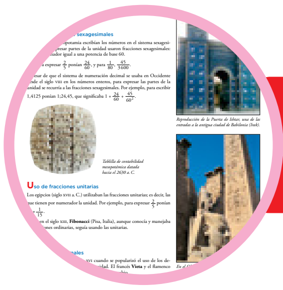
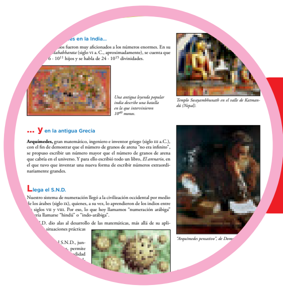
Adaptación curricular

- Unidad 1
- Unidad 2
- Unidad 3
- Unidad 4
- Unidad 5
- Unidad 6
- Unidad 7
- Unidad 8
- Unidad 9
- Unidad 10
- Unidad 11
- Unidad 12
- Unidad 13
- Unidad 14
- Unidad 15

ÍNDICE



1 Fracciones y decimales



2 Potencias y raíces

3 Problemas aritméticos

4 Progresiones

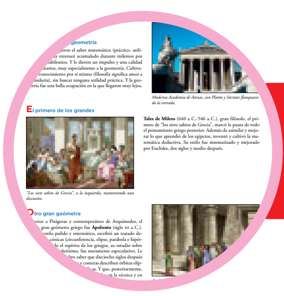
5 El lenguaje algebraico

6 Ecuaciones

7 Sistemas de ecuaciones

8 Funciones y gráficas

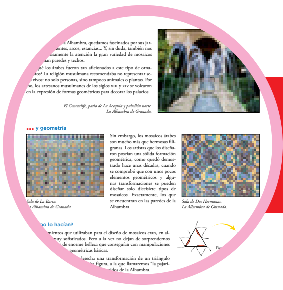
9 Funciones lineales y cuadráticas



10 Problemas métricos en el plano

11 Cuerpos geométricos

Pág. 107



12 Transfor- maciones geométricas

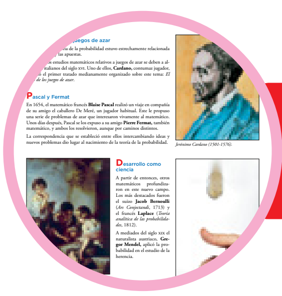
Pág. 119

13 Tablas y gráficos estadísticos

Pág. 129

14 Parámetros estadísticos

Pág. 138



15 Azar y probabilidad

Pág. 148

1 Fracciones y decimales

Uso de fracciones sexagesimales

En la antigua Mesopotamia escribían los números en el sistema sexagesimal. Y para expresar partes de la unidad usaron fracciones sexagesimales: con denominador igual a una potencia de base 60.

Así, para expresar $\frac{2}{5}$ ponían $\frac{24}{60}$, y para $\frac{1}{80}$, $\frac{45}{3\,600}$.

A pesar de que el sistema de numeración decimal se usaba en Occidente desde el siglo VIII en los números enteros, para expresar las partes de la unidad se recurría a las fracciones sexagesimales. Por ejemplo, para escribir 1,4125 ponían 1;24,45, que significaba $1 + \frac{24}{60} + \frac{45}{60^2}$.

Tablilla de contabilidad mesopotámica datada hacia el 2630 a. C.

Reproducción de la Puerta de Ishtar, una de las entradas a la antigua ciudad de Babilonia (Irak).

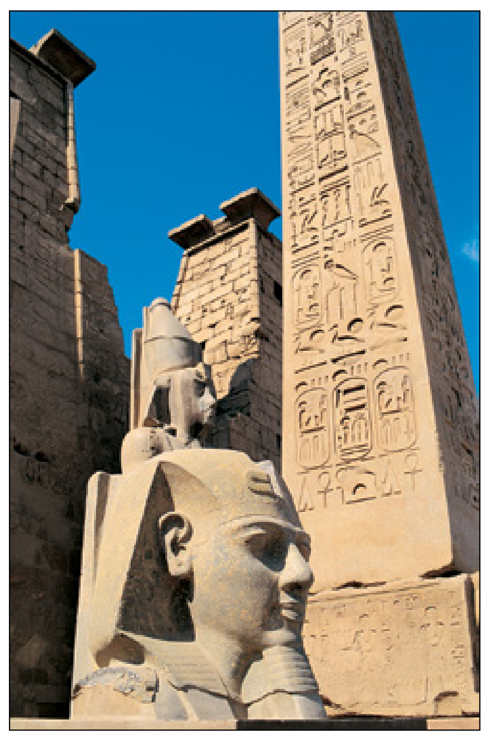
Uso de fracciones unitarias

Los egipcios (siglo XVII a. C.) utilizaban las fracciones unitarias; es decir, las que tienen por numerador la unidad. Por ejemplo, para expresar $\frac{2}{5}$ ponían $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Y aún en el siglo XIII, **Fibonacci** (Pisa, Italia), aunque conocía y manejaba las fracciones ordinarias, seguía usando las unitarias.

Uso de los decimales

No fue hasta finales del siglo XVI cuando se popularizó el uso de los decimales para expresar partes de la unidad. El francés **Vieta** y el flamenco **Stevin** fueron los principales impulsores del cambio.



En el Obelisco de Lúxor (Tebas, Egipto) aparecen representados números egipcios.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Números racionales

Números enteros

Los **números naturales** son, como sabes, 0, 1, 2, 3, …, 10, 11, … Hay infinitos. Al conjunto de todos ellos se le designa por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, \dots\}$$

Los números naturales sirven para contar los elementos de un conjunto. También sirven para ordenarlos: 1.º, 2.º, 3.º, …

Los **números enteros** son los naturales y sus opuestos (los enteros negativos). El conjunto de los números enteros se designa por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Fracciones y números fraccionarios

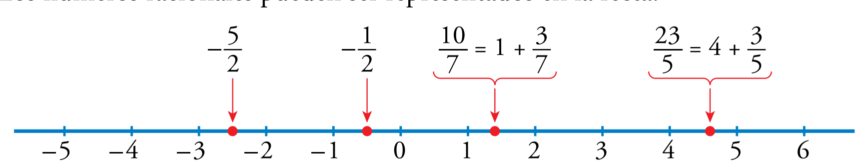
Los números enteros sirven para contar elementos, pero no son buenos para expresar medidas. Para medir, suele ser necesario fraccionar la unidad: la mitad, cuatro terceras partes, siete milésimas… Estas medidas se expresan mediante fracciones: 1/2, 4/3, 7/1 000.

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros. Dicho cociente puede ser entero $\left(\frac{6}{2} = 3, \frac{-12}{3} = -4\right)$, o fraccionario $\left(\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}, \frac{-13}{5} = -2 - \frac{3}{5}\right)$.

Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número entero, y si no lo es, representa un número fraccionario.

A la unión de todos los números enteros y de todos los números fraccionarios se le llama conjunto de **números racionales** y se designa por $\mathbb{Q}$. Los números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Los números racionales pueden ser representados en la recta.



Los números racionales (enteros y fraccionarios) se aglomeran en la recta de tal manera que, entre cada dos de ellos, hay otros infinitos números racionales.

En la web

- Actividades para repasar las operaciones con números enteros.
- Actividades para reforzar las operaciones con números enteros.

Medir con números fraccionarios

Medir es relacionar dos magnitudes del mismo tipo.

Cuando decimos que el volumen de la Luna es 1/50 del volumen de la Tierra, estamos tomando como unidad el volumen de la Tierra. Y si decimos que la gravedad es 1/6 g, tomamos como unidad 1 g, que es la gravedad en la superficie de la Tierra.

Por qué esos nombres…

¿Por qué $\mathbb{Z}$ para designar el conjunto de los números enteros?

En alemán, número se escribe *zahl*.

¿Por qué $\mathbb{Q}$ para designar el conjunto de los números racionales?

En inglés, *quotient* significa "cociente": los racionales son el cociente de dos enteros.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) El número 3 es natural, entero y racional.

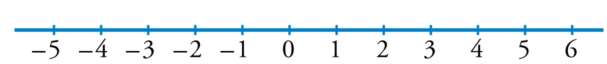
b) El número –12 es entero, pero no natural. Sí es racional.

c) El número $\frac{7}{5}$ es racional, pero no entero.

d) $\frac{18}{-3}$ es racional, pero no entero.

2. Dibuja en tu cuaderno una recta como la que aquí te presentamos y sitúa sobre ella, de forma aproximada, los siguientes números:

$$\frac{17}{3}, -\frac{11}{4}, \frac{20}{5}, \frac{2}{3}, \frac{16}{7}, -\frac{21}{5}, -\frac{7}{2}$$



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Cálculo mental

Simplifica:

$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{-20}{30}$ $\frac{30}{40}$ $\frac{-30}{-45}$ $\frac{40}{-60}$

Simplificación de fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número (distinto de 1 y de –1), al hacerlo diremos que hemos **simplificado** o **reducido** la fracción.

Por ejemplo: $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$; $\frac{8}{-12} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$; $\frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}$

Cuando una fracción no se puede reducir más y su denominador es positivo, diremos que es **irreducible.**

En la web

Actividades para repasar la simplificación de fracciones.

Fracciones equivalentes

Cada número racional puede expresarse mediante muchas (infinitas) fracciones: 3/5 = 6/10 = 9/15 = … De ahí la necesidad de establecer un criterio que permita reconocer cuándo dos fracciones representan al mismo número racional.

Se dice que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible, que tomamos como expresión habitual del correspondiente número racional.

$\frac{18}{30}$ y $\frac{21}{35}$ son equivalentes, pues $\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$ y $\frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$.

Cálculo mental

Es evidente que $\frac{2}{3} < \frac{7}{4}$ porque:

$\frac{2}{3} < 1$ $\qquad$ $\frac{7}{4} > 1$

Compara:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{11}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{17}{4}$ y $\frac{20}{7}$ $\qquad$ d) $\frac{23}{5}$ y 3

e) 2 y $\frac{8}{11}$ $\qquad$ f) 2 y $\frac{6}{3}$

Comparación de fracciones

Dos fracciones con el mismo denominador son muy fáciles de comparar observando sus numeradores. Para comparar dos fracciones con distinto denominador, las “reducimos a común denominador”, es decir, buscamos dos fraccciones respectivamente equivalentes a ellas y que tengan el mismo denominador.

Ejercicio resuelto

Comparar $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ ***y*** $\frac{9}{16}$.

Tomaremos como denominador común el mín.c.m. (12, 8, 16) = 48.

$$\left.\begin{array}{l} 48 : 12 = 4 \quad \to \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{28}{48} \\ 48 : 8 = 6 \quad \to \quad \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{30}{48} \\ 48 : 16 = 3 \quad \to \quad \frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{27}{48} \end{array}\right\}$$

Evidentemente:

$$\frac{27}{48} < \frac{28}{48} < \frac{30}{48}$$

Por tanto:

$$\frac{9}{16} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8}$$

Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{2}{5} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es positivo y el segundo, negativo.

b) $\frac{7}{3} > \frac{2}{5}$ porque el primero es mayor que 1 y el segundo, menor que 1.

c) $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es mayor que –2 y el segundo, menor que –2.

4. Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ $\qquad$ d) 3 y $\frac{11}{2}$

5. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

$\frac{7}{12}$ $\quad$ $\frac{4}{6}$ $\quad$ $\frac{5}{9}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{13}{18}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Operaciones con fracciones

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ b) $1-\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{5}-1$

e) $\frac{17}{5}-3$ f) $\frac{17}{3}-5$

En la web

- Actividades para repasar la suma y la resta de fracciones.
- Actividades para reforzar la suma y la resta de fracciones.

Cálculo mental

a) $3\cdot\frac{7}{9}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

Cálculo mental

a) $\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$ b) $\frac{6}{5}:6$

c) $\frac{6}{5}:\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

Suma y resta de fracciones

Para **sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador,** se suman (o se restan) sus numeradores y se mantiene el denominador.

Para **sumar (o restar) fracciones con distinto denominador,** se empieza por transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo: $\frac{7}{10}-\frac{5}{12}+2=\frac{42}{60}-\frac{25}{60}+\frac{120}{60}=\frac{42-25+120}{60}=\frac{137}{60}$

Producto de fracciones

El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores y cuyo denominador es el producto de sus denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo: $\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{8\cdot 7}{3\cdot 10}=\frac{56}{30}=\frac{28}{15}$

Cociente de fracciones

La **inversa de una fracción** $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Por ejemplo, la inversa de $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$, y la inversa de 3 es $\frac{1}{3}$. El 0 no tiene inversa.

El **cociente de dos fracciones** es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Por ejemplo: $\frac{9}{4}:\frac{5}{7}=\frac{9}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{63}{20}$; $\frac{6}{11}:3=\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{33}=\frac{2}{11}$

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar las operaciones combinadas con fracciones.

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

1. a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ b) $6-\frac{11}{4}$ c) $3\cdot\frac{4}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}$ e) $\frac{4}{5}:6$ f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

2. a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

3. a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

4. a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Actividades para repasar el concepto de fracción como operador.

Cálculo mental

Halla la parte del total que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{1}{2}$ de 520 000 €.

b) $\frac{3}{5}$ de 1 000 000 de personas.

c) $\frac{7}{10}$ de 500 edificios.

Cálculo mental

Di en cada caso la cantidad total:

a) 350 es $\frac{1}{2}$ del total.

b) 400 es $\frac{2}{3}$ del total.

c) 350 es $\frac{7}{10}$ del total.

Cálculo mental

Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$

La fracción como operador (fracción de una cantidad)

Para hallar los $\frac{3}{5}$ de una cantidad, por ejemplo de 1 200 €, se la divide por 5 (obteniéndose, así, una quinta parte) y el resultado se multiplica por 3. Es decir, se multiplica la cantidad por $\frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot 1\,200$ € = 720 €

Para hallar una fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C, se multiplica $\frac{a}{b} \cdot C$.

Ejemplos

- *Un cartero ha de repartir los 3/28 del total de 4 004 cartas. ¿Cuántas cartas le corresponden?*

  $\frac{3}{28} \cdot 4\,004 = 3 \cdot \frac{4\,004}{28} = 3{,}143 = 429$ cartas le corresponden.

- *Berta es dueña de 7/20 de una empresa. Este año le han correspondido 37 800 € en el reparto de beneficios. ¿Cuál ha sido la ganancia total de la compañía?*

  Si por $\frac{7}{20}$ le corresponden 37 800 €, a $\frac{1}{20}$ le corresponden $\frac{37\,800}{7} = 5\,400$ €.

  Por tanto, al total $\left(\frac{20}{20}\right)$ le corresponden $20 \cdot 5\,400 = 108\,000$ €.

  A este resultado se podría haber llegado multiplicando la parte que le corresponde a Berta (37 800 €) por la inversa de su fracción de la empresa, $\frac{20}{7}$.

  $37\,800 \cdot \frac{20}{7} = \frac{37\,800}{7} \cdot 20 = 5\,400 \cdot 20 = 108\,000$ €

Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.

Para hallar la parte $\frac{a}{b}$ de otra $\frac{c}{d}$ de una cantidad C, se multiplica $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot C$.

Ejemplo

De una herencia de 104 000 €, Alberto posee 3/8; Berta, 5/12, y Claudia, el resto. Claudia emplea 2/5 de su parte en pagar deudas. ¿Cuánto le queda?

$1 - \frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{24-9-10}{24} = \frac{5}{24}$ es la fracción de Claudia.

Como gasta $\frac{2}{5}$ de lo que le toca, le quedan $\frac{3}{5}$ de su fracción:

$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{24} \cdot 104\,000 = \frac{1}{8} \cdot 104\,000 = 13\,000$ € le quedan.

Piensa y practica

5. Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

6. He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

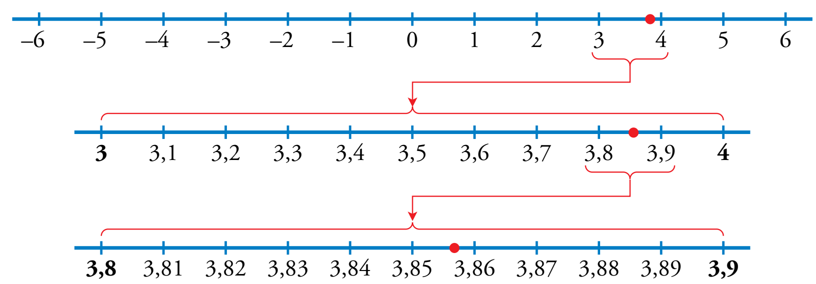
7. De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden 4/15 a Braulio; 2/5, a Enrique, y el resto, a Ruperto. Ruperto dedica 3/10 de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperto a los frutales?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Números decimales

Los números decimales sirven, entre otras cosas, para designar medidas, pues con ellos se puede expresar cualquier valor intermedio entre dos números enteros.

Los números decimales se representan sobre la recta numérica, de tal modo que con ellos podemos aproximarnos mucho (tanto como queramos) a cualquiera de sus puntos:



Siguiendo este proceso, el punto rojo puede designarse mediante un número decimal con tanta aproximación como queramos (3,857…).

La expresión decimal de los números permite valorarlos, compararlos y operar con ellos de forma muy cómoda y eficaz.

Recuerda

En las calculadoras, en vez de la coma decimal, se pone un punto.

1 427,54 → 1427.54

Recuerda

Si en una **calculadora de pantalla descriptiva,** al efectuar una operación con decimales obtienes la solución de forma fraccionaria, puedes pasarlo a decimal dando a la tecla S⇔D.

Tipos de números decimales

Veamos las distintas clases de números decimales que existen:

- **Decimal exacto** es el que tiene un número limitado de cifras decimales.

  Por ejemplo: 5,4; 0,97; 8; –0,0725

- **Decimal periódico** es el que tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

  $7,81818181\ldots = 7,\overset{\frown}{81}$

  PERIODO

  $0,735735735\ldots = 0,\overset{\frown}{735}$

  Estos se llaman **periódicos puros,** porque en ellos el periodo empieza inmediatamente después de la coma.

  $18,352222\ldots = 18,35\overset{\frown}{2}$

  $0,0454545\ldots = 0,0\overset{\frown}{45}$

  Son **periódicos mixtos,** porque antes del periodo tienen otras cifras decimales.

- **Decimales no exactos ni periódicos.** Son números decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

  Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$

  $\pi = 3,14159265\ldots$

Recuerda

En un número, el grupo de cifras decimales que se repite una y otra vez se llama **periodo.** Se indica poniendo un arco sobre las cifras correspondientes:

$7,\overset{\frown}{81}$ $\quad 18,35\overset{\frown}{2}$

Piensa y practica

1. Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

$3,52 \quad 2,\overset{\frown}{8} \quad 1,\overset{\frown}{54} \quad \sqrt{3} = 1,7320508\ldots$

$2,7 \quad 3,5222\ldots \quad \pi - 2 = 1,1415926\ldots$

2. Ordena de menor a mayor estos números:

$2,\overset{\frown}{5} \quad 2,5 \quad 2,3\overset{\frown}{5} \quad 2,505005\ldots$

3. Escribe tres números comprendidos entre 2,5 y $2,\overset{\frown}{5}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Paso de fracción a decimal

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división del numerador entre el denominador. El cociente puede ser:

- **Un número entero,** cuando el numerador es múltiplo del denominador.

  Por ejemplo: $\frac{72}{9} = 8$; $\frac{-240}{15} = -16$

- **Un decimal exacto,** si el denominador de la fraccción simplificada solo tiene los factores primos 2 y 5 (o alguno de ellos).

  Por ejemplo: $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{123}{40} = 3{,}075$; $\frac{42}{25} = 1{,}68$

  Observa por qué esto es así:

  $$\frac{123}{40} = \frac{123}{2^3 \cdot 5} = \frac{123 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{123 \cdot 25}{10^3} = \frac{3075}{1000} = 3{,}075$$

  Si solo están los factores 2 y 5, siempre podremos completar una potencia de base 10 en el denominador.

- **Un decimal periódico,** si el denominador de la fracción simplificada tiene algún factor primo distinto de 2 y 5.

  Por ejemplo: $\frac{11}{3} = 3{,}\overset{\frown}{6}$; $\frac{86}{11} = 7{,}\overset{\frown}{81}$; $\frac{87}{66} = \frac{29}{22} = 1{,}3\overset{\frown}{18}$

  ¿Por qué si el cociente no es exacto, entonces, con seguridad, es periódico? Razonemos sobre un ejemplo, 3 : 7, cuya división tienes en el margen. Puesto que al dividir por 7 el resto solo puede ser 1, 2, 3, 4, 5 o 6, en algún momento tendrá que repetirse, y a partir de ahí, se repetirá toda la secuencia.

Ejemplo

3,0	7
20	0,428571
60	
40	
50	
10	
3	A partir de aquí se repiten los cocientes y los restos.

se repite

Toda **fracción irreducible** da lugar a un número decimal:

- **Decimal exacto,** si el denominador solo tiene los factores 2 y 5.
- **Decimal periódico,** si el denominador tiene factores distintos a 2 y 5.

Por tanto, unos y otros son **números racionales.** Sin embargo, los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales.

