^2}$ h) $\frac{2x^2}{3x} \cdot \frac{6x}{4x^3}$

i) $\frac{4x-3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{8x-6}$ j) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x-1)}$

4. Opera y simplifica.

a) $\frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x}{2x-3} + \frac{5x}{2x+3}\right)$

b) $\frac{x^2}{5x^2-25} - \frac{1}{5} - \frac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Polinomios. Operaciones

1. Opera y simplifica.

a) $(x-3)(x+3)+(x-4)(x+4)-25$

b) $(x+1)(x-3)+(x-2)(x-3)-(x^2-3x-1)$

c) $2x(x+3)-2(3x+5)+x$

d) $(x+1)^2-3x-3$

e) $(2x+1)^2-1-(x-1)(x+1)$

f) $x(x-3)+(x+4)(x-4)-(2-3x)$

2. Dados los polinomios $P(x)=x^3-5x^2-3$; $Q(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$ y $R(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2$, calcula:

a) $P(x)+Q(x)-R(x)$ b) $2P(x)-3Q(x)$

c) $P(x)\cdot Q(x)$ d) $Q(x)\cdot R(x)$

3. Efectúa y simplifica el resultado.

a) $(2y+x)(2y-x)+(x+y)^2-x(y+3)$

b) $3x(x+y)-(x-y)^2+(3x+y)y$

c) $(2y+x+1)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)$

d) $(x+y)(2x-y)(x+2y)$

4. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

a) $\dfrac{3x(x+5)}{5}-\dfrac{(2x+1)^2}{4}+\dfrac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\dfrac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10}-\dfrac{(3x^2+2)^2}{15}+\dfrac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c) $\dfrac{(x-1)^3}{8}+\dfrac{3}{4}x(x+2)^2-\dfrac{x^3}{10}$

5. Expresa como producto de dos binomios.

a) $49x^2-16$ b) $9x^4-y^2$ c) $81x^4-64x^2$

d) $25x^2-3$ e) $2x^2-100$ f) $5x^2-2$

6. Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:

a) $16x^2+(\dots)-8xy$ b) $(\dots)+25y^2+60xy$

c) $\dfrac{9}{16}x^2+4y^2+(\dots)$ d) $(\dots)+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{4}{3}x^2y$

7. Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.

• $\mathbf{2x^4+12x^3+18x^2=2x^2(x^2+6x+9)=2x^2(x+3)^2}$

a) $20x^3-60x^2+45x$ b) $27x^3-3xy^2$

c) $3x^3+6x^2y+3y^2x$ d) $4x^4-81x^2y^2$

8. Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(7x^2-5x+3):(x^2-2x+1)$

b) $(2x^3-7x^2+5x-3):(x^2-2x)$

c) $(x^3-5x^2+2x+4):(x^2-x+1)$

9. Divide y expresa en cada caso así:

Dividendo = divisor · cociente + resto

a) $(3x^5-2x^3+4x-1):(x^3-2x+1)$

b) $(x^4-5x^3+3x-2):(x^2+1)$

c) $(4x^5+3x^3-2x):(x^2-x+1)$

d) $(x^3-5x^2+3x+1):(x^2-5x+1)$

10. Expresa las siguientes divisiones de la forma $D=d\cdot c+r$.

a) $(6x^3+5x^2-9x):(3x-2)$

b) $(x^4-4x^2+12x-9):(x^2-2x+3)$

c) $(4x^4+2x^3-2x^2+9x+5):(-2x^3+x-5)$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11. Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(5x^3-3x^2+x-2):(x-2)$

b) $(x^4-5x^3+7x+3):(x+1)$

c) $(-x^3+4x):(x-3)$

d) $(x^4-3x^3+5):(x+2)$

12. Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:

a) $P(x)=2x^3-5x^2+7x+3$

b) $P(x)=x^4-3x^2+7$

13. Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3, –3 son raíces de los polinomios siguientes:

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+x-3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

14. Busca el valor que debe tomar en cada polinomio el término independiente, m, para que la división sea exacta:

a) $(6x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x - m) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 9x^2 - 10x + m) : (x - 1)$

d) $(2x^4 - 9x^3 - 18x + m) : (x - 5)$

Factorización de polinomios

15. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$ b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$ d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$ f) $16x^4 - 9$

16. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$ b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$ d) $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$ f) $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$ h) $-x^2 + 17x - 72$

17. Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

18. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

19. Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e) $6x^3 + 13x^2 - 4$

f) $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

20. Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$ b) $\frac{x + 2}{x^2 - 4}$

c) $\frac{x^2 + 25 - 10x}{x^2 - 25}$ d) $\frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$

e) $\frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ f) $\frac{x^2y - 3xy^2}{2xy^2}$

21. Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ b) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2}$

c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$ d) $\frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 8x + 7}$

22. Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$ d) $\frac{2}{x^2} - \frac{x + 1}{3x}$

e) $\frac{x}{x - 3} - \frac{3}{x}$ f) $\frac{x - 3}{x + 1} - \frac{x}{x + 3}$

23. Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{x - 1}{x + 3} - \frac{2}{x - 3} + \frac{x}{x^2 - 9}$

b) $\frac{2}{x - 2} - \frac{x + 1}{x^2 - 2x} - \frac{3}{x^2 - 4}$

c) $\frac{1}{2x + 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - x - 2} - \frac{x}{x - 2}$

24. **Ejercicio resuelto**

Efectúa: $\left(\frac{3x}{(x - 2)^2} - \frac{3}{x - 2}\right) : \frac{1}{x - 2}$

Efectuamos la resta que va entre paréntesis:

$$\frac{3x}{(x - 2)^2} - \frac{3}{x - 2} = \frac{3x - 3(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{6}{(x - 2)^2}$$

Dividimos: $\frac{6}{(x - 2)^2} : \frac{1}{x - 2} = \frac{6(x - 2)}{(x - 2)^2}$

Simplificamos: $\frac{6}{x - 2}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

25. Opera, y simplifica si es posible.

a) $\left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x}{2}$ b) $\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x+2}\right) : \dfrac{x-2}{x}$

c) $\left(1 - \dfrac{2}{2-x}\right) \cdot \dfrac{2-x}{x^2}$ d) $\dfrac{2x}{x+1} : \left(\dfrac{2x}{x+1} - 1\right)$

Aplica lo aprendido

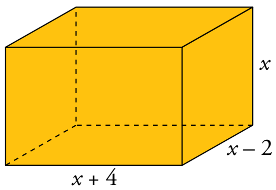
26. Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:

a) 0, 1 y 2 b) –1 y 3 c) 0 y 5

27. Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

28. Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$ sea divisible por $x - 1$ y por $x + 2$.

29. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



30. Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11 %.

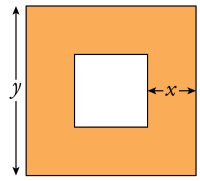
b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16 - x$ y $9 - x$.

c) La superficie de un jardín rectangular de base x metros y perímetro 70 m.

d) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y.

e) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.

31. Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.



32. Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y.

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$ b) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

5. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

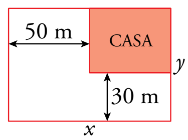
a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x}$ b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

6. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{2x^2}{x-3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$ b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x-2)^2} - \dfrac{x-3}{x-2}$

7. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa x.

8. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.



Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Algunos hitos en la resolución de ecuaciones...

El pionero: **Diofanto** (siglo III) propuso problemas algebraicos complejos y los resolvió por métodos originales y muy interesantes. Pero su aportación careció de método y tuvo poco valor pedagógico.

La sistematización: **Al-Jwarizmi** (siglo IX) fue quien, por primera vez, realizó un tratamiento sistemático y completo de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala,* elemental, didáctico y exhaustivo, fue muy conocido y estudiado y, posteriormente, traducido a todos los idiomas.

Los italianos del siglo XVI: En el siglo XVI, varios algebristas italianos (**Tartaglia**, **Cardano**…) mantuvieron unas interesantísimas, agitadas y fecundas discusiones sobre la resolución de distintos tipos de ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Toda esta actividad sirvió para dar un gran impulso a la resolución de ecuaciones de grado superior.

Al-Jwarizmi se educó y trabajó en la Casa de la Sabiduría de Bagdag, un centro de investigación comparable con la Biblioteca de Alejandría.

Girolamo Cardano (1501-1576). Su libro "Ars Magna" contiene la primera solución publicada para las ecuaciones de tercer grado, basada en las investigaciones de Tartaglia y Scipione del Ferro.

...y en los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones se plantearon y resolvieron de forma simultánea a las ecuaciones, ya que el paso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita no supone ningún problema especial.

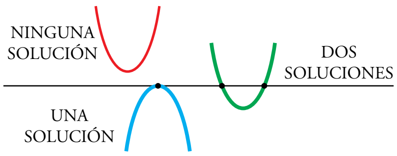
Históricamente, los sistemas de ecuaciones lineales no han sido un reto especialmente difícil. Ya en el siglo II a. C., los chinos resolvían sistemas lineales de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas, mediante un método elegante y potente, similar al que se usa en la actualidad.

La antigua matemática china destacó por su carácter práctico, obteniendo métodos excelentes tanto en aritmética como en álgebra.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Ecuaciones



En la web

- Cómo se obtiene la fórmula para resolver la ecuación de 2.º grado.
- Ecuaciones de 2.º grado y problemas para reforzar sus mecanismos de resolución.

Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

- **Ecuaciones completas.** Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} \text{si } b^2 - 4ac > 0, & \text{hay dos soluciones.} \\ \text{si } b^2 - 4ac = 0, & \text{hay una solución.} \\ \text{si } b^2 - 4ac < 0, & \text{no hay ninguna solución.} \end{cases}$$

- **Ecuaciones incompletas.** Si $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación se llama incompleta y se puede resolver con mucha sencillez sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

$$b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:*** ***a)*** $5x^2 - 45 = 0$ ***b)*** $5x^2 + 45 = 0$ ***c)*** $3x^2 - 21x = 0$	a) $5x^2 - 45 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{45}{5} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ *Soluciones:* $x_1 = 3,\ x_2 = -3$ b) $5x^2 + 45 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{45}{5} = -9$ No tiene solución. c) $3x^2 - 21x = 0 \rightarrow x(3x - 21) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 21 = 0 \rightarrow x = 7 \end{cases}$ *Soluciones:* $x_1 = 0,\ x_2 = 7$
2. ***Resolver las siguientes ecuaciones completas:*** ***a)*** $x^2 + x - 6 = 0$ ***b)*** $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ***c)*** $5x^2 - 7x + 3 = 0$	a) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ *Soluciones:* $x_1 = 2,\ x_2 = -3$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$ *Solución única:* $x = -\frac{1}{3}$ c) $5x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ Sin solución.

En la web Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Piensa y practica

1. Resuelve:

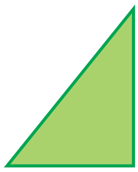
a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $3x^2 + 5 = 0$ c) $7x^2 + 5x = 0$

2. Resuelve: a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$ c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

3. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño.

¿Cuánto miden los lados?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
$$x^2 = z, \quad x^4 = z^2$$
$$az^2 + bz + c = 0$$
$$x = \pm\sqrt{z}$$

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones bicuadradas.

Ecuaciones bicuadradas: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Son ecuaciones de 4.º grado sin términos de grado impar. Para resolverlas, realizamos el cambio de variable $x^2 = z$ y, por tanto, $x^4 = z^2$. Se obtiene así una ecuación de segundo grado cuya incógnita es z:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Una vez resuelta, se obtienen los correspondientes valores de x. Por cada valor positivo de z habrá dos valores de x, pues $x^2 = z \to x = \pm\sqrt{z}$.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \to \begin{cases} z = 9 \to x = \pm 3 \\ z = 4 \to x = \pm 2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

No lo olvides

En ecuaciones, para suprimir denominadores, se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de dichos denominadores.

Recuerda que, al terminar, has de comprobar todas las soluciones.

Ecuaciones con la x en el denominador

Los denominadores algebraicos, al igual que los numéricos, se suprimen multiplicando por el producto de todos ellos o, mejor, por su mínimo común múltiplo. La ecuación a la que así se llega puede ser de las que sabemos resolver.

En el proceso de multiplicar por expresiones polinómicas pueden aparecer soluciones falsas. Por tanto, siempre que lo hagamos, **deberemos comprobar todas las soluciones obtenidas.**

Ejercicio resuelto

Resolver $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$.

Multiplicamos los dos miembros por $10x(x + 3)$.

$$10(x + 3) - 10x = 3x(x + 3) \to 10x + 30 - 10x = 3x^2 + 9x \to$$

$$\to 3x^2 + 9x - 30 = 0 \to x^2 + 3x - 10 = 0 \to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -5$. Comprobadas en la ecuación inicial, constatamos que ambas son válidas:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10} \qquad \frac{1}{-5} - \frac{1}{-2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones con x en el denominador.

Piensa y practica

4. Resuelve.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$ b) $3x^4 + 75x^2 = 0$

c) $7x^4 - 112 = 0$ d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

e) $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$ f) $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$

5. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$ b) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{x+1}{x+5} + \dfrac{1-x}{x-4} = \dfrac{5}{2}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

No lo olvides

Es imprescindible comprobar todas las posibles soluciones.

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones con radicales.

Ecuaciones con radicales

Ocasionalmente, nos encontraremos con ecuaciones en las que la x se halla bajo una raíz cuadrada. Para resolver este tipo de ecuaciones, suele convenir eliminar la raíz aislándola primero en un miembro y, después, elevando ambos miembros al cuadrado. Pero, ¡atención!, en este proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones, pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar. Por eso, en este tipo de ecuaciones **es fundamental comprobar todas las soluciones.**

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación.

$$\sqrt{x^2+7}+2=2x$$

$\sqrt{x^2+7}+2=2x \ \rightarrow\ \sqrt{x^2+7}=2x-2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2+7=4x^2-8x+4 \ \rightarrow\ 3x^2-8x-3=0 \ \rightarrow\ x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\dfrac{8\pm 10}{6}$

Hay dos posibles soluciones: $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$. Las comprobamos:

- $\sqrt{3^2+7}+2=\sqrt{16}+2=6$; $2\cdot 3=6$. La primera, $x_1=3$, sí es solución.
- $\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+7}+2=\sqrt{\dfrac{64}{9}}+2=\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{14}{3}\\ 2\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right\}$ La segunda, $-\dfrac{1}{3}$, no es solución.

Por tanto, la solución es $x=3$.

Ecuaciones del tipo (…) · (…) · (…) = 0

Para que un producto sea igual a 0, es suficiente que lo sea alguno de sus factores. Por tanto, una ecuación de este tipo se puede resolver fácilmente siempre que cada paréntesis dé lugar a una ecuación que sepamos resolver.

Por ejemplo, $(x-2)\cdot(x^2-36)\cdot(x^2+5x)=0$. Igualamos a cero cada paréntesis:

$x-2=0 \ \rightarrow\ x_1=2$

$x^2-36=0 \ \rightarrow\ x^2=36 \ \rightarrow\ x=\pm 6 \ \begin{cases} x_2=-6 \\ x_3=6 \end{cases}$

$x^2+5x=0 \ \rightarrow\ x(x+5)=0 \ \begin{cases} x_4=0 \\ x+5=0 \ \rightarrow\ x_5=-5 \end{cases}$

En la web

- Refuerza la resolución de ecuaciones mediante factorización.
- Refuerza la resolución de problemas con ecuaciones.

Piensa y practica

6. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x(x+1)(x-5)=0$ b) $(3x+1)(2x-3)=0$

c) $x(x^2-64)=0$ d) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{x}-3=0$ b) $\sqrt{x}+2=x$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$ d) $\sqrt{x+1}=x-8$

e) $\sqrt{2x^2-2}=1-x$ f) $\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{5x+6}$

8. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $7x^4=63x^2$ b) $x^4-10x^2+9=0$

c) $4x^4-5x^2+1=0$ d) $x^4+5x^2+4=0$

9. Resuelve.

a) $\dfrac{x+7}{x+3}+\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2x}+\dfrac{x-1}{x}=2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Vamos a recordar qué son los sistemas de ecuaciones y cómo se resuelven.

Dos ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Si ambas ecuaciones son lineales, se dice que el sistema es lineal.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolución de un sistema lineal

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene, así, una ecuación con una incógnita. Se resuelve. Su solución se sustituye en la primera ecuación. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{array}\right\} \to x = 15 - 2y \to 3(15 - 2y) - 5y = 1 \to \dots \to y = 4 \to$$

$$\to x = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = 4$

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los resultados. Al igual que en el método anterior, también en este se obtiene una ecuación con una incógnita. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = \dfrac{1+5y}{3} \\ \to x = 15 - 2y \end{array}\Bigg\} \to \frac{1+5y}{3} = 15 - 2y \to y = 4$$

$$x = 15 - 2 \cdot 4 = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = 4$

Método de reducción

Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convenga) *para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Al restarlas se obtiene una ecuación sin esa incógnita*. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 76 \\ 4x + 2y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1.^a \cdot 4} 12x + 20y = 304 \\ \xrightarrow{2.^a \cdot 3} 12x - 6y = 18 \end{array}$$

Restando: $26y = 286 \to y = 11$

$3x + 5 \cdot 11 = 76 \to x = 7$

Solución: $x = 7,\ y = 11$

Entrénate

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando los tres métodos que conoces: sustitución, igualación y reducción:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - 3y = -15 \\ x - y = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - y = 1/6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - \dfrac{2}{2}y = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 6x + 3y = -15 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Ten en cuenta

Los sistemas de ecuaciones no lineales se resuelven de forma esencialmente igual a los sistemas lineales.

Son aquellos en los que una de las dos ecuaciones, o ambas, son no lineales, es decir, tienen monomios de segundo grado (x^2, y^2, $x \cdot y$) o de grado superior, o radicales, o alguna incógnita en el denominador…

Para resolverlos, podemos despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en la otra (método de sustitución) o eliminar una incógnita simplificando entre las dos ecuaciones (método de reducción) o cualquier otro método por el que podamos pasar a una ecuación con una incógnita.

No lo olvides

Si hay raíces o incógnitas en el denominador, al resolver la ecuación puede aparecer alguna solución falsa. Por eso, en tales casos, es necesario comprobar todas las soluciones sobre el sistema inicial.

Ejercicio resuelto

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

a) Aplicamos el método de sustitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 & \rightarrow\ y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 & \rightarrow\ x^2 + (1 + x)^2 = 5 \ \rightarrow\ x^2 + 1 + x^2 + 2x = 5 \ \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow\ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \ 8\ \ x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \rightarrow\ y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 & \rightarrow\ y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$x_2 = -2,\ y_2 = -1$

b) Aplicamos el método de reducción:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

Sumando: $2x^2 = 98 \ \rightarrow\ x^2 = 49 \ \rightarrow\ x = \pm 7$

Si $x = 7 \ \rightarrow\ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow\ y^2 = 9 \ \rightarrow\ y = \pm 3$

Si $x = -7 \ \rightarrow\ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow\ y^2 = 9 \ \rightarrow\ y = \pm 3$

Hay cuatro soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 3$

$x_2 = 7,\ y_2 = -3$

$x_3 = -7,\ y_3 = 3$

$x_4 = -7,\ y_4 = -3$

Piensa y practica

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Inecuaciones de primer grado

A veces, los enunciados que dan lugar a una expresión algebraica no dicen "es igual a", sino "es mayor que" o "es menor que". Estos enunciados dan lugar a expresiones como estas, llamadas **inecuaciones:**

$$2x + 4 > 0 \qquad\qquad 10 - 5x \leq 15$$

Recuerda

$a < b$ a es menor que b.
$a \leq b$ a es menor que b o igual a b.
$a > b$ a es mayor que b.
$a \geq b$ a es mayor que b o igual a b.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica. Tiene dos miembros entre los cuales aparece uno de estos signos: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$.

Se llama **solución** de una inecuación a cualquier valor de la incógnita que hace cierta la desigualdad. Las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones.

Resolución de una inecuación de primer grado

Para resolver una ecuación, seguíamos una serie de pasos: quitar paréntesis, quitar denominadores, pasar las x a un miembro y los números al otro…

Todos ellos son válidos, exactamente igual, para las inecuaciones, salvo uno:

No lo olvides

$2 < 5 \;\rightarrow\; -2 > -5$
$-x > 3 \;\rightarrow\; x < -3$
$-2x \geq 1 \;\rightarrow\; x \leq \frac{-1}{2}$

Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ejercicio resuelto

Resolver estas inecuaciones:

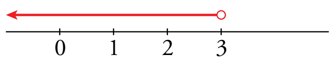
a) $2x + 1 < 7$

b) $7 - 5x \leq 12$

a) $2x + 1 < 7 \;\rightarrow\; 2x < 6 \;\rightarrow\; x < 6 : 2 \;\rightarrow\; x < 3$

Solución: x puede ser cualquier número menor que 3.

Conjunto de soluciones: $(-\infty, 3)$

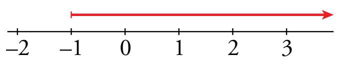


b) $7 - 5x \leq 12 \;\rightarrow\; -5x \leq 12 - 7 \;\rightarrow\; -x \leq 5 : 5 \;\rightarrow\; -x \leq 1 \;\rightarrow\; x \geq -1$

(Al cambiar de signo, cambia el sentido de la desigualdad).

Solución: x puede ser -1 o cualquier número mayor que él.

Conjunto de soluciones: $[-1, +\infty)$



Piensa y practica

1. Traduce a lenguaje algebraico.

a) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20.

b) El doble del número de personas de mi clase no supera a 70.

2. Di dos soluciones enteras de cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $3x < 50$ b) $2x + 5 \geq 25$

c) $7x + 4 < 19$ d) $x^2 + x < 50$

3. ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la inecuación $x^2 - 8x < 12$?

a) -5 b) 0 c) 1,1 d) 2

e) $\frac{5}{2}$ f) 3,2 g) 5,3 h) 10

4. Resuelve y representa gráficamente las soluciones.

a) $5x < -5$ b) $2x + 3 \geq 7$

c) $104 - 9x \leq 4(5x - 3)$ d) $3(4 - x) > 18x + 5$

e) $\frac{x}{4} - x \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$ f) $\frac{4 - 2x}{3} > 2(x - 3)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Sistemas de inecuaciones

Observa

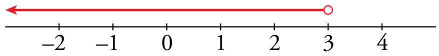
Cuando decimos "las soluciones *son* $x < 3$" queremos decir "las soluciones *son* todos los números menores que 3".

Análogamente, $x \geq -1$ significa "el número -1 y todos los números mayores que él".

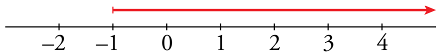
Si deseamos encontrar las soluciones comunes a varias inecuaciones, decimos que estas forman un sistema de inecuaciones.

Por ejemplo:

- Las soluciones de $2x + 1 < 7$ son $x < 3$

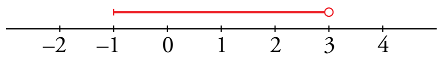


- Las soluciones de $7 - 5x \leq 12$ son $x \geq -1$



Por tanto, las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 1 < 7 \\ 7 - 5x \leq 12 \end{cases} \quad \text{son} \quad -1 \leq x < 3$$

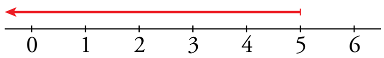


Problemas resueltos

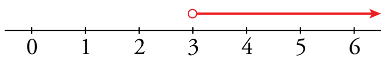
1. ***Resolver este sistema de inecuaciones:***

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

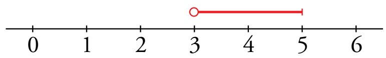
1.ª inecuación: $3x + 2 \leq 17 \to 3x \leq 15 \to x \leq 5$



2.ª inecuación: $5 - x < 2 \to -x < -3 \to x > 3$



Sistema: *Solución:* $3 < x \leq 5$



La solución del sistema es cualquier número mayor que 3, que no supere al 5.

2. ***La longitud de una mesa es 141 cm. La mido mediante palmos y con 6 me quedo corto. ¿Qué puedo decir de la longitud de mi palmo?***

Llamando x *a la longitud de mi palmo*, el enunciado anterior se expresó algebraicamente así: $6x < 141$. Su solución es $x < 23{,}5$.

Pero si prestamos más atención, observamos que, aunque no se diga explícitamente, se supone que con 7 palmos se supera la longitud de la mesa.

Es decir, $7x > 141$. La solución de esta inecuación es $x > 20{,}1$.

De la longitud, x, de un palmo podemos decir que: $\begin{cases} 6x < 141 \\ 7x > 141 \end{cases}$

Su solución es $\begin{cases} x < 23{,}5 \\ x > 20{,}1 \end{cases}$. Es decir, $x \in (20{,}1;\ 23{,}5)$.

Conclusión: mi palmo tiene una longitud comprnedida entre 20,1 cm y 23,5 cm.

Piensa y practica

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3 < 7 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3 < 3x + 5 \\ 7x + 1 \geq 13 + 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 7 > 23 \\ 3 - 2x > x - 30 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x - 1 \geq 14 - 8x \\ 5x + 8 > 6x + 5/2 \end{cases}$

6. Tres amigos contratan tres viajes a Praga. Les cuesta algo menos de 2 200 € en total. Cinco amigos contratan el mismo viaje. Por ser cinco, les hacen una bonificación de 500 €, y pagan algo más de 3 000 €.

¿Cuánto vale ese viaje a Praga, si sabemos que es múltiplo de 10 €?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3-x}{2} - \frac{2(x-2)}{3} = 4 - \frac{7(2x-1)}{9}$

b) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} = \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = \frac{-2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$

d) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(3-x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$

2. Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $(3x+1)(3x-1) + \frac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$

b) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2+1}{4} = \frac{x+5}{12}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} = \frac{3x-2}{6} + \frac{x^2}{3}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones. Las que sean de 2.º grado incompletas, resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $\frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{(x+1)(x-2)}{6}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\frac{x(x-2)}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3}$

d) $x\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

b) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

c) $(x+1)^2 = \frac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$

d) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25x}{2} = \left(\frac{1}{2}-x\right)(7x+1) - 4$

5. Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(2x^2+1)^2 - 5 = (x^2+2)(x^2-2)$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x-5)(x+7) = 0$

b) $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$

d) $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

7. Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3)(2x-5) = 0$

b) $x^2(x-6)(3x-1) = 0$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9) = 0$

d) $x(x^2+1)(6x-3) = 0$

8. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{3x}{2}$

b) $\frac{800}{x} - 50 = \frac{600}{x+4}$

c) $\frac{1}{x^2} - 2 = \frac{3-x}{3x^2}$

d) $\frac{x}{2} = 1 + \frac{2x-4}{x+4}$

9. Resuelve.

a) $\frac{100}{x} + 5 = \frac{90}{x-4}$

b) $\frac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{9}$

d) $\frac{2-x}{2} + \frac{4}{2+x} = 1$

10. Resuelve.

a) $x - \sqrt{x} = 2$

b) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

c) $x - \sqrt{169-x^2} = 17$

d) $x + \sqrt{5x+10} = 8$

e) $\sqrt{2x^2+7} = \sqrt{5-4x}$

f) $\sqrt{x+2} + 3 = x - 1$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$

b) $\frac{3x+1}{4x+3} - \frac{1}{x} = 3$

c) $\frac{3x+4}{x+3} - \frac{1}{2} = \frac{x+19}{4x+6}$

d) $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{2-5x}{x^2+3x}$

12. Resuelve.

a) $x + \sqrt{25-x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x+10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2+7x-2} = x + 2$

13. Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.

a) $x - 17 = \sqrt{169-x^2}$

b) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

c) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

d) $2\sqrt{5-4x} + 4x = 5$

14. Descompón en factores y resuelve.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Sistemas de ecuaciones

15. Resuelve.

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y + 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

16. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x - 3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

17. Halla las soluciones de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

18. Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

20. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

21. Halla el conjunto de soluciones de cada inecuación y represéntalo.

a) $3x - 7 < 5$ b) $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$ d) $1 - 5x \leq -8$

e) $6 < 3x - 2$ f) $-4 \geq 1 - 10x$

22. Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases}$

23. Resuelve.

a) $\dfrac{7 - 3x}{2} < x + 1$ b) $\dfrac{x + 4}{3} + 3 \geq \dfrac{x + 10}{6}$

c) $2x - 2(3x - 5) < x$ d) $x - 1 - \dfrac{x - 1}{2} < 0$

Aplica lo aprendido

24. La suma de dos números consecutivos es menor que 27. ¿Cuáles pueden ser esos números si sabemos que son de dos cifras?

25. Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.

26. Una tostada cuesta el doble que un café. Por tres cafés y dos tostadas hemos pagado 9,80 €. ¿Cuánto cuesta el café y cuánto la tostada?

27. En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.

28. Se mezclan 8 *l* de aceite de 4 €/*l* con otro más barato para obtener 20 *l* a 2,50 €/*l*. ¿Cuál es el precio del aceite barato?

29. Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

30. Hoy, la edad de Alberto cuadruplica la de su hija Marta, pero dentro de cinco años solo la triplicará. ¿Cuántos años tiene cada uno?

31. Una persona compra un reproductor de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,50 €. Con el reproductor de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?

32. En un aparcamiento cobran un fijo por entrar y un tanto a la hora. Hoy, por hora y media, he pagado 2,60 € y ayer pagué 3,40 € por dos horas y diez minutos. ¿Cuál es el fijo y cuál es el coste por hora?

33. Andrés tiene dos cuentas en el banco. Si pasara 600 € de la primera a la segunda, esta quedaría con saldo doble. Pero si la transferencia fuera de 300 € en sentido contrario, sería la primera la que tendría el doble. ¿Cuánto hay en cada una?

34. En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Cuál puede ser la media de la base?

35. La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.

36. Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.

37. Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.

38. El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

39. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?

40. Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.

41. El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y uno de sus catetos mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.

Autoevaluación

1. Resuelve.

a) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

b) $(x+3)(2x-5) = 0$

c) $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{x+1}{8}$

2. Resuelve y representa las soluciones.

a) $\dfrac{2(x-5)}{3} \le 2x - 6$ b) $\begin{cases} 5x - 3 > x + 5 \\ x - 6 \le 0 \end{cases}$

3. Resuelve.

a) $\begin{cases} y + 1 = 6 - x \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{5}{2} \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 34 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$

4. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5,35 €; tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8,60 €. Calcula el precio de un bocadillo y el de un refresco.

5. Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

6. En una empresa alquilan bicicletas a 3 € la hora y motocicletas por 5 € fijos más 2 € por hora. ¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una motocicleta que una bicicleta?

7. Las diagonales de un rombo suman 42 m y su área es 216 m^2. ¿Cuánto mide el perímetro del rombo?

8. En una clase hay 5 chicos más que chicas. Sabemos que en total son algo más de 20 estudiantes, pero no llegan a 25.

¿Cuál puede ser la composición de la clase?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Funciones. Características

Evolución del concepto de función

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?

— Una función relaciona dos variables.

— Las funciones describen fenómenos naturales. ("Las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre *dos cantidades*").

— Las relaciones funcionales pueden ser descritas mediante fórmulas (relaciones algebraicas).

— Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

Sello de la antigua URSS conmemorando el 400.º aniversario del nacimiento de Galileo (1564-1642).

Aportaciones de grandes matemáticos

Galileo (finales del siglo XVI) utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales.

Descartes (siglo XVII), con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas gráficamente.

Leibniz, en 1673, utiliza por primera vez la palabra *función* para designar estas relaciones.

Euler, entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa. El propio Euler fue quien aportó la nomenclatura $f(x)$.

Monumento en honor del matemático y filósofo alemán Leibniz (1646-1716), en el campus de la Universidad de Leipzig.

Academia de Ciencias de San Petersburgo, Rusia, en cuya revista de investigación, "Commentarii", Euler introdujo por primera vez la notación $f(x)$, en un artículo publicado en 1736.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Conceptos básicos

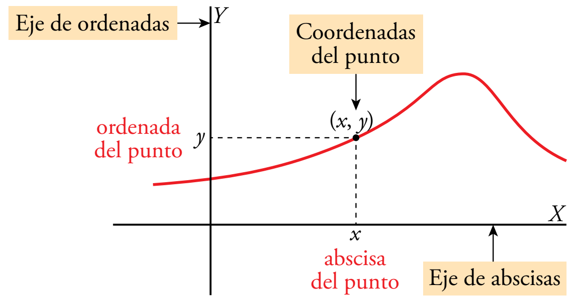
Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y:

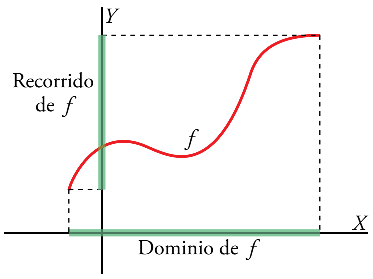
x es la **variable independiente.** y es la **variable dependiente.**

La relación entre las variables mediante la función f asocia a cada valor de x **un único** valor de y. Se expresa así:

$$y = f(x)$$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica.





Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por *Dom* f, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un x tal que $f(x) = y$.

Ejercicio resuelto

Explicar por qué es función la siguiente relación:

Se deja caer una bola y se mide la altura a la que se encuentra en distintos instantes.

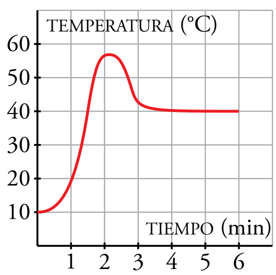
Se ligan dos variables: el *tiempo*, t, medido en segundos, y el *espacio recorrido*, e, medido en metros.

La primera es la variable independiente. La segunda es la variable dependiente.

En cada instante, la bola se encuentra a una cierta altura. Es decir, para cada valor de t hay un único valor de e. Por tanto, e es una función que depende de t: $e = f(t)$.

Piensa y practica

1. Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.



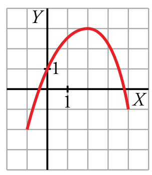
a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

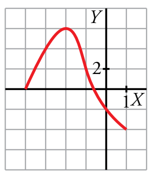
c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

2. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:

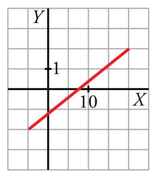
a)



b)



c)



3. Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, $[-2, 5]$ y $[2, 7]$. Inventa otra con dominio $[0, 5]$ y recorrido $\{1\}$.

En la web Modelización del llenado de recipientes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Cómo se presentan las funciones

Tanto en el estudio de las matemáticas como en otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su **gráfica,** por una **tabla de valores,** por una **fórmula** o mediante una descripción verbal (**enunciado**).

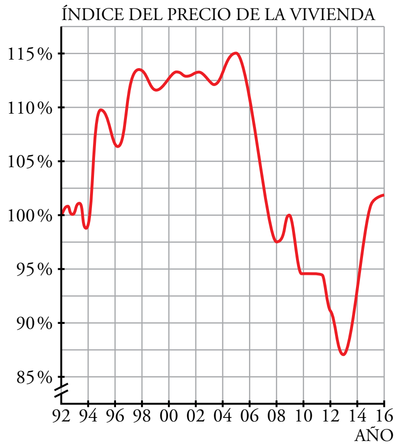
Observa

La gráfica de una función permite apreciar su comportamiento global con un simple golpe de vista.

Mediante su gráfica

La función de la derecha viene dada por su gráfica. Describe el precio de la vivienda en los últimos años en una cierta región.

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su representación gráfica. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.



Mediante un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada. Veamos dos ejemplos de funciones que relacionan la *altura sobre el nivel del mar* con el *tiempo transcurrido*:

- Félix salió por la mañana de su casa de campo, siguió un camino que llevaba a la cima de una montaña, comió arriba y volvió justo antes de anochecer.
- María salió de su casa, en la playa, a las 9 a.m. Caminó 45 min hasta la cima de una colina que está a 250 m de altura sobre el nivel del mar, se quedó 10 min contemplando las vistas y tardó 30 min en volver a casa.

En la web

"Dos caminantes": lectura de gráficas.

Piensa y practica

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Mediante una tabla de valores

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Ejemplo 1

La siguiente tabla muestra las ofertas que ofrece una reprografía para distintas cantidades de fotocopias.

FOTOCOPIAS AUTOMÁTICAS FORMATO DIN A-4	PRECIO POR UNIDAD (€)
De 1 a 49 fotocopias	0,10 €
De 50 a 99 fotocopias	0,09 €
De 100 a 199 fotocopias	0,08 €
200 o más fotocopias	0,07 €

Así, si quieres hacer 49 fotocopias te costará 49 · 0,10 = 4,90 €; sin embargo, si haces 52 fotocopias, te saldrá más barato: 52 · 0,09 = 4,68 €. Es curioso, ¿no?

Ejemplo

Pedro quiere hacer 45 fotocopias; Ana, 64, y Ariadna, 110.

- Pedro debe pagar:
  45 · 0,10 = 4,50 €
- Ana: 64 · 0,09 = 5,76 €
- Ariadna: 110 · 0,08 = 8,80 €

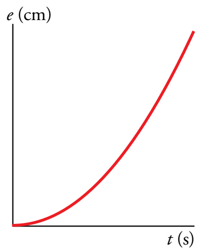
Mediante su expresión analítica o fórmula

La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero para visualizarla se requiere un minucioso estudio posterior. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2

Una bola que se deja caer por un plano levemente inclinado lleva una aceleración de 20 cm/s^2.

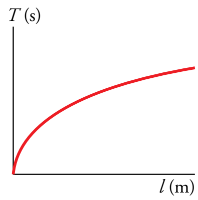
La distancia, e, en centímetros, que recorre en función del tiempo, t, en segundos, viene dada por la fórmula $e = 10t^2$.



Ejemplo 3

El periodo, T, de un cierto péndulo viene dado en función de su longitud, l (en m), por la fórmula $T = \sqrt{4l}$.

El periodo es el tiempo, en segundos, que tarda en dar una oscilación, ida y vuelta.



Ejercicio resuelto

En el EJEMPLO 1:

a) Como mínimo, ¿cuántas fotocopias pedirás para que te salga más caro que hacer 49?

b) Quieres hacer 187 copias. ¿Cuántas copias debes pedir para pagar lo menos posible?

a) Hacer 49 fotocopias cuesta 4,90 €. Con esa cantidad, y a un precio de 0,09 € por unidad, se pueden hacer 4,90 : 0,09 = 54,44.

Es decir, hay que hacer 55 fotocopias o más para que salga más caro que hacer 49.

b) Por 187 fotocopias deberías pagar 187 · 0,08 = 14,96 €. Si pides 200 (pasas al rango de 0,07 € por unidad), el precio es 200 · 0,07 = 14 €. Por tanto, conviene pedir 200 copias.

Piensa y practica

3. En el EJEMPLO 1, ¿cuántas fotocopias debes pedir como mínimo para que te salga más caro que hacer 199?

4. En el EJEMPLO 2, calcula la distancia que recorre la bola en 1 s, 2 s y 3 s. ¿Cuánto tarda en recorrer 2 m?

5. En el EJEMPLO 3:

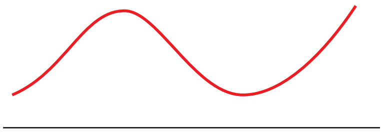
a) Calcula el periodo de un péndulo de 1 m de largo.

b) ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

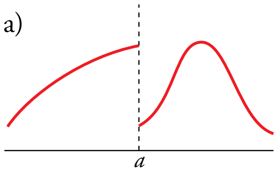
3 Funciones continuas. Discontinuidades



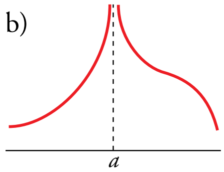
FUNCIÓN CONTINUA

La función del margen es continua en todo su dominio de definición. Sin embargo, las tres funciones siguientes son discontinuas:

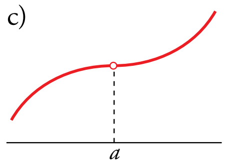
a)



b)



c)



¿Por qué son discontinuas?

a) Presenta un salto en el punto de abscisa a.

b) Tiene ramas infinitas en el punto a. Es decir, los valores de la función crecen indefinidamente cuando la x se aproxima a a.

c) Le falta un punto. Es decir, no está definida en $x = a$.

Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.

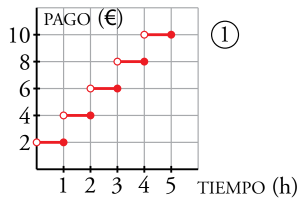
Una función es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

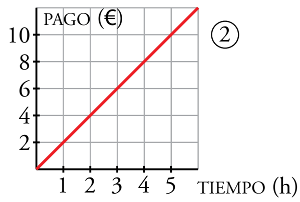
Ten en cuenta

El intervalo en el cual se define una función continua puede ser cerrado, abierto o semiabierto.

Ejemplos

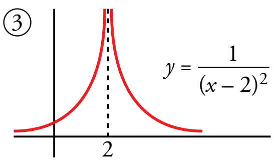
Hay muchos aparcamientos que siguen cobrando “por horas”. Esto quiere decir que solo por entrar ya se paga 1 h. Si se está 1 h y 10 min se pagan 2 h. La primera de las dos gráficas siguientes describe esta forma de pago. Es una función con varios puntos de discontinuidad por saltos.



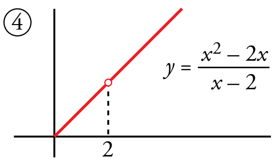


Los usuarios prefieren que las tarifas se rijan por la función cuya gráfica es la 2. Evidentemente, es continua. Las siguientes presentan ejemplos de discontinuidad:

Esta, porque tiene ramas infinitas.



Y esta, porque le falta un punto.



Observación importante

En una función continua, a “pequeñas” variaciones de la x corresponden variaciones también “pequeñas” de la y. Mientras que en los puntos de discontinuidad (con salto) una pequeña variación de la x (un minuto más en el aparcamiento) puede producir una variación grande (2 €) en la y.

Observa

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x$$

Es decir, $y = x$ si $x \neq 2$, porque no podemos dividir por cero. Por eso dejamos un hueco en ese punto.

Piensa y practica

1. Construye una función similar a la 1, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?

2. Analiza la función 3 para valores “próximos a 2”. Comprueba que cuando x vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la y toma valores “muy grandes”.

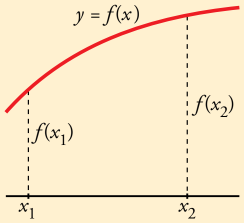
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Crecimiento, máximos y mínimos

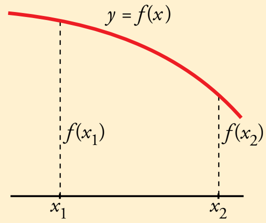
La función f es **creciente** en este intervalo porque:

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$

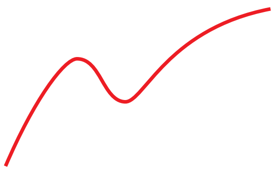


Análogamente, la función f es **decreciente** en este intervalo porque:

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$



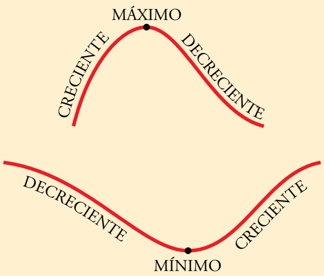
Una función puede ser creciente en unos intervalos y decreciente en otros.



La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

Análogamente, si f tiene un **mínimo relativo** en un punto, es decreciente antes del punto y creciente a partir de él.



Ejercicio resuelto

Indicar los intervalos en los que es creciente y en los que es decreciente la función de la derecha dada gráficamente.

¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

La función está definida en el intervalo [–7, 11].

Es creciente en los intervalos [–7, –3] y [1, 11].

Es decreciente en el intervalo [–3, 1].

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa –3. Su valor es 2.

Tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa 1. Su valor es –5.

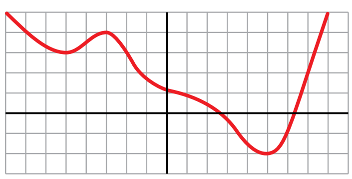
Hay puntos en los que la función toma valores menores que en el mínimo relativo. Por ejemplo, para $x = -7$, la función toma el valor –6.

Piensa y practica

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

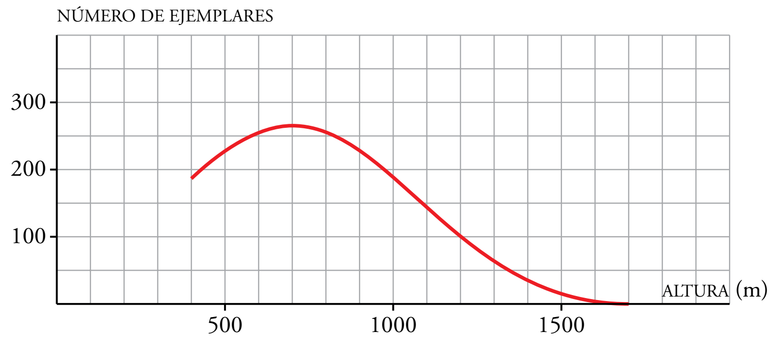


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

5 Tendencia y periodicidad

La siguiente gráfica muestra la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay de una cierta especie de planta a distintas alturas:



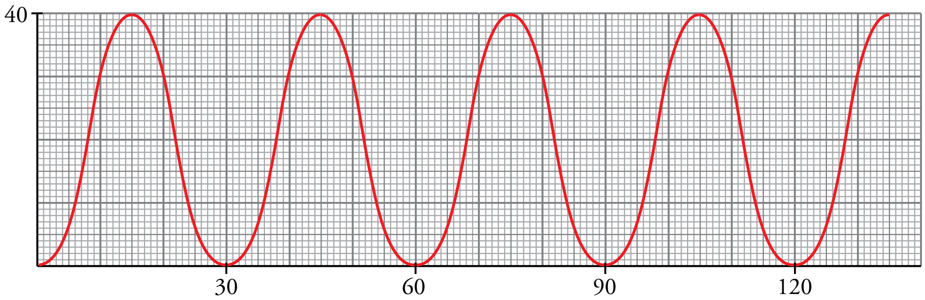
Observamos que, a partir de una cierta altura, cuanto más se sube menos ejemplares se encuentran. Y que, a partir de 1600 m, casi no hay plantas de este tipo. Podemos afirmar que:

> *Cuando la altura aumenta por encima de los 1600 m, el número de plantas tiende a cero.*

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportan lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Periodicidad

Observamos la variación de la altura de un cestillo de una noria cuando esta da una vuelta. Tarda medio minuto (30 segundos), y en ese tiempo sube, llega al punto más alto, baja y llega al suelo. Pero este movimiento se repite una y otra vez. Su representación gráfica es esta:

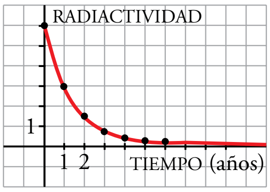


En esta función, lo que ocurre en el intervalo [0, 30] se repite reiteradamente. Se trata de una *función periódica* de *periodo* 30.

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo.**

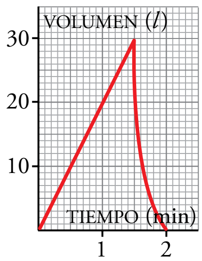
Entrénate

1. La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.



¿A cuánto tiende la radiactividad con el paso del tiempo?

2. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.



a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min II) 40 min 30 s

III) 1 h 9 min 30 s

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

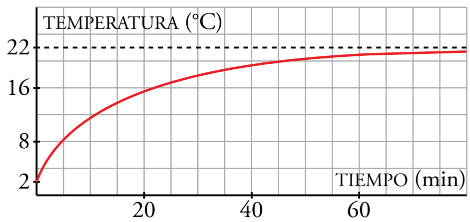
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1. Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:

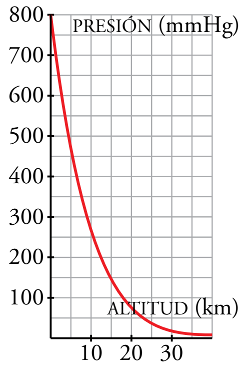


a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

2. La presión atmosférica a nivel del mar es, por término medio, de 760 mm de mercurio (mmHg).

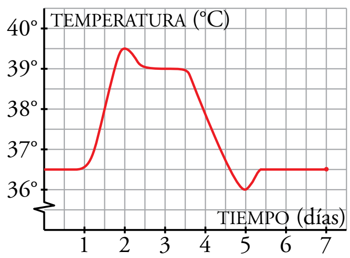
En la gráfica se aprecia cómo varía al aumentar la altura.



a) ¿A cuánto tiende la presión cuando la altura aumenta?

b) ¿Qué presión sufre el exterior de un avión que vuela a 10 km de altura?

3. Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo? ¿Qué temperaturas alcanza?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

Enunciados, fórmulas y tablas

4. Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en $[-2, 3]$. Para ello, completa en tu cuaderno:

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

¿Cuál es el recorrido de la función?

5. Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido cada 5 min las distancias recorridas y ha obtenido estos datos:

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) En unos mismo ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada función?

6. La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él y, además, decrece cada vez más despacio.

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

b) ¿Cuál es la tendencia?

7. Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20 % anual, aproximadamente.

a) Haz una tabla de valores que dé el valor, en años sucesivos, de un coche que costó 12 000 €.

b) Representa gráficamente la función *años transcurridos-valor del coche.*

c) Encuentra una fórmula que permita hallar el precio del coche en función de los años transcurridos.

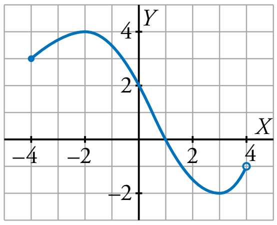
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Características de una función

8. Observa la gráfica de la función y responde:



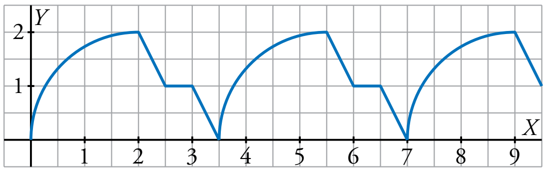
a) ¿Cuáles son su dominio de definición y su recorrido?

b) ¿Tiene máximo y mínimo relativos? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

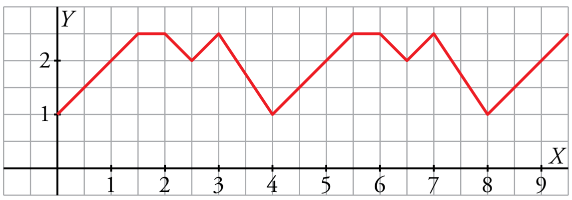
c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿En qué intervalos es la función creciente y en cuáles es decreciente?

9. Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.

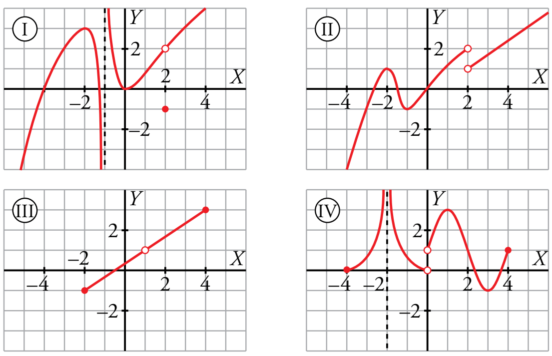


10. Explica por qué es periódica esta función:



Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

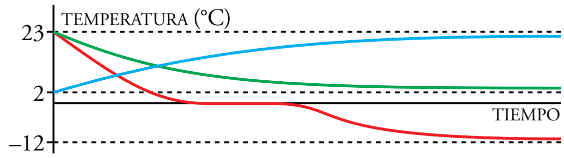
11. Observa estas gráficas discontinuas y contesta:



¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

Resuelve problemas

12. Observa las siguientes gráficas de funciones:



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

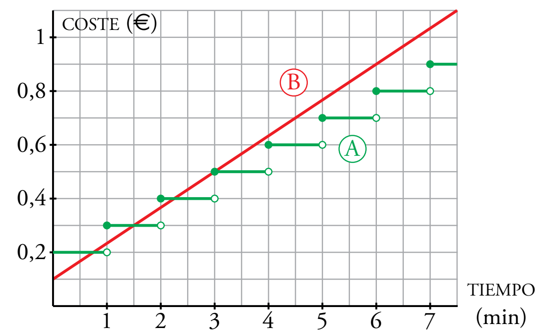
b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

13. Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

14. Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías.

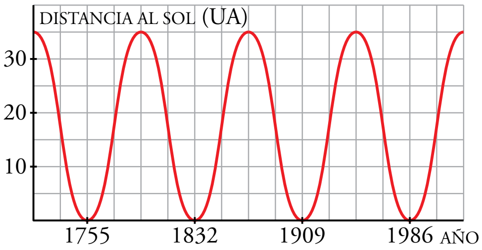
b) ¿Y una llamada de media hora?

c) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

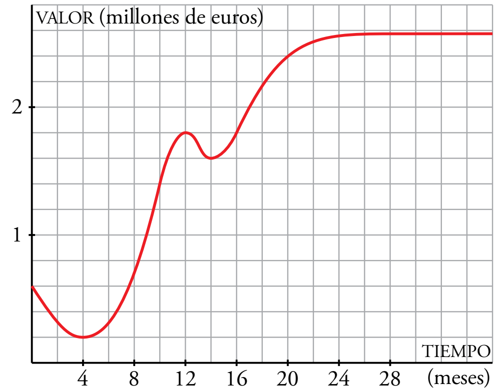
15. La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta función relaciona la distancia del cometa al Sol con el tiempo:



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

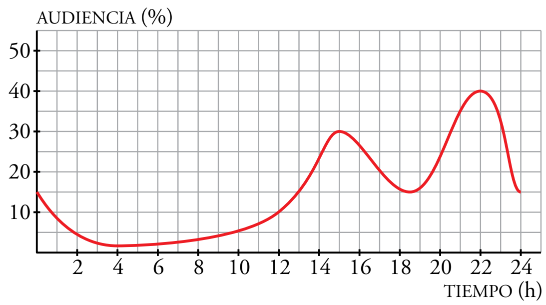
16. La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.



Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

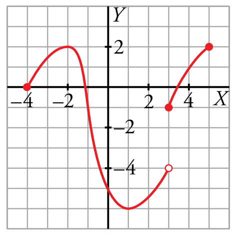
d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

2. Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en [0, 5], dándole a x valores enteros.

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

3. Observa la gráfica y halla:



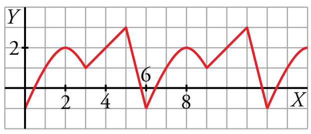
a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

4. a) ¿Es periódica esta función?



¿Cuál es su periodo?

b) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas:

$x = 2;\ \ x = 4;\ \ x = 40;\ \ x = 42$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

5 Funciones elementales

Buscando la precisión del concepto

Después de Euler aún siguió, entre los matemáticos, la discusión sobre qué requisitos eran imprescindibles para definir una función y cuáles no. En 1923 se llegó a la siguiente definición, muy parecida a la que se usa actualmente.

> Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

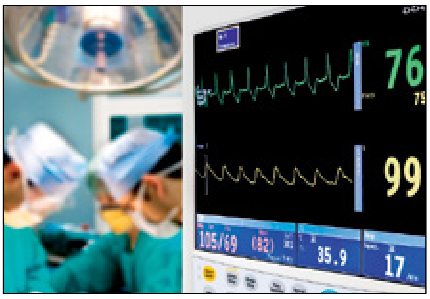
Funciones poco honestas, según Poincaré

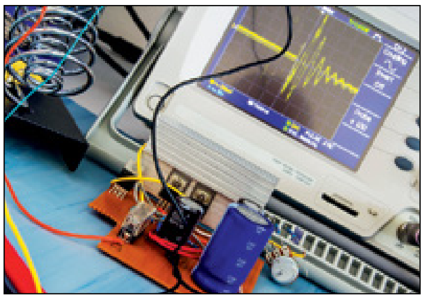
Pero en esa búsqueda de la precisión, se generaron una serie de funciones estrafalarias que llevaron a **Poincaré,** en el año 1899, a decir:

> "Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas construidas de modo que se parezcan lo menos posible a las *funciones honestas* que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba alguna función, era con alguna meta práctica. Hoy son inventadas con el fin de mostrar que el razonamiento de nuestros antecesores fue erróneo".

En esta unidad vamos a dedicarnos a esas *funciones honestas* que propugnaba el gran Poincaré, esas funciones que sirven para algo más que para construir o desmontar conceptos.

Henri Poincaré (1854-1912) es uno de los grandes matemáticos de la historia. Sus contribuciones abarcan todos los ámbitos de la disciplina matemática.





El uso de "funciones honestas" está extendido en múltiples campos del conocimiento humano: medicina, economía, tecnología…

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Funciones lineales

Ejemplo

El espacio recorrido con movimiento uniforme (velocidad constante) en función del tiempo es:

$$e = v \cdot t$$

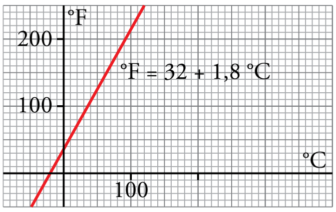
v es la pendiente de la recta que relaciona e con t.

Ejemplos

- El precio de la comida en algunos restaurantes es constante, no depende de la cantidad que nos sirvamos.
- La distancia de un satélite artificial a la Tierra es constante, no varía con el tiempo.

En la web

- Representación de rectas a partir de su expresión analítica.
- Repaso del concepto de pendiente.
- Estudio de rectas a partir de los parámetros m y n.

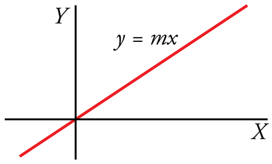


Podemos diferenciar varios tipo de funciones lineales:

■ **FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD: $y = mx$**

Las funciones de proporcionalidad se representan mediante rectas que pasan por el origen. Describen una proporción entre los valores de las dos variables.

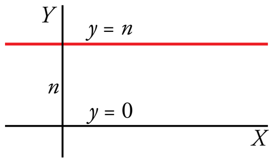
La pendiente de la recta es la razón de proporcionalidad, m.



■ **FUNCIÓN CONSTANTE: $y = n$**

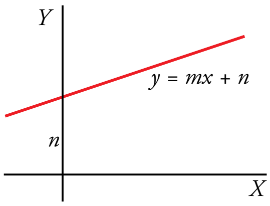
Se representa mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0.

La recta $y = 0$ coincide con el eje X.



En estas rectas, todos los puntos tienen la misma ordenada. Por ejemplo, (2, 5), (6, 5), (11, 5) son puntos de la recta $y = 5$.