Recuerda

Números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Piensa y practica

4. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overset{\frown}{3}$

$\frac{3}{3} = 3 \cdot 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots = 0{,}\overset{\frown}{9}$

Como $\frac{3}{3} = 1$, resulta que $0{,}\overset{\frown}{9} = 1$.

b) $5{,}\overset{\frown}{4} = 5{,}\overset{\frown}{44}$

c) $3{,}\overset{\frown}{72} = 3{,}7272727\ldots = 3{,}7\overset{\frown}{27}$

d) $0{,}\overset{\frown}{3} + 0{,}\overset{\frown}{6} = 1$

5. Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o decimales periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ b) $\frac{42}{150}$ c) $\frac{101}{1024}$ d) $\frac{1001}{500}$

6. Calcula en tu cuaderno:

a) $7{,}\overset{\frown}{45} - 3{,}\overset{\frown}{454}$

b) $6 - 3{,}\overset{\frown}{9}$

c) $3{,}\overset{\frown}{5} + 2{,}\overset{\frown}{3} + 1{,}\overset{\frown}{1}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Fracciones y decimales

1. Simplifica las fracciones siguientes:

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

2. Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

3. En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

4. Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:

- $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{16}{7}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) $-\frac{7}{3}$

5. Expresa como número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

6. Determina, sin realizar la división, cuáles son decimales exactos y cuáles decimales periódicos.

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{7 \cdot 11}{3 \cdot 5^2} \quad \frac{19}{2^2 \cdot 5} \quad \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 23}{5 \cdot 7}$$

7. Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

8. Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:

a) 1,6 y 1,8 b) 0,98 y 1 c) 0,28 y 0,29

d) 0,345 y 0,346 e) $2,\widehat{3}$ y 2,4 f) –4,5 y –4,4

9. Ordena de menor a mayor en cada apartado:

a) 3,56; $3,5\widehat{6}$; $3,\widehat{5}$; $3,\widehat{56}$

b) –1,32; $-1,3\widehat{2}$; $-1,\widehat{32}$; $-1,\widehat{3}$

10. Expresa en forma de fracción.

a) 3,7 b) 0,002 c) –1,03

d) $2,\widehat{5}$ e) $0,\widehat{21}$ f) $14,\widehat{3}$

Operaciones con fracciones

11. Calcula y simplifica mentalmente las expresiones siguientes:

a) $2 + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$ e) $\frac{2}{3} : 2$ f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ h) $\frac{12}{7} : 3$ i) $\frac{7}{3} \cdot 21$

12. Calcula mentalmente:

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{3}{4}$ de 100 c) $\frac{3}{500}$ de 500

d) La mitad de $\frac{2}{3}$.

e) La tercera parte de $\frac{12}{7}$.

f) La mitad de la quinta parte de –6.

13. Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

14. Reduce a una fracción.

a) $\dfrac{3 + \frac{1}{2}}{7 - \frac{3}{2}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

15. Reduce estas expresiones a una sola fracción:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)$

c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$

16. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$

c) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$

Aplica lo aprendido

17. Llevo leído 3/8 de un libro de 288 páginas. ¿Cuántas páginas me quedan para acabar el libro?

18. Juan mide 1,60 m, las 5/6 partes de la altura de su padre. ¿Cuánto mide el padre de Juan?

19. De los 28 alumnos de una clase, 4/7 han aprobado todo, de los cuales 1/8 obtuvieron sobresaliente de media. ¿Cuántos alumnos sacaron sobresaliente? ¿Cuántos suspendieron alguna asignatura?

20. Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

21. Una mezcla de 600 g de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?

b) ¿Qué cantidad hay de cada cereal?

22. De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

23. De un bidón de aceite se saca primero la mitad, y después, la quinta parte de lo que queda. Si en el bidón aún hay 3 litros, ¿cuál es su capacidad?

24. En una frutería, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a las frutas, y el resto, a las verduras. De lo recaudado por las frutas, los 3/8 son de las naranjas, y ese día fueron 90 €. ¿Cuánto se recaudó en total? ¿Qué parte correspondió a las verduras?

Autoevaluación

1. Efectúa y simplifica el resultado.

$$\frac{1}{2}\left[3-\frac{2}{5}\left(1-\frac{5}{9}\right)-\left(4-\frac{2}{3}\right):2\right]$$

2. Escribe, en cada caso, tres números comprendidos entre los dos dados:

a) $\frac{3}{20}$ y $\frac{4}{25}$ b) $2,\widehat{7}$ y $2,\widehat{8}$

3. Clasifica en decimales exactos o periódicos sin hacer la división.

$\frac{89}{50}$ $\frac{113}{12}$ $\frac{23}{32}$ $\frac{18}{7}$

4. Dos cajas con manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo.

La primera, que supone los 5/12 del total, se vende por 50 €.

¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?

5. Entre los usuarios de un polideportivo, la quinta parte tiene más de 60 años, y dos de cada tres están entre los 25 y los 60 años.

a) ¿Qué fracción de los usuarios tiene 25 años o menos?

b) Si el número de usuarios es 525, ¿cuántos hay de cada grupo de edad?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Potencias y raíces

Números grandes en la India...

Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabharata* (siglo VI a. C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades.

Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Templo Swayambhunath en el valle de Katmandú (Nepal).

... y en la antigua Grecia

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a.C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabría en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.

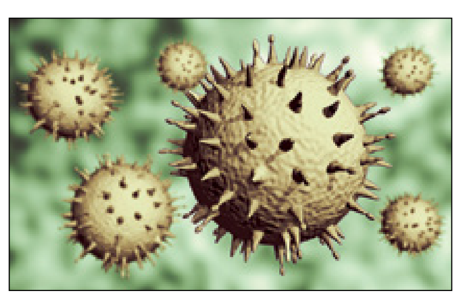
"Arquímedes pensativo", de Domenico Fetti.

Llega el S.N.D.

Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indo-arábiga".

El S.N.D. dio alas al desarrollo de las matemáticas, más allá de su aplicación en situaciones prácticas cotidianas.

La estructura del S.N.D., junto con las potencias, permite expresar con gran comodidad y sencillez números de cualquier tamaño, por grandes o pequeños que sean.



El virus de la gripe tiene un diámetro medio aproximado de 10^{-7} metros.

15

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Potenciación

En la web

Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente natural.

Potencias de exponente positivo

Las potencias de exponente entero positivo (1, 2, 3, …) son fáciles de interpretar:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo: $8^1 = 8$, $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

Propiedades

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ — Por ejemplo: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$
$= (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 =$
$= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$

④ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\dfrac{a^6}{a^4} = \dfrac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \dfrac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ — Por ejemplo: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \dfrac{a^3}{b^3}$

Ten en cuenta

La propiedad ④, de momento, solo sirve para $m > n$.

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$ *b)* $(2^3)^4$ *c)* $\dfrac{5^8}{5^6}$ *d)* $\dfrac{14^5}{7^5}$ *e)* $2^7 \cdot 5^7$ *f)* $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ①)

b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (Propiedad ③)

c) $\dfrac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\dfrac{14^5}{7^5} = \left(\dfrac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ⑤)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ②)

f) $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2 = 7^9 : (7^4)^2 = 7^9 : 7^8 = 7$ (Propiedades ①, ③ y ④)

Piensa y practica

1. Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\dfrac{7^6}{7^4}$

d) $\dfrac{15^3}{3^3}$ e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\dfrac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$

g) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ h) $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

2. Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ b) $(6^5 : 2^4) : 3^5$ c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

d) $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$ e) $\dfrac{20^6}{2^6}$ f) $\dfrac{20^6}{2^5}$

g) $(3^3)^2 : 3^5$ h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resumen

Definición

$a^0 = 1, \; a^1 = a$

Si $n > 1, \; a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$

$a^{-n} = 1/a^n$

Propiedades

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad 4 de la página anterior solo era válida para $m > n$. Veamos qué ocurriría si fuera $m = n$ o $m < n$:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^3} = 1. \text{ Por tanto, tendría que ser } a^0 = 1.$$

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \;\rightarrow\; a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas igualdades nos sugieren la siguiente definición:

Si a es un número racional distinto de cero y n es entero:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Como consecuencia: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

Las propiedades que teníamos para las potencias de exponente positivo también son válidas para las potencias de exponentes enteros cualesquiera.

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar como potencia de base 10 este número:***

0,0000000000001

$$0{,}0000000000001 = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000} = \frac{1}{10^{13}} = 10^{-13}$$

2. ***Simplificar.***

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-3}$

b) $\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3}$

c) $\dfrac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}}$

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-3} = \dfrac{3^4}{5^4} \cdot \dfrac{5^3}{9^3} = \dfrac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot (3^2)^3} = \dfrac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 3^6} = \dfrac{1}{3^2 \cdot 5} = \dfrac{1}{45}$

b) Se puede resolver aplicando la propiedad 3:

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(-2)\cdot(-3)} = \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{5^6}{2^6} = \frac{15\,625}{64}$$

c) $\dfrac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}} = \dfrac{2^{-6} \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^{-4}}{2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-5}} = 2^{-6+6+4-3} \cdot 3^{4-4-2+5} = 2 \cdot 3^3 = 54$

Piensa y practica

En la web Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente entero.

3. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación 0,00001 : 10 000 000.

4. Expresa como fracción simplificada.

a) $\dfrac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) a^{-6} d) $x^{-1}y^{-2}$

e) $\dfrac{x^3y^4}{x^2y^6}$ f) $(3xy^2)^{-2}$ g) $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

5. Reduce a un único número racional.

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ e) $\left(\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^6$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ h) $\left(\dfrac{17}{45}\right)^0$ i) $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$

En la web Actividades para reforzar las operaciones con potencias de exponente entero.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Notación científica

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$$3{,}56 \cdot 10^{13} = \underbrace{35\,600\,000\,000\,000}_{13 \text{ cifras}}$$

$$9{,}207 \cdot 10^{-16} = 0{,}\underbrace{0000000000000009}_{16 \text{ cifras}}207$$

La notación científica tiene la siguiente ventaja sobre la usual: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a\,,\,\underbrace{b\,c\,d\,\ldots}\cdot\underbrace{10^n}$$

PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA) PARTE DECIMAL POTENCIA ENTERA DE BASE 10

Si n es positivo, el número N es "grande".

Y si n es negativo, entonces N es "pequeño".

Operaciones con números en notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10 y, así, poder sacar factor común.

Ejercicio resuelto

a) $(4{,}73 \cdot 10^7) \cdot (7{,}5 \cdot 10^5) = (4{,}73 \cdot 7{,}5) \cdot 10^{7+5} = 35{,}475 \cdot 10^{12} =$
$= 3{,}5475 \cdot 10^{13}$

b) $\dfrac{4{,}73 \cdot 10^7}{7{,}5 \cdot 10^{-5}} = (4{,}73 : 7{,}5) \cdot 10^{7-(-5)} = 0{,}631 \cdot 10^{12} = 6{,}31 \cdot 10^{11}$

c) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 47{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}5 \cdot 10^6 = (47{,}3 - 7{,}5) \cdot 10^6 =$
$= 39{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}98 \cdot 10^7$

En la web

Recuerda las propiedades de las potencias de base 10.

Cálculo mental

I. Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a) $1\,000 \cdot 100\,000$
b) $1\,000 \cdot 0{,}01$
c) $1\,000 : 0{,}01$
d) $1\,000 : 0{,}000001$
e) $1\,000 \cdot 0{,}000001$
f) $0{,}0001 \cdot 0{,}01$
g) $0{,}0001 : 0{,}01$

II. Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $374{,}2 \cdot 10^5 = 3{,}742 \cdot 10^n$
b) $374{,}2 \cdot 10^{-7} = 3{,}742 \cdot 10^n$
c) $0{,}031 \cdot 10^5 = 3{,}1 \cdot 10^n$
d) $0{,}031 \cdot 10^{-7} = 3{,}1 \cdot 10^n$

En la web

- Practica con potencias de base 10.
- Practica la escritura en notación científica.
- Practica la suma con números en notación científica.

Observación

En los tres apartados del ejercicio resuelto hemos tenido que "arreglar" la solución final para que adopte la notación científica: solo una cifra en la parte entera.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) $5{,}83 \cdot 10^{-5} < 2{,}01 \cdot 10^4$
b) $58{,}35 \cdot 10^4 > 3{,}5 \cdot 10^6$
c) $6{,}2 \cdot 10^{-3} < 5{,}8 \cdot 10^{-4}$
d) $(3{,}1 \cdot 10^5) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{-5}) < 10$

2. Calcula.

a) $(3{,}25 \cdot 10^7) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$
b) $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-3{,}2 \cdot 10^5)$
c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^3)$
d) $(1{,}17 \cdot 10^8) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para la notación científica

Cualquiera de los modelos de calculadora puede ser programado para que trabaje solo en notación científica (modo SCI). Es preferible que no uses ese modo, sino el normal (**NORM**). Averigua cómo se programa en tu calculadora. Puedes hallarlo, según los modelos, pulsando reiteradamente la tecla [MODE], o bien mediante **SHIFT SETUP.** Si se te pregunta **1~2?**, responde **2.** De este modo solo recurrirá a la notación científica cuando el número de cifras decimales utilizado sea muy grande.

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, [EXP] o [$\times 10^x$].

Interpretación

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

123 000 000 [×] 45 000 [=] [5.535×10^{12}]

0,000123 [÷] 50 000 [=] [2.46×10^{-09}]

Escritura

Para poner $5{,}74 \cdot 10^9$, hacemos: 5,74 [EXP] 9 [o bien 5,74 [$\times 10^x$] 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 [EXP] 13 [+/–] [o bien 2,95 [$\times 10^x$] [(–)] 13]

Operaciones

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla [=], da el resultado en forma científica.

Ejercicio resuelto

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

c) $3{,}2 \cdot 10^8 + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^8$

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15}) = (3{,}214 \cdot 7{,}2) \cdot 10^{-5+15} = 23{,}14 \cdot 10^{10} = 2{,}314 \cdot 10^{11}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [×] 7,2 [EXP] 15 [=] [2.31408×10^{11}]

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}} = \dfrac{3{,}214}{7{,}2} \cdot 10^{-5-15} = 0{,}446 \cdot 10^{-20} = 4{,}46 \cdot 10^{-21}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [÷] 7,2 [EXP] 15 [=] [$4.4638889 \times 10^{-21}$]

c) 3,2 [EXP] 8 + 7,3 [EXP] 14 [+/–] [–] 4,552 [EXP] 8 [=] [-1.352×10^{8}]

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 [EXP] 4 [+] 5,35 [EXP] 17 [=] [5.35×10^{17}]

Piensa y practica

3. Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Raíces exactas

Dos raíces cuadradas

Observa:

$3^2 = 9, \; (-3)^2 = 9$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero, ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

- **Raíces cuadradas.** Como sabes, $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$.
- **Raíces cúbicas.** $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$.
- **Otras raíces.** De forma análoga se interpretan las raíces de *índice* superior a 3:

  Puesto que $2^5 = 32$, será $\sqrt[5]{32} = 2$.

  $\sqrt[4]{10\,000} = 10$ porque $10^4 = 10\,000$.

En general, si $a = b^n$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, n es el **índice** y a el **radicando.**

Si $\sqrt[n]{a}$ es un número racional (entero o fraccionario), entonces se dice que la raíz es **exacta.**

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\frac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$

e) $\sqrt[3]{2,16 \cdot 10^{14}}$

f) $\sqrt{5,76 \cdot 10^{-8}}$

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$.

b) Puesto que se nos pide hallar $\sqrt{4\,356}$, comprobemos si 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para ello, lo descomponemos en factores primos: $4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{1000}{64}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$.

e) $2,16 \cdot 10^{14} = 216 \cdot 10^{12} = 6^3 \cdot (10^4)^3 = (6 \cdot 10^4)^3$.

Por tanto, $\sqrt[3]{2,16 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^4$.

f) $5,76 \cdot 10^{-8} = 576 \cdot 10^{-10} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 10^{-10} = (2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5})^2$.

Por tanto, $\sqrt{5,76 \cdot 10^{-8}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} = 2,4 \cdot 10^{-4}$.

Piensa y practica

En la web — Actividades para reforzar el cálculo de raíces exactas.

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1000}}$

g) $\sqrt[3]{1,728 \cdot 10^{21}}$

h) $\sqrt{2,025 \cdot 10^{-11}}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

e) 7 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{7}$ y $-\sqrt[4]{7}$.

f) $\sqrt{-4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Números racionales e irracionales

Números racionales

Recordemos lo visto en apartados anteriores:

Los **números racionales** son los que se pueden poner en forma de fracción. Es decir, los que se pueden obtener como *cociente de dos números enteros*.

Además de los propios números enteros, son racionales aquellos cuya *expresión decimal es exacta o periódica*.

El conjunto de todos los números racionales se designa $\mathbb{Q}$.

$$\text{RACIONALES } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{ENTEROS } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{NATURALES, } \mathbb{N} \to 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \\ \text{NATURALES NEGATIVOS} \to -1, -2, -3, -4, -5, \ldots \end{cases} \\ \text{FRACCIONARIOS} \begin{cases} \text{DECIMALES EXACTOS} \to 0,84; 17,23; \ldots \\ \text{DECIMALES PERIÓDICOS} \to 2,\widehat{3}; 0,\widehat{084}; \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Números irracionales

Los números no racionales se llaman **irracionales.**

Son números irracionales aquellos cuya expresión decimal no es exacta ni periódica. Entre ellos están:

— Todas las raíces no exactas. Por ejemplo:

$\sqrt{2} = 1,41421256\ldots$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4} = 1,58740105\ldots$

— El número $\pi = 3,14159265\ldots$

Hay otros infinitos números irracionales.

En la web

- Representación de números irracionales.
- Clasifica números.
- Empareja expresiones con el mismo valor.

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$$24;\ 0,71;\ 0,7\widehat{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi - 1$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$24;\ 28/7 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$24;\ -5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
FRACCIONARIOS	$0,71;\ 0,7\widehat{1};\ 3/5$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$24;\ 0,71;\ 0,7\widehat{1};\ -5;\ 3/5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
IRRACIONALES	$\sqrt{7};\ \pi - 1$

Piensa y practica

1. Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).

$$107;\ 3,95;\ 3,\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi - 3$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Potencias

1. Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$

c) $(-2)-3$ d) -32

e) $-4-1$ f) $(-1)-2$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

2. Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64 b) 243

c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$ f) $\frac{3^4}{3^{-3}}$

g) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ h) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

3. Calcula.

a) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

4. Expresa como potencia única.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ b) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{4}$ f) $\frac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

5. Simplifica.

a) $\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ b) $\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 3^2}$

Notación científica

6. Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^7$ b) $5 \cdot 10–4$

c) $9{,}73 \cdot 108$ d) $8{,}5 \cdot 10–6$

e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$ f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

7. Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005

c) 4 800 000 000 d) 0,0000173

e) 50 030 000 f) 0,002007

8. Di el valor de n en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$

b) $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$

d) $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

9. Completa estas igualdades:

a) $836 \cdot 10^3 = 8{,}36 \cdot 10^{\cdots}$

b) $0{,}012 \cdot 10^4 = \ldots \cdot 10^2$

c) $\ldots \cdot 10^{-3} = 0{,}0834 \cdot 10^3$

d) $73{,}3 \cdot 10^2 = \ldots \cdot 10^{-1}$

10. Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km

b) Peso de un grano de arroz: 0,000027 kg

c) Diámetro de cierto virus: 0,00000008 m

d) Emisión de CO_2 en un año: 54 900 000 000 kg

11. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$

b) $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$

d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^{7})$

f) $(4{,}4 \cdot 10^{8}) : (2 \cdot 10^{-5})$

En la web

- Practica operaciones con potencias sencillas.
- Practica operaciones con potencias más complicadas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Raíces y radicales

12. Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

g) $\sqrt[5]{-243}$ h) $\sqrt[6]{4\,096}$

i) $\sqrt[6]{64}$ j) $\sqrt[3]{-8}$

k) $\sqrt[4]{625}$ l) $\sqrt{-8}$

m) $\sqrt[4]{625/16}$ n) $\sqrt[5]{-1}$

13. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$

c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$ d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$

e) $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ f) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

14. Extrae de cada radical los factores que sea posible:

a) $\sqrt[4]{32}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt[4]{144}$ f) $\sqrt[3]{250}$

15. Simplifica si es posible.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

16. Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{5} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17. Justifica cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que se verifique la igualdad:

a) $a^3 = 2^6$ b) $a-1 = 2$

c) $\sqrt{a} = \dfrac{4}{5}$ d) $\sqrt[4]{a} = 1$

e) $a^{-2} = \dfrac{1}{4}$ f) $a^{-5} = -1$

Autoevaluación

1. Calcula.

a) $(-3)^{-2} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{0} - 3^{-1}$

b) $\left(3 - \dfrac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$

2. Simplifica.

a) $\dfrac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$ b) $\left(\dfrac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2}$ d) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-3} : \dfrac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

3. Descompón en factores y utiliza las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:

$$\frac{24^2 \cdot 15^{-2} \cdot 6^4}{8^4 \cdot 9^{-3} \cdot 3^{10}}$$

4. Expresa en notación científica.

a) 234 000 000 b) 0,0000075

c) $758 \cdot 10^{-5}$ d) $0{,}035 \cdot 10^{13}$

5. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

c) $(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Problemas aritméticos

Primeras noticias

El razonamiento matemático relacionado con la proporcionalidad aparece desde los albores de la civilización en la resolución de problemas prácticos: intercambios, compras, repartos, cosechas, etc.

Encontramos problemas de estos tipos en textos egipcios, chinos, hindúes…, todos anteriores a nuestra era.

Pirámides de Guiza (Egipto).

Con los griegos

El griego **Tales de Mileto** consiguió calcular la altura de la pirámide de Keops relacionando la altura de su cuerpo y la longitud de su sombra con la altura de la pirámide y la sombra de esta, a la misma hora del día.

Los griegos, en la línea de la búsqueda del saber por el saber, desde **Pitágoras** a **Euclides** trabajaron, además, en la construcción de una base teórica para la proporcionalidad, independiente de los problemas prácticos. Así, en *Los elementos* de Euclides empiezan a formarse ya conceptos abstractos como el de razón y el de proporción.

Con los árabes y en la Edad Media

Alfonso X el Sabio en la Escuela de Traductores de Toledo.

En los siglos VIII y IX, en los tratados de los matemáticos árabes, quienes importaron el saber de Oriente, aparecen ya procedimientos como la regla de tres.

Durante la Edad Media, época de menor interés matemático, no se dan grandes avances, y los escasos tratados se basan en traducciones más o menos afortunadas de *Los elementos* de Euclides.

En el Renacimiento

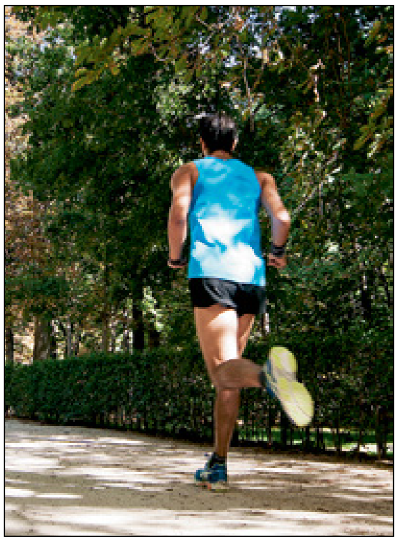
Más tarde, en Europa, a partir de los siglos XIV y XV, con el desarrollo del comercio en el Renacimiento, se amplían las demandas en el terreno del cálculo y la contabilidad. Estas necesidades impulsan el desarrollo de la aritmética comercial: porcentajes, descuentos, deudas, intereses, plazos…

"El cambista y su mujer" de Marinus van Reymerswaele.

24

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Aproximaciones y errores



Por qué se utilizan números aproximados

Usamos números aproximados con mucha más frecuencia de la que somos conscientes. Lo hacemos por uno de estos motivos:

— Desconocemos la cantidad exacta.

— Aunque conocemos la cantidad exacta, no consideramos necesario o conveniente darla con toda precisión.

Por ejemplo:

- ¿Qué distancia he recorrido hoy en mi entrenamiento? No conozco la cantidad exacta pero podría decir: "más de 12 km", o bien "entre 12 y 13 km", o bien "12 400 m". En este último caso, aunque no lo digamos, se entiende que pueden ser 100 m más o menos.
- Si alguien gana 30 458,24 € al año, probablemente cuando comente su sueldo dirá, simplemente, que es de 30 000 euros.

En la web

Ejemplos de aproximaciones de números decimales.

Cifras significativas

La altura a la que vuela un avión se puede expresar de diversas formas (nos fijamos en el número de cifras que usamos en cada caso):

9 km → solo una cifra

9,2 km → dos cifras

9 200 m → cuatro cifras (¿o, tal vez, solo dos?)

9 246 m → cuatro cifras

Está claro que cuantas más cifras se utilizan con más precisión se está dando la medida. Pero, a veces, no es conveniente dar demasiadas: ¿es razonable que la altura de un avión se dé afinando hasta los metros?

Fijémonos ahora en la medición 9 200 m. ¿Han querido ser exactos hasta los "metros" o solo hasta los "cientos de metros"? Muy probablemente sea esto último y, en este caso, los dos ceros finales no son *cifras significativas*.

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Solo deben utilizarse aquellas cuya exactitud nos conste.

Los ceros del final de un número no son cifras significativas si solo se han utilizado para poder expresar la cantidad en la unidad deseada (9 200 m en lugar de 92 cientos de metros).

Número de cifras significativas

Las estimaciones que hacemos en la vida corriente, sin ánimo de que sean muy precisas, tienen una o, a lo sumo, dos cifras significativas:

"ESTAS CASAS CUESTAN CUATROCIENTOS VEINTE MIL EUROS"

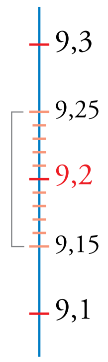
Una cantidad dada con tres cifras afina mucho. Solo en la ciencia se necesitan precisiones de cuatro o más cifras.

Si el número está dado en notación científica, las cifras significativas son las que aparecen en el número decimal que multiplica a la potencia de base 10. Por ejemplo, $3{,}4 \cdot 10^5$ y $3{,}40 \cdot 10^5$ no son el mismo número aproximado: en el primero (con dos cifras significativas) estamos diciendo que solo controlamos hasta el 4, mientras que en el segundo (con tres cifras significativas) aseguramos que la cifra posterior al 4 es un 0.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Control del error cometido

Es claro que cuando damos una medida aproximada estamos cometiendo un error, que consiste en la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto (o real) y el valor aproximado. Se llama *error absoluto*.



$$\textbf{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

En general, el error absoluto es desconocido (porque no conocemos el valor real), pero puede controlarse. Por ejemplo, al dar la altura del avión, 9,2 km, podemos saber que el error cometido es menor que 0,05 km = 50 m, ya que si se da 9,2 es porque está más cerca de esta medida que de 9,1 y que de 9,3.

No es lo mismo cometer un error de 50 m al medir la altura de un avión, que al medir la altura de un edificio o la altura de un satélite. Por eso se define el *error relativo* como el cociente entre el error absoluto y la medida exacta.

$$\textbf{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Al igual que el error absoluto, el error relativo también es, casi siempre, desconocido. Para controlarlo, habría que dar una cota del mismo. No obstante, en este curso no lo haremos, nos conformaremos con saber que *cuantas más cifras significativas se utilicen para dar la medida aproximada, menor es el error relativo cometido*.

Problemas resueltos

1. ***La altura de un edificio es de 92 m; la de un avión, 9,2 km, y la de un satélite artificial, 920 km. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?***

El error absoluto tiene que ver con las cifras que no aparecen, es decir, las posteriores a la última cifra utilizada.

Altura del edificio: 92 m	Error absoluto < 0,5 m
Altura del avión 9,2 km	Error absoluto < 0,05 km = 50 m
Altura del satélite: 920 km	Error absoluto < 5 km = 5 000 m

Una cota del error absoluto es 5 unidades de la primera cifra no utilizada.

El error relativo es el mismo en los tres casos, ya que en todos ellos se usan las mismas cifras significativas. (Hemos supuesto que, en el último caso, el 0 no es cifra significativa. Deberíamos haber dicho 92 decenas de kilómetros).

2. ***Comparar el error relativo cometido en estas mediciones:***

a) 87 m b) 5 km

c) 453 km d) $4,53 \cdot 10^{11}$ km

El mayor error relativo se da en la medición de 5 km, pues solo tiene una cifra significativa.

El menor error relativo se da con la medición de 453 km, porque en ella se utilizan tres cifras significativas.

El error relativo de la medición d) es el mismo que el de la c).

Piensa y practica

1. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

c) Volumen de un pantano, 326 hm^3.

d) Volumen de un asteroide, $3,26 \cdot 10^6$ km^3.

2. Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

d) La Tierra, $5,972 \cdot 10^{21}$ toneladas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 La proporcionalidad en los problemas aritméticos

En la web
Razón de dos números.

En esta unidad vamos a resolver problemas con las herramientas de la aritmética. Una buena parte de los problemas que nos encontraremos relacionan magnitudes proporcionales. Vamos a empezar recordando las técnicas para resolver problemas de proporcionalidad simple.

Proporcionalidad simple

Ejemplo 1

Para transportar 120 000 l de agua, se necesitan 8 camiones cisterna. ¿Cuántos camiones se necesitarán para transportar 315 000 l?

A más volumen de agua, más camiones. Es evidente que se trata de una *proporcionalidad directa*. Resolvemos el problema de dos formas:

- **Regla de tres**

$$\left.\begin{array}{l} 120\,000\ l \rightarrow 8 \text{ camiones} \\ 315\,000\ l \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{315\,000 \cdot 8}{120\,000} = 21 \text{ camiones}$$

- **Reducción a la unidad**

120 000 : 8 = 15 000 *l* caben en cada camión.

315 000 : 15 000 = 21 camiones se necesitan.

Proporcionalidad directa

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} \square \longrightarrow \bigcirc \\ \blacksquare \longrightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{\blacksquare \cdot \bigcirc}{\square}$$

Ejemplo 2

Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarían 4 pintores en realizar la misma tarea?

A menos pintores, más tiempo. Se trata de una *proporcionalidad inversa*.

- **Regla de tres**

$$\left.\begin{array}{l} 6 \text{ pintores} \rightarrow 8 \text{ días} \\ 4 \text{ pintores} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12 \text{ días}$$

- **Reducción a la unidad**

¿Cuánto tarda 1 pintor? 6 · 8 = 48 días

¿Cuánto tardan 4 pintores? 48 : 4 = 12 días

Proporcionalidad inversa

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} \square \longrightarrow \bigcirc \\ \blacksquare \longrightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{\square \cdot \bigcirc}{\blacksquare}$$

En la web
- Concepto de proporcionalidad directa.
- Concepto de proporcionalidad inversa.

Problema resuelto

Hace 3 días y 13 horas un pantano solo estaba a un 34,5 % de su capacidad. Ahora alcanza el 41,2 %. De seguir a este ritmo de llenado, ¿cuándo alcanzará el 90 % de su capacidad?

Tiempo transcurrido: 3 días 13 horas = 85 horas

En ese tiempo se ha llenado: 41,2 % – 34,5 % = 6,7 %

Queremos que aumente: 90 % – 41,2 % = 48,8 %

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si en 85 h se ha llenado el } 6{,}7\,\%, \\ \text{en } x \text{ h se llenará el } 48{,}8\,\% \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{85 \cdot 48{,}8}{6{,}7} = 619{,}10 \text{ h}$$

619,10 h = 25 días, 19 horas y 6 minutos

Solución: Alcanzará el 90 % de su capacidad dentro de unos 26 días.

En la web — Resuelve problemas de proporcionalidad simple.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Cálculos con porcentajes

Cálculo mental

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

a) 10 %   b) 7 %
c) 1 %   d) 160 %
e) 127 %   f) 5 %

Cálculo de un tanto por ciento de una cantidad

El 16 % de 5 000 es $\frac{16}{100} \cdot 5\,000 = 0{,}16 \cdot 5\,000 = 800$.

El tanto por ciento (16 %) lo hemos puesto en forma decimal (0,16).

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad, se expresa el tanto por ciento de forma decimal y se multiplica por él.

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30.
b) 5 respecto a 20.
c) 2 respecto a 10.
d) 30 respecto a 3 000.
e) 3 respecto a 4.

Obtención del tanto por ciento correspondiente a una proporción

En una población de 5 000 personas, 800 han leído El Quijote. ¿Qué porcentaje del total representan?

Hemos de calcular cuántas, de cada 100 personas, han leído *El Quijote*:

$\frac{800}{5\,000} \cdot 100 = 16$. Han leído *El Quijote* el 16 % del total.

Para hallar qué tanto por ciento representa una cantidad, a, respecto a un total, C, se efectúa $\frac{a}{C} \cdot 100$.

Problemas resueltos

1. ***Calcular el 35 % de 3 780 € y el 160 % de 36 200 personas.***

- 35% ~ 0,35 (35 centésimas)

  Por tanto, 35% de 3 780 € es 3 780 · 0,35 = 1 323 €.
- 160 % ~ 1,60 (160 centésimas)

  Por tanto, 160 % de 36 200 personas es 36 200 · 1,60 = 57 920 personas.

2. ***¿Qué tanto por ciento representa 3 634 m^2 respecto a 15 800 m^2?***

$\frac{3\,634}{15\,800} \cdot 100 = 23$. Por tanto, 3 634 m^2 son el 23 % de 15 800 m^2.

En la web

Acividades para reforzar el cálculo de porcentajes resolviendo problemas.

Piensa y practica

1. Calcula.

a) El 24 % de 300.   b) El 112 % de 560.
c) El 3 % de 83 200.   d) El 30 % de 83 200.
e) El 230 % de 5 200.   f) El 300 % de 40.

2. Calcula el tanto por ciento que representa.

a) 45 respecto a 225.   b) 6 160 respecto a 56 000.
c) 4 230 respecto a 9 000.   d) 1 922 respecto a 1 240.
e) 6 000 respecto a 4 000.   f) 975 respecto a 32 500.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Cálculo de aumentos porcentuales

Un reloj de 50 € aumenta su precio un 16 %. ¿Cuánto vale ahora?

Con lo que sabemos hasta este momento, podríamos resolverlo así:

Aumento: $50 \cdot 0{,}16 = 8$ €

Precio final: $50 + 8 = 58$ €

Pero observemos que si sube un 16 %, el precio actual es el 116 % del anterior. Por eso, para obtenerlo, se puede multiplicar directamente 50 por 1,16:

$50 \cdot 1{,}16 = 58$ €

1,16 es 1 + 0,16 (la cantidad más 16 centésimas)

AUMENTO DE UN 16 %

$$\underbrace{1}_{\text{LA CANTIDAD, 1}},\underbrace{16}_{\text{MÁS 16 CENTÉSIMAS}}$$

> El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación.**
>
> En **aumentos porcentuales,** el índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.
>
> Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:
>
> VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

a) 25 % b) 5 % c) 40 %
d) 80 % e) 110 % f) 200 %

Cálculo de disminuciones porcentuales

Una nevera valía 620 €. Se rebaja un 40 %. ¿Cuánto vale ahora?

Si quitamos un 40 % al precio inicial, queda el 60 %. Su precio final es:

$620 \cdot 0{,}60 = 372$ €

0,60 es la unidad menos 40 centésimas: $1 - 0{,}40 = 0{,}60$

> En una **disminución porcentual,** el índice de variación es 1 menos la disminución porcentual puesta en forma decimal.
>
> Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:
>
> VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

a) 25 % b) 5 % c) 40 %
d) 15 % e) 88 % f) 1 %

Problema resuelto

El agua recogida en un pantano, 690 hm³, ha disminuido un 23 %. ¿Cuánta agua hay ahora?

$1 - 0{,}23 = 0{,}77 \;\rightarrow\; 690 \cdot 0{,}77 = 531{,}3$

Ahora hay 531,3 hm³ de agua en el pantano.

Piensa y practica

3. Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?

4. En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15 %. ¿Cuántos hay ahora?

En la web Actividades para reforzar el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final

Tras aumentar su precio un 35 %, un ordenador cuesta 783 €. ¿Cuánto valía antes de la subida?

Observa el esquema siguiente:

$$\text{PRECIO INICIAL} \underset{:\,1{,}35}{\overset{\cdot\,1{,}35}{\rightleftarrows}} \text{PRECIO FINAL}$$

PRECIO INICIAL · 1,35 = PRECIO FINAL

$\boxed{\text{PRECIO INICIAL = PRECIO FINAL : 1,35}}$

Precio inicial del ordenador = 783 : 1,35 = 580 €

> Si conocemos la cantidad final que resulta después de haber aplicado una variación porcentual, la cantidad inicial se obtiene dividiendo la cantidad final por el índice de variación.
>
> CANTIDAD INICIAL = CANTIDAD FINAL : ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50 %. C. final = 1 500.
b) Aumenta 50 %. C. final = 3 000.
c) Aumenta 25 %. C. final = 125.
d) Aumenta 25 %. C. final = 250.
e) Disminuye 50 %. C. final = 400.
f) Disminuye 40 %. C. final = 600.

Problemas resueltos

1. ***El precio de un televisor fue de 566,40 €. ¿Cuál era su precio antes de cargarle un 18 % de impuestos?***

El índice de variación es 1 + 0,18 = 1,18.

Por tanto, el precio del televisor antes de cargarle los impuestos era:

566,40 : 1,18 = 480 €

2. ***En unos grandes almacenes, todos los artículos han bajado un 35 %. Hemos comprado un cuadro por 195 €, una bicicleta por 78 € y un libro por 14,30 €. ¿Cuánto valía cada cosa antes de las rebajas?***

En los tres casos, el índice de variación es 1 – 0,35 = 0,65.

Por tanto, los precios de los artículos antes de las rebajas eran:

Cuadro → 195 : 0,65 = 300 €
Bicicleta → 78 : 0,65 = 120 €
Libro → 14,30 : 0,65 = 22 €

Piensa y practica

5. El precio de una batidora, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?

6. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

7. En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

8. Un cartero ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Encadenamiento de variaciones porcentuales

Una cantidad aumenta un 25 % y, después, el resultado aumenta un 33 %. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento total?

$$C \xrightarrow{+25\,\%} C \cdot 1{,}25 \xrightarrow{+33\,\%} (C \cdot 1{,}25) \cdot 1{,}33 = C(1{,}25 \cdot 1{,}33) = C \cdot 1{,}6625$$

$$\underbrace{C \longrightarrow C \cdot 1{,}6625}_{66{,}25\,\%}$$

El índice de variación total es 1,6625, lo que corresponde a un aumento porcentual del 66,25 %.

Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales, se multiplican los índices de variación de los sucesivos pasos.

Problemas resueltos

1. ***Unas acciones que valían 1 000 € suben el 60 %. Después, vuelven a subir el 25 %. ¿Cuál es el porcentaje total de subida?***	1.ª SUBIDA: 1 000 € $\xrightarrow{+60\,\%}$ 1 000 · 1,60 = 1 600 € 2.ª SUBIDA: 1 600 € $\xrightarrow{+25\,\%}$ 1 600 · 1,25 = 2 000 € SUBIDA TOTAL: 1 000 € $\longrightarrow$ 2 000 € Evidentemente, la subida total es del 100 %. ¿Cómo se obtiene directamente? Veámoslo: 1,60 · 1,25 = 2. Es decir, la cantidad inicial, 1, más 100 centésimas. Subida del 100 %.
2. ***Una guitarra de 800 € sube el 50 %. Después, baja el 50 %. ¿Queda el precio como estaba?***	SUBIDA: 800 € $\xrightarrow{+50\,\%}$ 800 · 1,50 = 1 200 € [1,50 = 1 + 0,50] BAJADA: 1200 € $\xrightarrow{-50\,\%}$ 1 200 · 0,50 = 600 € [0,50 = 1 – 0,50] El precio no queda como estaba. En total, baja 200 €. ÍNDICE DE VARIACIÓN TOTAL = ÍNDICE 1.ª VARIACIÓN · ÍNDICE 2.ª VARIACIÓN 1,50 · 0,50 = 0,75 = 1 – 0,25. Corresponde a una bajada del 25 %.
3. ***El precio de una lavadora de 520 € sube un 10 %; después, sube otro 25 % y, finalmente, baja un 30 %.*** ***a) ¿Cuál es su precio final?*** ***b) ¿Cuál es el índice de variación total? ¿A qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde?***	a) 520 $\xrightarrow{+10\,\%}$ 520 · 1,10 = 572 $\xrightarrow{+25\,\%}$ 572 · 1,25 = 715 $\xrightarrow{-30\,\%}$ $\longrightarrow$ 715 · 0,70 = 500,50 El precio final es 520 · 1,10 · 1,25 · 0,70 = 500,50 €. b) El índice de variación total es 1,10 · 1,25 · 0,70 = 0,9625. Como 0,9625 es menor que 1, ha habido una disminución. ¿De cuánto? $1 - 0{,}9625 = 0{,}0375 = \dfrac{3{,}75}{100}$. Ha bajado un 3,75 %.

Piensa y practica

9. Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %.

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

10. Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5 % anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Aproximaciones y errores

1. Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 150 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

2. ¿En cuál de las aproximaciones dadas en cada caso se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{cases} 4{,}6 \\ 4{,}7 \end{cases}$ b) $1{,}546 \approx \begin{cases} 1{,}5 \\ 1{,}6 \end{cases}$

c) $\sqrt{6} \approx \begin{cases} 2{,}44 \\ 2{,}45 \end{cases}$ d) $\sqrt{10} \approx \begin{cases} 3{,}16 \\ 3{,}2 \end{cases}$

3. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo en cada caso?

a) Precio de un coche: 12 400 €.

b) Tiempo de una carrera: 34,6 min.

c) Asistentes a una manifestación: 250 000.

d) Diámetro de una bacteria: 0,0006 mm.

4. ¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:

a) Altura de un chica: 1,75 m.

b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

Porcentajes

5. Calcula mentalmente.

a) 20 % de 340 b) 2,5 % de 400

c) 75 % de 4 000 d) 150 % de 200

e) 60 % de 250 f) 12 % de 12

6. ¿Qué porcentaje representa?

a) 78 de 300 b) 420 de 500

c) 25 de 5 000 d) 340 de 200

7. Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

a) El 28 % es 98. b) El 15 % es 28,5.

c) El 2 % es 325. d) El 150 % es 57.

8. ¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada caso?

a) Aumenta un 12 %. b) Disminuye el 37 %.

c) Aumenta un 150 %. d) Disminuye un 2 %.

e) Aumenta un 10 % y, después, el 30 %.

f) Disminuye un 25 % y aumenta un 42 %.

9. Calcula el índice de variación y la cantidad final:

a) 325 aumenta el 28 %.

b) 87 disminuye el 80 %.

c) 425 aumenta el 120 %.

d) 125 disminuye el 2 %.

e) 45 aumenta el 40 % y el 30 %.

f) 350 disminuye el 20 % y el 12 %.

10. ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?

a) 1,54 b) 0,18 c) 0,05

d) 2,2 e) 1,09 f) 3,5

11. ¿Qué porcentaje es?

a) El 40 % del 40 %. b) El 25 % del 20 %.

c) El 30 % del 120 %. d) El 150 % del 20 %.

12. Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑+18 %	
4 500	↓–48 %	
75	↑+110 %	
5 600		4 592
326		603,1
	↑+32 %	165
	↓–0,8 %	4 140

13. Relaciona fracciones con porcentajes.

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60		
PORCENTAJE				$24{,}\widehat{8}$ %	$13{,}\widehat{6}$ %

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

Proporcionalidad

14. Los vecinos de una lujosa urbanización abonan 390 € mensuales por las 130 farolas que alumbran sus calles.

¿Cuántas farolas han de suprimir si desean reducir la factura mensual a 240 €?

15. Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo.

¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?

16. El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios.

¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?

17. Un campamento de refugiados que alberga a 4 600 personas tiene víveres para 24 semanas.

¿En cuánto se reducirá ese tiempo con la llegada de 200 nuevos refugiados?

18. Un peregrino del Camino de Santiago, que camina seis horas cada jornada, ha invertido 5 días y 2 horas en recorrer una distancia de 128 kilómetros.

¿Qué distancia recorre al día?

19. En España se consumen, aproximadamente, 8,5 millones de toneladas de papel al año.

¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones). Da la respuesta con un error absoluto menor que 0,5 kg.

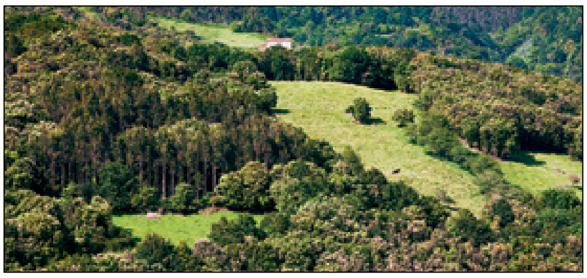
20. Una locomotora, a una velocidad de 85 km/h, tarda 3 horas y 18 minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades.

¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?

Problemas clásicos

21. Dos repartidores de pizzas cobran 340 € por un trabajo realizado conjuntamente. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas, ¿cuánto cobrará cada uno?

22. Se han abonado 15 000 € por la limpieza de un bosque realizada por dos cuadrillas de trabajadores. La primera cuadrilla está formada por 12 operarios y ha trabajado durante 8 días. La segunda cuadrilla tiene 15 personas y ha trabajado 10 días. ¿Cuánto corresponde a cada brigada? ¿Y a cada trabajador? (Da la solución aproximando a las unidades y di de qué orden es el error absoluto cometido).



23. Tres hermanos se reparten una herencia de 2 820 € de forma que por cada cinco euros que reciba el mayor, el mediano recibirá cuatro, y el pequeño, tres. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?

24. Añadimos 0,5 *l* de alcohol de 50° a 0,75 *l* de alcohol de 80°. ¿Qué concentración tendrá la mezcla?

25. En una bodega se mezclan 7 *hl* de vino de alta calidad que cuesta a 450 € el hectólitro, con 11 *hl* de vino de calidad inferior a 280 €/*hl*. ¿A cómo sale el litro del vino resultante? (Aproxima hasta las décimas y di el orden del error cometido).

26. Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120 km/h. La distancia entre A y B es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan.

27. Un camión sale de cierta población a una velocidad de 90 km/h. Cinco minutos más tarde sale en su persecución una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al camión?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Porcentajes

28. La masa de un átomo de carbono es el 5 % de la de un átomo de uranio.

Si la masa atómica del uranio es $4 \cdot 10^{-25}$ g, ¿cuál es la del carbono?

29. La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20 % de la cantidad diaria recomendada.

Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

30. El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja.

Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?

31. El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,56 € el litro.

¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

32. Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones.

¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación?

33. Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?

34. Pagué 187,20 € por un billete de avión de 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

35. El kilo de tomates subió un 20 % y después bajó un 25 %. Si costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?

Autoevaluación

1. Indica el índice de variación y la cantidad final en cada caso:

a) 300 disminuye un 12 % y después un 35 %.

b) 1 520 disminuye un 90 % y después aumenta un 150 %.

2. Indica el porcentaje de aumento o de disminución que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación:

a) 1,07 b) 0,78 c) 2,2

3. Por un libro que costaba 12,50 €, solo he tenido que pagar 9,50 €.

Calcula el tanto por ciento de rebaja que se ha aplicado al libro.

4. El precio de los tomates ha subido un 3,5 % y su precio es ahora 2,50 € el kilo.

a) ¿Cuál era el precio antes de la subida?

b) Si expresas el resultado del apartado anterior con dos cifras significativas, ¿qué puedes decir del error absoluto cometido?

5. Mezclamos 20 kg de harina de 1,25 €/kg con 35 kg de otra harina de 0,75 €/kg.

¿Cuál será el precio final de la mezcla?

6. Queremos repartir 756 € entre tres amigos de 12, 13 y 15 años de forma proporcional a la edad de cada uno.

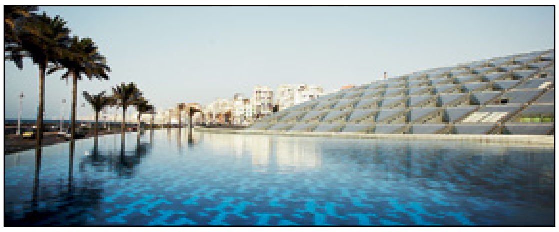
¿Qué cantidades recibirán?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Progresiones

Progresiones geométricas en el siglo III a. C.

Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides** (siglo III a. C.). Fue el fundador de la escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Los elementos*. Se compone de 13 libros, cuatro de ellos dedicados a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas, aunque con nomenclatura muy diferente a la que usamos ahora.



Moderna Biblioteca de Alejandría (Egipto).

Euclides rodeado de discípulos en el cuadro "La escuela de Atenas" de Rafael Sanzio.

Y las aritméticas, en el siglo I

En el siglo I **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no había tratado Euclides cuatrocientos años antes.

Una sucesión muy famosa

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \dots$$

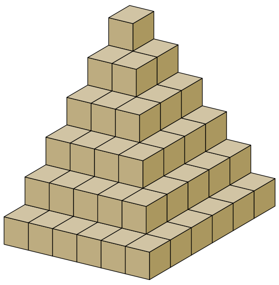
Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: Fibonacci), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: "¿Cuántas parejas de conejos se producirán a lo largo de un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes?".

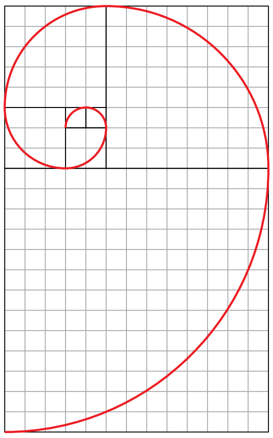
Torre de Pisa (Italia).

35

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Sucesiones





¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

Las *sucesiones* son conjuntos de números dados ordenadamente. Por ejemplo:

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

f) 1, 2, 4, 7, 11, 16, …

g) 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

h) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …

i) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, …

Cada una de las sucesiones anteriores se construye siguiendo un cierto criterio. Algunos son evidentes:

— Se pasa de un término a otro sumando (o multiplicando por) siempre la misma cantidad.

— Cada término es el cuadrado del lugar en que se encuentra.

Otros son menos evidentes:

— Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

— Alternativamente, sumamos o multiplicamos por un mismo número.

A los elementos de la sucesión los llamamos *términos*. Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término… de una sucesión s, pero es más cómodo llamarlos $s_1, s_2, s_3, \dots$

Así, por ejemplo, para indicar que en la primera sucesión la diferencia de cada término al anterior es 4, podemos escribir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = 4$$

En la web

Refuerza el concepto de sucesión.

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ \dots$$

Piensa y practica

1. Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

2. Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.

3. Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ entre cada dos términos consecutivos de la sucesión c) de arriba.

4. Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Término general de una sucesión

A veces, podemos encontrar una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que este ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión a) 1, 5, 9, 13, 17, … de la página anterior, encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, …, obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$a_n = 4n - 3$ es el *término general* de esta sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión s (y se simboliza con s_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $s_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Las sucesiones que habitualmente manejaremos en este curso estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente.**

En la web

Refuerza el concepto de término general de una sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, cada término es la suma de los dos anteriores. Se define así: $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$.

Piensa y practica

5. Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.

6. Escribe los cinco primeros términos de:

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

7. Forma una sucesión recurrente con estos datos:

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

8. Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.

9. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ b) $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n = (n-1)(n-2)$ d) $d_n = n^2 - n$

10. Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

11. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).

12. a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$a_n \rightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$b_n \rightarrow 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Progresiones aritméticas

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 [+] [+] 2 [=] [=] [=] [=] [=] …

b) 20 [+] [+] 120 [=] [=] [=] [=] [=] …

c) 2 [+/–] [+] [+] 9 [=] [=] [=] [=] [=] …

d) 0,04 [+] [+] 5,83 [=] [=] [=] [=] …

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 [=] [Ans] [+] 3 [=] [=] [=] [=] …

b) 120 [=] [Ans] [+] 20 [=] [=] [=] …

c) 9 [=] [Ans] [+] [(–)] 2 [=] [=] [=] …

d) 5,83 [=] [Ans] [+] 0,04 [=] [=] [=] …

Observa las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, …

d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …

A estas sucesiones se las llama *progresiones aritméticas*.

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia. Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término 100?

— Para pasar del a_1 al a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

— Cada paso supone aumentar 3 unidades.

— Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.

— Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

Observa

Una progresión aritmética cuyo primer término es a y cuya diferencia es d, se puede definir de forma recurrente así:

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d$$

El **término general** a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Para obtener esta expresión basta tener en cuenta que para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d.

Piensa y practica

En la web Refuerza el concepto de progresión aritmética.

1. El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = -3$.

2. Calcula, para las progresiones de arriba:

b_{36} $\quad c_{31}$ $\quad d_{1\,000}$

3. Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).

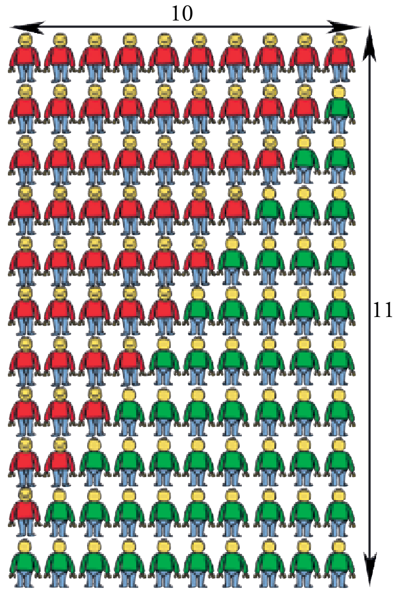
4. a) Si dos términos de una progresión aritmética s son:

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



$S_{10} = \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Veamos cómo obtenemos la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 10$:

$$\begin{array}{rl} & S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ + & S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 2S_{10} = \underbrace{11 + 11 + 11 + \quad \dots \quad + 11 + 11}_{10 \text{ veces}} \end{array}$$

$$2S_{10} = 10 \cdot 11 \;\rightarrow\; S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Esta forma simplificada de proceder se debe a la siguiente propiedad:

En una progresión aritmética de n términos, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es siempre la misma.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \quad \dots \quad a_{n-2} \xleftarrow{-d} a_{n-1} \xleftarrow{-d} a_n$$

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{array}\right\} a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n; \qquad \left.\begin{array}{r} a_3 = a_1 + 2d \\ a_{n-2} = a_n - 2d \end{array}\right\} a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

Basándonos en esta propiedad y utilizando el mismo procedimiento, podemos obtener la fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

$$\begin{array}{rl} \text{Suma} \rightarrow & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \left.\begin{array}{r}\text{Suma}\\ \text{invertida}\end{array}\right\} \rightarrow & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (\quad) + (\quad) + \dots + (\quad) + (\quad) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Hay n paréntesis y el resultado de cada uno de ellos es $a_1 + a_n$. Por tanto:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \;\rightarrow\; S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

En la web

Actividades para reforzar el cálculo de la suma de los términos de una progresión aritmética.

La **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Piensa y practica

5. Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

6. a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

7. Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

8. Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{19} + a_{20}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Progresiones geométricas

Con calculadora

Añade dos términos a cada una de las progresiones a), b) y c) que aparecen a la derecha.

Obtén nuevamente, con la calculadora, las tres progresiones geométricas usando el **factor constante.**

Por ejemplo, para a):

2 ⊗⊗ 3 ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ …
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48 96

O bien, con la calculadora de pantalla descriptiva:

3 ⊜ Ans ⊗ 2 ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ …
↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48

Entrénate

1. Asocia cada una de las progresiones geométricas I, II y III con su término general:

I) 125, 50, 20, …

II) 1 000, 800, 640, …

III) 1 000; 160; 25,6; …

$a_n = 1\,000 \cdot (0{,}16)^{n-1}$

$b_n = 125 \cdot (0{,}4)^{n-1}$

$c_n = 1\,000 \cdot (0{,}8)^{n-1}$

2. Halla el término general de estas progresiones geométricas:

a) $a_1 = 4,\ r = 3$

b) $b_1 = 3,\ r = -2$

c) $c_1 = 5,\ r = 5$

d) $d_1 = -2,\ r = 1/3$

Observa las siguientes sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

c) 80; –40; 20; –10; 5; –2,5; … Su razón es $-\frac{1}{2} = -0{,}5$.

> Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado **razón.**

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón. Por ejemplo, en la progresión a), el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. ¿Cómo hallaríamos el término 25?

— Para pasar del a_1 al a_{25}, hemos de dar 24 pasos.

— Cada paso supone multiplicar por 2. Por tanto, para pasar del a_1 al a_{25} habremos de multiplicar veinticuatro veces por 2; es decir, por 2^{24}.

— Así, $a_{25} = 3 \cdot 2^{24} = 3 \cdot 16\,777\,216 = 50\,331\,648$.

> El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando del siguiente modo:
>
> Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por r. Por tanto:
>
> $$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Problemas resueltos

1. ***Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 250$ y $a_2 = 300$. Calcular r, a_6 y a_n.***

$a_2 = a_1 \cdot r \ \rightarrow\ 300 = 250 \cdot r \ \rightarrow\ r = \frac{300}{250} = 1{,}2$

$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 250 \cdot (1{,}2)^5 = 622{,}08$

Término general: $a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$

Piensa y practica

1. En las siguientes progresiones geométricas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5,\ r = 2 \rightarrow a_6$ b) $b_1 = 1/2,\ r = -2 \rightarrow b_7$

c) $c_1 = 10,\ r = 0{,}1 \rightarrow c_5$ d) $d_1 = 15,\ r = 1/2 \rightarrow d_8$

2. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 50, 500, 5 000, … b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$

c) –3, 6, –12, 24, … d) $5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \frac{135}{8}, \ldots$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Sucesiones. Término general

1. Calcula los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$

e) $e_n = n(n - 2)$

f) $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

2. Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

a) $a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

3. Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones y escribe tres términos más en cada una de ellas:

a) 11, 9, 7, 5, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

e) 8, 12, 18, 27, …

f) 0, 3, 8, 15, …

4. Halla el término general de estas sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) 1, 3, 9, 27, …

d) $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $4 \cdot 5$; …

Progresiones

5. Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos en cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$

b) $a_1 = 32$; $d = -5$

c) $a_1 = 5$; $d = 0{,}5$

d) $a_1 = -3$; $d = -4$

6. Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \ldots$

7. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:

a) $a_1 = 0{,}3$; $r = 2$

b) $a_1 = -3$; $r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200$; $r = -0{,}1$

d) $a_1 = \frac{1}{81}$; $r = 3$

8. Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 5; 6; 7,2; 8,64; …

c) 0,7; 0,07; 0,007; …

d) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \ldots$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

9. Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) 0,2; 0,02; 0,002; …

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

e) 22; –11; 5,5; –2,75; …

f) 18, 13, 8, 3, …

10. Determina la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y $a_7 = 32$.

11. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $d = 5$; $a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

c) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$

d) $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

12. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_3 = 3$; $r = 1/10$

b) $a_4 = 20,25$; $r = -1,5$

c) $a_2 = 0,6$; $a_4 = 2,4$

d) $a_3 = 32$; $a_6 = 4$

13. La suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = -5$ es 120. Calcula a_{10} y la diferencia.

Autoevaluación

1. Escribe el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$

b) 3; 0,6; 0,12; 0,024; …

c) 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

2. Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.

3. Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguiente progresión: 9; 6,5; 4; 1,5; …

4. En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.

5. Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 El lenguaje algebraico

Agrimensores egipcios. Pinturas de las tumbas de Mena y Najt en Luxor (Egipto).

Primeros pasos, "álgebra retórica"

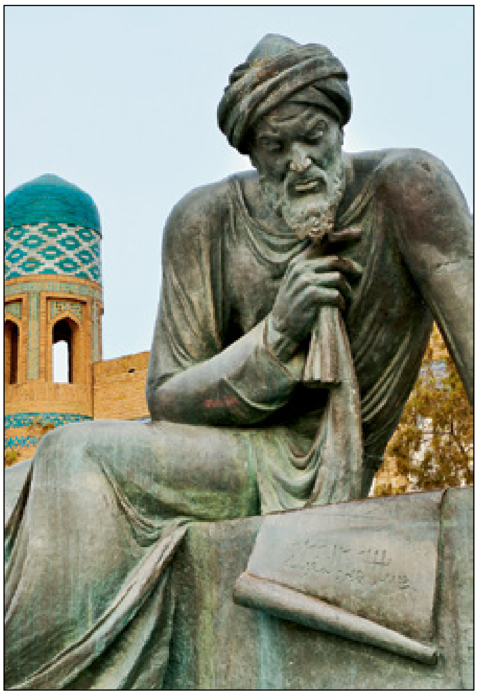
Los problemas algebraicos están presentes en todas las antiguas civilizaciones, casi siempre ligados a lo práctico: repartos, herencias, cálculo de superficies…

Los antiguos mesopotámicos y egipcios practicaban un álgebra "retórica", utilizando el lenguaje natural: "Si saco la tercera parte del trigo que hay en el montón, y…".

Primeros símbolos, "álgebra sincopada"

La evolución del álgebra se refleja en la mejora del simbolismo y en la sistematización de las técnicas para resolver ecuaciones.

En el siglo III, **Diofanto de Alejandría** inventó una notación simbólica que, aunque rudimentaria, supuso un importante progreso ("álgebra sincopada").



Estatua de Al-Jwarizmi en Jiva (Uzbequistán).

Los árabes y "el arte de la cosa"

En el siglo IX, **Al-Jwarizmi** escribió un manual que tuvo una gran influencia en todo el mundo civilizado, incluso siglos después.

Llamaba a la incógnita *la cosa*, nomenclatura que pasó a Europa, donde al álgebra se la llegó a denominar "el arte de la cosa".

… Y llegó el "álgebra simbólica"

El desarrollo del álgebra en Europa no fue uniforme.

Son de destacar los algebristas italianos del siglo XVI.

El álgebra, como lenguaje de símbolos, tal como la conocemos hoy, terminó de evolucionar con los estudios de los franceses **Vieta** (finales del siglo XVI) y **Descartes** (siglo XVII).

Vieta (1540-1603).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Expresiones algebraicas

Etimología

Monomio y **polinomio:** vienen del griego:

mono significa *uno*.

poli significa *muchos*.

nomos significa *partes*.

Identidad: viene del latín *idem*, que significa *lo mismo*.

Ecuación: viene del latín *aequare*, que significa *igualar*.

Trabajar en álgebra consite en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades desconocidas se llaman **variables** o **incógnitas** y se representan por letras.

Al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema, se obtienen **expresiones algebraicas.**

Hay expresiones algebraicas de muy distinto tipo:

- **Monomios:** $7x^3$, $-\frac{3}{2}x$, $4\pi r^2$ (superficie de la esfera)
- **Polinomios:** $5x^3 + x^2 - 11$, $2\pi r h + 2\pi r^2$ (área total del cilindro)

Algunas expresiones algebraicas contienen el signo "=":

- **Identidades:** $5(x + 4) = 5x + 20$. La segunda parte de la igualdad se consigue operando en la primera.
- **Ecuaciones:** $5(x + 4) = x + 44$. La igualdad solo es cierta para algún valor de la incógnita x. En este caso, para $x = 6$.

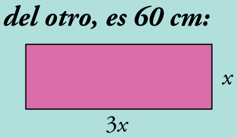
Ejercicio resuelto

Expresar algebraicamente:

***a)** El triple de un número menos cuatro unidades.*

***b)** El triple del resultado de restarle cuatro unidades a un número.*

***c)** El perímetro de un rectángulo, uno de cuyos lados es triple del otro, es 60 cm:*



***d)** Si gasto 3/5 de lo que tengo y, además 90 €, me quedaré con la tercera parte de lo que tengo.*

a) $3x - 4$. Es un polinomio.

b) $3(x - 4)$. Es un polinomio.

c) $x + 3x + x + 3x = 60$. Es una ecuación cuya solución es $x = 7{,}5$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 7,5 cm × 22,5 cm.

d) Vamos a obtener razonadamente la expresión algebraica a la que da lugar este enunciado:

TENGO	GASTO	ME QUEDA	RELACIÓN OBTENIDA
x	$\frac{3}{5}x + 90$	$x - \left(\frac{3}{5}x + 90\right)$	$x - \left(\frac{3}{5}x + 90\right) = \frac{1}{3}x$
↑ MONOMIO	POLINOMIOS		↑ ECUACIÓN

La solución de esta ecuación es $x = 1\,350$.

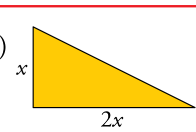
Por tanto, el dinero que tengo es 1 350 €.

Piensa y practica

1. Describe mediante una expresión algebraica cada uno de los enunciados siguientes:

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) 

El área de este triángulo es 36 cm^2.

d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Monomios

Monomio es el producto de un número por una o varias letras (variables).