■ **EXPRESIÓN GENERAL: $y = mx + n$**



Su representación es una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. Al número n se le llama **ordenada en el origen.**

Por ejemplo, la recta °F = 32 + 1,8 °C, representada en el margen, permite pasar de una temperatura en grados centígrados, °C, a la correspondiente en grados Fahrenheit, °F.

Piensa y practica

1. Representa:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -\frac{1}{4}x$ d) $y = -\frac{7}{3}x$

2. Representa:

a) $y = 3$ b) $y = -2$ c) $y = 0$ d) $y = -5$

3. Representa:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$ d) $y = -3x - 1$

4. Un móvil, en el instante inicial, se encuentra situado a 3 m del origen y se aleja progresivamente de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

5. Un móvil, que en el instante inicial llevaba una velocidad de 8 m/s, frena de repente con una aceleración de –1 m/s^2.

Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.

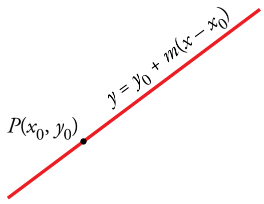
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ecuación de una recta en la forma punto-pendiente

Atención

Esta fórmula es muy útil. ¡Aprende a usarla!



Con mucha frecuencia hemos de escribir la ecuación de una recta de la cual conocemos un punto y la pendiente. La damos a continuación:

Punto: $P(x_0, y_0)$	Pendiente: m	Ecuación: $y = y_0 + m(x - x_0)$

JUSTIFICACIÓN

- $y = y_0 + m\,(x - x_0)$ es una expresión de 1.er grado. Por tanto, **es una recta.**
- El coeficiente de la x es m. Por tanto, **su pendiente es** $\boldsymbol{m}$**.**
- Si damos a x el valor $x_0 \rightarrow y = y_0 + m\,(x_0 - x_0) = y_0 + m \cdot 0 = y_0$. Obtenemos $y = y_0$. Si $x = x_0$, entonces $y = y_0$. Es decir, **pasa por** $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$**.**

RECTA DADA POR DOS PUNTOS

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, procedemos así:

- A partir de los dos puntos, obtenemos su pendiente.
- Con la pendiente y uno de los puntos, obtenemos la ecuación.

En la web

Actividades para repasar la ecuación punto-pendiente de una recta.

Ejercicio resuelto

Hallar la ecuación de cada una de las rectas siguientes:

a) Pasa por (–5, 7) y tiene una pendiente de $\dfrac{-3}{5}$***.***

b) Pasa por (0, 4) y tiene una pendiente de $\dfrac{7}{3}$***.***

c) Pasa por (–2, 7) y por (4, 5).

a) Ecuación: $y = 7 - \dfrac{3}{5}(x + 5)$. Esto ya es la ecuación de la recta.

Podemos simplificarla: $y = 7 - \dfrac{3}{5}x - \dfrac{3}{5} \cdot 5 \rightarrow y = 4 - \dfrac{3}{5}x$

b) $y = 4 + \dfrac{7}{3}x$. Observa que (0, 4) está en el eje Y. Es decir, 4 es la ordenada en el origen.

c) Empezamos hallando su pendiente: $m = \dfrac{5 - 7}{4 - (-2)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Ecuación de la recta que pasa por (–2, 7) y cuya pendiente es $-\dfrac{1}{3}$:

$$y = 7 - \frac{1}{3}(x + 2) \quad (*)$$

También podríamos hallarla a partir del otro punto:

Ecuación de la recta que pasa por (4, 5) y cuya pendiente es $-\dfrac{1}{3}$:

$$y = 5 - \frac{1}{3}(x - 4) \quad (**)$$

¿Coincidirán? ¡Naturalmente! Puedes comprobarlo simplificando las ecuaciones (*) y (**).

Piensa y practica

6. Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\dfrac{4}{9}$.

b) Pasa por (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

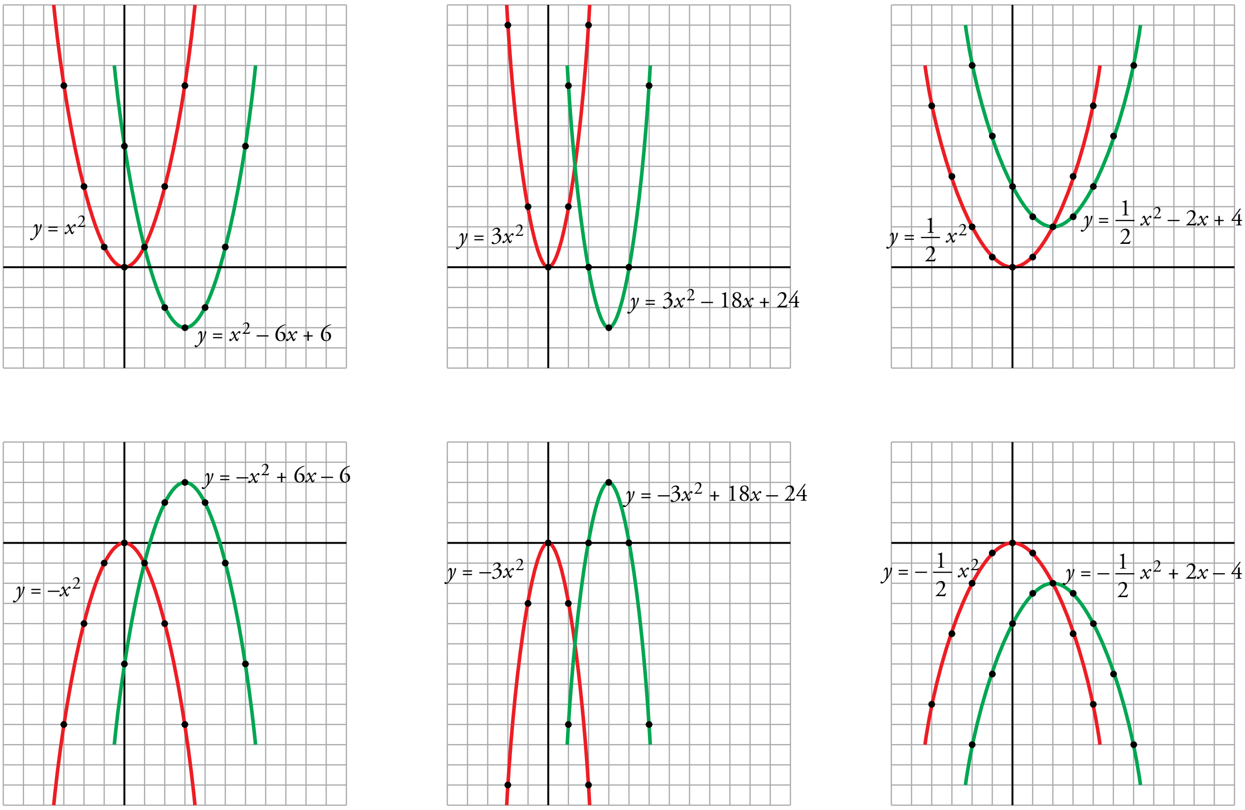
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Funciones cuadráticas

El curso pasado hicimos una suave introducción al estudio de las parábolas. Vamos, ahora, a repasar aquello y a avanzar un poco en su tratamiento.

Observa las siguientes parábolas con sus respectivas ecuaciones:



Analizándolas, podemos extraer las siguiente conclusiones:

En la web

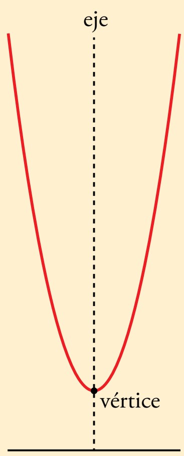
Ampliación teórica y práctica sobre traslaciones de parábolas.

Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas**, se representan todas ellas mediante **parábolas** y son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Cada una de estas parábolas tiene un eje paralelo al eje Y.

Su forma depende de a, coeficiente de x^2, del siguiente modo:

- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente de x^2, sus parábolas correspondientes son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.
- Si $a > 0$, tienen las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Representación de funciones cuadráticas

Para representar una función cuadrática dada por su ecuación, solo hace falta obtener varios de sus puntos. Empezaremos calculando el vértice de la parábola, para hallar, después, algunos puntos que lo rodean.

- Hallamos la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c \rightarrow p = -\dfrac{b}{2a}$
- Calculamos el valor de la función en algunas abscisas próximas al vértice.
- Los cortes con los ejes pueden venirnos bien para la representación:
  — Con el eje X, se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
  — Con el eje Y, es el $(0, c)$.

¿Por qué queremos conocer el vértice de la parábola y los puntos próximos a este?

El vértice y los puntos cercanos a este suponen la parte más representativa de la parábola.

Una representación de los puntos alejados del vértice sería una gráfica casi sin curvatura, parecida a una recta.

Ejercicio resuelto

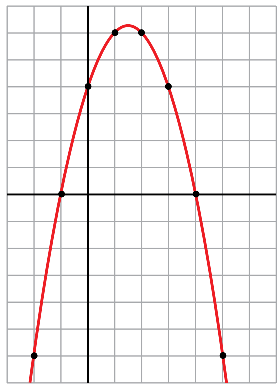
Representar la parábola de ecuación $y = -x^2 + 3x + 4$.

Obtenemos el vértice:

Abscisa: $p = -\dfrac{3}{-2} = 1{,}5 \rightarrow$ Ordenada: $f(1{,}5) = 6{,}25 \rightarrow$ Vértice: $(1{,}5;\ 6{,}25)$

Obtenemos puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–6	0	4	6	6	4	0	–6



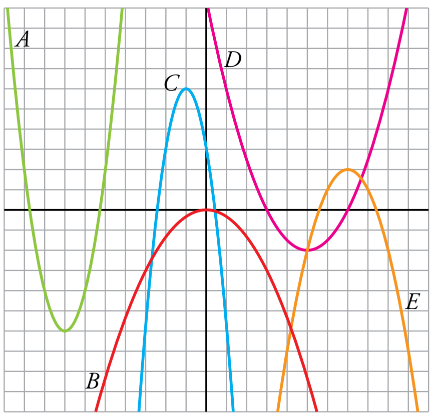
Podemos observar que, debido a la simetría de la parábola respecto a su eje, las ordenadas de los puntos que están a la misma distancia del vértice coinciden. Es decir, como el vértice está en $x = 1{,}5$, entonces $f(1) = f(2)$; $f(0) = f(3)$…

Vemos que $-x^2 + 3x + 4 = 0$ tiene dos soluciones, $x = -1$ y $x = 4$; y que $f(0) = 4$. Pero estos puntos de corte con los ejes ya aparecen en la tabla.

Piensa y practica

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $a = -1$
- $a = 2$
- $a = -\dfrac{1}{3}$
- $a = \dfrac{1}{2}$
- $a = -3$



2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$ d) $y = -x^2 + 4$

e) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$ f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

3. Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:

a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3)$

b) $y = 2(x - 2)^2$

c) $y = \dfrac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2)$

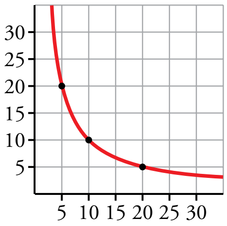
d) $y = (x - 1)^2 + 5$

En la web Representación de funciones cuadráticas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Funciones de proporcionalidad inversa y radicales

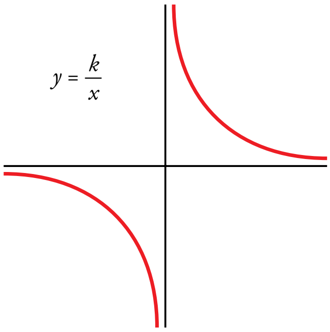


Funciones de proporcionalidad inversa

De un rectángulo de 100 cm^2 de superficie, desconocemos sus lados. Los llamamos x e y. Es claro que $xy = 100$. Lo ponemos así:

$y = \frac{100}{x}$ (A igualdad de áreas, los lados son inversamente proporcionales).

Las relaciones de proporcionalidad inversa, como la que acabamos de describir, se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza, la física, la economía… Vamos a analizarlas teóricamente.



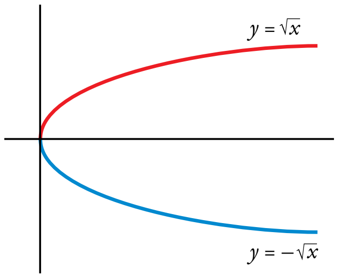
Las funciones $y = \frac{100}{x}$ presentan las características siguientes:

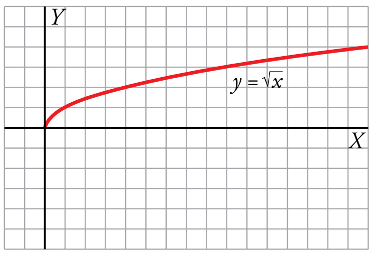
- No están definidas en $x = 0$.
- Si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes. Por eso, decimos que el eje Y es una **asíntota.**
- Si x toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso, el eje X es asíntota.

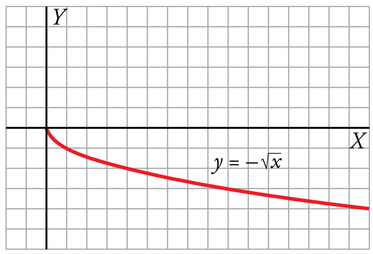
Esta curva es una **hipérbola.**

Funciones radicales

Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ se pueden representar punto a punto y dan lugar a las gráficas que ves debajo. Son mitades de parábola y juntas describen una parábola idéntica a $y = x^2$, pero con su eje sobre el eje X.







El dominio de definición de estas funciones es $[0, +\infty)$.

Piensa y practica

1. Representa con detalle la parte positiva de la función $y = \frac{36}{x}$. Para ello, dale a x los valores 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 y utiliza una hoja de papel cuadriculado para representar los puntos obtenidos.

2. Representa la función $y = \frac{6}{x}$. Para ello, da a x los valores ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

3. Representa $y = \sqrt{-x}$ y di su dominio de definición. (Da a x los valores 0, –1, –4, –9, –16).

4. Representa estas funciones y di sus dominios:

a) $y = \sqrt{x+1}$

(Da a x los valores –1, 0, 3, 8, 15).

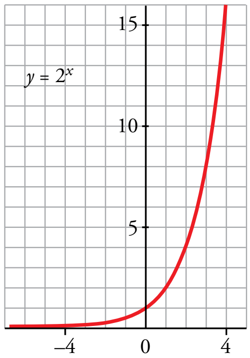
b) $y = \sqrt{1-x}$

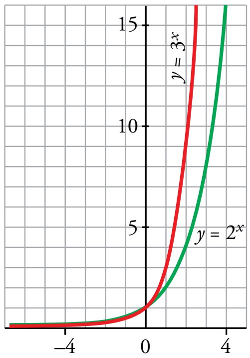
(Da a x los valores 1, 0, –3, –8, –15).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Funciones exponenciales





$y = 3^x$ crece más rápidamente que $y = 2^x$.

Funciones exponenciales crecientes: $y = a^x$, $a > 1$

En el margen tienes la gráfica de la función exponencial de base 2: $y = 2^x$.

$x \geq 0$:

x	0	1	2	3	4	…
2^x	1	2	4	8	16	…

Cuando x toma valores cada vez más grandes, 2^x tiende a infinito.

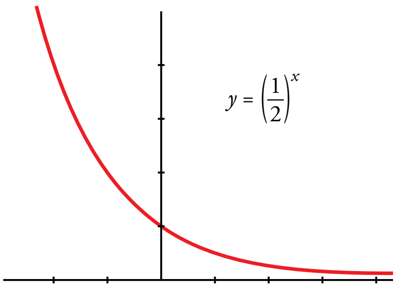
$x \leq 0$:

x	–1	–2	–3
2^x	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Cuando x toma los valores –4, –5, –6, –10, …, 2^x se hace muy pequeño. Es decir, hacia la izquierda, 2^x tiende a cero.

Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$.
- Todas ellas son continuas, están definidas en todo $\mathbb{R}$ y pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.
- Si la base es mayor que 1 $(a > 1)$, entonces son crecientes.
- Crecen tanto más rápidamente cuanto mayor es a.

Funciones exponenciales decrecientes: $(0 < a < 1)$



La función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ también es exponencial. Como su base (1/2) es menor que 1, la función es decreciente.

Las funciones $y = a^x$ con $0 < a < 1$ también pasan por $(0, 1)$ y $(1, a)$, son continuas y definidas en todo $\mathbb{R}$, pero son decrecientes. Decrecen tanto más rápidamente cuanto más próximo a 0 sea a.

En la web Ampliación: aplicaciones de las funciones exponenciales.

Piensa y practica

1. Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

2. Calcula los valores de la función $y = 0{,}8^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –8 y 8. Representa la función.

3. La función $y = 5^{0,2x}$ puede ponerse de forma exponencial $y = a^x$ teniendo en cuenta que $5^{0,2x} = (5^{0,2})^x$.

a) Calcula $5^{0,2}$ y guarda el resultado en la memoria: 5 x^y 0,2 = Min.

b) Representa la función dando valores a x. Por ejemplo, para $x = 4$: MR x^y 4 = 3.62.

En la web Representación de funciones exponenciales.

Nombre y apellidos: ………………………… Fecha: …………………

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Funciones lineales

1. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{4}{7}x$

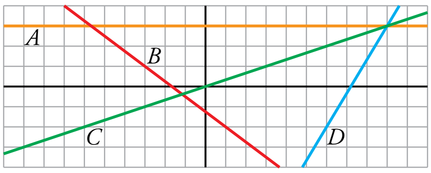
c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$ d) $y = 2{,}5$

2. Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:

a) $P(0, 0)$, $m = 1$ b) $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$ d) $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

3. Calcula la ecuación de estas funciones lineales:



4. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B:

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ b) $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ d) $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

5. Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:

a) Recta que pasa por $(2, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por $(1, -2)$ y $(-4, 3)$.

b) Función de proporcionalidad que pasa por $(-4, 2)$.

c) Función constante que pasa por $(18; -1{,}5)$.

6. Halla el valor de los parámetros a, b, c, d y e para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:

a) Que la recta que pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(-2, a)$ tenga pendiente -1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto $(-3, 4)$.

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos $(d, -2)$ y $(4, e)$ pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Funciones cuadráticas

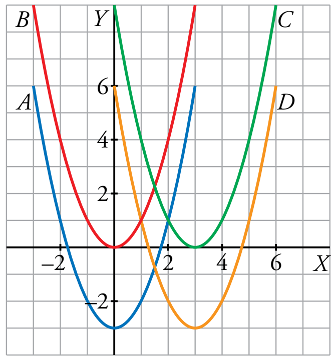
7. Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



8. Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$ d) $y = 0{,}4x^2$

9. Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ d) $y = x^2 - 9$

10. Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.

a) $y = 8 - x^2$ b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$ d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

11. Representa estas funciones cuadráticas:

a) $y = (x - 5)^2$ b) $y = x \cdot (x - 5)$

c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ d) $y = 4 - (x - 2)^2$

12. Utiliza una escala adecuada y representa.

a) $y = \frac{x^2}{100}$ b) $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ d) $y = -10x^2 - 100x$

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

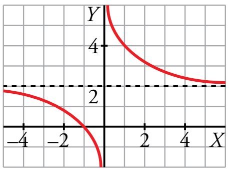
Ejercicios y problemas

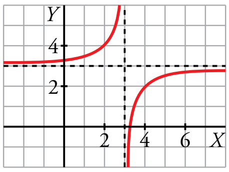
Otras funciones

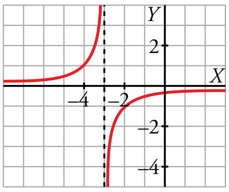
13. Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

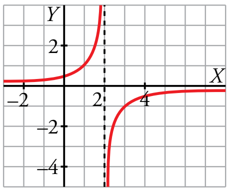
I) $y = \dfrac{1}{2-x}$ II) $y = 3 - \dfrac{1}{x-3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ IV) $y = -\dfrac{1}{x+3}$

a) 

b) 

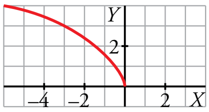
c) 

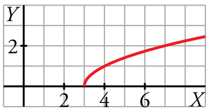
d) 

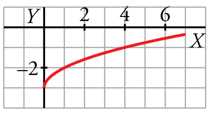
14. Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:

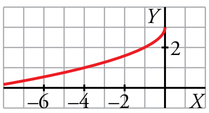
I) $y = \sqrt{x-3}$ II) $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ IV) $y = \sqrt{-3x}$

a) 

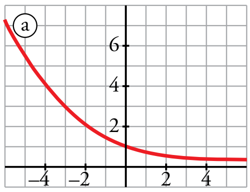
b) 

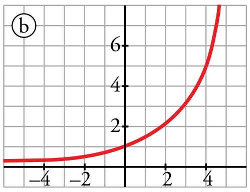
c) 

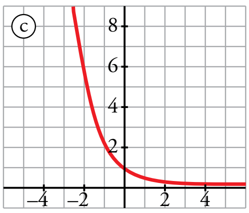
d) 

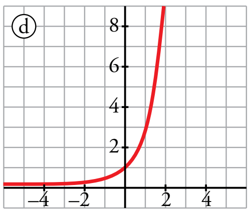
15. Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

I) $y = 3^x$ II) $y = 1{,}5^x$ III) $y = 0{,}4^x$ IV) $y = 0{,}7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

16. Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:

a) $y = \dfrac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\dfrac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

c) $y = \dfrac{1}{x-2}$ $x = -2; 0; 1; 3/2; 3; 4$

d) $y = -\dfrac{1}{x+1}$ $x = -3; -2; -3/2; -1/2; 0; 1$

17. Representa las funciones siguientes:

a) $y = \sqrt{x} + 2$ b) $y = 2 - \sqrt{x}$

c) $y = \sqrt{3-x}$ d) $y = 2\sqrt{x+2}$

18. Representa las siguientes funciones dando a x valores comprendidos entre -4 y 4:

a) $y = 1{,}4^x$ b) $y = 0{,}75^x$

c) $y = 2^x - 1$ d) $y = 0{,}5^x + 2$

Resuelve problemas

19. ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un hexágono dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área? Dibuja ambas funciones.

20. Una casa de reprografía cobra 5 céntimos por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cént. fijos y 2 cént. por cada copia de un mismo ejemplar.

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más barato usar la multicopista?

21. Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

22. La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s viene dada por: $h = 20t - 5t^2$

a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

23. Andrea ha comprado por 100 € un regalo de cumpleaños para Carlos. El resto de los amigos del grupo deciden pagar el regalo entre todos.

Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.

24. El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual. ¿Cuánto ganará dentro de 10 años? Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

25. En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5 % anual.

a) Si el precio es de 450 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

26. Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12 % anual.

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

Autoevaluación

1. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) Pasa por el punto (1, –2) y tiene pendiente 3/2.

b) Pasa por los puntos (–2, –5) y (1, 1).

2. Estas son las tarifas de dos compañías telefónicas:

A: 0,30 € por establecimiento de llamada y 0,20 €/min	B: 0,22 €/min

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y de 15 min? ¿Y de 20 min?

b) Haz, para cada una de las dos compañías, la gráfica de la función que nos da el precio de la llamada dependiendo del tiempo que dure.

3. Halla el vértice y representa estas parábolas:

a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ b) $y = x^2 + 4x - 5$

c) $y = (5 - x)(x + 1)$ d) $y = -(x - 3)^2 - 1$

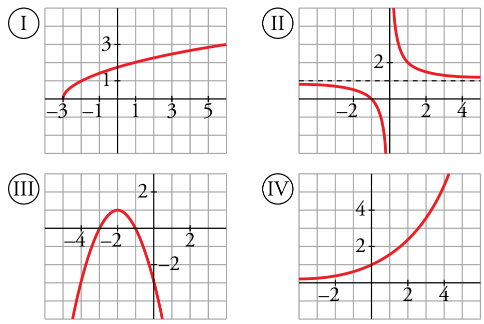
e) $y = 2x^2 + 4x$ f) $y = 9 - (x - 1)^2$

4. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{-1}{x}$ b) $y = \dfrac{1}{x - 3}$

c) $y = \sqrt{-x + 2}$ d) $y = 2^x - 3$

5. Asocia a cada una de las gráficas una ecuación:



a) $y = -x^2 - 4x - 3$ b) $y = 1{,}5^x$

c) $y = \dfrac{1}{x} + 1$ d) $y = \sqrt{x + 3}$

6. Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.

a) Si la base del cuadro midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera, x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

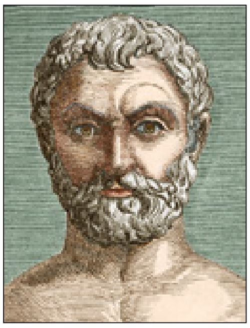
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

6 Semejanza. Aplicaciones

Un importante personaje

El estudio teórico de la semejanza se suele basar en el teorema de Tales. Recordemos quién fue este personaje.

Tales nació en Mileto (actualmente, en la costa occidental de Turquía), aproximadamente, en el año 640 a. C. Murió con más de 90 años.



Tales de Mileto, el primero de "los siete sabios de Grecia".

Yacimiento arqueológico de Mileto, actual Turquía.

Visitó Egipto y, posiblemente, Babilonia, y aprendió la ciencia práctica acumulada durante siglos por estas civilizaciones. Aportó estos conocimientos, seguramente muy elaborados, al mundo griego.

Fue el primero que exigió que las afirmaciones matemáticas y de otras ciencias fueran avaladas por razonamientos bien fundamentados. Por eso, se le considera el fundador de la ciencia griega.

¿Es de Tales el "teorema de Tales"?

Muy admirado en su época y en siglos posteriores, se le dio el rango del primero de "los siete sabios de Grecia". Esta gran admiración de la que fue objeto hizo que se le mitificara y se le atribuyeran méritos que realmente no eran suyos. Por ejemplo, la predicción de un eclipse. Y la paternidad del teorema que lleva su nombre.

Parece cierto que en Egipto midió la altura de una pirámide comparando su sombra con la que arrojaba, en el mismo instante, una vara vertical. Pero esta aplicación práctica de la semejanza no significa que diera forma al enunciado del teorema, ni mucho menos que lo demostrara.

Ambos logros, junto con una adecuada fundamentación y el desarrollo teórico de la semejanza, hay que atribuírselos a **Euclides,** dos siglos y medio posterior.

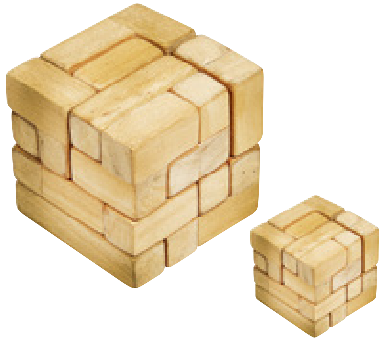
Euclides demostró el teorema de Tales en el libro VI de "Los Elementos".

Se cuenta que Tales predijo el eclipse de Sol que en 585 a. C. puso fin a la batalla del río Halys, entre medos y lidios.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Semejanza



Dos figuras semejantes tienen la *misma forma*. ¿Cómo se manifiesta esto matemáticamente?

— Los ángulos correspondientes en figuras semejantes son iguales.

— Las longitudes de los segmentos correspondientes en figuras semejantes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza.**

Figuras semejantes en la vida corriente

Estamos rodeados de reproducciones:

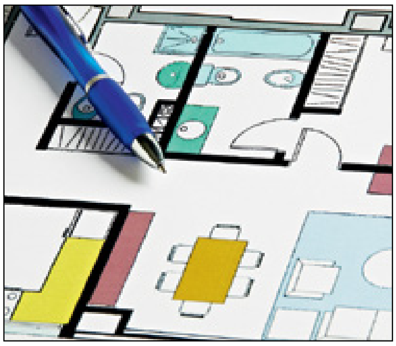
- Con las fotografías, los vídeos, las maquetas de monumentos, las copias de cuadros famosos… se pretende transmitir unas características que se conservan con la semejanza: la imagen, la forma, el color, la belleza del original.
- Con los planos de edificios o ciudades, los mapas… se pretende obtener con precisión medidas, distancias. Por ello, van acompañados de una *escala* con la que se pueden obtener magnitudes de la realidad midiendo sobre ellos.

Escalas

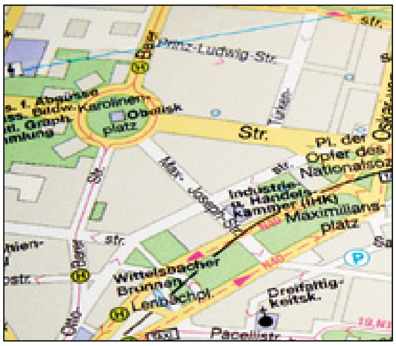
La escala utilizada para un mapa de la Península Ibérica que quepa en un folio es de alrededor de 1:10 000 000.
Para este margen, el mapa está a escala 1:20 000 000.

Escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Por ejemplo, una escala 1:200 significa, como ya sabes, que 1 cm del plano corresponde a 200 cm = 2 m de la realidad.



El plano de una casa suele tener escalas alrededor de 1:100 o 1:200.



El mapa de una ciudad suele tener escalas alrededor de 1:20 000.

Escalas en objetos muy pequeños

Hemos visto cómo se utilizan las escalas para representar un objeto o una superficie a un tamaño menor. Pero, ¿qué escala debemos usar para representar un objeto minúsculo a mayor tamaño?

Por ejemplo, en biología se puede representar con una maqueta de 10 cm de diámetro una célula eucariota animal cuyo diámetro real es 10 μm = 0,01 mm. En estos casos, en lugar de expresar la escala con 1:0,001 ponemos 1 000:1. Quiere decir que 1 000 cm en la maqueta corresponden a 1 cm en la realidad.

Maqueta de una célula eucariota animal. Escala 1 000:1

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Relación entre las áreas y entre los volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

En la web
Refuerza el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes en figuras semejantes.

Ejercicios resueltos

1. ***Gonzalo tiene una maqueta a escala 1:500. Ha tomado estas medidas sobre ella:***

CAMPO DE FÚTBOL: 30 cm de largo y 18 cm de ancho.

DEPÓSITO CILÍNDRICO: 6 cm de diámetro y 10 cm de altura.

Calcular:

a) La superficie del campo de fútbol en la realidad.

b) El volumen real del depósito.

Dimensiones reales:

CAMPO DE FÚTBOL: $\begin{cases} \text{Largo} = 30 \text{ cm} \cdot 500 = 15\,000 \text{ cm} = 150 \text{ m} \\ \text{Ancho} = 18 \text{ cm} \cdot 500 = 9\,000 \text{ cm} = 90 \text{ m} \end{cases}$

DEPÓSITO: $\begin{cases} \text{Radio} = 3 \text{ cm} \cdot 500 = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ \text{Altura} = 10 \text{ cm} \cdot 500 = 5\,000 \text{ cm} = 50 \text{ m} \end{cases}$

a) Superficie del campo de fútbol = 150 m × 90 m = 13 500 m^2

También se puede calcular a partir de su superficie en la maqueta:

$S_{\text{CF real}} = S_{\text{CF maqueta}} \cdot 500^2 = (30 \cdot 18) \text{ cm}^2 \cdot 500^2 = 135\,000\,000 \text{ cm}^2 = 13\,500 \text{ m}^2$

b) Volumen del depósito $= \pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 = 35\,343 \text{ m}^3$

También se puede calcular a partir de su volumen en la maqueta:

$V_{\text{depósito real}} = V_{\text{depósito maqueta}} \cdot 500^3 = (\pi \cdot 3^2 \cdot 10)\text{cm}^3 \cdot 500^3 =$

$= 283 \text{ cm}^3 \cdot 500^3 = 35\,375\,000\,000 \text{ cm}^3 = 35\,375 \text{ m}^3$

2. ***En la estación de Atocha de Madrid hay una escultura de Antonio López que muestra la cabeza de un recién nacido con un perímetro craneal de 7 m.***

El perímetro craneal de un bebé al nacer es de unos 35 cm. Calcular:

a) La escala a la que el escultor construyó la cabeza.

b) Si la escultura tiene un volumen de 5,8 m^3, ¿cuál será el volumen de la cabeza de un bebé?

a) Para calcular la escala, nos basamos en las medidas relativas al perímetro craneal que proporciona el enunciado. Tendremos en cuenta, además, que las medidas se nos dan en diferentes unidades, metros y centímetros.

7 m = 700 cm de la escultura corresponden a 35 cm en la realidad:

700 : 35 = 20

La escala a la que está representada la escultura es 20:1.

Es decir, cada 20 cm de la escultura corresponden a 1 cm de la realidad.

b) Recuerda que cuando una maqueta tiene una escala $1:k$, para hallar el volumen del objeto real hay que multiplicar el de la maqueta por k^3.

En este caso, la escala es $k:1$, y por tanto, hay que dividir el volumen de la maqueta por k^3.

Teniendo en cuenta lo anterior, calculamos:

$$5{,}8 \text{ m}^3 : 20^3 = 5\,800\,000 \text{ cm}^3 : 8\,000 = 725 \text{ cm}^3$$

El volumen de la cabeza de un recién nacido es de unos 725 cm^3.

Piensa y practica

1. Para construir una carpa semiesférica para su maqueta, Gonzalo ha necesitado 402 cm^2 de tela. Sabiendo que tiene un diámetro de 16 cm, calcula la superficie y el volumen de la carpa en la realidad.

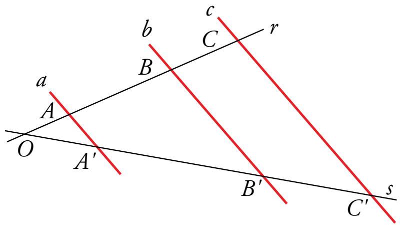
2. La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si con ella se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?

En la web Presentación y uso del pantógrafo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Semejanza de triángulos



Teorema de Tales

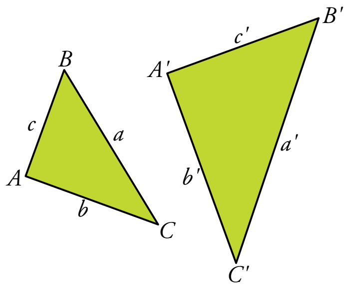
Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad \text{Como consecuencia, se verifica: } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.

El teorema de Tales sirve para estudiar la semejanza de triángulos.

Triángulos semejantes



Dos **triángulos semejantes** tienen:

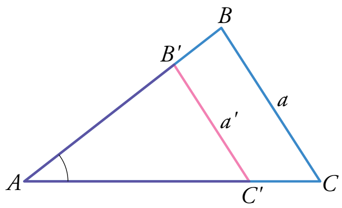
- Sus lados proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semejanza}$$

- Sus ángulos, respectivamente iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos.

Decimos que esos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

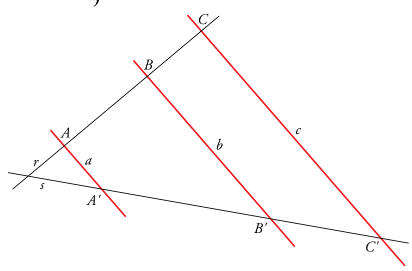
Piensa y practica

1. Las medidas de este dibujo son:

$\overline{AB} = 2{,}3$ cm

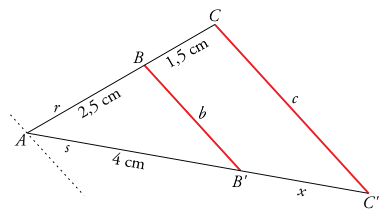
$\overline{BC} = 1{,}5$ cm

$\overline{B'C'} = 2{,}4$ cm



Aplica el teorema de Tales y calcula la longitud de $A'B'$.

2. Para aplicar el teorema de Tales, trazamos por A una recta paralela a b y a c:



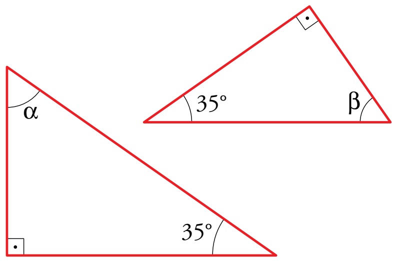
Calcula x.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por eso les vamos a dedicar una atención especial. Empecemos por estudiar un criterio de semejanza muy fácil de aplicar.



Criterio de semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

Esto es así, pues con ese ángulo y el ángulo recto ya son dos los ángulos iguales y, por tanto, también será igual el tercero.

Por ejemplo, los dos triángulos del margen son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual. Podemos asegurar que son semejantes, ya que los otros ángulos, α y β, también son iguales. Lo comprobamos:

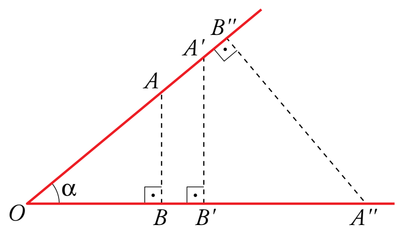
$$\left.\begin{array}{l} 90° + 35° + \alpha = 180° \\ 90° + 35° + \beta = 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \beta = 55°$$

En la web Resuelve problemas guiados en los que se aplica la semejanza de triángulos rectángulos.

Consecuencias del criterio de semejanza anterior

Del criterio anterior obtenemos dos consecuencias importantes:

Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a alguno de los lados de un ángulo son semejantes.

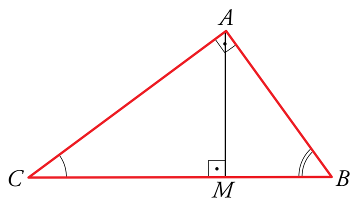


Todos esos triángulos (ABO, $A'B'O$, $A''B''O$) son semejantes por tener el ángulo α común.

Por tanto, sabemos, sin más comprobación (por el criterio anterior), que sus lados son proporcionales.

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.

En la siguiente figura encontramos tres triángulos rectángulos: ABC, AMB y AMC.



— ABC y AMB son semejantes por compartir el ángulo $\hat{B}$.

— ABC y AMC son semejantes por compartir el ángulo $\hat{C}$.

Observa

Esta segunda propiedad de los triángulos rectángulos también es consecuencia de la primera.

ABC y AMB son semejantes porque son dos triángulos formados sobre el ángulo B al trazar dos perpendiculares a sus lados, AM y CA.

Lo mismo ocurre con ABC y AMC.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

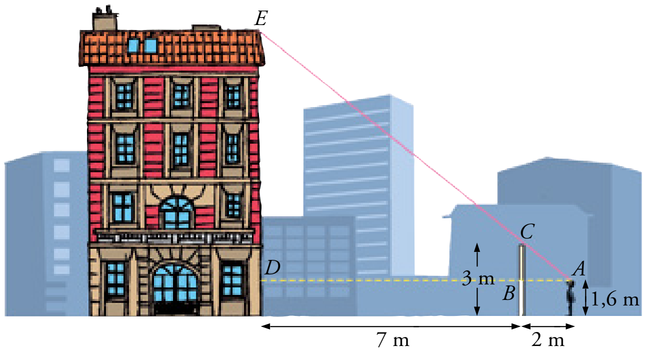
Veamos algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de semejanza en triángulos rectángulos.

Problemas resueltos

1. ***Para medir la altura de un edificio, Miguel se sitúa de modo que ve alineados la parte alta de la verja y la del edificio. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.***

a) Explicar por qué los triángulos ABC y ADE son semejantes.

b) Calcular ED y la altura del edificio.

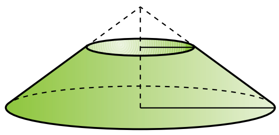


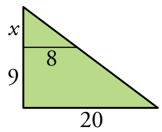
a) Los triángulos ABC y ADE son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

b) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \rightarrow \dfrac{\overline{ED}}{3-1,6} = \dfrac{2+7}{2} \rightarrow \overline{ED} = \dfrac{9 \cdot 1,4}{2} = 6,3$ m

La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

2. ***Hallar el volumen de un tronco de cono de 9 cm de altura sabiendo que los radios de sus bases miden 20 cm y 8 cm.***





Ampliamos el tronco hasta completar un cono. Llamamos x al incremento de la altura. Tenemos en cuenta la semejanza de los dos triángulos: el pequeño, de catetos 8 y x; y el grande, de catetos 20 y $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \rightarrow 20x = 8x + 72 \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

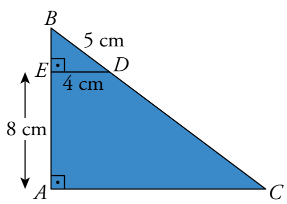
El volumen del tronco de cono es la diferencia de volúmenes de dos conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9+6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi(6\,000 - 384) = 5\,881,06 \text{ cm}^3$$

Piensa y practica

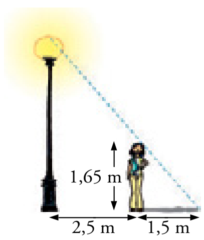
1. Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7,22 m en el momento en que un poste de 1,60 m da una sombra de 67 cm.

2. Halla los lados del triángulo ABC.



3. En el mismo instante y lugar de la actividad 1, ¿qué longitud tendrá la sombra de un edificio que mide 32 m de altura?

4. Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Razón de semejanza. Escalas

1. En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

2. Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

3. En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm^2. ¿Cuál es la superficie real del salón?

4. Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?

5. Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

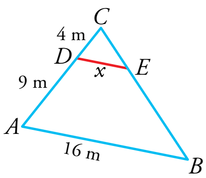
b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

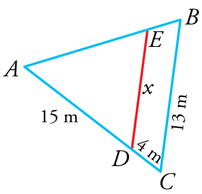
Semejanza de triángulos

6. Identifica triángulos en posición de Tales en cada figura y calcula, en cada caso, la longitud del segmento DE:

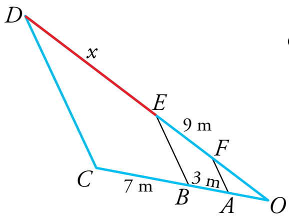
a)



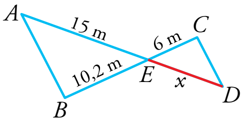
b)



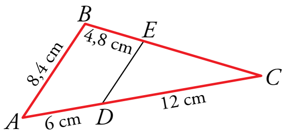
c)



d)



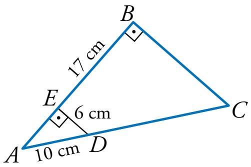
7. En la figura, el segmento DE es paralelo a AB.



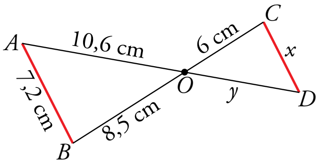
Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$.

8. ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y AED?

Halla el perímetro del trapecio $EBCD$.



9. Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.



a) Di por qué son semejantes los triángulos AOB y ODC.

b) Calcula x e y.

Aplica lo aprendido

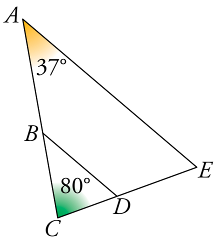
10. Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m^3 y 250 m^3, respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?

11. Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm y $\overline{BC}$ = 6,4 cm:

a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



12. En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.

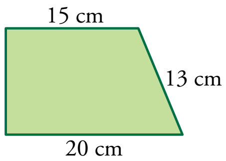
13. La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

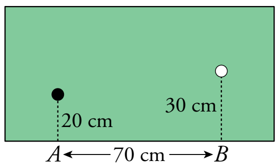
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14. Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2, ¿cuál es el área del segundo?

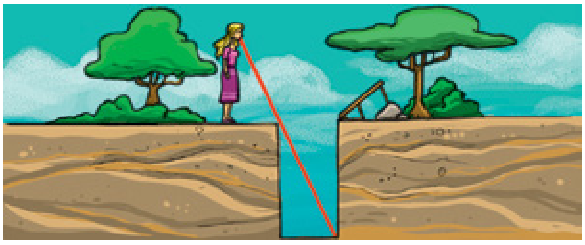
15. Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.



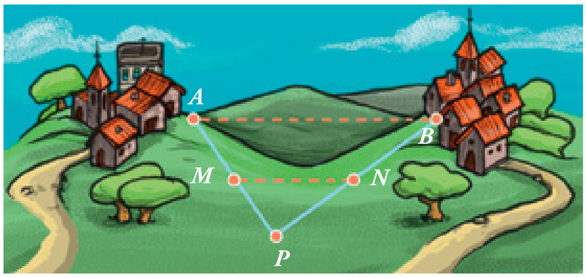
16. ¿En qué punto comprendido entre A y B debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?



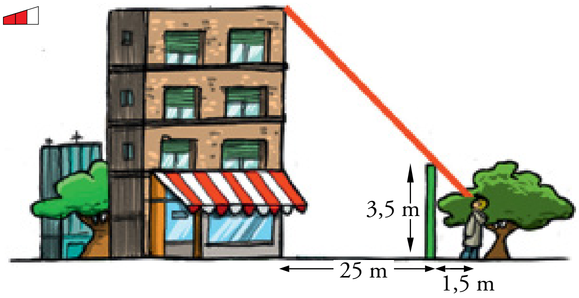
17. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



18. Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$, fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia $\overline{AB}$.

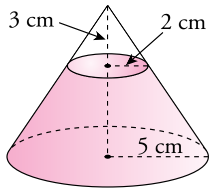


19.



Si Álvaro mide 165 cm de altura, ¿cuánto mide la casa?

20. De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.



Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m^2. ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

2. Comprueba si son semejantes dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones siguientes:

a) $\overline{AB}$ = 10; $\overline{BC}$ = 18; $\overline{CA}$ = 12

$\overline{A'B'}$ = 25; $\overline{B'C'}$ = 45; $\overline{C'A'}$ = 30

b) $\overline{AB}$ = 20; $\overline{BC}$ = 30; $\overline{CA}$ = 40

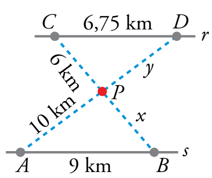
$\overline{A'B'}$ = 40; $\overline{B'C'}$ = 50; $\overline{C'A'}$ = 60

c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

3. Álvaro debe situarse a 3 m de un charco para ver la copa de un árbol reflejada en él. Si la distancia del charco al árbol es de 10,5 m y la estatura de Álvaro es de 1,72 m, ¿cuál es la altura del árbol?

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.



5. Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

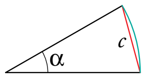
7 Trigonometría

Dos grandes astrónomos griegos

Históricamente, el desarrollo de la trigonometría va ligado al de la astronomía.

En la antigua Grecia destacaron dos grandes astrónomos:

Hiparco de Nicea (190-120 a. C.), considerado el "padre de la astronomía", consolidó el sistema sexagesimal para la medida de ángulos. Teniendo en cuenta que la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales, elaboró unas tablas en las que asociaba la medida de cada ángulo con la longitud de la cuerda correspondiente.



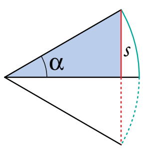
Ptolomeo de Alejandría (85-165) amplió y mejoró la obra de Hiparco y escribió un enorme tratado de astronomía de trece libros, al que se acabó llamando el *Almagesto, (el más grande)*.

Edición del siglo XIII del "Almagesto" de Ptolomeo que se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid.

Hiparco de Nicea, considerado el inventor de la trigonometría.

Evolución posterior de la trigonometría

Los indios, durante los siglos IV y V, desarrollaron una trigonometría con un enfoque distinto al de los griegos: asociaron a cada ángulo la longitud de la semicuerda del ángulo doble (lo que posteriormente se llamaría *seno* del ángulo), consiguiendo así trabajar con triángulos rectángulos, más fáciles de manejar.



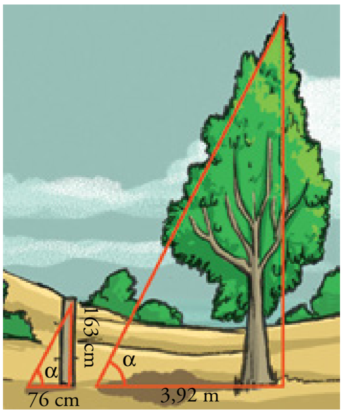
Los árabes (siglos IX-X) se inspiraron en el *Almagesto* de Ptolomeo pero utilizaron las tablas de los senos de los indios, las ampliaron con otras medidas y las mejoraron. Su trigonometría, bien fundamentada y muy práctica, se extendió por Europa a partir del siglo XII.

Astrolabio islámico del siglo XIII. Hiparco inventó este instrumento astronómico de uso imprescindible para agrimensores y navegantes hasta el siglo XVIII.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo



Como hemos visto en la página anterior, la razón entre la altura y la sombra de la estaca (163/76) es igual a la razón entre la altura y la sombra del árbol. De esta forma, podemos hallar la altura de un chopo multiplicando la longitud de su sombra, 3,92 m, por 163/76. Este cociente es lo que aquí estamos llamando tangente del ángulo α.

En la web
Visualización de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

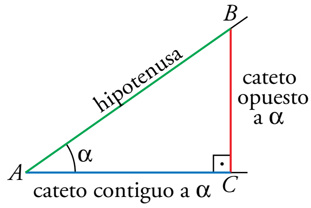
La trigonometría se basa en la semejanza de triángulos rectángulos:

La razón entre dos lados de un triángulo rectángulo es igual a la razón entre los lados correspondientes de cualquier otro triángulo semejante a él.

En adelante, nos disponemos a estudiar todas las posibles razones entre dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Seno, coseno y tangente de un ángulo

Sobre un ángulo agudo, α, como el de la derecha, construimos un triángulo rectángulo, *ABC*.



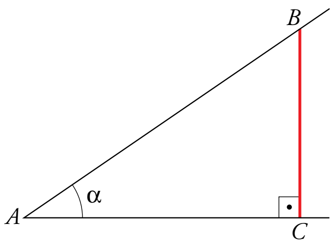
Observa las siguientes relaciones llamadas **razones trigonométricas** del ángulo α.

$$\textbf{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \qquad sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\textbf{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \qquad cos\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\textbf{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} \qquad tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Cálculo gráfico (aproximado) de razones trigonométricas



La propia definición nos proporciona un método para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

- Se dibuja un ángulo. Por ejemplo, 34°.
- Desde un punto, *B*, de uno de los lados se traza una perpendicular al otro lado. De este modo se forma un triángulo rectángulo *ABC*.
- Se miden los lados del triángulo. En nuestro ejemplo:

$$\overline{AC} = 41 \text{ mm}, \quad \overline{BC} = 28 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 50 \text{ mm}$$

- Con estos datos, calculamos las razones trigonométricas del ángulo, 34°:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{28}{50} = 0,56; \quad cos\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{41}{50} = 0,82; \quad tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{28}{41} = 0,68$$

Las medidas tomadas son aproximadas, por lo que las relaciones también lo son.

Piensa y practica

1. Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triángulo rectángulo de tal modo que $\overline{AB} = 100$ mm.

Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores que en el ejemplo de arriba.

2. Dibuja, sobre un ángulo de 45°, un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 10 cm.

Calcula, como en el ejemplo de arriba, las razones trigonométricas de 45°. ¿Cómo son entre sí el seno y el coseno? ¿Cuánto vale la tangente? Explica por qué.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

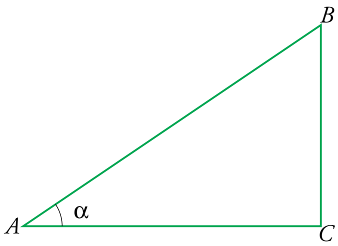
2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Notación

En lugar de $(sen\ \alpha)^2$ se suele poner $sen^2\ \alpha$. Del mismo modo:

$(cos\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha$ y $(tg\ \alpha)^2 = tg^2\ \alpha$

A pesar de la costumbre, y para evitar confusiones, utilizaremos durante este curso la expresión con paréntesis.



Los valores de *sen*, *cos* y *tg* de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que *conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos*. Las relaciones que los ligan son las siguientes (se las suele llamar **relaciones fundamentales**):

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \quad [I] \qquad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \quad [II]$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar:

$$[I]\quad (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \overset{(*)}{=} \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2} = 1$$

(*) Por el teorema de Pitágoras, se cumple que $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$.

$$[II]\quad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\ \alpha$$

En los siguientes ejercicios resueltos vemos cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, se pueden calcular las otras dos.

Ejercicios resueltos

1. ***Sabiendo que*** $cos\ \alpha = 0{,}63$, ***calcular*** $s = sen\ \alpha$ ***y*** $t = tg\ \alpha$.

Mediante la igualdad I, conocido $sen\ \alpha$ obtenemos $cos\ \alpha$, y viceversa.

$$s^2 + 0{,}63^2 = 1 \ \rightarrow\ s^2 = 1 - 0{,}63^2 = 0{,}6031 \ \rightarrow\ s = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777$$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque $sen\ \alpha$ ha de ser positivo).

$$t = \frac{0{,}777}{0{,}63} = 1{,}23$$

Solución: $sen\ \alpha = 0{,}777 \qquad tg\ \alpha = 1{,}23$

2. ***Sabiendo que*** $tg\ \alpha = 2$, ***calcular*** $s = sen\ \alpha$ ***y*** $c = cos\ \alpha$.

Mediante las igualdades I y II, conocida $tg\ \alpha$ se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ 4c^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ 5c^2 = 1 \end{array}$$

$$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{la raíz positiva}]{\text{solo tomamos}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5};\quad s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Solución: $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894 \qquad cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}447$

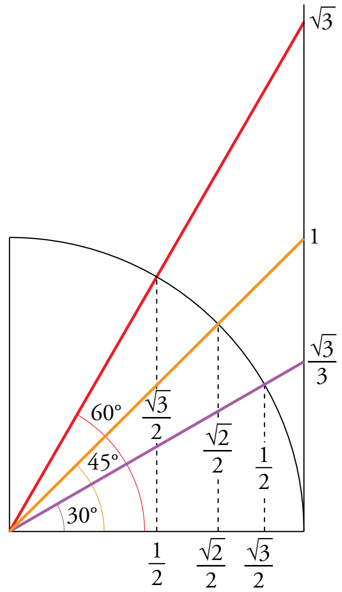
Piensa y practica

1. $sen\ \alpha = 0{,}6$. Calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

2. $tg\ \beta = 0{,}53$. Calcula $sen\ \beta$ y $cos\ \beta$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.



Localiza en la gráfica las razones que aparecen en la tabla.

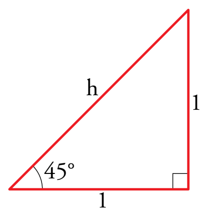
	sen	*cos*	*tg*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45°

La hipotenusa de este triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1 es:



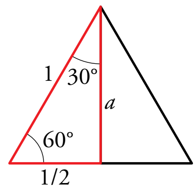
$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = 1$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° Y DE 60°

Calculamos la altura de este triángulo equilátero de lado 1:



$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Piensa y practica

3. Teniendo en cuenta que $tg\ 45° = 1$, deduce el valor de $sen\ 45°$ y de $cos\ 45°$ mediante las relaciones fundamentales.

4. Teniendo en cuenta que $sen\ 30° = 1/2$, halla el valor de $cos\ 30°$ y de $tg\ 30°$ mediante las relaciones fundamentales.

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

6. Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

7. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			$\sqrt{3}/2$	
tg α				3,5		1

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

En la web Obtención de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Teclas trigonométricas

Para el cálculo y el manejo de las razones trigonométricas, hasta ahora solo hemos utilizado las operaciones aritméticas de la calculadora: [+] [−] [×] [÷] y [√].

En este apartado vamos a aprender a manejar las teclas específicamente trigonométricas.

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor del seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas.

Veamos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

■ SELECCIÓN DEL MODO DEG (GRADOS SEXAGESIMALES)

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (DEG). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (GRA). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (RAD). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas).

En este curso utilizaremos, casi siempre, los grados sexagesimales. Por tanto, selecciona en la calculadora el modo DEG, a partir de la tecla [MODE] o [SETUP], según el modelo de calculadora.

■ ANOTAR UN ÁNGULO. TECLA [° ' '']

Para escribir el ángulo 38° 25' 36'', se procede así:

38 [° ' ''] 25 [° ' ''] 36 [° ' ''] {38.42666667}   [SHIFT] [° ' ''] {38°25°36}

Se anota el ángulo en forma decimal   Se expresa el ángulo en forma sexagesimal

En las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA se procede del mismo modo:

38 [° ' ''] 25 [° ' ''] 36 [° ' ''] [=] {38°25°36° / 38°25'36''}

■ CÁLCULO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA. TECLAS [sin] [cos] [tan]

Para calcular *sen* (47° 25'), se procede así:

[sin] 47 [° ' ''] 25 [° ' ''] {47.41666667} [=] {0.73629395121}

Es decir, *sen* 47° 25' = 0,736.

Análogamente, se procede con coseno, [cos], y tangente, [tan].

■ FUNCIONES INVERSAS: [sin⁻¹] ([SHIFT] [sin]), [cos⁻¹] ([SHIFT] [cos]), [tan⁻¹] ([SHIFT] [tan])

¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 0,5? Sabemos que es 30°. La forma de preguntárselo a la calculadora es esta:

[SHIFT] [sin] 0,5 [=] {30}

Análogamente:

cos α = 0,56 → ¿α? → [SHIFT] [cos] 0,56 [=] [SHIFT] [° ' ''] {55°56°39.13}

tg α = 3 → ¿α? → [SHIFT] [tan] 3 [=] [SHIFT] [° ' ''] {71°33°54.18}

Entrénate

Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

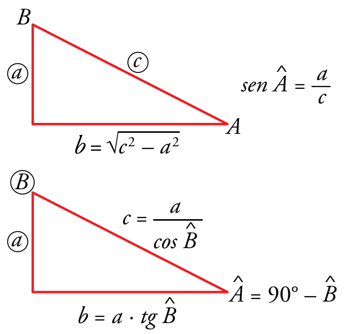
a) *sen* 86°   b) *cos* 59°
c) *tg* 22°   d) *sen* 15° 25' 43''
e) *cos* 59° 27'   f) *tg* 86° 52'
g) *sen* 10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Resolución de triángulos rectángulos

En la web Hoja de cálculo para resolver triángulos rectángulos.



Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos.

Las razones trigonométricas nos permiten resolver cualquier triángulo rectángulo.

■ CONOCIDOS DOS LADOS

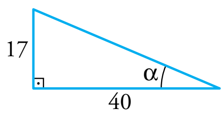
- El tercer lado se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.
- Cada uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.