En un monomio, *las letras* (**parte literal**) *representan números* de valor desconocido o indeterminado. Por eso conservan todas las propiedades de los números y sus operaciones.

- El **coeficiente** de un monomio es el número que multiplica a la parte literal.
- Se llama **grado** de un monomio al número total de factores que forman su parte literal.

  Los números son monomios de grado cero, pues $x^0 = 1$.
- Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Ejemplos

- Estas expresiones son monomios:

  $$7a^2, \quad \frac{4}{5}xy^2, \quad (5 + \sqrt{2})x^5$$

  Sus coeficientes respectivos son:

  $$7, \quad \frac{4}{5} \quad y \quad 5 + \sqrt{2}$$
- El grado de $7a^2 = 7(a \cdot a)$ es 2.

  El de $\frac{4}{5}xy^2 = \frac{4}{5}(x \cdot y \cdot y)$ es 3.
- $9 = 9x^0$ es un monomio de grado cero.
- $5abx^2$ y $-7abx^2$ son semejantes.

Operaciones con monomios

- La **suma** de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^5 = 18x^5$

  Si dos monomios no son semejantes, su suma no se puede simplificar y hay que dejarla indicada. Entonces, el resultado ya no es un monomio.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^3$ no admite simplificación.
- La **resta** es un caso particular de la suma.

  Por ejemplo: $3abx^2 - 8abx^2 = -5abx^2$
- El **producto** de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

  Por ejemplo: $(3x^2ab) \cdot (5xac) = 15x^3a^2bc$
- El **cociente** de dos monomios es el resultado de dividir sus coeficientes y sus partes literales. Puede ser monomio y puede no serlo.

  Por ejemplo, $\frac{3x^5y}{6x^2y} = \frac{1}{2}x^3$ es un monomio, pero $\frac{3x^5y}{6x^2y^4} = \frac{x^3}{2y^3}$ no es un monomio.

Piensa y practica

1. ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$ b) $11xy^2$ c) -12

2. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$

d) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

3. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ b) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ d) $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

4. Simplifica cada uno de los siguientes cocientes entre monomios:

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Polinomios

Ejemplos

- Son polinomios:
  $3x^2y + 5x^3 - 8$
  $2x^2 + 6x^2 - 5x + 1$
- Simplificación:
  $5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 \rightarrow$
  $\rightarrow x^4 + 3x^2 + 1$
- El grado de $3x^2y + 5x - 8y^2$ es 3, pues es el grado de $3x^2y$.
- Simplificar antes de asignar el grado a un polinomio:
  $7x^3 + 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 =$
  $= 5x^2 - 2x \rightarrow$ Su grado es 2.

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.**

Un monomio puede ser considerado polinomio con un solo término.

- Si en un polinomio hay monomios semejantes, conviene operar, simplificar la expresión y obtener el polinomio en su **forma reducida.**
- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida.

  Es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan.
- El **valor numérico** de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a. Por ejemplo, el valor de $2x^3 - 5x^2 + 7$ para $x = 2$ es $2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 7 = 3$.
- Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

Definición

Se llama **opuesto** de un polinomio al que resulta de cambiar de signo todos sus términos.

$$P = x^3 + 2x^2 - 11$$

Opuesto de P:

$-(x^3 + 2x^2 - 11) = -x^3 - 2x^2 + 11$

En la web
Ayuda para calcular sumas y restas de polinomios.

En la web
Grado, términos y coeficientes de un polinomio.

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y sumamos los monomios semejantes. Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. Por ejemplo, sean $A = 6x^2 - 4x + 1$ y $B = x^3 + 2x^2 - 11$:

$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ +B & \rightarrow & x^3 + 2x^2 \qquad - 11 \\ \hline A+B & \rightarrow & x^3 + 8x^2 - 4x - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 6x^2 - 4x + 1 \\ -B & \rightarrow & -x^3 - 2x^2 \qquad + 11 \\ \hline A-B & \rightarrow & -x^3 + 4x^2 - 4x + 12 \end{array}$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados. Por ejemplo:

$$(3x^2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 1) = 3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 2x^2 - 3x^2 \cdot 1 = 3x^5 - 6x^4 - 3x^2$$

Piensa y practica

1. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

2. Sean $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

3. Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$　b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$　d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$　f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$　h) $8x^2(x^2 + 3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$　j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

En la web
- Practica la suma de polinomios.
- Practica la resta de polinomios.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 5x^3 - 2x^2 - 1$, $Q = 6x - 3$

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 5x^3 & -2x^2 & & -1 & \longleftarrow P \\
 & & & 6x & -3 & \longleftarrow Q \\
\hline
 & -15x^3 & +6x^2 & & +3 & \longleftarrow \text{producto de } -3 \text{ por } P \\
30x^4 & -12x^3 & & -6x & & \longleftarrow \text{producto de } 6x \text{ por } P \\
\hline
30x^4 & -27x^3 & +6x^2 & -6x & +3 & \longleftarrow P \cdot Q
\end{array}$$

Ten en cuenta

Esta forma de disponer los cálculos permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

En la web

Ayuda para calcular productos de polinomios.

Cuando hay pocos términos, no hace falta utilizar el método anterior, podemos realizar el producto directamente:

$$(2x^2 - 1)\,(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

Productos notables

Se suelen llamar así a las tres igualdades siguientes:

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

Estas igualdades ya las conocías, pero las seguirás utilizando con frecuencia, por lo que es necesario que las manejes con soltura.

Por ejemplo:

$$(5x - 3)^2 = (5x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 = 25x^2 + 9 - 30x$$

$$(4x - 3) \cdot (4x + 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$$

En la web

Ayuda para manejar las identidades notables.

En la web

Justificación geométrica de las identidades notables.

Piensa y practica

4. Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

5. Opera y simplifica la expresión resultante.

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

6. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ b) $(2x - 5)^2$

c) $(1 - 6x)^2$ d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

e) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ f) $(ax + b)^2$

7. Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ d) $(ax + b)(ax - b)$

En la web

- Practica el producto de polinomios.
- Practica con las identidades notables.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Identidades

La igualdad $2x + 5x = 7x$ es una identidad porque es cierta cualquiera que sea el valor de x.

Conoces muchas identidades. Aquí tienes algunas:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Los llamados **productos notables** son, también, identidades.

Todas ellas son consecuencia de propiedades aritméticas o simples traducciones de estas.

> Una **identidad** es una **igualdad algebraica** que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen.

Utilidad de las identidades

Las identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más cómoda de manejar. Por ejemplo:

$$(x + 5)^2 - (x - 3)^2 \overset{(1)}{=} (x^2 + 25 + 10x) - (x^2 + 9 - 6x) \overset{(2)}{=}$$
$$= x^2 + 25 + 10x - x^2 - 9 + 6x \overset{(3)}{=}$$
$$= 16x + 16 \overset{(4)}{=} 16(x + 1)$$

Cada una de las cuatro igualdades es una identidad.

La expresión final, $16(x + 1)$, es más sencilla y cómoda de manejar que la inicial, pero es **idéntica** a ella. Por eso, podemos sustituir la primera expresión por la última, y el cambio es ventajoso.

Aclaraciones

(1) Se han desarrollado el cuadrado de una suma y el de una diferencia.
(2) Un paréntesis precedido del signo menos obliga a cambiar de signo a todos sus términos.
(3) Se reducen términos semejantes.
(4) Se saca 16 como factor común.

Piensa y practica

1. De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $a + a + a = 3a$
b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$
c) $x^2 \cdot x = 27$
d) $a + a + a = 15$
e) $x \cdot x \cdot x = x^3$
f) $a + 5 + a = 2a + 5$
g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$
h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

2. Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:

a) $\dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$
b) $5a - 4 + a - \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$
c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b = [?]$
d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 = [?]$

3. Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \rightarrow 5x + 3$
b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \rightarrow x + 2$
c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \rightarrow x^4 - 1$
d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \rightarrow 2(x - 1)$
e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \rightarrow 4ab$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web Ayuda para sacar factor común.

No lo olvides

Cuando un sumando coincide con el factor común, ten en cuenta que está multiplicado por 1.

$$xy + x^2 + x = x(y + x + 1)$$

Sacar factor común

En la expresión

$$3xy + 6x^2z + 9xyz$$

la x y el 3 están multiplicando en todos los sumandos. Son factores comunes a todos ellos. Podemos sacarlos fuera, del siguiente modo:

$$3xy + 6x^2z + 9xyz = 3x \cdot y + 3x \cdot 2xz + 3x \cdot 3yz = 3x(y + 2xz + 3yz)$$

A esta transformación se le llama **sacar factor común.** Se utiliza para simplificar expresiones y para resolver algunas ecuaciones que aparecerán más adelante.

Comprueba que si quitaras el paréntesis en la expresión final, volverías a obtener la inicial.

Piensa y practica

En la web Refuerza cómo sacar factor común.

4. Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

h) $\frac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \frac{4}{3}(2x^2 + 1)$

5. Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.

a) $4x^2 - 25$ b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $x^2 + 2x + 1$ d) $9x^2 + 6x + 1$

e) $4x^2 + 25 - 20x$ f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$ h) $\frac{(x^3)^2}{25} + \frac{x^3}{5} + \frac{1}{4}$

i) $16x^4 - 9$ j) $\frac{x^6}{100} + \frac{8x^3}{5} + 64$

6. Completa estas igualdades para que sean identidades:

a) $x^2 - \ldots + 1 = (x - \ldots)^2$

b) $4x^2 + \ldots + 36 = (\ldots + 6)^2$

c) $9x^2 - \ldots = (3x + \ldots)(\ldots - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + \ldots = (x + \ldots)^2$

7. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$

d) $(5x - 4)(2x + 3) - 5$

e) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$

f) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

8. Asocia cada expresión de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:

$12x^3 - 8x^5 + 4x^2y^2 - \frac{4}{3}x^2$	$2(x - 2)$
$(x^2 - 1) + (x^2 - 2x + 1) - (4x - 4)$	$3x$
$6(x^2 - 4x + 4) - (2x^2 - 8) + (30x - 60)$	$x - 1$
$9x^2 - 18xy^2 - 6xyz + 6x$	$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

9. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ por 8

b) $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} - \frac{12x + 4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x - 4)^2}{8} - \frac{x(x + 1)}{2} - 5$ por 8

d) $\frac{3(x + 2)}{4} + \frac{3x + 5}{2} - \frac{5(4x + 1)}{6} + \frac{25}{12}$ por 12

e) $\frac{x - 1}{4} + 36 - \frac{x + 7}{6} - \left(\frac{4x + 7}{9} + 11\right)$ por 36

f) $\frac{(x + 2)^2}{5} - \frac{x^2 - 9}{4} + \frac{(x + 3)^2}{2} + \frac{1}{5}$ por 20

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1. Expresa en lenguaje algebraico con una sola incógnita.

a) El doble de un número más su cuadrado.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad de un número aumentado en 3.

d) Un múltiplo de 3 menos 7.

2. Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.

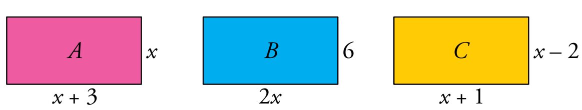
b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La suma de las edades de un padre y su hijo hace 5 años.

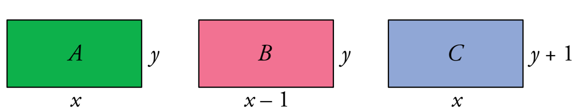
3. Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C:

a) $12x$ b) $4x - 2$ c) $4x + 6$

d) $4x + 12$ e) $x^2 + 3x$ f) $x^2 - x - 2$



4. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



Monomios y polinomios. Operaciones

5. Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$ b) $(-7x)^3$ c) $8x$ d) $(xy)^2$

e) $\dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{4}{5}x^3$ g) $\dfrac{-3yx}{5}$ h) $\dfrac{1}{2}x$

6. Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

7. Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

8. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(6x^2)(-3x)$

b) $(2xy^2)(4x^2y)$

c) $\left(\dfrac{3}{4}x^3\right)\left(\dfrac{1}{2}x^3\right)$

d) $\left(\dfrac{1}{4}xy\right)\left(\dfrac{3xz}{2}\right)$

9. Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

10. Considera estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

11. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:

a) $\dfrac{3 + x}{8} - \dfrac{5 - x}{6} - \dfrac{x + 1}{12}$

b) $\dfrac{3}{4}(x - 1) - \dfrac{1}{3}(x + 1) + \dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{3x - 3}{5} - \dfrac{x + 1}{3} + \dfrac{1}{2}$

Igualdades notables

12. Desarrolla estas expresiones:

a) $(x + 6)^2$ b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$ d) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$ f) $\left(\dfrac{2}{5}x - \dfrac{1}{3}y\right)^2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

13. Expresa como diferencia de cuadrados.

a) $(x+7)(x-7)$

b) $(3+x)(3-x)$

c) $(3+4x)(3-4x)$

d) $(x^2+1)(x^2-1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

f) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$

14. Extrae factor común.

a) $12x^3-8x^2-4x$ b) $-3x^3+x-x^2$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2$ d) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

- $\boldsymbol{x^2+25+10x=x^2+5^2+2\cdot 5x=(x+5)^2}$

a) $x^2+49-14x$ b) x^2+1-2x

c) $4x^2+1+4x$ d) $x^2+12x+36$

16. Transforma en producto.

a) $4x^2-49$ b) $x^2-18x+81$

c) $9x^2+12x+4$ d) $121-100x^2$

17. Reduce las siguientes expresiones:

a) $18\left[\frac{(2x-5)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{6}\right]$

b) $8\left[\frac{x(x-3)}{2}+\frac{x(x+2)}{4}-\frac{(3x+2)^2}{8}\right]$

c) $30\left[\frac{x(x-2)}{15}-\frac{(x+1)^2}{6}+\frac{1}{2}\right]$

18. Extrae factor común, igual que se ha hecho en el ejemplo.

- $\boldsymbol{3x(x+1)-x^2(x+1)+(x+1)(x^2-2)=}$
  $\boldsymbol{=(x+1)(3x-x^2+x^2-2)=(x+1)(3x-2)}$

a) $2x(x-2)+x^2(x-2)-3(x-2)$

b) $x^2(x+1)-x^2(x+2)+2x^2(x-3)$

c) $3x^2(x+3)-6x(x+3)$

Autoevaluación

1. Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:

a) El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.

b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

c) El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

2. Efectúa y reduce:

a) $x(3x-2)^2-(x-3)(2x-1)x$

b) $4\left[(x-2)^2-\frac{3}{4}x^2-4\right]$

3. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{5(x-1)}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x(x-1)}{2}$$

4. Transforma en productos los polinomios siguientes:

a) $4x^2-12x+9$

b) $4x^2-9$

5. ¿Verdadero o falso?

Justifica y pon ejemplos.

a) La expresión $9x^3-15x^2=3x^2(3x-5)$ es una identidad.

b) Si multiplicamos dos binomios de grados 1 y 2, se obtiene un polinomio de grado 3.

c) Si sumamos dos binomios, se obtiene siempre un binomio.

d) Los números son monomios.

e) Los monomios $3a^2b$ y $-3ab^2$ son semejantes.

f) Al realizar la división $3x^2y^2 : 6xy^2$ se obtiene un monomio.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Página 11

Resuelve

1. Expresa 3/7 como lo haría un escriba en el antiguo Egipto.

Observamos que $\frac{3}{7}$ es mayor que $\frac{1}{3}$.

$\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$. Por tanto, $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}$.

$\frac{2}{21}$ es mayor que $\frac{1}{11}$, y $\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{1}{231}$ $\rightarrow$ $\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$

Así, $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$. Esta es una de las muchas posibles descomposiciones.

2. Expresa en forma decimal el número que ves debajo, escrito por un matemático Italiano del siglo XV:

3 ; 8 , 29 , 44

¿Es ese algún número significativo en matemáticas? ¿Cuál?

$3;\,8,\,29,\,44 = 3+\frac{8}{60}+\frac{29}{60^2}+\frac{44}{60^3}=3,14159259259$

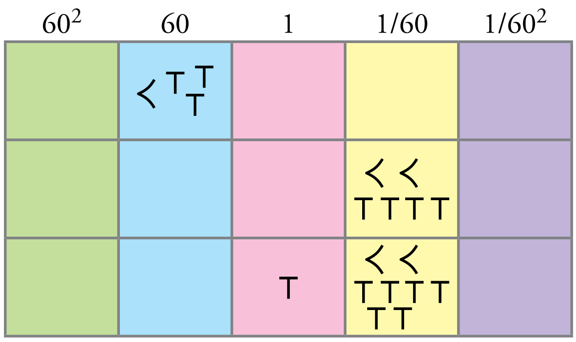
Esta es una aproximación del número π.

3. ¿Cómo escribirías en la tabla de arriba los números 780, 3/5 y 1,6?

$780 = 60 \cdot 13 \rightarrow$

$\frac{2}{5}=\frac{24}{60} \rightarrow$

$1,6 = 1+\frac{6}{10}=1+\frac{36}{60} \rightarrow$



4. ¿Qué números ves en esta tablilla?

$1\cdot 60^2+13\cdot 60+15=3\,600+780+15=4\,395$

$5+\frac{30}{60}=5+0,5=5,5$

$1+\frac{8}{60^2}=1+0,00222\ldots=1,00222\ldots$

1 Números racionales

Página 12

1. **¿Verdadero o falso?**

a) El número 3 es natural, entero y racional.

b) El número –12 es entero pero no natural. Sí es racional.

c) El número $\frac{7}{5}$ es racional pero no entero.

d) $\frac{18}{-3}$ es racional pero no entero.

a) Verdadero.

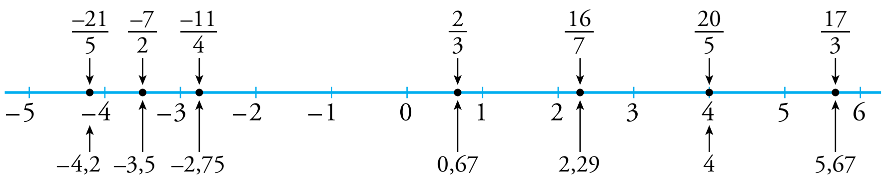
b) Verdadero.

c) Verdadero

d) Falso. $\frac{18}{-3} = -6$ es entero.

2. **Dibuja en tu cuaderno una recta como la que aquí te presentamos y sitúa sobre ella, de forma aproximada, los siguientes números:**

$$\frac{17}{3},\ -\frac{11}{4},\ \frac{20}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{7},\ -\frac{21}{5},\ -\frac{7}{2}$$



Página 13

3. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{2}{5} > -\frac{7}{4}$ **porque el primero es positivo y el segundo, negativo.**

b) $\frac{7}{3} > \frac{2}{5}$ **porque el primero es mayor que 1 y el segundo, menor que 1.**

c) $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ **porque el primero es mayor que –2 y el segundo, menor que –2.**

a) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso. $-\frac{8}{3} < -2$ y $-\frac{7}{4} > -2$. Es decir, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{4}$.

4. Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{6}{8}$ **y** $\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **y** $\frac{6}{10}$ **d)** 3 **y** $\frac{11}{2}$

a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ d) $3 < \frac{11}{2}$

5. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{13}{18}$$

mín.c.m. (12, 6, 9, 4, 18) = 36

$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$; $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$; $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$; $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$; $\frac{13}{18} = \frac{26}{36}$

$\frac{20}{36} < \frac{21}{36} < \frac{24}{36} < \frac{26}{36} < \frac{27}{36}$

Por tanto: $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

2 Operaciones con fracciones

Página 14

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ **b)** $1-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{7}{5}-1$ **e)** $\frac{17}{5}-3$ **f)** $\frac{17}{3}-5$

a) $\frac{3}{3}=1$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{2}{3}$

Cálculo mental

a) $3\cdot\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}$ **d)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{1}{5}$

Cálculo mental

a) $\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{6}{5}:6$ **c)** $\frac{6}{5}:\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

a) 2 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{12}{5}$ d) 2

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

1. **a)** $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ **b)** $6-\frac{11}{4}$ **c)** $3\cdot\frac{4}{5}$ **d)** $6:\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{4}{5}:6$ **f)** $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}=\frac{28}{36}+\frac{33}{36}=\frac{61}{36}$

b) $6-\frac{11}{4}=\frac{24}{4}-\frac{11}{4}=\frac{13}{4}$

c) $3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}=6\cdot\frac{5}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

e) $\frac{4}{5}:6=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}=\frac{4}{5}\cdot 6=\frac{24}{5}$

2. **a)** $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ **b)** $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}=\left(\frac{18}{24}+\frac{28}{24}-\frac{21}{24}\right):\frac{25}{12}=\frac{25}{24}:\frac{25}{12}=\frac{25}{24}\cdot\frac{12}{25}=\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)=\left(\frac{65}{75}-\frac{21}{75}\right)\cdot\left(\frac{27}{66}+\frac{-26}{66}\right)=\frac{44}{75}\cdot\frac{1}{66}=\frac{2}{225}$

3. a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{4}\right)}{\frac{7}{4}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{3}{4}:\dfrac{7}{4}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$

b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}=\dfrac{(-3)\left(\frac{9}{15}-\frac{5}{15}\right)}{(-2)\left(\frac{20}{15}-\frac{18}{15}\right)}=\dfrac{(-3)\cdot\frac{4}{15}}{(-2)\cdot\frac{2}{15}}=\dfrac{\frac{-4}{5}}{\frac{-4}{15}}=\left(\dfrac{-4}{5}\right):\left(\dfrac{-4}{15}\right)=\left(\dfrac{-4}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{-15}{4}\right)=3$

4. a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{15}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{15}}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{7}{60}}{6+\left(\frac{-1}{25}\right)}=$

$=\dfrac{\frac{180}{60}-\frac{7}{60}}{\frac{150}{25}-\frac{1}{25}}=\dfrac{\frac{173}{60}}{\frac{149}{25}}=\dfrac{173}{60}:\dfrac{149}{25}=\dfrac{173}{60}\cdot\dfrac{25}{149}=\dfrac{4\,325}{8\,940}=\dfrac{865}{1\,788}$

b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{10}{12}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{10}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)}{\left(\frac{-3}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{-1}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{2}{3}}=$

$=\dfrac{-1}{108}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{-1}{108}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{-3}{216}=\dfrac{-1}{72}$

Página 15

Cálculo mental

Halla la parte del total que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{1}{2}$ **de 520 000 €** **b)** $\frac{3}{5}$ **de 1 000 000 de personas** **c)** $\frac{7}{10}$ **de 500 edificios**

a) 260 000 € b) 600 000 personas c) 350 edificios

Cálculo mental

Di en cada caso la cantidad total:

a) 350 es $\frac{1}{2}$ **del total.** **b) 400 es** $\frac{2}{3}$ **del total.** **c) 350 es** $\frac{7}{10}$ **del total.**

a) 700 b) 600 c) 500

Cálculo mental

Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ **b)** $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **c)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **d)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{1}{8}$

5. Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

$\frac{5}{9} \cdot 216 = 120$

Lleva recorridos 120 km.