■ CONOCIDOS UN LADO Y UN ÁNGULO

- Otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos.
- El otro ángulo agudo es complementario del que conocemos.

Ejercicios resueltos

1. ***Los dos catetos de un triángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.***



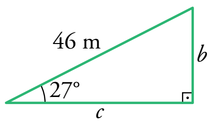
El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $tg\ \alpha = \frac{17}{40} = 0{,}425$

Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:

SHIFT tan 0,425 = SHIFT °'" 23°1°31.77. Es decir, $\alpha = 23°\ 1'\ 32''$.

El otro ángulo es su complementario: $90° - 23°\ 1'\ 32'' = 66°\ 58'\ 28''$

2. ***En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° y la hipotenusa, 46 m. Hallar los dos catetos.***

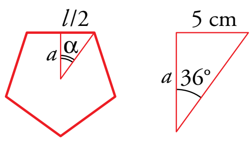


b es el cateto opuesto al ángulo de 27°. Por tanto:

$$sen\ 27° = \frac{b}{46} \rightarrow b = 46 \cdot sen\ 27° = 20{,}88 \text{ m}$$

Análogamente: $cos\ 27° = \frac{c}{46} \rightarrow c = 46 \cdot cos\ 27° = 40{,}99 \text{ m}$

3. ***¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado 10 cm?***



$\alpha = 360° : 10 = 36°$

$tg\ 36° = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{tg\ 36°} = 6{,}88$

La apotema mide 6,9 cm.

Piensa y practica

En la web Refuerza la resolución de triángulos rectángulos.

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos.

2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m.

Halla el otro cateto y la hipotenusa.

3. Calcula el radio de un octógono regular de 20 cm de lado. ¿Cuánto mide su apotema?

4. Halla la apotema de un heptágono regular de 10 cm de radio.

Calcula también la longitud del lado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

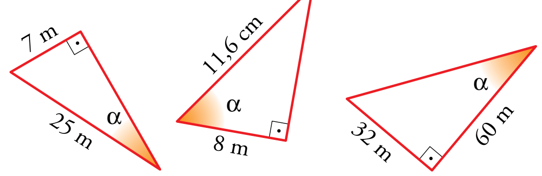
Ejercicios y problemas

Practica

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) b) c)



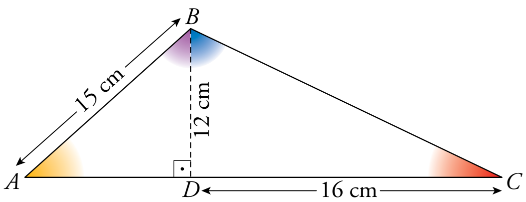
2. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos $(\hat{A} = 90°)$:

a) $b = 56$ cm; $a = 62{,}3$ cm

b) $b = 33{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm

c) $c = 16$ cm; $a = 36$ cm

3. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.



Relaciones fundamentales

4. Si $sen\ \alpha = 0{,}28$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales $(\alpha < 90°)$.

5. Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ $(\alpha < 90°)$.

6. Si $tg\ \alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ $(\alpha < 90°)$.

7. Completa en tu cuaderno esta tabla con las razones trigonométricas que faltan siendo $\alpha < 90°$. Utiliza radicales cuando sea posible.

sen α	0,92			2/3		
cos α		0,12			$\sqrt{2}/3$	
tg α			0,75			2

Calculadora

8. Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:

α	15°	55° 20′	72° 25′ 40″	85,5°
sen α				
cos α				
tg α				

9. Halla el ángulo $\alpha < 90°$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) $sen\ \alpha = 0{,}58$ b) $cos\ \alpha = 0{,}75$ c) $tg\ \alpha = 2{,}5$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e) $cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $tg\ \alpha = 3\sqrt{2}$

10. Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha < 90°$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $sen\ \alpha = 0{,}23$ b) $cos\ \alpha = 0{,}74$ c) $tg\ \alpha = 1{,}75$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $tg\ \alpha = \sqrt{3}$ f) $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución de triángulos

11. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos $(\hat{C} = 90°)$ hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

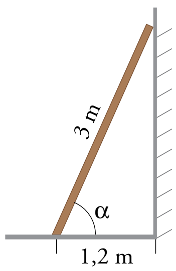
b) $a = 43$ m, $\hat{A} = 37°$. Halla b, c, $\hat{B}$.

c) $a = 7$ m, $\hat{B} = 58°$. Halla b, c, $\hat{A}$.

d) $c = 5{,}8$ km, $\hat{A} = 71°$. Halla a, b, $\hat{B}$.

12. Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

13. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

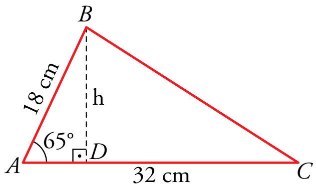


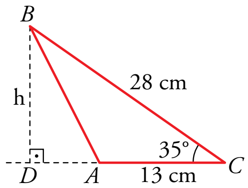
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Aplica lo aprendido

14. Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:

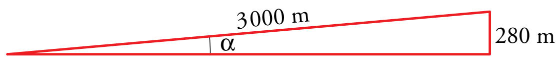




15. Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide el árbol?

16. Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60°. ¿A qué altura está la cometa?

17. En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.

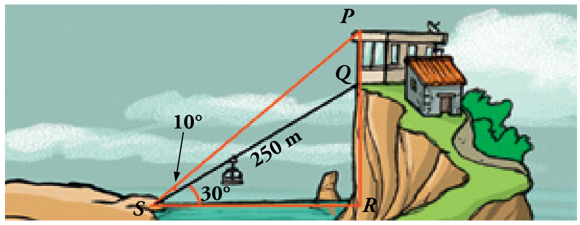


18. Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio?

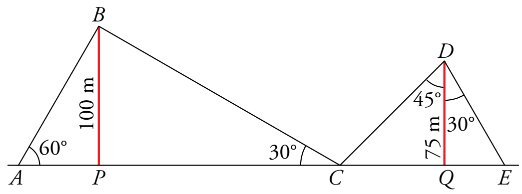
19. Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?

20. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.

21. Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.



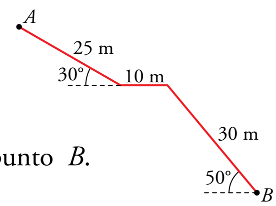
22. Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura.



Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE.

23. Una escalera, por la que se accede a un túnel, tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad del punto B.



Autoevaluación

1. a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$ y $\alpha < 90°$, calcula $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

b) Si $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{12}{5}$ y $\beta < 90°$, calcula $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

2. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

3. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 50°, y la hipotenusa, 16 cm.

Resuelve el triángulo.

4. En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos iguales mide 70° y su altura es de 12 cm.

Halla la medida de los lados del triángulo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

8 Geometría analítica

Dos mentes maravillosas

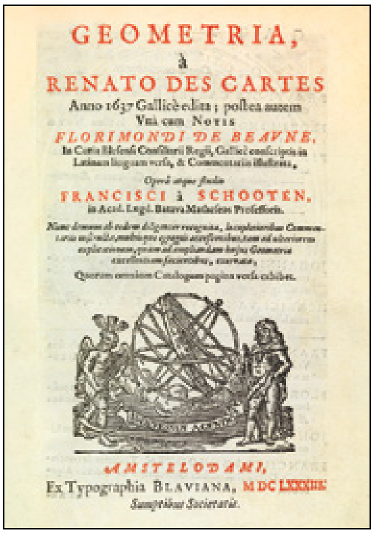
Con la invención de la geometría analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, **Descartes** y **Fermat,** quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

René Descartes (1596-1650)

Pierre de Fermat (1601-1665)

René Descartes

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada "Geometría" en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius*.

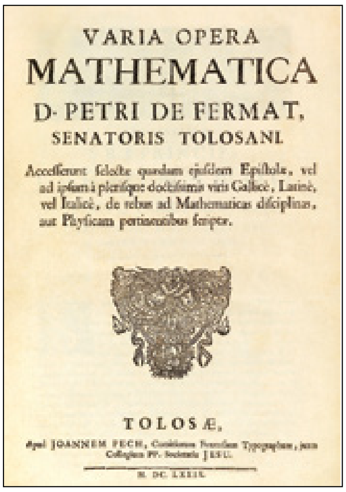


GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Una cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
Opera atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

La "Geometría" es la única obra matemática de Descartes, un apéndice de apenas cien páginas de su "Discurso del Método" que cambió para siempre el quehacer matemático.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la geometría analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.



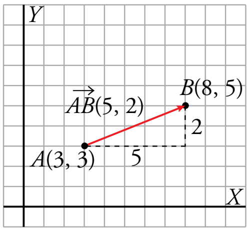
VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
TOLOSÆ,
M. DC. LXXIX.

En 1679, el hijo de Fermat publicó la obra "Varia Opera Mathematica", en la que recopiló los estudios matemáticos de su padre.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(3, 3)$, $B(8, 5)$.

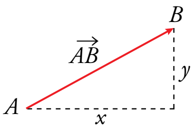
La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\vec{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\vec{AB}$ podríamos describirlo del modo siguiente: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos 2 unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\vec{AB}$ son (5, 2). O, mejor, así: $\vec{AB} = (5, 2)$. O, simplemente, $\vec{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

$$\vec{AB} = (8, 5) - (3, 3) = (8 - 3, 5 - 3) = (5, 2)$$

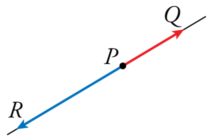


El módulo de un vector $\vec{AB}(x, y)$, por el teorema de Pitágoras, es:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- El **módulo** de un vector $\vec{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\vec{AB}|$.
  Si las coordenadas de $\vec{AB}$ son (x, y), entonces $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- La **dirección** de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.
- Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ son vectores de igual dirección y sentidos opuestos.

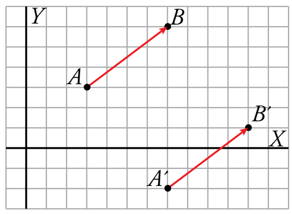


Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejercicio resuelto

Si $A(3, 3)$, $B(7, 6)$, $A'(7, -2)$ y $B'(11, 1)$, comprobar que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{A'B'}$ son iguales. Calcular sus módulos.

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB}: (7, 6) - (3, 3) = (4, 3) \rightarrow \vec{AB}(4, 3) \\ \vec{A'B'}: (11, 1) - (7, -2) = (4, 3) \rightarrow \vec{A'B'}(4, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{AB} = \vec{A'B'}$$

Sus módulos, por tanto, también son iguales: $|\vec{AB}| = |\vec{A'B'}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Piensa y practica

1. Representa los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales.

Comprueba que $\vec{AB} = \vec{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2. Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1), \; B(4, 6), \; C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ sean iguales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Operaciones con vectores

Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

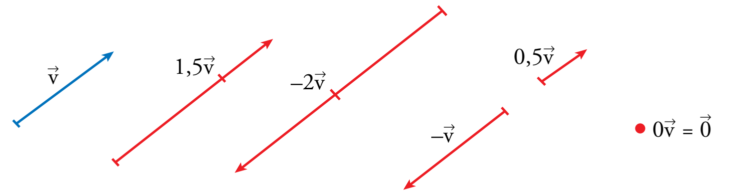
Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k:

$$|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$$

- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.



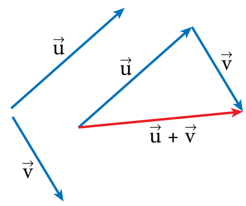
El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son (0, 0). Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Suma de vectores

Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo, el de $\vec{v}$.



Las **coordenadas** del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

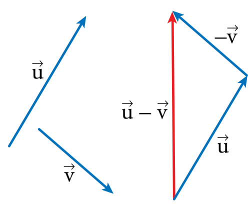
$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (7 + 4, -3 + 5) = (11, 2)$$

Resta de vectores

Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Las **coordenadas** del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:



$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (7 - 4, -3 - 5) = (3, -8)$$

Ejercítate

1. a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2. Representa y halla las coordenadas de los vectores:

$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u} - \vec{v}$ y

$\vec{q} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$,

siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

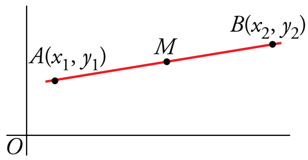
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Punto medio de un segmento y puntos alineados

Punto simétrico

Si M es el punto medio de AB, se dice que B es el simétrico de A respecto de M.



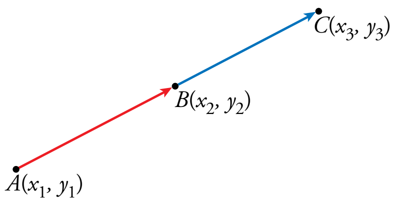
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$ y $B(4, 3)$ es $M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = (1, 2)$.

Comprobación de que tres puntos están alineados



Los puntos A, B y C están alineados siempre que los vectores

$$\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{BC}$$

tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales.

Notación

El símbolo // puesto entre dos vectores denota que son paralelos; es decir, que tienen la misma dirección.

A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$; es decir, si las coordenadas del vector $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ son proporcionales a las de $(x_3 - x_2,\ y_3 - y_2)$.

Ejercicio resuelto

Comprobar si los puntos A(2, –1), B(6, 1), C(8, 2) están alineados.

$$\overrightarrow{AB} = \big(6 - 2, 1 - (-1)\big) = (4, 2)$$
$$\overrightarrow{BC} = (8 - 6, 2 - 1) = (2, 1)$$

Las coordenadas son proporcionales, pues $2 \cdot (2, 1) = (4, 2)$.

Por tanto, $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$ y los puntos están alineados.

Piensa y practica

1. Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ b) $C(7, -3)$, $D(-5, 1)$

c) $E(1, 4)$, $F(7, 2)$ d) $G(-3, 5)$, $H(4, 0)$

2. Si conocemos el punto medio del segmento AB, $M(4, 4)$, y uno de los extremos es $A(7, 2)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

3. Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$ b) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

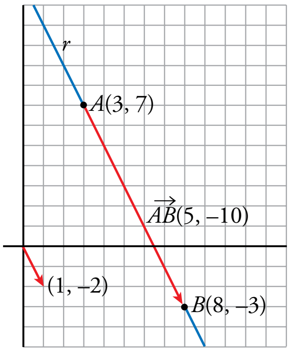
4. Comprueba si $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.

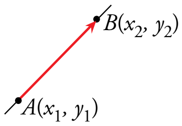
5. Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad





Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$

El vector $\vec{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, –3)$ tiene como vector dirección a $(5, –10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, –2)$.

La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3 - 7}{8 - 3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\vec{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(–2, 3) y B(6, 7).***	Un vector dirección es $\vec{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$ Pendiente: $m = \frac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + (x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$
2. ***Hallar la ecuación de la recta que pasa por (5, –3) y tiene por vector dirección (3, 2).***	Su pendiente es: $m = \frac{2}{3}$. Su ecuación es: $y = -3 + \frac{2}{3}(x - 5)$
3. ***Hallar la ecuación de la recta paralela a r: 2x + 5y – 4 = 0 que pasa por:*** ***a) (0, 0) b) (4, –3)***	Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x: $2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\frac{2}{5}$ a) Pasa por $(0, 0)$ y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x$ b) Pasa por $(4, –3)$ y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \frac{2}{5}(x - 4)$

Piensa y practica

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, –2)$

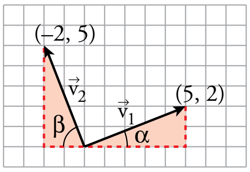
2. Halla la ecuación de la recta que pasa por $(7, –5)$ y tiene por vector dirección $(7, –4)$.

3. Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por $(0, –3)$.

4. Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por $(2, 4)$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.



Vector perpendicular a otro

Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \frac{b}{a}$ y $m_2 = \frac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

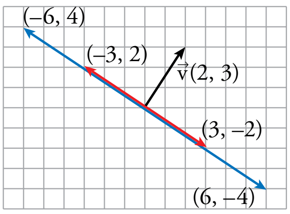
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar la ecuación de la recta r que pasa por A(4, 7) y es perpendicular al vector $\vec{v}$(3, –5).***

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \frac{b}{a}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. ***Obtener varios vectores perpendiculares a (2, 3).***

(–3, 2) es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son (3, –2), (–6, 4), (6, –4)…

3. ***Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: 5x – 3y + 15 = 0, que pasa por (–7, 2).***

Pendiente de s: $y = \frac{5}{3}x + 5 \;\rightarrow\; m_1 = \frac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \frac{3}{5}(x + 7) \;\rightarrow\; y = -\frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

Piensa y practica

5. Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).

6. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7. La recta r pasa por (3, 0), y la recta s, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Rectas paralelas a los ejes coordenados

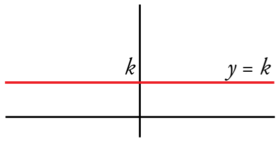
No lo olvides

Vector dirección de la recta $y = k$ es $(a, 0)$.

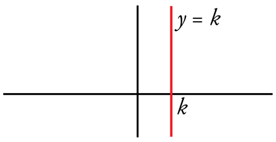
Vector dirección de la recta $x = k$ es $(0, a)$.

Rectas paralelas al eje X

Como sabes, la función constante, $y = k$, se representa mediante una recta paralela al eje X y, por tanto, de pendiente 0. Vectores dirección de estas rectas son $(a, 0)$ para cualquier valor de a distinto de 0.



Rectas paralelas al eje Y



Análogamente, las ecuaciones $x = k$ se representan mediante rectas paralelas al eje Y. (Sin embargo, estas rectas no son la representación de funciones, porque a un valor de x, el k, le corresponden más de uno –¡todos!– los valores de Y).

Vectores dirección de las rectas $x = k$ son $(0, a)$ para $a \neq 0$.

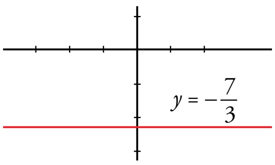
Ejercicios resueltos

1. ***Dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a la recta de ecuación $3y + 7 = 0$. Representarla.***

$3y + 7 = 0 \;\rightarrow\; y = -\dfrac{7}{3}$

Vectores paralelos: $(1, 0), (2, 0), (-1, 0), \dots$

Vectores perpendiculares: $(0, 1), (0, 2), (0, -1), \dots$

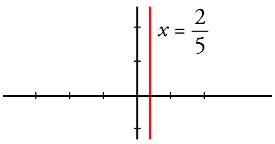


2. ***Representar la recta $5x - 2 = 0$ y dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a ella.***

$5x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{5}$

Vectores paralelos: $(0, 1), (0, 2), (0, -1), \dots$

Vectores perpendiculares: $(1, 0), (2, 0), (-1, 0), \dots$

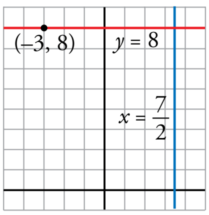


3. ***Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a $2x - 7 = 0$, que pasa por $(-3, 8)$.***

$2x - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta r es paralela al eje X: $y = k$.

Como r pasa por $(-3, 8)$, su ecuación es $y = 8$.



Piensa y practica

1. Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a ellas:

r: $5x - 7 = 0$ $\qquad$ s: $3 + 4y = 0$

2. Las rectas r y s pasan por el punto $(5, -3)$. r es paralela a $5y + 17 = 0$, y s es perpendicular a ella.

Representa r y s y da sus ecuaciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

6 Posiciones relativas de dos rectas

Gráficamente, dos rectas pueden cortarse o no. Si no se cortan, son paralelas.

Pero si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones, es posible que se dé un tercer caso: que sean la misma recta y, al mostrar distinto aspecto algebraico, no se aprecie a simple vista.

Para averiguar la posición relativa de dos rectas dadas por sus ecuaciones, se resuelve el sistema formado por ellas.

Ejercicio resuelto

Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r: $5x - 4y + 10 = 0$

s: $y = 2x + 1$

b) r pasa por $(2, -1)$ y $(8, 2)$.

s pasa por $(2, 5)$ y su pendiente es -1.

c) r pasa por $(3, 8)$ y $(8, 3)$.

s: $x + y = 11$

d) r pasa por $(2, 4)$ y $(4, 7)$.

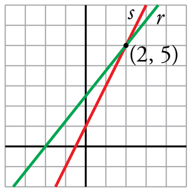
s: $y = \frac{3}{2}x - 2$

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 10 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \to 5x - 4(2x + 1) + 10 = 0 \to$

$\to 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \to -3x + 6 = 0 \to x = 2$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \to y = 5$

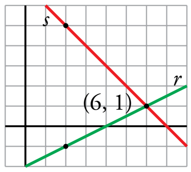
Las rectas se cortan en el punto $(2, 5)$.



b) Un vector dirección de r es $(8, 2) - (2, -1) = (6, 3) \parallel (2, 1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = 1/2$.

r: $y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \to y = \frac{1}{2}x - 2$

s: $y = -(x - 2) + 5$



$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene el punto de corte, $(6, 1)$.

c) Un vector dirección de r es $(8, 3) - (3, 8) = (5, -5) \parallel (1, -1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = -1$.

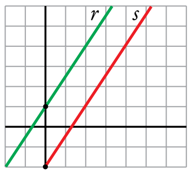
r: $y = 8 - (x - 3) \to y = -x + 11 \to x + y = 11$

r y s son la misma recta.

d) Un vector dirección de r es $(4, 7) - (2, 4) = (2, 3)$. Pendiente, $m = 3/2$.

r: $y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \to y = \frac{3}{2}x + 1$

r es paralela a s porque tienen la misma pendiente, $3/2$, pero distintas ordenadas en el origen: 1 y -2, respectivamente.



Piensa y practica

1. Di la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r: $8x + 2y - 14 = 0$, s: $5x - y - 20 = 0$

b) r: $3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por $(1, -2)$ y por $(10, 1)$.

c) r: pasa por $(-1, 4)$ y $(7, -2)$.

s: $3x + 4y = 0$

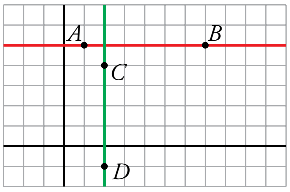
d) r: pasa por $(2, -1)$ y $(8, 2)$.

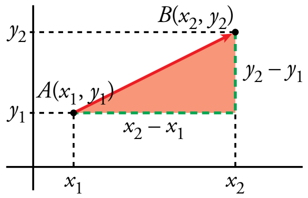
s: su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por $(0, -2)$.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Distancia entre dos puntos





Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$$dist(A, B) = 6; \quad dist(C, D) = 5 \quad \text{(basta con contar cuadritos)}$$

O bien, mediante sus coordenadas: $dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$

$$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$$

Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada.

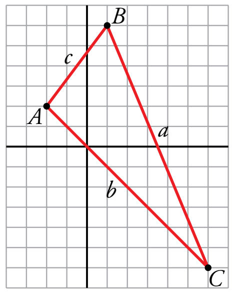
Ejercicios resueltos

1. ***Calcular los lados del triángulo de vértices A(–2, 2), B(1, 6), C(6, –6).***

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6-1)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(6+2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}31$



2. ***a) Hallar las longitudes de los lados del cuadrilátero cuyos vértices son A(2, 1), B(4, 6), C(–1, 4) y D(–3, –1).***

b) Probar que es un rombo.

c) Calcular su área.

a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1-4)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

b) Comparamos las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (2, 1) = (2, 5)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC} = (-1, 4) - (-3, -1) = (2, 5)$

El cuadrilátero tiene los lados iguales y paralelos dos a dos. Es un rombo.

c) Calculamos su diagonales:

$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$; $d' = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{(4+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{98}$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot d'}{2} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{98}}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ u}^2$$

Piensa y practica

1. Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ $\quad$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ $\quad$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

2. Aplica el teorema de Pitágoras para comprobar que el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(5, 6)$ es rectángulo. ¿Es también isósceles?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

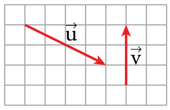
Practica

Vectores y puntos

1. Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2. Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?

3. a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

4. Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

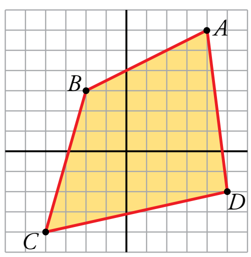
b) Calcula las coordenadas de este vector:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

5. a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla los puntos medios de AC y de BD.

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.

6. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.



7. Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

8. Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

Rectas

9. Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

10. Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

11. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $(2, -1)$ b) $(-1, -3)$ c) $(2, 0)$

12. Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

13. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

14. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

15. Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

16. Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Distancias

17. Calcula, en cada caso, la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

18. a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

19. Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

20. Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo.

Aplica lo aprendido

21. Averigua el valor de k para que se cumpla:

$$\left(\frac{6}{5}, -2\right) = k(-3, 5)$$

22. Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$.

23. Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique: $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.

24. Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

25. Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

26. Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

27. Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:

a) r: $2x + 7 = 0$ b) r: $-y + 4 = 0$

28. Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

29. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

30. Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

31. Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

Autoevaluación

1. Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.

2. Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

3. Comprueba si los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, 6)$ están alineados.

4. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

5. Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$

6. Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1$$

7. Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$3x + 8y - 7 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 2y - 31 = 0$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

9 Estadística

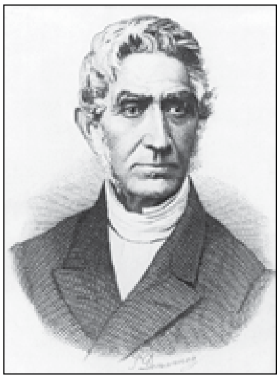
Origen y evolución de la estadística como ciencia

En el desarrollo histórico de la estadística se pueden distinguir tres grandes etapas.

Censos. Desde la Antigüedad y hasta el siglo XVI, solo se realizan recogidas de datos y, a lo sumo, una exposición ordenada y clara de estos.

Análisis de datos. Abarca los siglos XVII, XVIII y XIX. Se supera lo meramente descriptivo y los datos pasan a ser analizados científicamente con el fin de extraer conclusiones.

Se suele considerar que esta etapa comienza con los trabajos de **John Graunt** (s. XVII), quien utilizó archivos parroquiales para realizar un profundo estudio de los nacimientos y las defunciones en Londres durante 30 años: anotó el sexo de cada nacido, las enfermedades de los fallecidos y otras muchas variables. Con ello pudo extraer conclusiones válidas para el futuro e inauguró, así, la estadística demográfica.

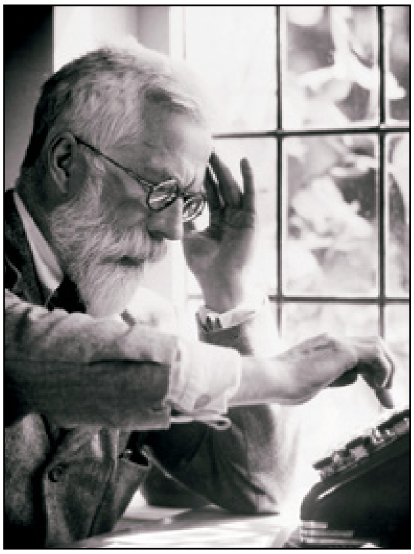


Adolphe Quetelet (1796-1874). Matemático belga considerado uno de los padres de la estadística moderna.

Estatua en honor de Florence Nightingale (1820-1910), en Londres. Estadística y enfermera británica, pionera en el uso de gráficos, que contribuyó decisivamente con sus estudios estadísticos a la mejora de la sanidad.

Hicieron aportaciones destacadas a esta ciencia **Neumann** (s. XVII), cuyos métodos sirvieron de base para elaborar las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros, y **Quetelet** (s. XIX), que fue el primero que se valió de la probabilidad para aplicar la estadística a las Ciencias Sociales.

Estadística inferencial. Se inicia a finales del siglo XIX. La esencia de esta rama de la estadística es que a partir de una muestra se extraen conclusiones válidas para toda una población. Para ello, se echa mano de la alta matemática. Son figuras destacadas en este campo **Ronald Fisher** y **Karl Pearson.**



Ronald Fisher (1890-1962), biólogo y matemático, aplicó métodos estadísticos al diseño de experimentos científicos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Estadística. Nociones generales

La estadística tiene por objeto el desarrollo de técnicas para el conocimiento numérico de un conjunto de datos empíricos (recogidos mediante experimentos o encuestas).

Recordemos las nociones básicas, algunas de ellas adquiridas hace años, necesarias para entender la estadística.

Ejemplo

En una determinada diputación se quieren estudiar algunas características de los 2 537 pueblos que la componen. Para ello, toman los datos de 300 de ellos.

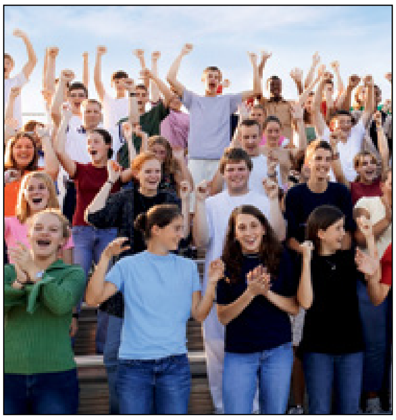
Población: los 2 537 pueblos.

Individuo: cada uno de los pueblos.

Muestra: los 300 pueblos que se estudian.

- **Población** es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento nos interesa y que serán objeto de nuestro estudio.

  Por ejemplo, una población puede ser los 1 580 estudiantes matriculados en un centro de estudios.



- **Individuo** es cada uno de los elementos que forman la población.

  En el caso del centro de estudios, cada estudiante es un individuo.

- **Muestra** es un subconjunto extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

  Siguiendo con el ejemplo anterior, una muestra puede ser un grupo significativo de 50 estudiantes.

- **Caracteres** son los aspectos que deseamos estudiar en los individuos de una población. Cada carácter puede tomar distintos valores.

  De los estudiantes podríamos analizar algunos caracteres como la edad, la altura, el peso, el color de pelo, cómo llegan al centro (medio de transporte), número de personas que viven en su casa, preferencias de lectura…

- **Variable estadística** es aquella que recorre todos los valores de un cierto carácter. Esta puede ser:

  — **Cuantitativa,** si toma valores numéricos.

  – **Discreta:** solo toma valores aislados.

  – **Continua:** puede tomar cualquier valor de un intervalo.

  — **Cualitativa,** si toma valores no numéricos.

  El número de personas que viven en casa toma valores cuantitativos discretos. La edad, la altura y el peso toman valores cuantitativos continuos. El color de pelo y el medio de transporte para llegar al centro toman valores cualitativos.

La **estadística descriptiva** expone y analiza algunos caracteres de los individuos de un grupo dado (población) sin extraer conclusiones para un grupo mayor.

La **estadística inferencial,** por el contrario, trabaja con muestras y pretende, a partir de ellas, "inferir" características de toda la población.

Ejemplo de estadística inferencial

Una editorial realiza una encuesta a 387 estudiantes de una universidad sobre sus preferencias de lectura, con el fin de extraer consecuencias válidas para todos. Esto es estadística inferencial, pues a partir de una muestra, se desea obtener información sobre algún aspecto de la población. Es decir:

Se estudia el comportamiento de una variable en una MUESTRA.

⬇

Se INFIERE el comportamiento de esa variable en la POBLACIÓN.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Tablas de frecuencias

Tablas con datos aislados

Tras la recogida de datos, la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso. Cuando la variable toma pocos valores, la elaboración de la tabla es sumamente sencilla. No hay más que hacer el recuento de los resultados.

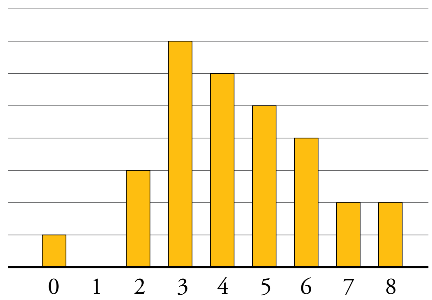
Ejemplo

A los estudiantes de una clase se les ha preguntado por el número de primos que tienen. Estos son los resultados:

5	3	2	6	4	3	6	5	8	2	4	6	3	2	0
4	3	7	5	4	3	3	6	7	5	4	8	5	4	3

Elaboramos una tabla en la que se muestra ordenadamente cada valor de la variable (número de primos) con su correspondiente frecuencia. La representamos mediante un diagrama de barras.

x_i	f_i
0	1
1	0
2	3
3	7
4	6
5	5
6	4
7	2
8	2



En la web
Recuerda: diagramas de barras e histogramas.

Tablas con datos agrupados

Cuando en una distribución estadística la variable es continua, o bien cuando, siendo discreta, el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene elaborar una tabla de frecuencias agrupándolos en intervalos.

Los siguientes son algunos ejemplos en los que es preferible agrupar los datos en intervalos:

- Alturas, pesos, grosores, contornos, áreas, volúmenes, tiempos y, en general, las medidas físicas. Estas son variables continuas, por lo que toman cualquier valor dentro de un intervalo.
- El número de coches que pasan cierto día por cada calle de un barrio; el número de libros consultados en una biblioteca por los usuarios; el número de páginas que tienen los libros de una biblioteca… son medidas discretas que conviene agruparlas como continuas por la cantidad tan elevada de valores distintos que toman.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

En la web

Refuerza la elaboración de tablas de frecuencias.

■ Elaboración de una tabla con datos agrupados en intervalos

Para elaborar una tabla con datos agrupados, conviene dar los siguientes pasos:

1. Se localizan los valores extremos, a y b, y se halla su diferencia, $r = b - a$ (recorrido).
2. Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen. El número de intervalos no debe ser inferior a 6 ni superior a 15.
3. Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que el recorrido, r, y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que estos tengan una longitud entera.
4. Se forman los intervalos, de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo mayor que b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, conviene que los extremos de los intervalos tengan una cifra decimal más que los datos.

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase.** Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.

La tabla de frecuencias del margen puede corresponder a:

— Una distribución de datos aislados que toma los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$.

— Una distribución de datos agrupados en intervalos, siendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ sus marcas de clase.

En el primer caso, la tabla refleja exactamente la distribución real. En el segundo, la tabla es una buena aproximación a la realidad.

Observa

Al elaborar una tabla con datos agrupados se pierde algo de información, pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo. A cambio, se gana en claridad y eficacia.

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
…	…
…	…
…	…
x_n	f_n

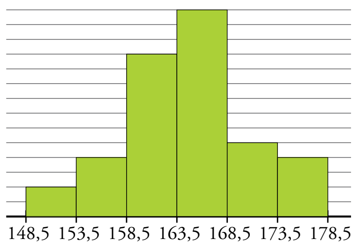
Ejercicio resuelto

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes y representarla en el gráfico correspondiente.

168	*160*	*167*	*175*	*175*
167	*168*	*158*	*149*	*160*
178	*166*	*158*	*163*	*171*
162	*165*	*163*	*156*	*174*
160	*165*	*154*	*163*	*165*
161	*162*	*166*	*163*	*159*
170	*165*	*150*	*167*	*164*
165	*173*	*164*	*169*	*170*

1. Valores extremos: $a = 149$, $b = 178$. Recorrido: $r = 178 - 149 = 29$.
2. Tomaremos solo 6 intervalos. Un múltiplo de 6 mayor que 29 y próximo a él es 30. Longitud de cada intervalo: 5.
3. Formamos los intervalos comenzando por un número algo menor que $a = 149$ y terminando en un número algo mayor que $b = 178$.
4. Repartimos los datos en los intervalos:

INTERVALOS	M. DE CLASE	FRECUENCIA
148,5-153,5	151	2
153,5-158,5	156	4
158,5-163,5	161	11
163,5-168,5	166	14
168,5-173,5	171	5
173,5-178,5	176	4



Piensa y practica

1. Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

2. Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

Recordemos cómo se obtienen los parámetros a partir de una tabla, ya sea con datos aislados o con datos agrupados en intervalos. En este último caso, recurrimos a las marcas de clase para calcular los parámetros.

PUNTUACIONES EN UN TEST

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	12	0
1	31	31
2	86	172
3	92	276
4	48	192
5	19	95
	288	766

■ **MEDIA:** $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ $\quad \Sigma f_i x_i \rightarrow$ suma de todos los datos; $\Sigma f_i = N \rightarrow$ n.º total de individuos

Por ejemplo, en la distribución que tenemos en el margen:

$\Sigma f_i = 288$. Hay 288 individuos (que han realizado el test).

$\Sigma f_i x_i = 766$. Es la suma de las puntuaciones de todos los individuos.

La media es $\bar{x} = 766/288 = 2{,}66$.

■ **VARIANZA:** $Var = \dfrac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$ o bien $Var = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Las dos expresiones coinciden (consulta la demostración en la web).

— En la primera de ellas, se ve claro el significado de la varianza: promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media.

— La segunda es más cómoda para realizar los cálculos.

Utilizamos la segunda fórmula para obtener la varianza a partir de esta tabla:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	31	31	31
2	86	172	344
3	92	276	828
4	48	192	768
5	19	95	475
	288	766	2 446

$$Var = \frac{2\,446}{288} - 2{,}66^2 = 1{,}42$$

■ **DESVIACIÓN TÍPICA:** $\sigma = \sqrt{varianza}$

La desviación típica es un parámetro más razonable que la varianza, pues se expresa en la misma magnitud que los datos y que la media (por ejemplo, si los datos vienen en centímetros, la desviación típica viene en centímetros; sin embargo, la varianza se daría en centímetros cuadrados).

En el ejemplo: $\sigma = \sqrt{1,42} = 1{,}19$

■ **COEFICIENTE DE VARIACIÓN:** $C.V. = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de poblaciones heterogéneas, pues indica la *variación relativa.*

En el ejemplo: $C.V. = \dfrac{1,19}{2,66} = 0{,}447$. O bien 44,7 %.

¿Para qué sirven los parámetros?

Los parámetros estadísticos resumen la información que se da en una tabla.

¿Por qué conviene resumirla?

Si un profesor desea ver cómo van los estudiantes de una clase, en la tabla de resultados lo tiene muy claro. Pero si el director del centro quiere comparar unas clases con otras, en diversas asignaturas, incluso con los resultados de otros años… hay demasiada información. Es necesario resumirla. Para eso están los parámetros.

La media, $\bar{x}$, y la desviación típica, σ, se complementan. Ambas, conjuntamente, aportan una visión bastante buena de la distribución correspondiente.

En la web

- Ampliación: demostración de que las dos expresiones dadas para la varianza coinciden.
- HOJA DE CÁLCULO: aplicación para confeccionar tablas de frecuencias, representar el gráfico correspondiente y calcular $\bar{x}$, σ y C.V.

En la web

- Interpretación de la media.
- Interpretación de la desviación típica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicio resuelto

Calcular $\bar{x}$, σ y C.V. en la siguiente distribución:

DISTRIBUCIÓN DE PESOS (en kg)	
INTERVALOS	FRECUENCIAS
42,5-53,5	4
53,5-64,5	19
64,5-75,5	86
75,5-86,5	72
86,5-97,5	41
97,5-108,5	7

Empezamos sustituyendo los intervalos por sus marcas de clase:

$$\frac{42,5+53,5}{2}=48; \quad \frac{53,5+64,5}{2}=59; \quad \ldots; \quad \frac{97,5+108,5}{2}=103$$

La tabla queda así:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
48	4	192	9 216
59	19	1 121	66 139
70	86	6 020	421 400
81	72	5 832	472 392
92	41	3 772	347 024
103	7	721	74 263
	229	17 658	1 390 434

$N = \Sigma f_i = 229$

$\Sigma f_i x_i = 17\,658$

$\Sigma f_i x_i^2 = 1\,390\,434$

Los números de la 3.ª columna, $f_i x_i$, se obtienen multiplicando los números de las columnas anteriores $(x_i \cdot f_i = f_i x_i)$. Por ejemplo, 59 · 19 = 1 121.

Análogamente, los de la 4.ª columna se obtienen multiplicando los de la 1.ª por los de la 3.ª $(x_i \cdot f_i x_i = f_i x_i^2)$. Por ejemplo, 59 · 1 121 = 66 139.

Con las sumas de las columnas de la tabla, obtenemos los parámetros:

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{17\,658}{229} = 77,1$ kg

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,390\,434}{229} - 77,1^2} = 11,2$ kg

COEF. DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11,2}{77,1} = 0,145 = 14,5\,\%$

CON CALCULADORA

1. Preparamos la calculadora para que trabaje en el **MODO SD.**
2. Borramos los datos que pudiera haber acumulados de otras ocasiones: INV AC
3. Introducimos los datos: 48 × 4 DATA; 59 × 19 DATA; …; 103 × 7 DATA
4. Resultados obtenidos:

N.º DE INDIVIDUOS Σf_i	n	→	229
SUMA DE VALORES $\Sigma f_i x_i$	Σx	→	17658
SUMA DE CUADRADOS $\Sigma f_i x_i^2$	Σx^2	→	1390434
MEDIA $\bar{x}$	$\bar{x}$	→	77.10917031
DESV. TÍPICA σ	σ_n	→	11.22230132

En la web

- CALCULADORA: explicación pormenorizada del uso de la calculadora en estadística.
- Refuerza el cálculo de $\bar{x}$, σ y C.V.

Piensa y practica

1. Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 92:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

2. Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 92:

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

En la web

- Interpretación del coeficiente de variación.
- Relaciona un histograma con su media y su desviación típica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Parámetros de posición para datos aislados

¿Qué aportan estos parámetros?

Los parámetros de posición son otra forma de sintetizar la información. Tienen la ventaja de que son muy fáciles de interpretar por los no expertos: con una sencilla explicación todo el mundo entiende que la afirmación "*tu estatura está en el percentil 78*" significa que, en ese colectivo, *de cada 100 hay 78 más bajos que yo y 22 más altos*.

DISTRIBUCIÓN I: 16 individuos

0 1 2 2   4 5 5 5

6 7 7 8   8 9 10 10

16 : 4 = 4 individuos en cada grupo:

4, 4 · 2 = **8**, 4 · 3 = **12**

DISTRIBUCIÓN II: 19 individuos

0 1 2 2 3 4 5 5 5 6

6 7 7 8 8 9 10 10 10

19 : 4 = 4,75 individuos en cada grupo:

4,75, 4,75 · 2 = **9,5**, 4,75 · 3 = **14,25**

↓ ↓ ↓

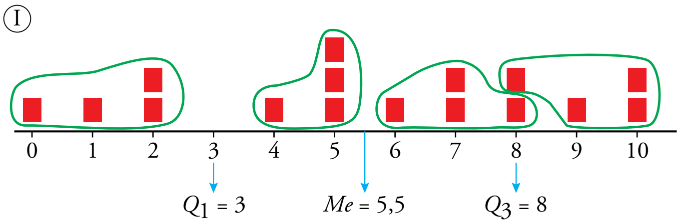
ind. 5.º   ind. 10.º   ind.15.º

Mediana y cuartiles

Si los individuos de una población están colocados en orden creciente según la variable que se estudia y partimos la población en cuatro trozos con el mismo número de individuos, los puntos de separación son los cuartiles y la mediana:

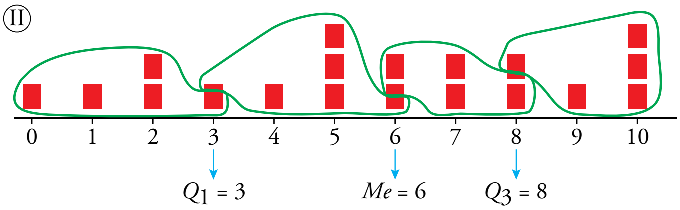
- Q_1 (**primer cuartil**) es el valor de la variable que supera al 25 % de la población y, por tanto, queda por debajo del otro 75 %.
- *Me* (**mediana**) es el valor de la variable que deja el 50 % de la población por debajo y el otro 50 % por encima.
- Q_3 (**tercer cuartil**) supera al 75 % de los individuos. Se llama tercer cuartil porque la mediana es el segundo cuartil.

I



En este caso, es muy fácil partir en 4 trozos iguales.

II



Cada paquete tiene un número fraccionario de individuos.

Observa que los cuartiles (Q_1, *Me*, Q_3) se sitúan en los individuos que "se parten" para que los cuatro paquetes sean iguales.

Ejercicio resuelto

Calcular Me, Q_1 y Q_3 en la distribución:

1 1 2 3 4 4 5 5 5

5 6 7 7 7 8 9 10

Hay 17 individuos. 17/2 = 8,5 → La *Me* es el valor del individuo 9.º, *Me* = 5.

17/4 = 4,25 → (5.º lugar) $Q_1 = 4$

17 · (3/4) = 12,75 → (13.º lugar) $Q_3 = 7$

Piensa y practica

1. Calcula *Me*, Q_1 y Q_3 en la siguiente distribución, cuyos datos están dados ordenadamente:

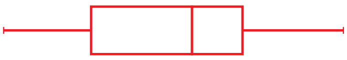
0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5

5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10 10

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

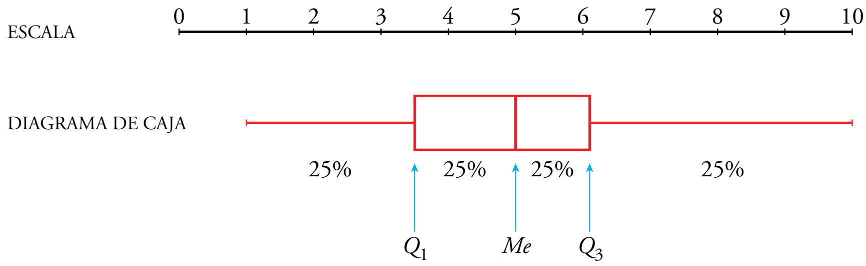
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Diagramas de caja



Este diagrama se llama también de **caja y bigotes.**

Recordemos la forma de representar una distribución estadística teniendo en cuenta las principales medidas de posición:



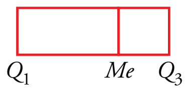
La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— El 50 % de los valores centrales, que se encuentran entre los cuartiles Q_1 y Q_3, se destacan mediante un rectángulo (**caja**). Esta caja se divide en dos partes: el 25 % de los primeros valores centrales está entre Q_1 y Me y el otro 25 %, entre Me y Q_3.

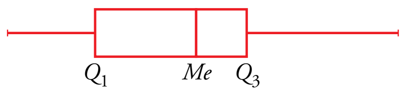
— Los valores extremos (el 25 % de los menores y el 25 % de los mayores) se representa mediante sendos segmentos (**bigotes**).

Los **diagramas de caja** (o caja y bigotes) se construyen del siguiente modo:

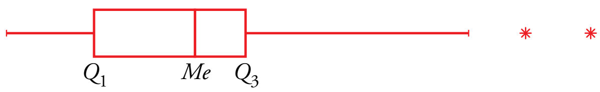
- La caja abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado **recorrido intercuartílico**) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.



- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.



- Si uno o más de los individuos quedaran fuera de esos tramos, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación (1,5 · longitud de la caja) y se añadirían, mediante asteriscos, los individuos en los lugares que les correspondan.



La longitud de la rama derecha es 1,5 veces la de la caja. En ella no están incluidos los dos individuos extremos que aparecen representados mediante asteriscos.

No lo olvides

La longitud de cada una de las ramas laterales (bigotes) no debe ser superior a 1,5 veces la longitud de la caja ($Q_3 - Q_1$). Si hay individuos cuyo valor se aleja de Q_1 o de Q_3 una distancia mayor que esa, se representan mediante puntos sueltos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios resueltos

1. ***Las estaturas de los 40 estudiantes de una clase son, dadas ordenadamente:***

149	*150*	*154*	*156*	*157*
158	*159*	*160*	*160*	*160*
161	*162*	*162*	*163*	*163*
163	*163*	*164*	*165*	*166*
166	*166*	*167*	*167*	*167*
168	*168*	*168*	*169*	*169*
170	*170*	*170*	*171*	*172*
173	*174*	*175*	*175*	*189*

Representar la distribución mediante un diagrama de caja.

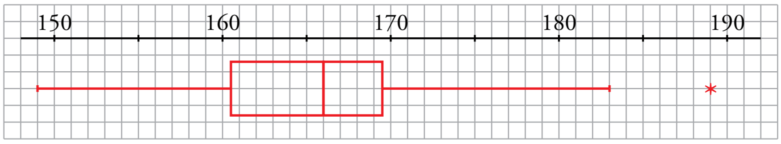
Puesto que el número de individuos es 40, Q_1, Me y Q_3 serán los valores que hay entre los individuos 10.° y 11.°, entre 20.° y 21.° y entre 30.° y 31.°, respectivamente. Es decir:

$$Q_1 = 160{,}5 \qquad Me = 166 \qquad Q_3 = 169{,}5$$

La longitud de la caja es $Q_3 - Q_1 = 169{,}5 - 160{,}5 = 9$.

Una vez y media esta longitud es $1{,}5 \cdot 9 = 13{,}5$.

El altísimo estudiante que mide 189 cm se separa de Q_3, el extremo superior de la caja, $189 - 169{,}5 = 19{,}5$. Esta distancia es mayor que una vez y media la longitud de la caja. Por eso, ponemos a la derecha un bigote de la mayor longitud posible, 13,5, y añadimos un asterisco que señala la situación del individuo excepcional, 189.



2. ***Representar, mediante un diagrama de caja, la siguiente distribución:***

x_i	f_i
0	10
1	20
2	41
3	29
4	14
5	5
6	1

Hay 120 valores, por tanto, Q_1 está entre el 30.° y el 31.°, Me está entre el 60.° y el 61.° y Q_3, entre el 90.° y el 91.°:

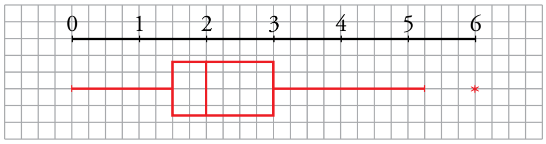
$$Q_1 = 1{,}5 \qquad Me = 2 \qquad Q_3 = 3$$

La caja abarca el intervalo $[Q_1, Q_3] = [1{,}5; 3]$.

La longitud del recorrido intercuartílico es $3 - 1{,}5 = 1{,}5$.

Los segmentos del bigote han de medir, como mucho, $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$.

El bigote izquierdo mide menos de 2,25; sin embargo, el derecho, de 2,25, no abarca al elemento mayor (una familia con 6 hijos), ya que $Q_3 + 2{,}25 = 5{,}25$. Lo representamos mediante un asterisco.



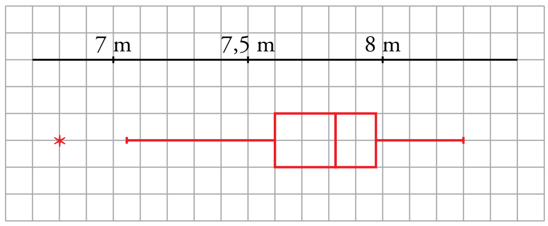
En la web Representación de diagramas de caja.

Piensa y practica

1. Haz el diagrama de caja correspondiente a esta distribución de notas:

x_i	f_i
1	6
2	15
3	22
4	24
5	33
6	53
7	22
8	16
9	8
10	1

2. Interpreta el siguiente diagrama de caja y bigotes relativo a las marcas de algunos saltadores de longitud:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Tablas de frecuencias

1. El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:

0	3	1	2	0	2	1	3	0	4
0	1	1	4	3	5	3	2	4	1
5	0	2	1	0	0	0	0	2	1
2	1	0	0	3	0	5	3	2	1

Di cuál es la variable y de qué tipo es.

Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

2. En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,3	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos desde 1,65 hasta 4,05.

Media, desviación típica y C.V.

3. Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en estas distribuciones:

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

4. Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.

Parámetros de posición para datos aislados

5. La altura, en centímetros, de un grupo de estudiantes de una misma clase es:

150	169	171	172	172	175	181
182	183	177	179	176	184	158

Halla la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

6. Halla la mediana y los cuartiles de cada una de las siguientes distribuciones correspondientes al número de respuestas correctas en un test realizado por dos grupos de estudiantes:

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Diagramas de caja

7. Las puntuaciones obtenidas por 87 personas tienen los siguientes parámetros de posición: $Q_1 = 4{,}1$; $Me = 5{,}1$ y $Q_3 = 6{,}8$. Todas las puntuaciones están en el intervalo 1 a 9. Haz el diagrama de caja.

8. En una clase de 38 estudiantes de Primaria, las estaturas de 35 de ellos están comprendidas entre 153 cm y 179 cm. Los tres restantes miden 150 cm, 151 cm y 183 cm. Sabemos que $Q_1 = 163$; $Me = 166$ y $Q_3 = 170$.

Representa los datos en un diagrama de caja.

9. Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

a) La del ejercicio 5.

b) La A y la B del ejercicio 6.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Aplica lo aprendido

10. Deseamos hacer una tabla de datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 188.

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

11. En un bloque de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia":

0 1 2 3 1   1 1 3 1 2
0 1 1 1 4   1 0 1 3 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Dibuja el diagrama de caja.

12. El número de personas que acudieron cada día a las clases de natación de una piscina municipal fueron:

38 31 54 47 50   56 52 48 55 60
58 46 47 55 60   53 43 52 46 55
43 60 45 48 40   56 54 48 39 50
53 59 48 39 48

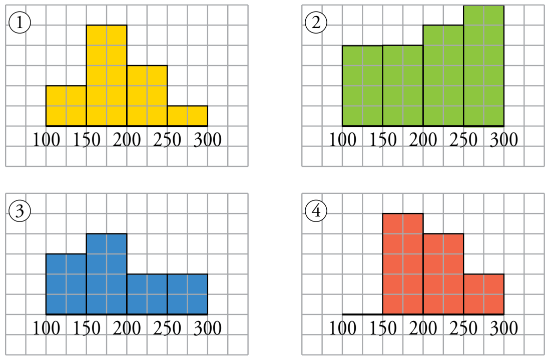
a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en 7 intervalos de amplitud 5 empezando por 28,5.

b) Calcula $\bar{x}$, σ y C.V.

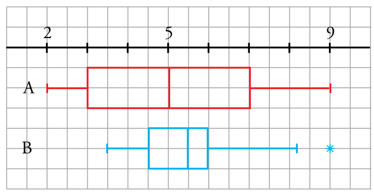
13. Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas:

DIETA	A	B	C	D
$\bar{x}$	211,4	188,6	209,2	188,6
σ	37,5	52,6	56,3	43,1

Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.



14. Las notas en un test de dos clases numerosas vienen reflejadas en estos diagramas de caja:



a) ¿Cuál de las clases es más homogénea?

b) ¿En cuál ha aprobado la mitad de la clase?

c) ¿En qué clase las notas del 25 % de los estudiantes difieren en medio punto o menos?

Autoevaluación

1. Edad de los visitantes de una exposición:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75]
N.° DE VIS.	63	95	189	243	175	105

a) Representa los datos en un gráfico adecuado.

b) Halla $\bar{x}$, σ y C.V.

2. Los beneficios, en millones de euros, de dos empresas en seis años consecutivos han sido los siguientes:

A	5,9	2,5	7,4	8,1	4,8	3,7
B	4,5	3,8	5,7	3,5	5,5	4,6

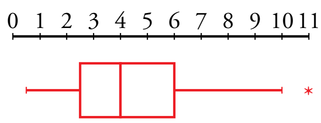
¿Cuál tiene mayor variación?

3. Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

0 0 1 1 1   1 1 1 1 1   2 2 2 2 2   2 2 2 2 2
2 2 2 2 2   2 2 2 3 3   3 3 3 3 4   4 4 4 6 8

Haz el correspondiente diagrama de caja.

4. Indica por qué el diagrama de caja siguiente es incorrecto:



© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10 Distribuciones bidimensionales

Qué es una distribución bidimensional

Un grupo de biólogos están estudiando una población de flamencos. Para ello, toman medidas de algunas de sus características anatómicas.

Si miden sus envergaduras (distancia entre los extremos de las dos alas extendidas), el conjunto de resultados es una distribución estadística de una variable (unidimensional). También es unidimensional la distribución de sus pesos.

Pero si atienden conjuntamente a ambas variables (envergadura y peso), se obtiene una **distribución bidimensional.** El grado de relación que existe entre ambas variables se llama **correlación.**

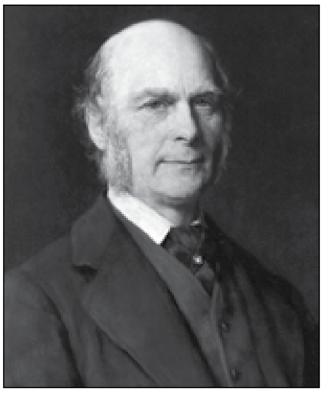
Galton (1822-1911)

Las nociones relativas a las distribuciones bidimensionales surgen de estudios realizados en Biología.

Aunque hay antecedentes interesantes, se puede considerar que el comienzo del estudio conjunto de dos variables se produce con **Francis Galton,** el cual, a instancias de su primo Charles Darwin, se interesó por la influencia que algunas características de los padres pudieran tener sobre las de los hijos.

No consideró que fuera factible experimentar con personas y carecía de datos suficientes para extraer conclusiones relativas a ellas. Por eso recurrió a la experimentación con guisantes (¡como **Mendel**!). En sus conclusiones acuñó el término **regresión.** El índice de correlación le sirvió para describir similitudes debidas al parentesco.

Fue consciente de que sus descubrimientos podían aplicarse a un amplio campo de problemas relativos a distintas ciencias.



Francis Galton (1822-1911).

Karl Pearson (1857-1936).

Pearson (1857-1936)

El continuador del trabajo de Galton fue **Karl Pearson,** quien por primera vez considera y describe el significado del coeficiente de correlación negativo. Diseñó y puso en práctica métodos matemáticos rigurosos con los que se pudo utilizar la correlación para inferir valores de una variable a partir de los de la otra. También extendió el estudio de la correlación a más de dos variables.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Dos variables relacionadas. Correlación

ESTUDIANTES	NOTA EN M	NOTA EN F
a	7	6
b	6	4
c	8	7
d	3	4
e	6	5
f	9	6
g	4	2
h	10	9
i	2	1
j	5	6

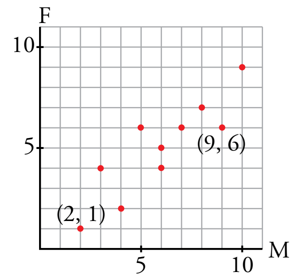
A la izquierda tienes las notas de diez estudiantes $(a, b, c\dots)$ de una clase en dos asignaturas: matemáticas (M) y física (F).