6. He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

$3\,900 \cdot \frac{11}{3} = 14\,300$ € son la totalidad de mis ahorros.

7. De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden 4/15 a Braulio; 2/5, a Enrique, y el resto, a Ruperto. Ruperto dedica 3/10 de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperto a los frutales?

$1 - \frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{15-4-6}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ de la balsa le corresponde a Ruperto.

Ruperto dedica $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ a los frutales.

$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5\,250 = 1\,225$ *l* de agua dedica a regar frutales.

3 Números decimales

Página 16

1. Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

3,52 $\quad 2,\widehat{8} \quad 1,\widehat{54} \quad \sqrt{3} = 1,7320508...$

2,7 $\quad$ 3,5222... $\quad \pi - 2 = 1,1415926...$

3,52	Decimal exacto.
$2,\widehat{8}$	Decimal periódico puro.
$1,\widehat{54}$	Decimal periódico puro.
$\sqrt{3} = 1,7320508...$	Decimal no exacto ni periódico.
2,7	Decimal exacto.
3,5222...	Decimal periódico mixto.
$\pi - 2 = 1,1415926...$	Decimal no exacto ni periódico.

2. Ordena de menor a mayor estos números:

$2,\widehat{5} \qquad 2,5 \qquad 2,3\widehat{5} \qquad 2,505005...$

$2,3\widehat{5} < 2,5 < 2,505005... < 2,\widehat{5}$

3. Escribe tres números comprendidos entre 2,5 y $2,\widehat{5}$.

Respuesta abierta.

Por ejemplo: $2,5 < 2,51 < 2,52 < 2,5\widehat{2} < 2,\widehat{5}$

Página 17

4. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overset{\frown}{3}$ $\frac{3}{3} = 3 \cdot 0{,}333... = 0{,}999... = 0{,}\overset{\frown}{9}$ **Como** $\frac{3}{3} = 1$, **resulta que** $0{,}\overset{\frown}{9} = 1$.

b) $5{,}\overset{\frown}{4} = 5{,}\overset{\frown}{44}$ **c)** $3{,}\overset{\frown}{72} = 3{,}7272727... = 3{,}7\overset{\frown}{27}$ **d)** $0{,}\overset{\frown}{3} + 0{,}\overset{\frown}{6} = 1$

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Verdadero.

5. Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o decimales periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ **b)** $\frac{42}{150}$ **c)** $\frac{101}{1024}$ **d)** $\frac{1001}{500}$

a) $\frac{44}{150} = \frac{22}{75} \rightarrow 75 = 5^2 \cdot 3 \rightarrow$ Decimal periódico, pues en el denominador de la fracción simplificada hay algún factor (el 3) distinto de 2 y 5.

b) $\frac{42}{150} = \frac{7}{25} \rightarrow 25 = 5^2 \rightarrow$ Decimal exacto.

c) $\frac{101}{1024} \rightarrow 1024 = 2^{16} \rightarrow$ Decimal exacto.

d) $\frac{101}{500} \rightarrow 500 = 2^2 \cdot 5^3 \rightarrow$ Decimal exacto.

6. Calcula en tu cuaderno:

a) $7{,}\overset{\frown}{45} - 3{,}4\overset{\frown}{54}$ **b)** $6 - 3{,}\overset{\frown}{9}$ **c)** $3{,}\overset{\frown}{5} + 2{,}\overset{\frown}{3} + 1{,}\overset{\frown}{1}$

a) 4 b) 2 c) 7

4 Paso de decimal a fracción

Página 18

1. Expresa en forma de fracción:

a) $6{,}2$ **b)** $0{,}63$ **c)** $1{,}0004$ **d)** $3{,}\widehat{5}$
e) $0{,}\widehat{1}$ **f)** $2{,}\widehat{7}$ **g)** $0{,}\widehat{23}$ **h)** $41{,}\widehat{041}$
i) $40{,}\widehat{028}$ **j)** $5{,}\widehat{9}$ **k)** $7{,}\widehat{009}$ **l)** $0{,}\widehat{99}$

a) $\dfrac{62}{10} = \dfrac{31}{5}$

b) $0{,}63 = \dfrac{63}{100}$

c) $1{,}0004 = \dfrac{10\,004}{10\,000}$

d) $10N - N = 35 - 3 \rightarrow 9N = 32 \rightarrow N = \dfrac{32}{9}$

e) $10N - N = 1 \rightarrow 9N = 1 \rightarrow N = \dfrac{1}{9}$

f) $10N - N = 25 \rightarrow 9N = 25 \rightarrow N = \dfrac{25}{9}$

g) $100N - N = 23 - 0 \rightarrow 99N = 23 \rightarrow N = \dfrac{23}{99}$

h) $1\,000N - N = 41\,041 - 41 \rightarrow 999N = 41\,000 \rightarrow N = \dfrac{41\,000}{999}$

i) $1\,000N - N = 40\,028 - 40 \rightarrow 999N = 39\,988 \rightarrow N = \dfrac{39\,988}{999}$

j) $10N - N = 59 - 5 \rightarrow 9N = 54 \rightarrow N = \dfrac{54}{9}$

k) $1\,000N - N = 7\,002 \rightarrow N = \dfrac{7\,002}{999}$

l) $100N - N = 99 \rightarrow 99N = 99 \rightarrow N = \dfrac{99}{99} = 1$

2. Observamos que $0{,}\widehat{208} + 0{,}\widehat{791} = 0{,}\widehat{999} = 1$.

Compruébalo expresando en forma de fracción cada sumando y efectuando la suma de fracciones.

$0{,}\widehat{208} + 0{,}\widehat{791} = \dfrac{208}{999} + \dfrac{791}{999} = \dfrac{999}{999} = 1$

3. Realiza los apartados b) y c) de la actividad 6 de la página anterior pasando, previamente, los decimales a fracciones y operando con ellas.

b) $6 - 3{,}\widehat{9} = 6 - \dfrac{36}{9} = \dfrac{54 - 36}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$

c) $3{,}\widehat{5} + 2{,}\widehat{3} + 1{,}\widehat{2} = \dfrac{32}{9} + \dfrac{21}{9} + \dfrac{11}{9} = \dfrac{64}{9} = 7{,}\widehat{1}$

Página 19

4. Completa el proceso para expresar como fracción el número dado en cada caso:

$$\textbf{a) } 6{,}21\overset{\frown}{7}\left\{\begin{aligned} N &= 6{,}21777\ldots \\ 100N &= 621{,}77777\ldots \\ 1\,000N &= 6\,217{,}7777\ldots \end{aligned}\right. \qquad \textbf{b) } 0{,}03\overset{\frown}{162}\left\{\begin{aligned} N &= 0{,}0316262\ldots \\ 1\,000N &= 31{,}626262\ldots \\ 100\,000N &= 3162{,}626262\ldots \end{aligned}\right.$$

a) $1\,000N - 100N = 6\,217 - 621 \to 900N = 5\,526 \to N = \dfrac{5\,526}{900} = \dfrac{1\,399}{225}$

b) $100\,000N - 1\,000N = 3\,162 - 31 \to 99\,000N = 3\,131 \to N = \dfrac{3\,131}{99\,000}$

5. Expresa como fracción los decimales siguientes:

a) $6{,}2\overset{\frown}{5}$ **b)** $0{,}00\overset{\frown}{1}$ **c)** $5{,}0\overset{\frown}{18}$

a) $100N - 10N = 625 - 62 \to 90N = 563 \to N = \dfrac{563}{90}$

b) $1\,000N - 100N = 1 - 0 \to 900N = 1 \to N = \dfrac{1}{900}$

c) $1\,000N - 10N = 5\,018 - 50 \to 990N = 4\,968 \to N = \dfrac{4\,968}{990} = \dfrac{276}{55}$

6. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:

a) 3,51 **b)** 5,202002000… **c)** $5{,}\overset{\frown}{03}$

d) 0,3212121… **e)** $\pi = 3{,}141592\ldots$ **f)** $7{,}4\overset{\frown}{331}$

a) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{351}{100}$

b) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

c) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{498}{99} = \dfrac{166}{33}$

d) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{318}{990} = \dfrac{53}{165}$

e) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

f) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{74\,257}{9\,990}$

7. Comprueba, obteniendo las fracciones correspondientes, que $5{,}\overset{\frown}{48} = 5{,}4\overset{\frown}{84}$.

$$\left.\begin{aligned} &5{,}\overset{\frown}{48} \to 100N - N = 543 \to N = \frac{543}{99} \\ &5{,}4\overset{\frown}{84} \to 1000M = 10M = 5\,430 \to M = \frac{5\,430}{990} = \frac{543}{99} \end{aligned}\right\} 5{,}\overset{\frown}{48} = 5{,}4\overset{\frown}{84}$$

Ejercicios y problemas

Página 21

Practica

Fracciones y decimales

1. **Simplifica las fracciones siguientes:**

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

$\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$; $\frac{114}{72}=\frac{19}{12}$; $\frac{51}{68}=\frac{3}{4}$; $\frac{26}{39}=\frac{2}{3}$; $\frac{125}{50}=\frac{5}{2}$; $\frac{225}{400}=\frac{9}{16}$

2. **Agrupa las fracciones que sean equivalentes.**

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

$\frac{21}{49}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ $\quad \frac{24}{36}=\frac{14}{21}=\frac{10}{15}$ $\quad \frac{4}{5}$

3. **En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:**

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

a) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{16}{30} \to \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{6}$

b) $-\frac{12}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{14}{24}, -\frac{18}{24} \to -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{7}{12} < -\frac{1}{2}$

c) $\frac{11}{24}, \frac{-42}{24}, \frac{9}{24}, \frac{-4}{24}, \frac{10}{24}, \frac{-40}{24} \to -\frac{7}{4} < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{6} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24}$

4. **Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:**

- $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{16}{7}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) $-\frac{7}{3}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $-\frac{3}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

5. **Expresa como número decimal las siguientes fracciones:**

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

$\frac{9}{25} = 0,36$; $\frac{13}{9} = 1,\widehat{4}$: $\frac{23}{6} = 3,8\widehat{3}$; $\frac{17}{200} = 0,085$

$\frac{5}{7} = 0,\widehat{714285}$; $\frac{233}{990} = 0,2\widehat{35}$; $\frac{13}{22} = 0,5\widehat{90}$

6. **Determina, sin realizar la división, cuáles son decimales exactos y cuáles decimales periódicos.**

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{7 \cdot 11}{3 \cdot 5^2} \quad \frac{19}{2^2 \cdot 5} \quad \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 23}{5 \cdot 7}$$

Decimales exactos $\to \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{19}{2^2 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 23}{5 \cdot 7}$ Decimales periódicos $\to \frac{13}{9}, \frac{7 \cdot 11}{3 \cdot 5^2}$

7. **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):**

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

Decimales exactos $\to \frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250}$ Decimales periódicos $\to \frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$

8. **Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:**

a) 1,6 y 1,8 **b) 0,98 y 1** **c) 0,28 y 0,29**

d) 0,345 y 0,346 **e) $2,\widehat{3}$ y 2,4** **f) –4,5 y –4,4**

a) 1,65; 1,7; 1,75 b) 0,982; 0,983; 0,984 c) 0,283; 0,285; 0,287

d) 0,3451; 0,3452; 0,3456 e) 0,234; 0,235; 0,236 f) –4,45; –4,46; –4,47

9. **Ordena de menor a mayor en cada apartado:**

a) 3,56; $3,5\widehat{6}$; $3,\widehat{5}$; $3,\widehat{56}$ **b) –1,32; $-1,3\widehat{2}$; $-1,\widehat{32}$; $-1,\widehat{3}$**

a) $3,\widehat{5} < 3,56 < 3,\widehat{56} < 3,5\widehat{6}$ b) $-1,\widehat{3} < -1,\widehat{32} < -1,3\widehat{2} < -1,32$

10. **Expresa en forma de fracción.**

a) 3,7 **b) 0,002** **c) –1,03**

d) $2,\widehat{5}$ **e) $0,\widehat{21}$** **f) $14,\widehat{3}$**

a) $\frac{37}{10}$ b) $\frac{2}{1\,000} = \frac{1}{500}$ c) $-\frac{103}{100}$

d) $\frac{23}{9}$ e) $\frac{21}{99} = \frac{7}{33}$ f) $\frac{129}{9} = \frac{43}{3}$

11. **Expresa como fracción.**

a) $0,3\widehat{2}$ **b) $1,0\widehat{3}$** **c) $0,0\widehat{12}$**

d) $-3,\widehat{15}$ **e) $5,34\widehat{5}$** **f) $9,0\widehat{9}$**

a) $\frac{29}{90}$ b) $\frac{93}{90} = \frac{31}{30}$ c) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

d) $\frac{-312}{99} = \frac{-104}{33}$ e) $\frac{4\,811}{900}$ f) $\frac{819}{90}$

Operaciones con fracciones

12. **Calcula y simplifica mentalmente las expresiones siguientes:**

a) $2+\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

d) $2\cdot\frac{5}{4}$ **e)** $\frac{2}{3}:2$ **f)** $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}$ **h)** $\frac{12}{7}:3$ **i)** $\frac{7}{3}\cdot 21$

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{4}{7}$ i) 49

13. **Calcula mentalmente:**

a) $\frac{2}{3}$ **de 60** **b)** $\frac{3}{4}$ **de 100** **c)** $\frac{3}{500}$ **de 500**

d) La mitad de $\frac{2}{3}$**.** **e) La tercera parte de** $\frac{12}{7}$**.** **f) La mitad de la quinta parte de –6.**

a) 40 b) 75 c) 3

d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{4}{7}$ f) $-\frac{3}{5}$

14. **Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:**

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

a) 33 b) 28 c) 300

15. **Reduce a una fracción.**

a) $\dfrac{3+\frac{1}{2}}{7-\frac{3}{2}}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}}$ **c)** $\dfrac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}$

a) $\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{7}{11}$ b) $\dfrac{\frac{-5}{12}}{\frac{3}{12}}=-\frac{5}{3}$ c) $\dfrac{\frac{21}{40}}{\frac{-3}{10}}=-\frac{7}{4}$

Página 22

16. **Efectúa y simplifica descomponiendo en factores, como en el ejemplo:**

- $\frac{15}{21} \cdot \frac{7}{25} = \frac{15 \cdot 7}{21 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{21}$ **b)** $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{18}$ **c)** $\frac{12}{7} \cdot \frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{27}$ **e)** $\frac{13}{12} \cdot \frac{84}{65}$ **f)** $\frac{90}{35} \cdot \frac{14}{36}$

a) $\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 21} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{6 \cdot 5}{25 \cdot 18} = \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

c) $\frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 36} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{3}$

d) $\frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 27} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{13 \cdot 84}{12 \cdot 65} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{7}{5}$

f) $\frac{90 \cdot 14}{35 \cdot 36} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2} = 1$

17. **Reduce estas expresiones a una sola fracción:**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{16} = \frac{16 - 1 - 2}{32} = \frac{13}{32}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12 - 5 + 40}{20}\right) - \left(\frac{15 - 8 + 20}{20}\right) = \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = \frac{20}{20} = 1$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3+1}{3} - \left(\frac{3+2}{4}\right)\left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{3} - \frac{5}{48} = \frac{64-5}{48} = \frac{59}{48}$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \frac{9+5}{15} - \left[1 - \left(\frac{3-2}{4}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] =$

$= \frac{14}{15} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right) = \frac{56 - 60 + 15 - 40 + 9}{60} = \frac{-20}{60} = \frac{-1}{3}$

18. **Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.**

a) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$ **b)** $3 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2)$ **c)** $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$

a) $\frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{6} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{-16 + 18 - 8 - 18}{24} = \frac{-24}{24} = -1$

b) $3 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2) = 3 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{6}{8} = 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} - \frac{6}{8} = 3 - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{24 - 3 - 6}{8} = \frac{15}{8}$

c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right)\right] = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{12}\right) : \left[2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3+5}{3}\right)\right] =$

$= \left(\frac{30 - 10 + 2}{12}\right) : \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{22}{12} : \left(2 - \frac{8}{6}\right) = \frac{11}{6} : \left(\frac{12 - 8}{6}\right) = \frac{11}{6} : \frac{4}{6} = \frac{11}{4}$

19. **Calcula y comprueba con la calculadora.**

a) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$

c) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$

a) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=5:\left(\frac{2+4}{4}\right)-3:\left(\frac{2-1}{4}\right)=$

$$=5:\frac{6}{4}-3:\frac{1}{4}=\frac{20}{6}-12=\frac{20-72}{6}=\frac{-52}{6}=\frac{-26}{3}$$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{3-2}{4}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5-2}{6}\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2=$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{36}=\frac{2}{48}-\frac{9}{216}=\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=0$$

c) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]=-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17-20}{20}\right)\cdot\left(\frac{1-9}{3}\right)\right]=$

$$=-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{-3}{20}\right)\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)\right]=-\frac{3}{8}\left(3-\frac{3}{5}-\left(\frac{8}{20}\right)\right)=$$

$$=\frac{-3}{8}\left(\frac{60-12-8}{20}\right)=\frac{-3}{8}\cdot\frac{40}{20}=\frac{-12}{16}=\frac{-3}{4}$$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(\frac{-2}{3}\right)=\left[\frac{6-1}{9}+13\left(\frac{2-3}{3}\right)^2\right]:\frac{-2}{3}=$

$$=\left[\frac{5}{9}+13\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right]:\frac{-2}{3}=\left(\frac{5}{9}+\frac{13}{9}\right):\frac{-2}{3}=\frac{18}{9}:\frac{-2}{3}=\frac{54}{-18}=-3$$

20. **Calcula pasando previamente a fracción.**

a) $3{,}5+2{,}\widehat{3}$ **b)** $0{,}1\widehat{2}-0{,}2$ **c)** $1{,}\widehat{6}-1{,}0\widehat{2}$

d) $3{,}\widehat{42}+7{,}\widehat{6}$ **e)** $2{,}\widehat{3}+4{,}\widehat{6}$ **f)** $6{,}\widehat{17}+3{,}\widehat{82}$

a) $3{,}5+2{,}\widehat{3}=\frac{35}{10}+\frac{21}{9}=\frac{7}{2}+\frac{7}{3}=\frac{35}{6}$

b) $0{,}\widehat{12}-0{,}2=\frac{12}{99}-\frac{2}{10}=\frac{4}{33}-\frac{1}{5}=-\frac{13}{165}$

c) $1{,}\widehat{6}-1{,}0\widehat{2}=\frac{15}{9}-\frac{92}{90}=\frac{29}{45}$

d) $3{,}\widehat{42}+7{,}\widehat{6}=\frac{339}{99}+\frac{69}{9}=\frac{122}{11}$

e) $2{,}\widehat{3}+4{,}\widehat{6}=\frac{21}{9}+\frac{42}{9}=\frac{63}{9}=7$

f) $6{,}\widehat{17}+3{,}\widehat{82}=\frac{611}{99}+\frac{379}{99}=\frac{990}{99}=10$

Aplica lo aprendido

21. **Llevo leído 3/8 de un libro de 288 páginas. ¿Cuántas páginas me quedan para acabar el libro?**

$\frac{3}{8}$ de 288 = 108 $\rightarrow$ Llevo leídas 108 páginas.

288 – 108 = 180 $\rightarrow$ Me quedan 180 páginas para terminar el libro.

22. **Juan mide 1,60 m, las 5/6 partes de la altura de su padre. ¿Cuánto mide el padre de Juan?**

Juan mide 1,60 m $\rightarrow \frac{5}{6}$ de $x = 1{,}60$ m $\rightarrow x = \frac{1{,}60 \cdot 6}{5} = 1{,}92$

El padre de Juan mide 1,92 m.

23. **De los 28 alumnos de una clase, 4/7 han aprobado todo, de los cuales 1/8 obtuvieron sobresaliente de media. ¿Cuántos alumnos sacaron sobresaliente? ¿Cuántos suspendieron alguna asignatura?**

$\frac{4}{7}$ de 28 han aprobado todo $\rightarrow \frac{4 \cdot 28}{7} = 16 \rightarrow$ 16 alumnos han aprobado todo.