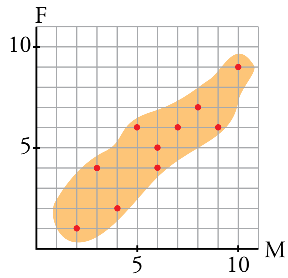
Hay dos variables. Cada individuo tiene, por tanto, dos valores asociados: su nota en M y su nota en F. Por eso se trata de una *distribución bidimensional.*

Nube de puntos

Si representamos a cada estudiante mediante un punto cuyas coordenadas son sus respectivas notas en M y en F, obtendremos la gráfica adjunta, llamada *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

El punto (9, 6), por ejemplo, corresponde al estudiante f, y el (2, 1), al i.

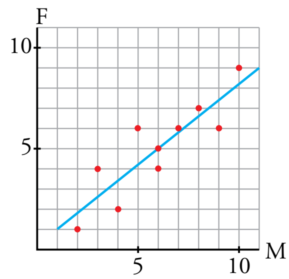




Correlación

Observando las notas de estos estudiantes, apreciamos una clara relación entre ellas: a notas bajas en una asignatura le corresponden, casi siempre, notas bajas en la otra; y otro tanto ocurre con las notas medias o altas.

Como consecuencia de esto, los puntos de la nube están en una franja estrecha. Diremos que hay *correlación* entre las dos variables.



Recta de regresión

Podemos trazar, a ojo, una recta que se amolde a la nube de puntos, como la que aparece en la gráfica de la izquierda.

Se llama *recta de regresión* y marca la tendencia de la nube.

En resumen:

- Si a cada uno de los individuos de un colectivo le asignamos dos valores, correspondientes a dos variables x e y, tenemos una **distribución bidimensional.** La representación gráfica de la distribución da lugar a un conjunto de puntos llamado **nube de puntos** o **diagrama de dispersión.**
- Cuando existe una cierta relación estadística entre los valores de la distribución, se dice que hay **correlación** entre las variables. Esta correlación se aprecia porque la nube de puntos es relativamente estrecha y, en tal caso, se puede trazar una recta que se amolda a ella. Se llama **recta de regresión.**

Piensa y practica

1. Identifica los restantes puntos del diagrama de dispersión del ejemplo de las notas en matemáticas y en física.

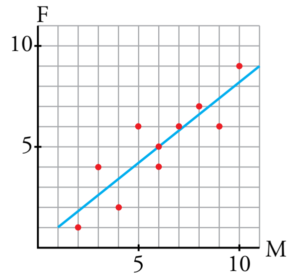
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

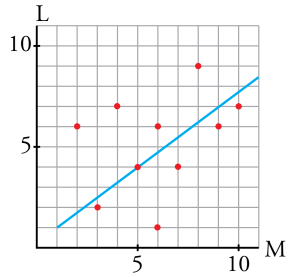
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

ESTUDIANTES	NOTA EN M	NOTA EN L
a	7	4
b	6	6
c	8	9
d	3	2
e	6	1
f	9	6
g	4	7
h	10	7
i	2	6
j	5	4

La correlación puede ser más o menos fuerte

Veamos otra distribución bidimensional: las notas de los mismos diez estudiantes (*a*, *b*, *c*…) en matemáticas, M, y en la asignatura de lengua, L. Y vamos a comparar la nube de puntos de esta distribución bidimensional M-L con la que hemos visto en la página anterior, M-F.

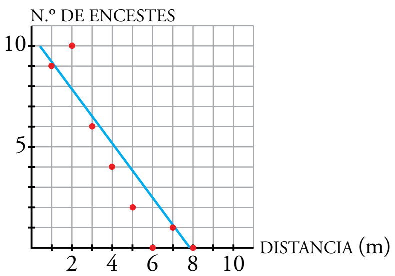




Es evidente que la correlación entre M y F es más fuerte que la correlación entre M y L, pues en la primera, los puntos están más apretados en torno a la recta de regresión que en la segunda.

La correlación entre dos variables puede ser más o menos fuerte según que los puntos de la nube estén más o menos próximos a la recta de regresión.

La correlación admite signo

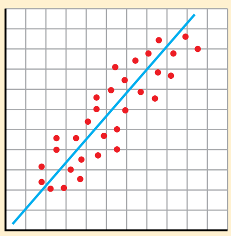


Una jugadora de baloncesto hace 10 lanzamientos a canasta desde una distancia de 1 m, otros 10 desde 2 m, y así sucesivamente hasta 8 m. En cada caso ha tomado nota del número de encestes. Al observar, en el margen, la nube de puntos, vemos que la correlación es fuerte pero negativa, pues a más distancia, menos encestes.

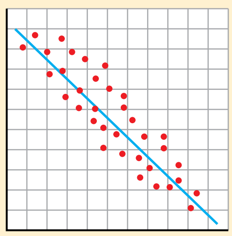
DISTANCIA (en m)	N.º DE ENCESTES
1	9
2	10
3	6
4	4
5	2
6	0
7	1
8	0

Una **correlación** es **positiva** cuando al aumentar una variable, x, tiende a aumentar la otra variable, y.

Una **correlación** es **negativa** cuando al aumentar x, tiende a disminuir y.



CORRELACIÓN POSITIVA



CORRELACIÓN NEGATIVA

El signo de la correlación coincide con el signo de la pendiente de la recta de regresión.

En la web

Diagramas de dispersión con diferentes grados de correlación.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicio resuelto

Esta es la tabla de los 15 primeros clasificados en una liga de fútbol:

POS	J	G	E	P	F	C	PTOS
1. B. Senior	34	22	5	7	59	37	71
2. Dinamo	34	20	9	5	53	30	69
3. Kurgans	34	20	8	6	62	28	68
4. Colme	34	17	8	9	53	47	59
5. Roco	34	17	4	13	45	40	55
6. Malas	34	14	9	11	43	35	51
7. Leones	34	12	11	11	50	41	47
8. Rayos	34	13	8	13	42	43	47
9. Culebras	34	11	11	12	41	35	44
10. Mursi	34	12	8	14	45	47	44
11. Ramones	34	10	13	11	42	44	43
12. Mates	34	10	12	12	42	38	42
13. Potenkin	34	11	8	15	34	47	41
14. Azurro	34	11	7	16	44	60	40
15. Tigres	34	11	6	17	30	44	39

Las distintas columnas significan:

Pos. *Posición final: 1.º, 2.º, 3.º…*

J. *Partidos jugados*

G. *Partidos ganados*

E. *Partidos empatados*

P. *Partidos perdidos*

F. *Total de goles marcados (a favor)*

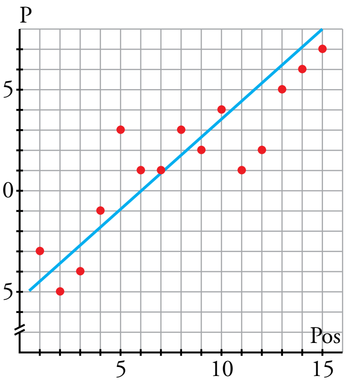
C. *Total de goles recibidos (en contra)*

Ptos. *Puntos*

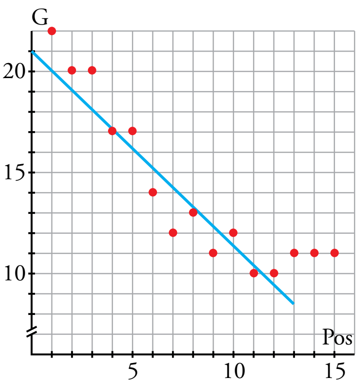
Analizar las siguientes distribuciones bidimensionales, representarlas y cuando la correlación sea fuerte, trazar la recta de regresión:

a) Pos-P   b) Pos-G   c) Pos-E

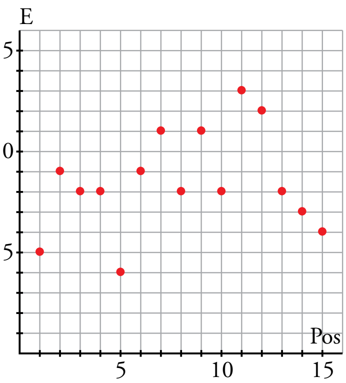
a) Si relacionamos la posición (Pos) con el número de partidos perdidos (P), es lógico que haya correlación positiva (cuanto más arriba en la tabla, 1.º, 2.º, 3.º…, menos partidos se han perdido). Al representarla, apreciamos en la nube de puntos una **correlación positiva fuerte.**



b) Al relacionar la posición (Pos) con los partidos ganados (G), se encuentra una **correlación negativa** (cuanto más abajo está en la tabla un equipo, …13.º, 14.º, 15.º, menos partidos ha ganado).



c) Entre la posición y los partidos empatados **no se aprecia correlación.** Lo mismo empatan pocos o muchos partidos los de arriba, los de abajo o los de en medio.



Piensa y practica

2. En cada una de las siguientes distribuciones bidimensionales, intenta, sin representarla, estimar si la correlación va a ser positiva o negativa, fuerte o débil. Luego, represéntala mediante la nube de puntos, trazando la recta de regresión, y corrobora o modifica tus estimaciones.

a) G - F   b) Pos - F

c) F - C   d) Pos - Ptos

3. Busca, en un periódico o en Internet, una tabla como la anterior, de actualidad, y estudia distribuciones como las que hemos visto en esta página.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 El valor de la correlación

Al igual que para la media $(\bar{x})$ o para la desviación típica (σ), también hay una fórmula para hallar el valor de la correlación de una distribución bidimensional a partir de los datos de la tabla. En este curso no la vamos a hallar mediante la fórmula ni vamos a aprender a obtenerla con calculadora, pero sí vamos a familiarizarnos con la gama de valores que puede tomar.

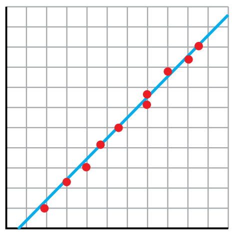
En la web

Ampliación teórica: explicación y cálculo del coeficiente de correlación.

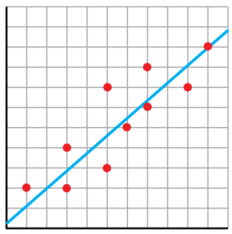
> El valor de la correlación se denomina **coeficiente de correlación** y se designa con la letra r.

El mayor valor de r se da cuando los puntos están alineados (relación funcional). En tal caso, el valor de r es 1 o –1, según sea positiva o negativa. Por tanto, los valores que puede tomar r oscilan entre –1 y 1.

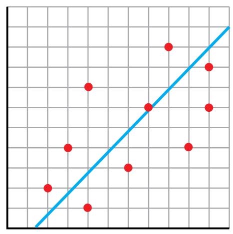
Observa las siguientes nubes de puntos y en cada una de ellas fíjate en la relación entre el valor de r y lo “apretados” o “separados” que se encuentran los puntos respecto a su recta de regresión.



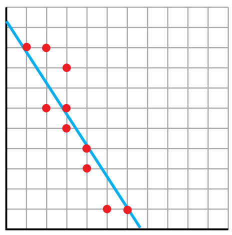
$r = 0,99$



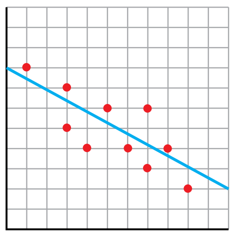
$r = 0,86$



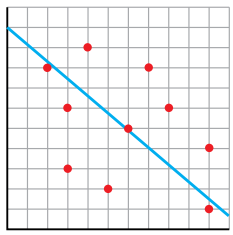
$r = 0,59$



$r = –0,92$



$r = –0,77$



$r = –0,41$

Correlación y pendiente

¡Atención! En una nube de puntos, el valor de la pendiente de la recta de regresión (1, 1/3, –1/2, –2) no tiene nada que ver con el valor de la correlación. Solo nos fijamos en el signo de la pendiente (positivo o negativo).

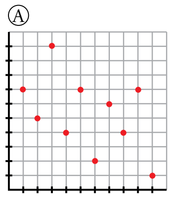
Piensa y practica

1. Los siguientes números son los valores absolutos de los coeficientes de correlación, r, de las distribuciones bidimensionales representadas a la derecha:

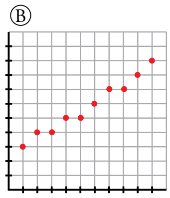
0,75 0,47 0,92 0,97

Asigna a cada cual la suya, cambiando el signo cuando convenga.

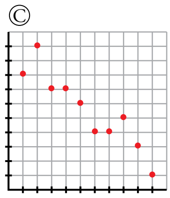
Ⓐ



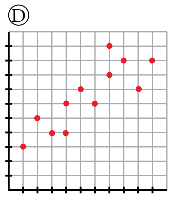
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicio resuelto

Esta tabla muestra algunas características socioeconómicas de 10 países:

Pa	Po	Ex	RPC	IP	Me
A	316	9,8	56	15,1	5,6
B	202	8,5	12	21,4	1,9
C	127	0,38	38	16	2,3
D	121	2	16	13	2,1
E	92	0,33	44	11,3	4,9
F	64	0,64	43	7,9	4,2
G	61	0,3	35	6	3,8
H	38	0,3	14,4	10,6	2,2
I	14	1,3	2	48	0,04
J	4	1	2,2	40	0,13

Las columnas significan:

Pa. *País*

Po. *Población (en millones de personas)*

Ex. *Extensión (en millones de km²)*

RPC. *Renta per cápita (en miles de $)*

IP. *Índice de pobreza (en %)*

Me. *N.º de médicos por 1 000 habitantes*

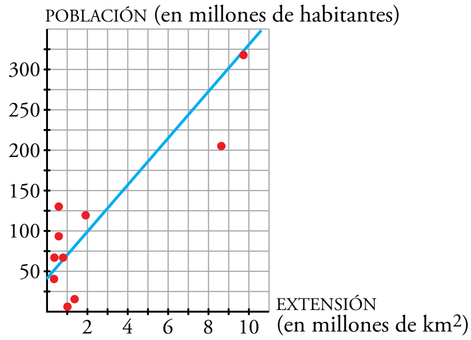
Analizar las distribuciones siguientes:

- **Ex - Po**
- **RCP - IP**
- **RCP - ME**

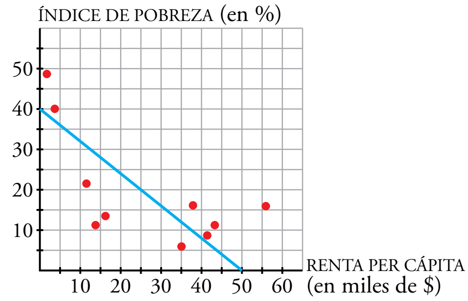
Sabiendo que las correlaciones son, no respectivamente, –0,68; 0,94 y 0,87, estimar cuál corresponde a cada una de ellas.

Es claro que a países más grandes suelen corresponderles poblaciones más numerosas, es decir, la correlación es positiva.

Si Australia estuviera en esta lista, se alejaría mucho de la recta de regresión, ya que es un país con una densidad de población anormalmente baja.



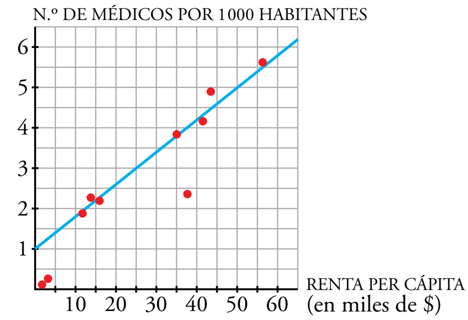
Es razonable que cuanta más renta per cápita tenga un país, menor sea el índice de pobreza, es decir, la correlación es negativa. Sin embargo, hay muchas excepciones, por lo que la correlación no es muy alta en valor absoluto.



La correlación entre la renta per cápita y el número de médicos por cada 1 000 habitantes es positiva y mucho más fuerte.

En este caso se ve más claramente que países mucho más ricos tienen más médicos por cada 1 000 habitantes.

Si Cuba estuviera en la lista se separaría mucho de la recta de regresión y bajaría la correlación, ya que, siendo un país económicamente débil, tiene una proporción muy alta de médicos.



A la vista de las tres gráficas, la correlación correspondiente a la primera (Ex - Po) es 0,87; a la segunda (RPC - IP), –0,68; y a la tercera (RPC - Me), 0,94.

Piensa y practica

2. Representa la nube de puntos y la recta de regresión de la distribución bidimensional IP - Me del ejercicio resuelto anterior.

3. Indica cuál de estos valores se ajusta mejor al valor de la correlación de la distribución del ejercicio 2.

0,5 –0,99 0,82 –0,77 0,99

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 La recta de regresión para hacer estimaciones

En la web
Ampliación teórica: explicación y cálculo de la recta de regresión.

¿Sirve la recta de regresión para estimar el valor de y que le corresponde a un nuevo individuo del que se conoce el valor de x? Por supuesto que podemos hacer la estimación, pero, ¿qué grado de fiabilidad tendremos en ella?

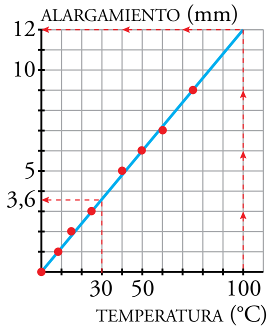
Parece razonable pensar que cuanto más fuerte sea la correlación, más fiable será la estimación, pero, ¿influyen otros factores? Antes de extraer conclusiones definitivas, veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1

La longitud de un raíl de vía de tren a 0 °C es de 10 m. La tabla del margen nos muestra los alargamientos, A (en mm), a distintas temperaturas, T (en °C).

T	0	8	15	25	40	50	60	75
A	0	1	2	3	5	6	7	9

A partir de los datos de la tabla, nos preguntamos por el alargamiento que se obtendría para temperaturas de 30 °C y 100 °C.



Lo primero que hacemos es representar los datos en una nube de puntos. Observamos en el margen que se ajustan casi exactamente a una recta, recta de regresión trazada en azul. Por lo que damos por cierto que el coeficiente de correlación es muy próximo a 1.

Obtenemos la ecuación de la recta de regresión. Como pasa por (0, 0) y (50, 6), su ecuación es $y = \frac{6}{50}x \to y = 0{,}12x$.

Para 30 °C obtenemos $\hat{y}(30) = 3{,}6$ mm, y para 100 °C, $\hat{y}(100) = 12$ mm. Ambas estimaciones pueden ser muy fiables, sobre todo la primera, ya que el valor de la temperatura está en el tramo de los valores controlados. En la segunda estimación la temperatura está fuera del intervalo de valores, pero poco alejada.

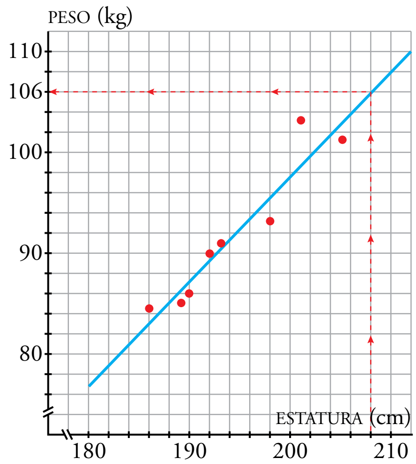
Ejemplo 2

E	***P***
186	85
189	85
190	86
192	90
193	91
198	93
201	102
205	101

Las estaturas, E (en cm), y los pesos, P (en kg), de 8 jugadores de baloncesto vienen dados en la tabla del margen.

Queremos estimar, mediante la recta de regresión, el peso de un nuevo fichaje cuya altura es de 208 cm. Para ello, representamos los datos y la recta de regresión y hallamos gráficamente el peso que corresponde a 208 cm:

$$\hat{y}(208) = 106$$



En este caso, la correlación no es tan alta como en el anterior, por ello, sería más prudente que dijéramos que el peso que corresponde a 208 cm es relativamente próximo a 106; por ejemplo, entre 102 kg y 110 kg.

Piensa y practica

1. Estima, con los datos del ejemplo 1, el alargamiento correspondiente a una temperatura de 45 ºC. ¿Consideras fiable la estimación?

2. Estima, con los datos del ejemplo 2, el peso de un nuevo jugador cuya estatura sea de 180 cm. ¿Consideras fiable la estimación?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

1. Para cada uno de los siguientes casos:

— Di si se trata de una distribución bidimensional.

— Indica cuáles son las variables que se relacionan.

— Indica si se trata de una relación funcional o de una relación estadística.

a) Tamaño de la vivienda - Gasto en calefacción.

b) Número de personas que viven en una casa - Litros de agua consumidos en un mes.

c) Metros cúbicos de gas consumidos en una casa - Coste del recibo del gas.

d) Longitud de un palmo en un alumno - Número de calzado que usa.

e) Número de médicos por cada mil habitantes - Índice de mortalidad infantil.

f) Velocidad con que se lanza una pelota hacia arriba - Altura que alcanza.

2. En cada uno de los apartados del ejercicio anterior, estima si la correlación será positiva o negativa, fuerte o débil.

3. Estos son los resultados que hemos obtenido al tallar y pesar a varias personas:

ESTATURA (cm)	156	163	171	177	184
PESO (kg)	48	75	65	73	81

a) ¿Es una distribución bidimensional? ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuáles son los individuos?

b) Representa la nube de puntos.

c) ¿Es una relación estadística o funcional?

4. Las estaturas de 10 chicas (x_i) y las de sus respectivas madres (y_i) son:

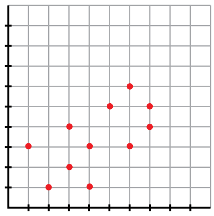
x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

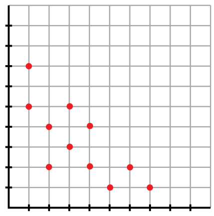
Representa los valores sobre papel cuadriculado mediante una nube de puntos, traza a ojo la recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.

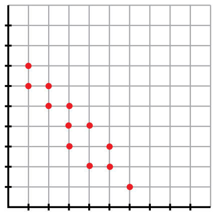
5. Representa la nube de puntos de la siguiente distribución y estima cuál de estos tres puede ser su coeficiente de correlación: $r = 0{,}98$; $r = -0{,}51$; $r = 0{,}57$.

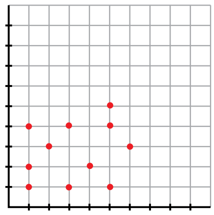
x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

6. Los números 0,2; –0,9; –0,7 y 0,6 corresponden a los coeficientes de correlación de las siguientes distribuciones bidimensionales. Asigna a cada gráfica el suyo:

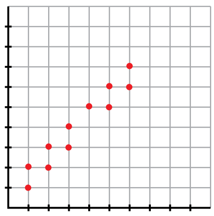
a) 

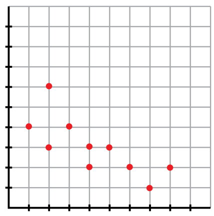
b) 

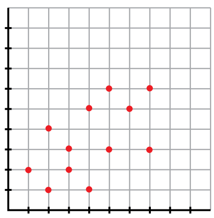
c) 

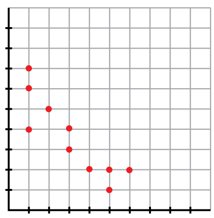
d) 

7. Los coeficientes de correlación de estas distribuciones bidimensionales son, en valor absoluto: 0,55; 0,75; 0,87 y 0,96. Asigna a cada una el suyo, cambiando el signo cuando proceda:

a) 

b) 

c) 

d) 

8. Traza la recta de regresión de las distribuciones a) y c) del ejercicio anterior y estima, en cada una de ellas, los valores que corresponden a $x = 0$ y a $x = 10$. ¿En cuál son más fiables las estimaciones?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

9. Se ha hecho un estudio con ratones para ver los aumentos de peso (en g) mensuales que producen ciertas sustancias A, B y C (en mg diarios):

SUSTANCIA	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES A	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES B	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES C
1	3	2	3
2	1	2	3
3	3	1	2
4	5	3	0
5	6	0	1
6	4	3	–1
7	6	4	1
8	5	1	–2
9	7	3	–4
10	7	1	–2

Los resultados negativos quieren decir que en lugar de aumentar, el peso disminuye.

a) Representa la nube de puntos de cada distribución.

b) Indica si cada correlación es positiva o negativa.

c) Ordena las correlaciones de menos a más fuerte.

10. La correlación entre las temperaturas medias mensuales de una ciudad española y el tiempo que sus habitantes dedican a ver la televisión es de –0,89. ¿Te parece razonable este valor? Explica su significado.

11. Observa la siguiente tabla (2015):

	ESPERANZA DE VIDA AL NACER (en años)	MORTALIDAD INFANTIL POR 1000
ARGENTINA	76	13
BOLIVIA	67	43
BRASIL	72	23
COLOMBIA	74	19
CHILE	77	7
ECUADOR	73	20
PARAGUAY	73	31
PERÚ	72	19
URUGUAY	76	13
VENEZUELA	75	16

a) Representa la nube de puntos y di si la correlación que observas es positiva o negativa, fuerte o débil.

b) ¿Cuál de los siguientes valores será el coeficiente de correlación? –0,99; 0,5; 0,94; –0,92; 0,8

12. Se ha medido cada uno de los días de una semana la temperatura máxima, T, y el número de horas de sol, S, obteniéndose los siguientes resultados:

S	7	10	0	6	11	12	11
T	12	14	7	10	15	20	18

a) Traza a ojo la recta de regresión T-S.

b) Si el lunes siguiente a la medición hubo 9 horas de sol, ¿qué temperatura máxima cabe esperar que hiciera? ¿Qué fiabilidad tiene tu predicción?

Autoevaluación

1. Di en qué casos la correlación es positiva, en cuáles es negativa y en cuáles no ves correlación:

a) Altura de una persona - Tamaño de su perro.

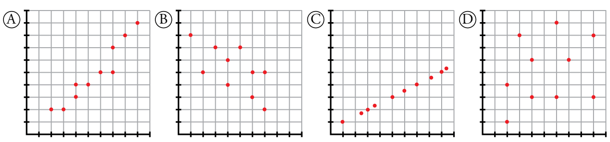
b) Distancia de un viaje de avión - Precio del billete.

c) Latitud de un lugar del hemisferio norte - Temperaturas medias anuales.

d) Altura - Presión atmosférica.

2. Asocia cada nube de puntos con una correlación:

$r = 1$ $\quad r = –0,83$ $\quad r = 0,97$ $\quad r = 0,18$



3. Se han anotado a final de curso las notas de inglés y de francés de 10 estudiantes de ESO:

I	6	3	5	6	5	8	10	4	9	7
F	6	4	6	5	7	7	9	5	10	7

a) Representa los datos en una nube de puntos. Traza a ojo su correspondiente recta de regresión.

b) ¿Qué coeficiente de correlación le corresponde?

$r = 0,99$ $\quad r = –0,86$ $\quad r = 0,88$ $\quad r = 0,63$

4. Sabiendo que la recta de regresión correspondiente a la actividad anterior tiene como ecuación $y = 1 + 0,85x$, estima qué nota obtendrán en francés 3 nuevos estudiantes cuyas notas en inglés fueron 1; 6,5 y 9,5.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

11 Combinatoria

Cómo surge la combinatoria

La combinatoria tiene como objetivo averiguar, a partir de un conjunto finito de objetos, cuántas agrupaciones hay que cumplan ciertas condiciones.

La primera obra impresa donde aparecen problemas de combinatoria es *Summa*, escrita por **Luca Paccioli** en 1494.

Blaise Pascal (1623-1662).

Primera página de la edición de 1523 de "Summa", de Luca Paccioli.

La combinatoria empezó a fraguarse como ciencia paralelamente a la probabilidad y, por tanto, estuvo ligada a los juegos. Aunque fue **Tartaglia** (algebrista italiano del s. XVI) uno de los pioneros, esta ciencia recibió el mayor impulso a partir de la correspondencia mantenida por los franceses **Pascal** y **Fermat** (s. XVII) sobre situaciones de azar inspiradas en las mesas de juego. Los problemas probabilísticos que de ahí surgen se resuelven mediante un enfoque combinatorio.

Época de afianzamiento

Bernoulli (s. XVIII) dedicó, en su *Arte de la conjetura,* algunos capítulos a asentar la teoría de la combinatoria, básica para el cálculo de probabilidades.

El término *combinatoria*, tal como lo usamos actualmente, fue introducido por el alemán **Leibniz.**

Euler (s. XVIII) enriqueció la combinatoria con nuevas líneas de trabajo. Una de ellas, *los grafos,* comenzó su andadura con la resolución del reto de *los puentes de Königsberg* (páginas finales de esta unidad).

Antiguo plano de la ciudad de Königsberg, donde se ven sus siete puentes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 En qué consiste la combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con un determinado criterio. Veamos algunos ejemplos:

1. *Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias distintas puede elegir?*

Cada *camiseta* puede ponerse con cada *pantalón*. Por tanto, el número de *indumentarias* es $4 \times 6 = 24$.

2. *Cuatro amigos,* A, B, C, D, *diseñan un campeonato de pimpón, todos contra todos, a un vuelta. ¿Cuántos partidos se han de jugar?*

A - B   B - C   C - D   En total, 6 partidos.

A - C   B - D

A - D

3. *¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro de color verde?*

Cada resultado del dado rojo se puede emparejar con cada uno de los del dado verde. Por tanto, habrá $6 \times 6 = 36$ resultados.

4. *¿De cuántas formas se pueden sentar 3 amigos* P, Q, R, *en un banco que tiene tres lugares — — —?*

Hagámoslas:

P Q R   P R Q   Q P R   Q R P   R P Q   R Q P

Hay seis formas distintas.