$\frac{1}{8}$ de 16 tiene sobresaliente de media $\rightarrow \frac{1 \cdot 16}{8} = 2 \rightarrow$ 2 alumnos tiene sobresaliente de media.

28 – 16 = 12 $\rightarrow$ 12 alumnos han suspendido alguna asignatura.

24. **Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?**

$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15}$

$\frac{4}{15}$ de total son 36 € $\rightarrow$ Total = $36 \cdot \frac{15}{4} = 135$ €

25. **Una mezcla de 600 g de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.**

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla? b) ¿Qué cantidad hay de cada cereal?

a) Parte de arroz: $1 - \left(\frac{7}{15} + \frac{9}{25}\right) = \frac{13}{75}$

b) Cantidad de trigo $\rightarrow \frac{7}{15}$ de 600 = $\frac{7 \cdot 600}{15} = 280$

Cantidad de avena $\rightarrow \frac{9}{25}$ de 600 = $\frac{9 \cdot 600}{25} = 216$

Cantidad de arroz $\rightarrow \frac{13}{75}$ de 600 = $\frac{13 \cdot 600}{75} = 104$

En la mezcla hay 280 g de trigo, 216 g de avena y 104 g de arroz.

26. **De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?**

$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ libros de poesía; 30 – (180 + 50) = 70

$\frac{70}{300} = \frac{7}{30}$ son libros de historia.

27. **De un bidón de aceite se saca primero la mitad, y después, la quinta parte de lo que queda. Si en el bidón aún hay 3 litros, ¿cuál es su capacidad?**

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$ de $x=3 \rightarrow x=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$

La capacidad del bidón de aceite es de 7,5 litros.

28. **En una frutería, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a las frutas, y el resto, a las verduras. De lo recaudado por las frutas, los 3/8 son de las naranjas, y ese día fueron 90 €. ¿Cuánto se recaudó en total? ¿Qué parte correspondió a las verduras?**

$\frac{3}{8}$ de $x=90 \rightarrow x=\frac{90\cdot 8}{3}=240$

$\frac{5}{6}$ de las ventas son 240 € $\rightarrow$ $\frac{1}{6}$ de las ventas son $\frac{240}{5}=48$ €

Se recaudó 48 € en verduras y 240 + 48 = 288 € en total.

Resuelve problemas

29. **De una cuenta bancaria, retiramos primero los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1 893 €, ¿cuánto había al principio?**

Se retiran primero $\frac{3}{8}$ y, después, $\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{16}$.

La parte que queda es $1-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{16}\right)=\frac{3}{16}$, que son 1 893 €.

Lo que había al principio es $1\,893\cdot\frac{16}{3}=10\,096$ €.

30. **De un depósito de aceite, se vacía la mitad; después, la mitad de lo que queda; luego, los 11/15 del resto. Si quedan 36 *l*, ¿cuántos había al principio?**

Sacamos $\frac{1}{2}$; después, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Queda $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

Sacamos $\frac{11}{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{60}$ $\rightarrow$ Quedan $\frac{1}{4}-\frac{11}{60}=\frac{1}{15}$, que son 36 litros.

Lo que había al principio son 36 · 15 = 540 litros.

31. **Compro a plazos una bicicleta que vale 540 €. Pago el primer mes los 2/9; el segundo, los 7/15 de lo que me queda por pagar, y luego, 124 €.**

a) ¿Cuánto he pagado cada vez? **b) ¿Qué parte del precio me queda por pagar?**

a) Primer mes: $540\cdot\frac{2}{9}=120$ € $\rightarrow$ Quedan por pagar 420 €.

Segundo mes: $420\cdot\frac{7}{15}=196$ €.

Tercer mes: 124 €.

b) Quedan por pagar: 540 – (120 + 196 + 124) = 100 €.

$\frac{100}{540}=\frac{5}{27}$ $\rightarrow$ Parte que queda por pagar.

Página 23

32. **Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, su peso se reduce en 1/5. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción 1/4 de su peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?**

$\frac{1}{5}$ de $10 = \frac{10 \cdot 1}{5} = 2 \;\rightarrow\; 10 - 2 = 8 \;\rightarrow$ Nos quedan 8 kg de ciruelas.

Se cuecen 8 kg de ciruelas con 8 kg de azúcar.

$\frac{1}{4}$ de $16 = \frac{1 \cdot 16}{4} = 4 \;\rightarrow\; 16 - 4 = 12 \;\rightarrow$ Obtenemos 12 kg de mermelada.

33. **Un campo rectangular de 120 m de largo se pone a la venta en dos parcelas a razón de 50 € el metro cuadrado. La primera parcela, que supone los 7/12 del campo, sale por 140 000 €. ¿Cuánto mide la anchura del campo?**

Llamamos b a la anchura del campo.

$\frac{7}{12} \cdot (120 \cdot b) \cdot 5 = 140\,000 \;\rightarrow\; 350b = 140\,000 \;\rightarrow\; b = 400$

El terreno tiene una anchura de 400 m.

34. **Dos agricultores, padre e hijo, tardan 2 horas en arar un campo. Si lo hace solo el padre tarda 6 horas. ¿Cuánto tardará el hijo en hacerlo solo?**

Padre e hijo $\rightarrow$ 2 horas $\rightarrow$ En 1 hora aran $\frac{1}{2}$ del terreno.

Padre $\rightarrow$ 6 horas $\rightarrow$ En una hora ara $\frac{1}{6}$ de terreno.

En una hora, el hijo ara $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ del terreno.

Por tanto, el hijo tardará 3 horas en arar el terreno él solo.

35. **Un grifo llena un depósito de agua en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, entonces el tiempo de llenado es 36 horas. ¿Cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito, estando el grifo cerrado?**

Grifo $\rightarrow$ 9 h de llenado $\rightarrow$ en 1 hora llena $\frac{1}{9}$

Grifo + desagüe $\rightarrow$ 36 h de llenado $\rightarrow$ en 1 hora llenan $\frac{1}{36}$

El desagüe vacía el depósito a razón de $\frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$ cada hora.

El desagüe vacía el depósito, estando el grifo cerrado, en 12 horas.

Problemas "+"

36. **Un grupo de amigos ha ido a comer a una pizzería y han elegido tres tipos de pizza, A, B y C. Cada uno ha tomado 1/2 de A, 1/3 de B y 1/4 de C; han pedido en total 17 pizzas y, como es lógico, no ha sobrado ninguna entera.**

a) ¿Ha tomado cada uno más de una pizza, o menos? ¿Cuántos amigos son?

b) ¿Cuántas pizzas de cada tipo han encargado? ¿Ha sobrado algo?

c) Contesta a las mismas preguntas si hubiese sido 20 el número de pizzas pedido.

a) Cada uno toma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$; es decir, han tomado más de una pizza cada uno.

Como cada uno toma más de una pizza y han comprado 17 pizzas, eso quiere decir que son menos de 17. Veamos cuántos.

$\frac{13}{12}x=17 \ \rightarrow \ x=15,69$

Por tanto, son 15 amigos.

b) Sabiendo que cada uno toma $\frac{1}{2}$ de A, $\frac{1}{3}$ de B y $\frac{1}{4}$ de C, y que son 15 amigos, han encargado:

- 8 pizzas de A, pues $\frac{15}{2}=7,5$, y ha sobrado $\frac{1}{2}$ de pizza A.
- 5 pizzas de B, pues $\frac{15}{3}=5$, y no ha sobrado nada de pizza B.
- 4 pizzas de C, pues $\frac{15}{4}=3,75$, y ha sobrado $\frac{1}{4}$ de pizza C.

c) Si han comprado 20 pizzas:

- Siguen comiendo $\frac{13}{12}>1$ cada uno.

  $\frac{13}{12}x=20 \ \rightarrow \ x=18,46$

  Ahora son 18 amigos.

- Ahora han encargado:

  $\frac{18}{2}=9$ pizzas A

  $\frac{18}{3}=6$ pizzas B

  $\frac{18}{4}=4,5 \ \rightarrow$ Han encargado 5 pizzas C y ha sobrado $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ de C.

37. **En una receta para hacer mermelada de higos se lee: "añadir 400 g de azúcar y 100 g de agua por cada kilo de higos". Tres amigas, A, B y C, con un puesto en el mercado, elaboraron estas cantidades:**

A → 2 botes de 5/8 kg y 4 de 9/25 kg

B → 3 botes de 1/5 kg y 3 de 5/8 kg

C → 5 botes de 9/25 kg y 2 de 1/5 kg

a) ¿Cuál de las tres preparó más cantidad?

b) Si una persona pide 3/4 kg, ¿cuál es la forma de entregarle la cantidad más próxima?

c) Si el agua se evapora durante la cocción, ¿cuál es la proporción de azúcar que tiene la mermelada?

a) Han preparado:

$$A \rightarrow 2 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{9}{25} = \frac{269}{100} = 2{,}69 \text{ kg}$$

$$B \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{99}{40} = 2{,}475 \text{ kg}$$

$$C \rightarrow 5 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = 2{,}2 \text{ kg}$$

La amiga A preparó más cantidad.

b) $\frac{3}{4}$ kg = 750 g

Utilizando dos botes de $\frac{1}{5}$ y uno de $\frac{9}{25}$, conseguimos:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25} = 0{,}760 \text{ kg} = 760 \text{ g}$$

c) La mezcla total pesa 400 + 100 + 1 000 = 1 500 g.

Como perdemos 100 g por evaporación del agua, nos queda que la proporción de azúcar es:

$$\frac{400}{1\,400} = \frac{2}{7} = 0{,}286 \rightarrow 28{,}6\,\%$$

Reflexiona sobre la teoría

38. **¿Cuáles de los siguientes números no son racionales? Pon en forma de fracción los que sea posible:**

a) 0,018   **b) $\sqrt{2}$**   **c) 1,212112111…**

d) 2π   **e) 7,03232…**   **f) $0,\widehat{23}$**

Irracionales: $\sqrt{2}$; 1,212112111…; 2π

a) $0{,}018 = \frac{18}{1\,000}$

e) $7{,}03232\ldots = 7{,}0\widehat{32} = \frac{6\,962}{990}$

f) $0{,}\widehat{23} = \frac{23}{99}$

39. **a) Expresa en forma decimal el valor de:**

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\dots$$

b) Escribe el resultado en forma de fracción.

a) $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\dots=0,7+0,07+0,007+\dots=0,777\dots=0,\widehat{7}$

b) $0,\widehat{7}=\frac{7}{9}$

40. **Busca cuatro números fraccionarios comprendidos entre 1/3 y 1/2. ¿Cuántos hay?**

Buscamos fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ con un denominador común, por ejemplo 36:

$$\frac{1}{3}=\frac{12}{36} \qquad \frac{1}{2}=\frac{18}{36}$$

Entre $\frac{12}{36}$ y $\frac{18}{36}$ están comprendidas $\frac{13}{36}, \frac{14}{36}, \frac{15}{36}, \frac{16}{36}$.

Si en lugar de 36 elegimos un denominador común muy grande, podemos escribir tantas como queramos. Hay infinitos.

41. **Divide por 3 varios números menores que 10 y observa los resultados. ¿Qué puede ocurrir cuando dividimos por 3?**

¿Puedes predecir las cifras decimales de los cocientes 30 : 3; 31 : 3 y 32 : 3?

La parte decimal del cociente $a : 3$ es 6666… ¿Cuál será la parte decimal de $(a+1) : 3$ y de $(a+2) : 3$?

Cuando dividimos entre 3 podemos obtener un número exacto, un decimal periódico puro de periodo 3 o bien un decimal periódico puro de periodo 6.

30 : 3 $\rightarrow$ No tiene cifras decimales.

31 : 3 $\rightarrow$ Periódico puro de periodo 3.

32 : 3 $\rightarrow$ Periódico puro de periodo 6.

$(a+1) : 3$ $\rightarrow$ No tiene parte decimal.

$(a+2) : 3$ $\rightarrow$ Periódico puro de periodo 3.

42. **¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.**

a) Hay números decimales que no son racionales.

b) El cociente de dos números decimales exactos es siempre un decimal exacto.

c) Al sumar dos números decimales periódicos puros se obtiene siempre un decimal periódico puro.

d) Todos los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

a) Verdadero. π es irracional. b) Falso. 2,33 : 1,7 = 1,3705882…

c) Verdadero. El denominador de una fracción que representa a un decimal periódico puro es de la forma 9 o 99 = 9 · 11 o 999 = 9 · 111 o … Al sumar dos fracciones con estos denominadores, se obtiene una fracción cuyo denominador es 9 o 99 o 999… Es decir, un decimal periódico puro. $3,\widehat{7}+5,\widehat{8}=9,\widehat{6}$

d) Verdadero. Si a es un entero, $a=\frac{a}{1}$.

43. **¿Cuál de estas fracciones es equivalente a** a/b**?**

$$\frac{a+1}{b+1} \qquad \frac{2a}{3b} \qquad \frac{ab}{b^2} \qquad \frac{a^2}{b^2}$$

$\frac{ab}{b^2}$ y $\frac{a^2}{b^2}$ son equivalentes a $\frac{a}{b}$.

44. **Sabiendo que** $a > b > c > 0$, **compara estos pares de fracciones y di cuál es la menor en cada caso:**

a) $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$ **b)** $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$ **c)** $\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{c}$

a) $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$ b) $\frac{b}{c} < \frac{a}{c}$ c) $\frac{b}{a} < \frac{b}{c}$

45. **Divide por 11 los números del 1 al 10 y anota los resultados.**

a) ¿Cuántos decimales distintos pueden salir?

b) ¿Tiene eso que ver con el hecho de que estemos dividiendo entre 11?

c) ¿Puedes predecir el resultado de 23 : 11 y de 40 : 11?

a) $\frac{1}{11} = 0,\widehat{09}$; $\frac{2}{11} = 0,\widehat{18}$; $\frac{3}{11} = 0,\widehat{27}\ldots$; $\frac{4}{11} = 0,\widehat{36}$; $\frac{5}{11} = 0,\widehat{45}$;

$\frac{6}{11} = 0,\widehat{54}$; $\frac{7}{11} = 0,\widehat{63}$; $\frac{8}{11} = 0,\widehat{72}$; $\frac{9}{11} = 0,\widehat{81}$; $\frac{10}{11} = 0,\widehat{90}$

Se obtienen 10 decimales distintos.

b) Sí tiene que ver.

c) $\frac{23}{11} = 2,\widehat{09}$; $\frac{40}{11} = 3,\widehat{63}$

Utiliza tu ingenio

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

"CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS"

¿Podrías aclarar la cuestión?

$5 \cdot 4,20 + 1 = 22$

Página 25

Entrénate resolviendo problemas

- **Un joyero consigue una rebaja de 140 € en la compra de 16 broches iguales, cuyo precio, según el catálogo, es de 87,5 € cada unidad.**

  ¿A cuánto debe vender cada uno si desea obtener una ganancia total de 500 €?

  Los 16 broches valen $\rightarrow$ $16 \cdot 87{,}5 = 1\,400$ €

  Los 16 broches le cuestan $\rightarrow$ $1\,400 - 140 = 1\,260$ €

  Para ganar 500 € debe recaudar $\rightarrow$ $1\,260 + 500 = 1\,760$ €

  El precio de venta final debe ser de $\rightarrow$ $1\,760 : 16 = 110$ €

- **Marta compra tres tortas, y Beatriz, dos. Cuando van a merendar, se les une su amiga Verónica, que no trae tortas. A la hora de compartir gastos, a Verónica le toca poner 5 €.**

  ¿Cómo se repartirán esos 5 € Marta y Beatriz?

  Como tienen 5 tortas, a cada una le toca $\frac{5}{3}$ de torta.

  Marta aporta para Verónica $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} =$ de torta.

  Beatriz aporta para Verónica $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} =$ de torta.

  Los 5 € que paga Verónica los deben repartir proporcionalmente a $\frac{4}{3}$ y a $\frac{1}{3}$.

  Por tanto, 4 € para Marta y 1 € para Beatriz.

- **Un grupo de amigos entra en una cafetería. Todos piden café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo. Un café cuesta 0,85 €, y un bollo, 1,10 €.**

  Para pagar, entregan al camarero 11 €.

  ¿Han dejado propina? Si es así, ¿de cuánto ha sido?

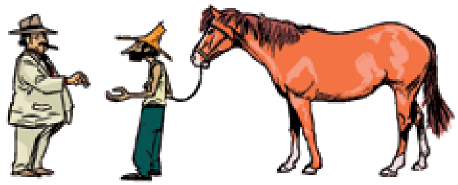
  Como se dice que la quinta parte pide un bollo, el número de amigos es un múltiplo de 5.

  Si fuesen 5, las consumiciones habrían costado $5 \cdot 0{,}85 + 1{,}10 = 5{,}35$ € (cantidad muy alejada de 11 €).

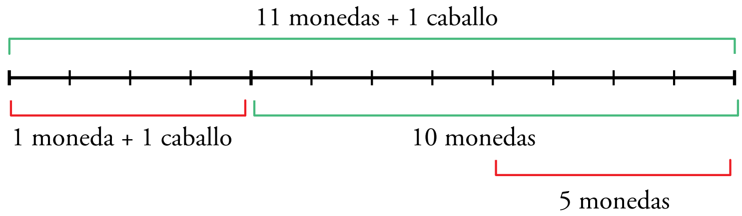
  Si fuesen 10 amigos, el precio de las consumiciones habría sido $5{,}35 \cdot 2 = 10{,}70$ €, muy próximo a 11 €.

  Por lo tanto, han dejado una propina de $11 - 10{,}70 = 0{,}30$ € = 30 céntimos.

- **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de once monedas de oro y un caballo. A los cuatro meses, el sirviente se despide, recibiendo el caballo y una moneda.**



¿Cuál era el valor del caballo?



"5 monedas" equivalen a "1 caballo + 1 moneda".

Por tanto, un caballo tiene el valor de 4 monedas.

Autoevaluación

1. Efectúa y simplifica el resultado.

$$\frac{1}{2}\left[3-\frac{2}{5}\left(1-\frac{5}{9}\right)-\left(4-\frac{2}{3}\right):2\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[3-\frac{2}{5}\left(1-\frac{5}{9}\right)-\left(4-\frac{2}{3}\right):2\right]=\frac{1}{2}\left[3-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}-\frac{10}{3}:2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[3-\frac{8}{45}-\frac{10}{6}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{270-16-150}{90}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{104}{90}=\frac{104}{180}=\frac{26}{45}$$

2. Calcula el resultado de esta suma pasando, previamente, cada decimal a fracción:

$$-1{,}8\overset{\frown}{9}+0{,}0\overset{\frown}{28}+0{,}\overset{\frown}{72}$$

$$-1{,}8\overset{\frown}{9}\ \left\{\begin{array}{l}N=-1{,}8999\ldots\\10N=-18{,}999\ldots\\100N=-189{,}999\ldots\end{array}\right\}\ 100N-10N=-171\ \to\ N=-\frac{171}{90}$$

$$0{,}0\overset{\frown}{28}\ \left\{\begin{array}{l}N=0{,}028\ldots\\10N=0{,}28\ldots\\1\,000N=28{,}28\ldots\end{array}\right\}\ 1\,000N-10N=28\ \to\ N=\frac{28}{990}$$

$$0{,}\overset{\frown}{72}\ \left\{\begin{array}{l}N=0{,}72\ldots\\100N=72{,}72\ldots\end{array}\right\}\ 100N-N=72\ \to\ N=\frac{72}{99}$$

$$-1{,}8\overset{\frown}{9}+0{,}0\overset{\frown}{28}+0{,}\overset{\frown}{72}=-\frac{171}{90}+\frac{28}{990}+\frac{72}{99}=\frac{-1\,881+28+720}{990}=-\frac{1133}{990}=-1{,}1\overset{\frown}{4}$$

3. **Escribe, en cada caso, tres números comprendidos entre los dos dados:**

a) $\frac{3}{20}$ **y** $\frac{4}{25}$ **b)** $2,\widehat{7}$ **y** $2,\widehat{8}$

a) $\frac{3}{20} = 0,15$; $\frac{4}{25} = 0,16$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$0,15 < 0,151 < 0,1519 < 0,1531 < 0,16$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$2,\widehat{7} < 2,78 < 2,783 < 2,787 < 2,\widehat{8}$

4. **Clasifica en decimales exactos o periódicos sin hacer la división.**

$$\frac{89}{50} \quad \frac{113}{12} \quad \frac{23}{32} \quad \frac{18}{7}$$

$\frac{89}{50} \to$ Decimal exacto $\frac{113}{12} \to$ Decimal periódico

$\frac{23}{32} \to$ Decimal exacto $\frac{18}{7} \to$ Decimal periódico

5. **Dos cajas con manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo.**

La primera, que supone los 5/12 del total, se vende por 50 €.

¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?

Si $\frac{5}{12}$ del total se vende por 50 €, el total se vende por $\frac{50 \cdot 12}{5} = 120$ €.

El total de kilos es 120 : 2,5 = 48 kg

La primera caja tiene $\frac{48 \cdot 5}{12} = 20$ kg

La segunda caja tiene 48 – 20 = 28 kg

6. **Entre los usuarios de un polideportivo, la quinta parte tiene más de 60 años, y dos de cada tres están entre los 25 y los 60 años.**

a) ¿Qué fracción de los usuarios tiene 25 años o menos?

b) Si el número de usuarios es 525, ¿cuántos hay de cada grupo de edad?

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$

Los $\frac{2}{15}$ de los usuarios tienen 25 años o menos.

b) Más de 60 años $\to \frac{1}{5} \cdot 525 = 105$

Entre 25 y 60 años $\to \frac{2}{3} \cdot 525 = 350$

Menos de 25 años $\to \frac{2}{15} \cdot 525 = 70$

7. Compro una bicicleta que pagaré en tres plazos. En el primero, pago los 3/10 del total; en el segundo, 4/5 de lo que me queda por pagar, y para el tercero, solo tengo que pagar 21 €. ¿Cuál es el precio de la bicicleta?