Piensa y practica

1. Irene, además de 4 pantalones y 6 camisetas, tiene 3 gorras.

¿Cuántas indumentarias de pantalón-camiseta-gorra puede llevar?

2. ¿Cuántos partidos han de jugar 5 amigos, A, B, C, D, E, para completar un campeonato de pimpón, todos contra todos, a una vuelta?

3. Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

4. En una carrera compiten 4 corredores, P, Q, R, S, y se entregan dos copas: una grande al campeón y otra pequeña al segundo. ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 El diagrama en árbol

Como has podido ver en el apartado anterior, para resolver un problema de combinatoria es fundamental tener muy claro cuáles son las condiciones de las agrupaciones buscadas y proceder con orden y sistema a su formación o a su recuento. Para esta forma de proceder, es sumamente útil el diagrama en árbol. Veamos en qué consiste mediante algunos ejemplos:

QUINIELA	
Mallorca – Deportivo	❑
Betis – Albacete	❑

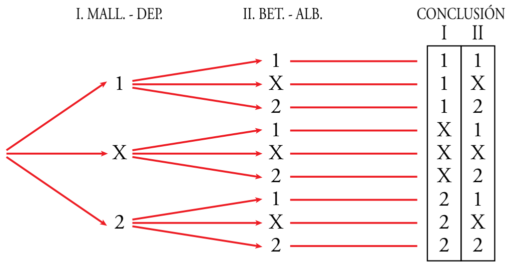
- **Ejemplo 1.** *Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Se confecciona una quiniela con los dos partidos.*

  En cada casillero hay que poner 1, X o 2. Para ganar, hay que acertar los dos resultados.

  a) ¿Cuántas quinielas hay que rellenar para tener la seguridad de ganar?

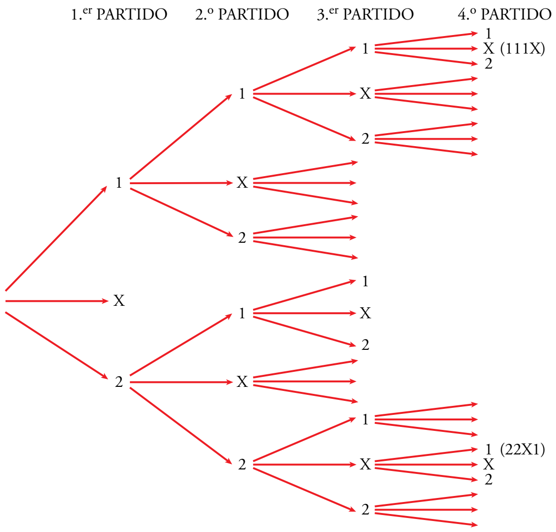
  b) ¿Cuántas quinielas habría que haber hecho la semana anterior para acertar los cuatro partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?

  a): ¿Cuántas quinielas hay que hacer para acertar los dos partidos?



Tres posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan para acertar el otro partido.

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ quinielas}$$



El **diagrama en árbol** tiene la ventaja de que permite pensar, paso a paso, en este tipo de problemas en los que las distintas posibilidades se van multiplicando.

Antes de dar cada paso, nos cuestionaremos a cuántas ramas da lugar la nueva situación en la que nos encontramos.

Resolvamos el apartado **b).**

En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores.

El número de quinielas posibles es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

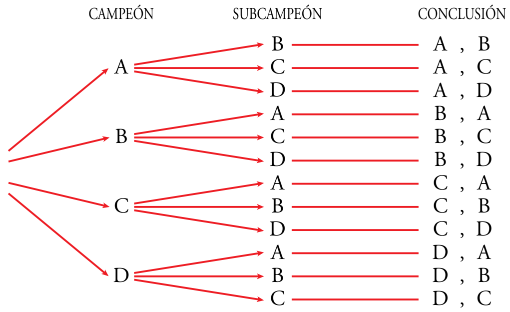
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

- **Ejemplo 2.** *Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.*

  a) ¿De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?

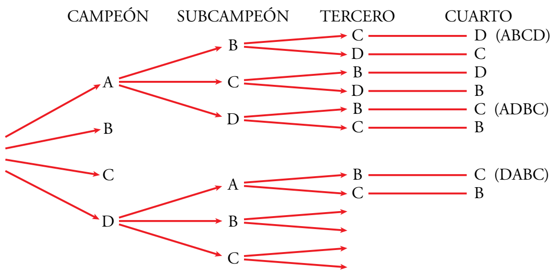
  b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

  a): ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos trofeos?



Hay cuatro posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón.

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ posibilidades}$$



b): ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

Hay 4 posibles campeones, pero, una vez fijado el campeón, solo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1.° y al 2.°, solo quedan 2 aspirantes para el 3.^{er} lugar. Conocidos los 1.°, 2.° y 3.°, para el 4.° lugar solo queda un candidato.

El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Con el **diagrama en árbol** se puede pensar paso a paso y permite ver cuáles son las distintas posibilidades que se dan en cada uno de esos pasos.

Si en lugar de pormenorizar todas las posibilidades solo queremos contarlas, podremos dejar el árbol incompleto o, incluso, simplemente imaginarlo:

¿Cuántas flechas hay que poner en primer lugar? ¿Cuántas salen de cada uno de esos resultados?…

Ejercicio resuelto

¿De cuántas formas se pueden repartir 3 medallas entre las 12 participantes de una carrera?

1.^{er} lugar: 12.

2.° lugar: Por cada una de las anteriores 11.

3.^{er} lugar: Por cada una de las anteriores 10.

Total: $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ posibilidades

Piensa y practica

1. Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: “Escoged cada uno el libro que queráis de estos”, y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

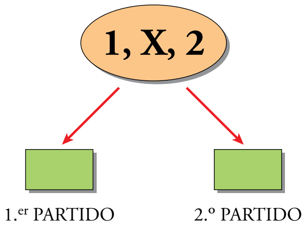
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Variaciones y permutaciones (importa el orden)

Muchos de los problemas que se han resuelto en el apartado anterior tienen aspectos comunes. Los clasificaremos en modelos que podemos tratar teóricamente, es decir, de forma general.

Variaciones con repetición



Vamos a recuperar un problema, resuelto antes, para que nos sirva de modelo.

- *Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos?*

  Disponemos de tres signos, 1, X, 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, puede repetirse). El número de posibilidades es $3 \cdot 3 = 3^2$.

- *¿Y para acertar cuatro partidos?*

  Con los tres signos, 1, X, 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados.

  El número de posibilidades es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$.

Variaciones con repetición

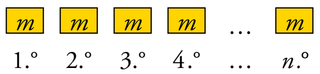
- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de esos elementos.
- Pueden estar repetidos.
- Importa el orden en que se ponen.
- Observa que puede ser $n = m$ e, incluso, $n > m$.

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, repetidos o no.

A estas agrupaciones se las llama **variaciones con repetición** de m elementos tomados n a n. Al número de ellas se le designa por $VR_{m,\,n}$ (o bien VR_m^n).

$$VR_{m,\,n} = m^n$$

Justificación de la fórmula



En el primer lugar podemos situar cualquiera de los m elementos. En el 2.º lugar, también, sin importar cuál es el que ocupa el 1.º. Y así sucesivamente, cada lugar puede ser ocupado por cualquiera de los m elementos sin importar cuáles son los que ocupan los lugares anteriores. Por tanto, el número de posibilidades es $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (n factores) $= m^n$.

Piensa y practica

Resuelve cada enunciado de dos formas:

a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

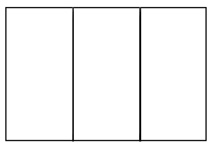
b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?

2. Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números.

¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

3. Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas.



¿Cuántas banderas salen?

NOTAS:

1. Cada franja de la bandera hay que llenarla con un solo color.
2. Dos o las tres franjas se pueden pintar del mismo color.
3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Variaciones ordinarias

- *¿De cuántas formas pueden obtener los puestos 1.° y 2.° los cuatro participantes en un torneo?*

  Disponemos de cuatro elementos, A, B, C, D. Para el 1.^{er} lugar, hay 4 opciones. Una vez fijado el primero, para el 2.° lugar, quedan 3 opciones (no hay repetición, ya que el que queda 1.° no puede quedar 2.°).

  El número de posibilidades es $4 \cdot 3 = 12$.

- *¿De cuántas formas se pueden repartir las 3 medallas los 8 finalistas de una carrera?*

  Disponemos de 8 elementos. Hemos de clasificar, ordenadamente, a 3.

  Para el 1.^{er} lugar, hay 8 posibilidades. Fijado el 1.°, hay 7 posibles segundos puestos. Fijados el 1.° y el 2.°, hay 6 posibles terceros puestos.

  Número de posibilidades: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, sin que se repita ninguno. A estas agrupaciones se las llama **variaciones ordinarias,** o simplemente, **variaciones** de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$. Al número de ellas se le designa por $V_{m,\,n}$ (o bien V_m^n).

$$V_{m,\,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots}_{n \text{ factores decrecientes}}$$

Variaciones ordinarias

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos. Obviamente, $n \le m$.
- No pueden repetirse.
- Importa el orden en que se ponen.

m	$m-1$	$m-2$	…	$m-n+1$
1.°	2.°	3.°	…	n.°

En la web

Técnicas de conteo con variaciones y permutaciones.

Permutaciones

- *¿De cuántas formas pueden quedar clasificados los cuatro participantes en un torneo?*

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ formas}$$

- *¿Y los ocho finalistas olímpicos en una carrera?*

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Las distintas formas en que se pueden ordenar los $\boldsymbol{m}$ elementos de un conjunto se llaman **permutaciones.** Su número se designa por P_m (se lee "permutaciones de m elementos") y es igual al número de variaciones de m elementos tomados m a m.

$$P_m = V_{m,\,m} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Permutaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se toman los m.
- No pueden repetirse.
- Lo único que importa es el orden.

A este número se le llama $\boldsymbol{m}$ **factorial** y se escribe $\boldsymbol{m!}$

Por ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

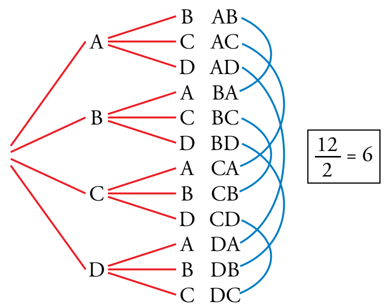
Piensa y practica

4. Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Cuando no influye el orden. Combinaciones



Cada partido está dos veces.

Empecemos poniendo algunos ejemplos que nos sirvan de referencia.

- *Cuatro amigos juegan un campeonato de pimpón por el sistema de liga (todos contra todos) a una sola vuelta. ¿Cuántos partidos jugaron?*

  Si utilizamos un diagrama en árbol para contar el número de partidos, obtendremos $4 \cdot 3 = 12$, pero nos encontraremos con que aparecerá cada partido dos veces: AB y BA, AC y CA, CD y DC…

  Por tanto, el número total de partidos reales se obtiene dividiendo por 2.

  La respuesta es $\frac{12}{2} = 6$.

- *Diez antiguos amigos se citan en un lugar a cierta hora. Al encontrarse, ¿cuántos apretones de manos se dan?*

  Si influyera el orden (A saluda a B, B saluda a A), entonces habría $10 \cdot 9 = 90$ saludos. Como no influye el orden, cada saludo se ha considerado dos veces.

  Por tanto, el número de apretones de mano es $90 : 2 = 45$.

- *En una carrera con 8 corredores se clasifican para la final los tres primeros. ¿De cuántas formas puede efectuarse la clasificación?*

  Si influyera el orden, ¿de cuántas formas distintas pueden asignarse los tres primeros puestos?

  La respuesta es $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

  Teniendo en cuenta que no influye el orden, ¿cuántas veces hemos contado la clasificación de los mismos individuos?

  ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

  Seis formas, tantas como permutaciones de 3 elementos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

  Por tanto, el número de posibles clasificaciones es $336 : 6 = 56$.

La estrategia que se ha utilizado en estos tres problemas es la misma:

Hemos reinterpretado el enunciado como si el orden en que se seleccionan los elementos sí influyera. Después, hemos averiguado el número de veces que se ha contado cada uno de los casos que nos interesan, y hemos dividido por él.

Es importante que adquieras destreza con esta estrategia, porque te ayudará a resolver numerosos problemas.

Estrategia

Contar como si influyera el orden y dividir por el número de repeticiones.

En la web

Aplica esta estrategia a otro tipo de problemas.

Piensa y practica

1. En un monte hay 5 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?

2. Vicente quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Combinaciones

Vamos a recuperar algunos problemas resueltos en la página anterior que nos sirvan de modelo para el tratamiento teórico de un nuevo tipo de agrupamiento.

- *¿Cuántos partidos han de jugar 4 amigos si deciden enfrentarse cada uno contra todos los demás?*

  Disponemos de 4 elementos, A, B, C, D. Queremos agruparlos de dos en dos, sin que importe el orden. El número de posibilidades se obtiene contándolas como si importara el orden $(4 \cdot 3)$ y, después, dividiendo por el número de veces que está repetida cada opción.

  Resultado: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

- *¿Cuántos apretones de mano se darán 10 amigos que se encuentran?*

  Análogamente, contamos los saludos como si importara el orden (A saluda a B o B saluda a A). Serían $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9$. Después, dividimos por 2.

  Resultado: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

- *En un colectivo de 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden elegir los 3 representantes que acudirán a una cierta reunión?*

  Aunque no importa el orden en que salgan elegidos, empecemos contándolos como si importara: $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

  Pero como no influye el orden, cada una de las posibles elecciones la hemos contado 6 veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Tantas como formas en que se pueden ordenar estos 3 elementos, es decir: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

  Por tanto, el número de posibles elecciones es: $\frac{V_{10,\,3}}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Generalicemos estos resultados:

Disponemos de m elementos. Se llaman **combinaciones** a las distintas agrupaciones que podemos formar tomando n de ellos, sin que importe el orden en que aparezcan y sin que puedan repetirse. Su número se designa por $C_{m,\,n}$ (o bien C_m^n, y se lee "combinaciones de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$"):

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Cada combinación de n elementos de un conjunto de m es un subconjunto de él. Por eso, $C_{m,\,n}$ puede decirse que es "el número de subconjuntos de n elementos que pueden extraerse de un conjunto de m". En cada subconjunto, un elemento está o no está. No tiene sentido que esté *repetido*.

La palabra "combinación"

La "combinatoria" es el arte de "combinar", es decir, de hacer y contar "combinaciones" entre objetos siguiendo ciertas reglas. En este contexto, la palabra *combinación* puede significar "agrupamiento", "selección con ciertos criterios"… Tiene un *significado amplio*.

Pero, a partir de ahora, la palabra **combinación** adquiere un significado muy preciso: el que le damos en esta página.

Por tanto, en adelante, cuando se hable de "combinaciones", deberás fijarte si se refiere a la expresión de siempre, en sentido amplio, o bien a esta otra tan concreta.

En la web

Técnicas de conteo con combinaciones.

Combinaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos.
- No pueden estar repetidos.
- No importa el orden.

Piensa y practica

3. Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro sobre el mismo plano. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos?

4. ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?
¿Cuántas mezclas de tres colores? ¿Y de cuatro colores?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Formar agrupaciones

1. a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.

b) Haz lo mismo para cuatro bolas de colores distintos.

c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

2. Dos amigas quedan en el polideportivo para jugar al tenis y acuerdan que será vencedora la primera que logre ganar dos sets.

Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido, set a set.

3. Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos distintos se pueden formar?

Escríbelos todos.

4. Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5.

Describe sus fichas.

5. Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.

Utilizar las fórmulas

6. Calcula.

a) $VR_{4,\,3}$ b) $VR_{3,\,4}$ c) $V_{7,\,3}$ d) P_7

e) $C_{6,\,4}$ f) $V_{9,\,5}$ g) $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ h) $C_{10,\,8}$

7. Calcula.

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$ b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$ c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}}$

d) $\dfrac{P_5}{P_3}$ e) $\dfrac{P_{10}}{P_9}$ f) $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

8. Las expresiones $VR_{8,\,2}$; P_8; $V_{8,\,2}$; $C_{8,\,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden.

Asigna a cada apartado su solución:

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario al que se presentan 8 participantes.

9. **Ocho problemas muy parecidos.**

En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es:

¿De cuántas formas se puede hacer?

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y otros 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son:

$$C_6^3,\ P_6,\ VR_6^3,\ 1,\ VR_3^6,\ V_6^3$$

Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

10. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno de ellos pueda llevarse más de una?

11. Para formar un equipo de baloncesto, hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si dos jugadores son indiscutibles, ¿de cuántas formas se puede completar el equipo con los ocho restantes?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

12. Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

13. Un participante de un concurso tiene que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que están escritas las letras de la palabra PREMIO. Si sale la palabra correcta, gana.

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Le ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener con las demás?

14. ¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?

¿Y si el banco es de 3 asientos?

15. Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes. ¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

16. En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas.

¿Cuáles son los posibles resultados?

Aplica lo aprendido

17. El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.

Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

18. Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vencedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?

19. Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

20. En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:

- La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.
- Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

21. Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras. Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto.

¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

22. ¿Qué números podemos formar con dos cincos y tres sietes? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

Autoevaluación

1. Ana y Pepe están jugando un torneo de ajedrez que ganará el primero que venza en 6 partidas. Las tablas (empates) no cuentan.

Pepe va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa todas las posibles continuaciones.

2. En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.

a) ¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

b) Si Carlos tiene claro que elegirá tres de ellos, ¿cuántas posibilidades le quedan para los otros dos?

3. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3?

¿Cuál es la suma de todos ellos?

4. ¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?

5. Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar?

Escríbelas todas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

12 Cálculo de probabilidades

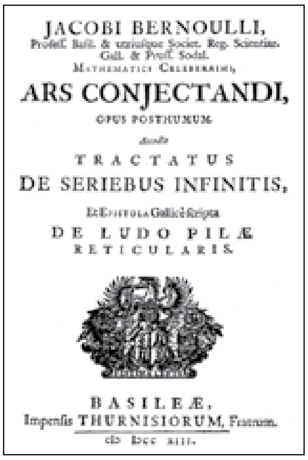
Probabilidad: del juego...

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo XVI, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le llevó a escribir un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo XVII, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1656, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

Christiaan Huygens (1629-1695).



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Primera edición del "Arte de la conjetura" publicada en 1713, ocho años después de la muerte de Jacques Bernoulli (1654-1705).

... a la ciencia

Jacques Bernoulli recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Es suya la siguiente frase:

> *La teoría de las probabilidades es solo*
> *sentido común expresado con números.*

Al comienzo del siglo XX, el ruso **Kolmogorov** elaboró una axiomática de la teoría de la probabilidad, lo que acabó de conferirle la precisión necesaria para ser considerada una rama de las matemáticas.

Pierre Simon Laplace (1749-1827).

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para hallar la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una botella con una composición heterogénea en tamaños y pesos, …), no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces repitamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (🔴, 🟢, 🔵, ⚪ y ⚫) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

$f($🔴$) = 34$, $f($🟢$) = 23$, $f($🔵$) = 21$, $f($⚪$) = 8$, $f($⚫$) = 14$

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

$P[$🔴$] \approx fr($🔴$) = 0{,}34$; $P[$🟢$] \approx fr($🟢$) = 0{,}23$; $P[$🔵$] \approx fr($🔵$) = 0{,}21$;

$P[$⚪$] \approx fr($⚪$) = 0{,}08$; $P[$⚫$] \approx fr($⚫$) = 0{,}14$

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa, botella con bolas homogéneas en tamaños y pesos de la que se extrae una, …), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. ***Lanzamos un dado con forma de dodecaedro regular, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:***	
a) P [8]	a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.
b) P [menor que 3]	b) Solo 1 y 2 son menores que 3 $\rightarrow$ $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
c) P [impar]	c) Hay 6 números impares menores que 12 $\rightarrow$ $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
d) P [número primo]	d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos $\rightarrow$ $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$
e) P [mayor que 4 y menor que 8]	e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2. ***Se han fabricado con un molde varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo averiguaremos la probabilidad de cada cara?***

Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. ***Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.***

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso "la diferencia es mayor que 3".

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.° DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}]$ = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6

4. ***Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades: FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).***

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Dar la probabilidad de cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de "NO FIGURA"?

Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 – P[FIGURA] = 1 – 0,3 = 0,7

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar el cálculo de probabilidades sencillas.

1. Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2. Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones.*

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

$P[< 4]$ $P[\text{no} < 4]$

En la web Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser *dependientes* o *independientes.*

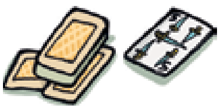
Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

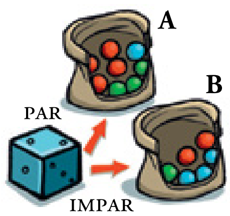
En la web

Actividades para reforzar la distinción entre experiencias dependientes e independientes.

Piensa y practica

1. 

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2. 

Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \dots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \dots$$

Problemas resueltos

1. ***Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:***

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un } 3 \text{ y un } 5] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

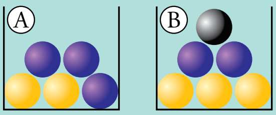
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y} > 2 \text{ en V}] =$

$$= P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
⚁	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
⚂	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
⚃	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
⚄	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
⚅	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. ***Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:***



a) P[🟡 y 🟡]

b) P[🟡 y 🟣]

c) P[🟣 y 🟡]

d) P[una de ellas 🟡 y otra 🟣]

e) P[la segunda ⚫]

a) P[🟡 y 🟡] = P[1.ª 🟡] · P[2.ª 🟡] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) P[🟡 y 🟣] = P[1.ª 🟡] · P[2.ª 🟣] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) P[🟣 y 🟡] = P[1.ª 🟣] · P[2.ª 🟡] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) P[una de ellas 🟡 y otra 🟣] = P[🟡 y 🟣] + P[🟣 y 🟡] = $\frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) P[la 2.ª ⚫] = P[cualquier cosa la 1.ª] · P[la 2.ª ⚫] = $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Piensa y practica

En la web Refuerza el cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

1. Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] d) P[ningún AS]

2. Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3. Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ninguna cara] c) P[alguna cara]

4. Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

En la web Cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa “probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2”.

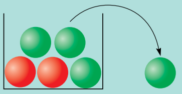
Ejercicio resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

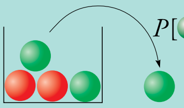
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª, verde.

c) Las dos sean rojas.

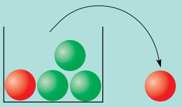


$P[🟢] = \frac{3}{5}$

Si la 1.ª es 🟢



$P[🟢 \text{ en este caso}] = \frac{2}{4}$



Si la 1.ª es 🔴, quedan cuatro: 1 🔴 y 3 🟢

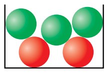
a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

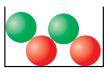
PRIMERA EXTRACCIÓN



$P[🟢] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN



$P[🟢] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. Es decir:

$$P[🟢 \text{ y } 🟢] = P[🟢 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🟢 \text{ la 2.ª} / 🟢 \text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[🔴 \text{ y } 🟢] = P[🔴 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🟢 \text{ la 2.ª} / 🔴 \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

c) $P[🔴 \text{ y } 🔴] = P[🔴 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🔴 \text{ la 2.ª} / 🔴 \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

En la web

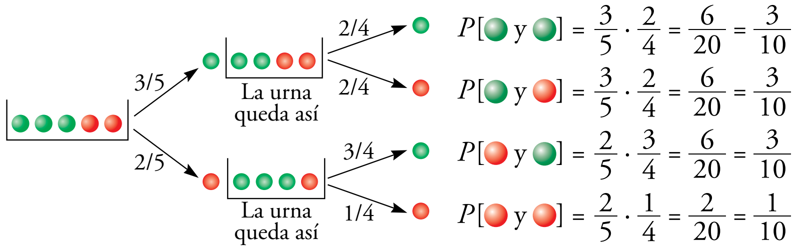
Amplía, con más actividades, el cálculo de probabilidades en experiencias dependientes utilizando diagramas en árbol.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[\;$ en la 1.ª$]$

$\frac{3}{4} = P[\;$ en 2.ª / en 1.ª$]$

Ejercicio resuelto

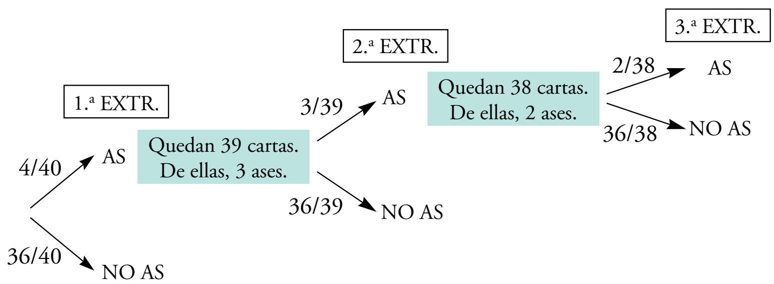
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[$3 ASES$] = P[$AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª$] =$

$= P[$AS en 1.ª$] \cdot P[$AS en 2.ª / AS en 1.ª$] \cdot P[$AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª$] =$

$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[$3 ASES$] = P[$AS y AS y AS$] = P[$AS$] \cdot P[$AS en 2.ª / AS en 1.ª$] \cdot$

$\cdot\, P[$AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª$] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[$AS en 2.ª / AS en 1.ª$] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[$AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª$] = \frac{2}{38}$

En la web: Cálculo de probabilidades en experiencias dependientes.

Piensa y practica

1. Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2. Completa el diagrama en árbol del ejercicio resuelto de esta página y sobre él halla $P[$NINGÚN AS$]$.

3. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4. Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5. Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Cálculo de probabilidades en experiencias simples

1. En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el “gordo”. Calcula:

a) P[menor que 5] b) P[par]

c) P[par o menor que 5] d) P[par y menor que 5]

e) P[mayor o igual que 5] f) P[impar]

g) P[mayor o igual que 5 e impar]

2. Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde. Halla:

a) P[la suma de puntos es 6]

b) P[en uno de los dados ha salido 4]

c) P[en los dados salió el mismo resultado]

d) P[la suma de puntos es 6 o en uno ha salido 4]

e) P[la suma de puntos es 6 y en uno ha salido 4]

3. El dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de puntuaciones. Calcula:

a) P[x es un número primo]

b) P[x es mayor que 4]

c) P[x es un número primo o mayor que 4]

d) P[x es un número primo y mayor que 4]

e) P[x no es primo]

4. Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) rey o as. b) figura y oros. c) no sea espadas.

Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas

5. Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par; B: n.° menor que 4; $A \cap B$.

6. a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

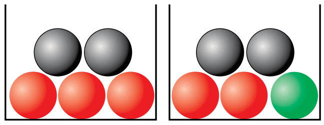
7. Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

8. Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



9. Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula P[2 rojas] y P[2 verdes].

10. En una bolsa hay 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.

11. a) Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de no conseguir “ningún 6”? ¿Y la de conseguir “algún 6”?

b) Responde a las mismas preguntas si lanzamos tres dados.

Aplica lo aprendido

12. Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

13. En una clase hay 12 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos estudiantes de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

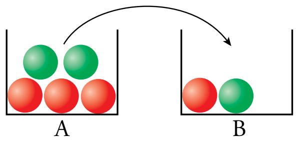
a) Los dos sean chicos. b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

14. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B.



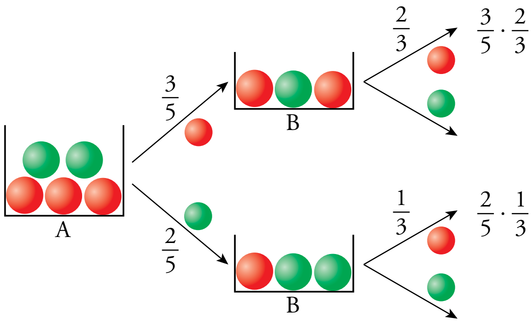
Calcula:

a) P[1.ª roja y 2.ª roja] b) P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] d) P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] f) P[2.ª verde]

e) Ten en cuenta el diagrama.



15. Tiramos dos dados correctos (verde y rojo). Di cuál es la probabilidad de obtener:

a) En los dos, la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

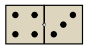
c) En el rojo, mayor puntuación que en el verde.

16. Se extraen dos bolas de una bolsa con 3 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

Resuelve problemas

17. Ana tira un dado y Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?

18. Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?

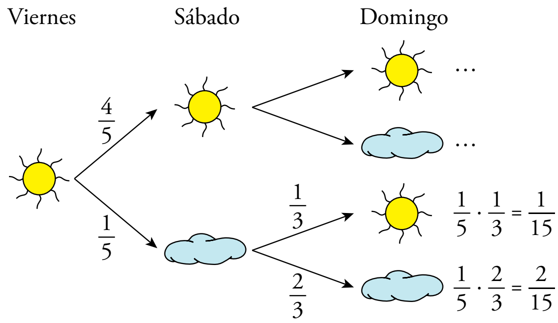
 $4 + 3 = 7$ es primo

19. En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5.

Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo, completa el diagrama en tu cuaderno y razona sobre él:



Autoevaluación

1. Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas. – As de oros.

– Cuatro de bastos. – Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2. Lanzamos una moneda y un dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cruz y cinco?

b) ¿Y la de obtener cara y número par?

3. Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

4. La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.