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}=\frac{15+28}{50}=\frac{43}{50}$$

$\frac{7}{50}$ de lo que tengo que pagar son 21 €.

El total es $\frac{21\cdot 50}{7}=150$ €.

8. ¿Verdadero o falso?

a) Todas las fracciones son números racionales.

b) Todos los números racionales son fraccionarios.

c) Los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

d) Una fracción siempre equivale a un número decimal periódico.

e) Un número decimal periódico es un número racional.

a) Verdadero

b) Falso, los números enteros son también números racionales.

c) Verdadero

d) Falso, la fracción $\frac{1}{5}$ es un número decimal exacto.

e) Verdadero

Página 27

Resuelve

1. ¿Cabrían los hijos de Buda en la India? Teniendo en cuenta *Mahabharata* y que la superficie de la India es, aproximadamente, 3 millones de kilómetros cuadrados:

a) ¿Cuántos metros cuadrados corresponderían a cada uno de los hijos de Buda?

b) ¿Cuántas divinidades habría por metro cuadrado?

a) Primero, vamos a poner los datos en metros cuadrados, que es lo que nos pide el problema.

$$3 \text{ millones de km}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$$

Veamos cuántos metros cuadrados le corresponde a cada hijo:

$$600\,00 \text{ millones de hijos} = 600\,000 \cdot 10^6 \text{ hijos} = 6 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ hijos} = 6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}$$

Por tanto:

$$\frac{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}} = \frac{30}{6} \text{ m}^2/\text{hijo} = 5 \text{ m}^2/\text{hijo}$$

Así, a cada hijo le corresponden 5 m^2 de India.

b) Pasamos los km^2 a m^2 $\to$ $3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$

$$\frac{24 \cdot 10^{15} \text{ divinidades}}{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ divinidad/m}^2$$

Habría $8 \cdot 10^3$ divinidades por metro cuadrado.

2. ¿Cuánto pueden ocupar 10^{40} monos? Vamos a suponer que un mono ocupa un volumen de unos 10 litros y que amontonamos 10^{40} monos, bien apretados, dentro de una esfera.

¿Cuál sería el radio de esa esfera?

NOTA: la distancia de Urano al Sol es de unos 2 870 millones de kilómetros.

10^{40} monos ocupan un volumen de $10^{40} \cdot 10\ l = 10^{41}\ l = 10^{35}$ m^3

$$10^{35} \text{ m}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \ \to\ R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{10^{35}}{\pi}} \approx 2{,}87 \cdot 10^{11} \text{ m} = 2\,870 \text{ millones de km}$$

El radio de la esfera sería 2 870 millones de kilómeros.

3. a) ¿Cuál o cuáles de estas potencias sirven para expresar un gúgol y cuál o cuáles para expresar un gúgolplex?

$10^{(10^{100})}$ $\quad$ 10^{100} $\quad$ $10^{(10^2)}$ $\quad$ $10^{(100^{10})}$

b) ¿Qué es mayor, un gúgol de gúgoles o un gúgolplex?

c) Suponiendo que en una hoja de papel caben, bien juntos, 3 000 caracteres, ¿serías capaz de idear una expresión que indique el número de hojas necesarias para escribir un gúgolplex con todas sus cifras?

a) gúgol $\to$ 10^{100} $\qquad$ gúgolplex $\to$ $10^{(10^{100})}$

b) Un gúgol de gúgoles.

c) $\dfrac{10^{100} \text{ cifras}}{3\,000 \text{ caracteres por hoja}} = 3{,}33^{96}$ hojas

1 Potenciación

Página 28

1. Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ **b)** $(5^6)^3$ **c)** $\dfrac{7^6}{7^4}$ **d)** $\dfrac{15^3}{3^3}$

e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ **f)** $\dfrac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$ **g)** $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ **h)** $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

a) 4^8

b) 5^{18}

c) 7^2

d) $\left(\dfrac{15}{3}\right)^3 = 5^3$

e) $(2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$

f) $\left(\dfrac{12}{3 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$

g) $(a^9)^2 : (a^6)^3 = a^{18} : a^{18} = a^0 = 1$

h) $6^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = 6^6 \cdot (3 \cdot 2)^5 = 6^6 \cdot 6^5 = 6^{11}$

2. Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ **b)** $(6^5 : 2^4) : 3^5$ **c)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$ **d)** $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$

e) $\dfrac{20^6}{2^6}$ **f)** $\dfrac{20^6}{2^5}$ **g)** $(3^3)^2 : 3^5$ **h)** $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 1\,000 \cdot 5 = 5\,000$

b) $(6^5 : 2^4) : 3^5 = \left(\dfrac{6^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\dfrac{(2 \cdot 3)^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\dfrac{2^2 \cdot 3^5}{2^4}\right) : 3^5 = (2 \cdot 3)^5 : 3^5 = \dfrac{2 \cdot 3^5}{3^5} = 2$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{2^6}{3^6} \cdot \dfrac{3^3}{(2^2)^3} = \dfrac{2^6}{3^6} \cdot \dfrac{3^3}{2^6} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

d) $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 = 2^8 \cdot \dfrac{5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\dfrac{20^6}{2^6} = \left(\dfrac{20}{2}\right)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

f) $\dfrac{20^6}{2^5} = 20 \cdot \left(\dfrac{20^5}{2^5}\right) = 20 \cdot 10^5 = 20 \cdot 100\,000 = 2\,000\,000$

g) $(3^3)^2 : 3^5 = 3^6 : 3^5 = 3^{6-5} = 3$

h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3] = 2^{15} \cdot [5^{12} : 2^3] = 2^{15} \cdot \dfrac{5^{12}}{2^3} = 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

Página 29

3. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación 0,00001 : 10 000 000.

$$0{,}00001 : 10\,000\,000 = \frac{1}{100\,000} : 10\,000\,000 = \frac{1}{100\,000} \cdot \frac{1}{10\,000\,000} = 10^{-12}$$

4. Expresa como fracción simplificada.

a) $\dfrac{3^4}{3^5}$ **b)** 5^{-1} **c)** a^{-6} **d)** $x^{-1}y^{-2}$

e) $\dfrac{x^3y^4}{x^2y^6}$ **f)** $(3xy^2)^{-2}$ **g)** $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{a^6}$ d) $\dfrac{1}{xy^2}$

e) $\dfrac{x}{y^2}$ f) $\dfrac{1}{9x^2y^4}$ g) $\dfrac{5x}{3y^2}$

5. Reduce a un único número racional.

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$ **b)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$ **c)** $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ **e)** $\left(\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{2}\right)^{-6}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^6$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ **h)** $\left(\dfrac{17}{45}\right)^0$ **i)** $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$

a) $\dfrac{1}{25}$

b) $5^2 = 25$

c) $(-5)^2 = 25$

d) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2} = \dfrac{16}{9}$

e) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-6} = 10^6 = 1\,000\,000$

f) $\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5}\right)^6 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^6 = \dfrac{1}{1\,000\,000}$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5} = \dfrac{32}{243}$

h) 1

i) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-6} = 3^6 = 729$

2 Notación científica

Página 30

1. ¿Verdadero o falso?

a) $5{,}83 \cdot 10^{-5} < 2{,}01 \cdot 10^{4}$

b) $58{,}35 \cdot 10^{4} > 3{,}5 \cdot 10^{6}$

c) $6{,}2 \cdot 10^{-3} < 5{,}8 \cdot 10^{-4}$

d) $(3{,}1 \cdot 10^{5}) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{-5}) < 10$

a) Verdadero.

b) Falso. $583\,500 < 3\,500\,000$

c) Falso. $0{,}0062 > 0{,}00058$

d) Falso. $(3{,}1 \cdot 10^{5}) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{-5}) = 10{,}23 > 10$.

2. Calcula.

a) $(3{,}25 \cdot 10^{7}) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^{4}) + (-3{,}2 \cdot 10^{5})$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^{3})$

d) $(1{,}17 \cdot 10^{8}) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

a) $3{,}03875 \cdot 10^{-7}$

b) $-2{,}627 \cdot 10^{5}$

c) $1{,}92 \cdot 10^{9}$

d) $1{,}17 \cdot 10^{8}$

Página 31

3. Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.

a) $3{,}03875 \cdot 10^{-7}$

b) $-2{,}627 \cdot 10^{5}$

c) $1{,}92 \cdot 10^{9}$

d) $1{,}17 \cdot 10^{8}$

3 Raíces y radicales

Página 32

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt{14\,400}$ **d)** $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}}$ **f)** $\sqrt[3]{\dfrac{3\,375}{1\,000}}$ **g)** $\sqrt[3]{1{,}728 \cdot 10^{21}}$ **h)** $\sqrt{2{,}025 \cdot 10^{-11}}$

a) 2 b) 6 c) 120 d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$ g) $12 \cdot 10^6$ h) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

e) 7 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{7}$ y $-\sqrt[4]{7}$.

f) $\sqrt{-4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$.

a) Falso; $\sqrt{25}$ hace referencia a la raíz positiva, $\sqrt{25} = 5$.

b) Verdadero; $(-5)^2 = 25$.

c) Falso; $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

d) Falso. Solo tiene una, porque $(-3)^3 = -27$

e) Verdadero.

f) Falso. No existen raíces cuadradas de números negativos.

Página 33

Cálculo mental

Simplifica:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ **b)** $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10}$

a) $\sqrt{100} = 10$ b) $\sqrt[3]{60}$

Cálculo mental

Descompón y extrae fuera del radical:

a) $\sqrt{50}$ **b)** $\sqrt[3]{24}$ **c)** $\sqrt[3]{2\,000}$

a) $\sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} = 10\sqrt[3]{2}$

Cálculo mental

Calcula el valor de estas potencias:

a) $(\sqrt{3})^6$ **b)** $(\sqrt[3]{2})^6$ **c)** $(\sqrt[4]{5})^{12}$

a) $3^3 = 27$ b) $2^2 = 4$ c) $5^3 = 125$

Cálculo mental

Simplifica:

a) $4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4}$

a) $10\sqrt{5}$ b) $3\sqrt[3]{4}$

3. Simplifica las expresiones que puedas:

a) $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$ **f)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{7}$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **h)** $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$

i) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5}$ **j)** $\left(\sqrt{5}\right)^{10}$

k) $\left(\sqrt{6}\right)^7$ **l)** $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$

a) $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3} \rightarrow$ No se puede simplificar. b) $3\sqrt{5} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8} \rightarrow$ No se puede simplificar. d) $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5} \rightarrow$ No se puede simplificar.

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{42}$ f) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{7} \rightarrow$ No se puede simplificar.

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ h) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{343}$

i) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5} \rightarrow$ No se puede simplificar. j) $\left(\sqrt{5}\right)^{10} = 5^5$

k) $\left(\sqrt{6}\right)^7 \rightarrow$ No se puede simplificar. l) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10} = 7^2 = 49$

4. Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4}$ **b)** $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2}$ **c)** $\sqrt[4]{5^5}$

d) $\sqrt{180}$ **e)** $\sqrt{720}$ **f)** $\sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4} = 3 \cdot 5^2 = 75$

b) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5}$

e) $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5}$

f) $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{3}$

5. Opera y simplifica lo máximo posible:

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20}$ **b)** $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{16}$ **c)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{54} \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}$

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

b) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

c) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{54} \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^{12} = \sqrt[3]{486} \cdot 3^2 = 9\sqrt[3]{3^5 \cdot 2} = 27\sqrt[3]{18}$

4 Números racionales e irracionales

Página 34

1. **Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).**

$$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\overset{\frown}{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi-3$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

NATURALES, $\mathbb{N}$	$107;\ 36/9 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$107;\ -7;\ 36/9 = 4;\ -\sqrt{36} = -6$
FRACCIONARIOS	$3{,}95;\ 3{,}\overset{\frown}{95};\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ 7/3$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\overset{\frown}{95};\ -7;\ 36/9 = 4;\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ -\sqrt{36} = -6;\ 7/3$
IRRACIONALES	$\sqrt{20};\ \pi - 3$

Ejercicios y problemas

Página 36

Practica

Potencias

1. **Calcula las potencias siguientes:**

a) $(-3)^3$ **b)** $(-2)^4$ **c)** $(-2)^{-3}$

d) -3^2 **e)** -4^{-1} **f)** $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

a) -27 b) 16 c) $-\frac{1}{8}$

d) -9 e) $-\frac{1}{4}$ f) 1

g) 8 h) 4 i) 1

2. **Expresa como una potencia de base 2 o 3.**

a) 64 **b)** 243 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$ **f)** $\frac{3^4}{3^{-3}}$ **g)** $\frac{2^{-5}}{2^3}$ **h)** $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

a) 2^6 b) 3^5

c) 2^{-5} d) 3^{-1}

e) $-(3)^{-3}$ f) $3^4 : 3^{-3} = 3^{4-(-3)} = 3^{4+3} = 3^7$

g) $2^{-5} : 2^3 = 2^{-5-3} = 2^{-8}$

h) $(2^{-3} : 2^{-2})^{-1} = (2^{-3-(-2)})^{-1} = (2^{-3+2})^{-1} = (2^{(-1)})^{-1} = 2^{(-1)\cdot(-1)} = 2^1 = 2$

3. **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **b)** $\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

4. **Expresa como potencia única.**

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ **b)** $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ **c)** $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{4}$ **f)** $\frac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ b) $\frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{1}{15}\right)^{3}$

5. Simplifica.

a) $\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ **b)** $\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 3^2}$ **c)** $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$

d) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$ **e)** $(a^{-1}b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$ **f)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}(a^{-1})^{-2}$

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \frac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \frac{2^4}{3^5}$

b) $\frac{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 3^{-2}}{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^2} = \frac{3^{-1}}{2^{-2} \cdot 3^2} = \frac{2^2}{3^3}$

c) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a} = \frac{4ab3a}{9b^2} = \frac{4a^2}{3b}$

d) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2} = \frac{6^{-1}a^{-1}}{3^{-2}a^{-4}} = \frac{3}{2}a^3$

e) $(a^{-1}b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1} = a^{-2}b^4a^{-1}b^2 = \frac{b^6}{a^3}$

f) $\frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \frac{b^3}{a}$

Notación científica

6. Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^7$ **b)** $5 \cdot 10^{-4}$ **c)** $9{,}73 \cdot 10^8$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ **e)** $3{,}8 \cdot 10^{10}$ **f)** $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

a) 40 000 000 b) 0,0005 c) 973 000 000

d) 0,0000085 e) 38 000 000 000 f) 0,000015

7. Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 **b)** 0,000005 **c)** 4 800 000 000

d) 0,0000173 **e)** 50 030 000 **f)** 0,002007

a) $1{,}38 \cdot 10^7$ b) $5 \cdot 10^{-6}$ c) $4{,}8 \cdot 10^9$

d) $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ e) $5{,}003 \cdot 10^7$ f) $2{,}007 \cdot 10^{-3}$

8. Di el valor de n en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$ **b)** $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$ **d)** $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

a) $n = 6$ b) $n = -5$ c) $n = 5$ d) $n = -4$

9. Completa estas igualdades:

a) $836 \cdot 10^3 = 8{,}36 \cdot 10^{\dots}$ **b)** $0{,}012 \cdot 10^4 = \dots \cdot 10^2$

c) $\dots \cdot 10^{-3} = 0{,}0834 \cdot 10^3$ **d)** $73{,}3 \cdot 10^2 = \dots \cdot 10^{-1}$

a) $836 \cdot 10^3 = 8{,}36 \cdot 10^5$ b) $0{,}012 \cdot 10^4 = 1{,}2 \cdot 10^2$

c) $83\,400 \cdot 10^{-3} = 0{,}0834 \cdot 10^3$ d) $73{,}3 \cdot 10^2 = 73\,300 \cdot 10^{-1}$

10. **Expresa en notación científica.**

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km

b) Peso de un grano de arroz: 0,000027 kg

c) Diámetro de cierto virus: 0,00000008 m

d) Emisión de CO_2 en un año: 54 900 000 000 kg

a) $1,5 \cdot 10^8$ km b) $2,7 \cdot 10^{-5}$ kg c) $8 \cdot 10^{-8}$ m d) $5,49 \cdot 10^{10}$ kg

11. **Calcula y comprueba con la calculadora.**

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ **b)** $(1,5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ **d)** $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^{7})$ **f)** $(4,4 \cdot 10^{8}) : (2 \cdot 10^{-5})$

a) $6 \cdot 10^{17}$ b) $3 \cdot 10^{-12}$ c) $6,8 \cdot 10^9$ d) $4 \cdot 10^{-5}$ e) $3 \cdot 10^{-14}$ f) $2,2 \cdot 10^{13}$

12. **Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora.**

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3) = 2,5 \cdot 8 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{11}$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5) = (5 : 8) \cdot 10^{-8} = 0,625 \cdot 10^{-8} = 6,25 \cdot 10^{-9}$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = 7,4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 37 \cdot 10^7 = 3,7 \cdot 10^8$

d) $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (1,2 : 2) \cdot 10^{14} = 0,6 \cdot 10^{14} = 6 \cdot 10^{13}$

13. **Expresa en notación científica y calcula:**

a) $\dfrac{0,00054 \cdot 12\,000\,000}{250\,000 \cdot 0,00002}$ **b)** $\dfrac{1\,320\,000 \cdot 25\,000}{0,000002 \cdot 0,0011}$

c) $\dfrac{0,000015 \cdot 0,000004}{1\,250\,000 \cdot 600\,000}$ **d)** $(0,0008)^2 \cdot (30\,000)^2$

a) $\dfrac{5,4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{6,48 \cdot 10^{11}}{5} = 1,296 \cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{1,32 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{3,3 \cdot 10^{10}}{2,2 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{19}$

c) $\dfrac{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^5} = \dfrac{6 \cdot 10^{-11}}{7,5 \cdot 10^{11}} = 0,8 \cdot 10^{-22} = 8 \cdot 10^{-23}$

d) $(8 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (3 \cdot 10^4)^2 = 6,4 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^8 = 576$

14. **Efectúa y comprueba con la calculadora.**

a) $3,6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$ **b)** $5 \cdot 10^9 + 8,1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$ **d)** $5,32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a) $3,6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3,2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^9 + 81 \cdot 10^9 = 86 \cdot 10^9 = 8,6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7,5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5,4 \cdot 10^{-4}$

15. **Efectúa y escribe el resultado con todas las cifras.**

a) $5,3 \cdot 10^{11} - 1,2 \cdot 10^{12} + 7,2 \cdot 10^{10}$

b) $4,2 \cdot 10^{-6} - 8,2 \cdot 10^{-7} + 1,8 \cdot 10^{-5}$

c) $(2,25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$

d) $(1,4 \cdot 10^{-7})^2 : (5 \cdot 10^{-5})$

a) –598 000 000 000

b) 0,00002138

c) 30 000 000 000

d) 0,000000000392

Página 37

Raíces y radicales

16. **Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt{\frac{16}{25}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **d)** $\sqrt[5]{-1}$ **e)** $\sqrt[3]{216}$

f) $\sqrt[7]{-128}$ **g)** $\sqrt[5]{-243}$ **h)** $\sqrt[6]{4\,096}$ **i)** $\sqrt[6]{64}$ **j)** $\sqrt[3]{-8}$

k) $\sqrt[4]{625}$ **l)** $\sqrt{-8}$ **m)** $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$ **n)** $\sqrt[5]{-1}$

a) 2 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) –1 e) 6

f) –2 g) –3 h) 4 i) 2 j) –2

k) 5 l) No tiene solución real. m) $\frac{5}{2}$ n) –1

17. **Saca del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ **b)** $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ **c)** $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$

d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ **e)** $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ **f)** $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

a) $10\sqrt{5}$ b) 28 c) $3\sqrt[4]{36}$

d) $3b\sqrt[3]{a}$ e) $2a\sqrt[4]{ab}$ f) $2b^2\sqrt[5]{a^2}$

18. **Extrae de cada radical los factores que sea posible:**

a) $\sqrt[4]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{81}$ **c)** $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$ **e)** $\sqrt[4]{144}$ **f)** $\sqrt[3]{250}$

g) $\sqrt[5]{64}$ **h)** $\sqrt[3]{243}$ **i)** $\sqrt{4a^3}$

a) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$

d) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[4]{3^2}$ f) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$ h) $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$ i) $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$

19. **Simplifica si es posible.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{80}$ c) $\sqrt[3]{20}$

d) No es posible. e) $\sqrt[4]{81} = 3$ f) No es posible.

20. **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$ **b)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ **c)** $\left(\sqrt[6]{2^2}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{1\,000}$ **e)** $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}$ **f)** $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}$

a) 2 b) 2^2 c) 2

d) $10\sqrt[3]{10}$ e) 2 f) 9

21. **Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.**

a) $7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $3\sqrt{2}$

b) No se puede, porque tienen distinto radicando.

c) $-\sqrt{3}$

d) Igual que b).

e) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. **Efectúa.**

a) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{80}-\sqrt{45}-\sqrt{20}$

c) $-\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}$ **d)** $\sqrt{175}+\sqrt{28}-5\sqrt{63}$

a) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot5^2}+\sqrt{2^3\cdot3^2}-10\sqrt{2}=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-10\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{80}-\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot2^4}-\sqrt{5\cdot3^2}-\sqrt{5\cdot2^2}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}=-\sqrt{3\cdot2^4}+3\sqrt{3\cdot5^2}-\sqrt{3^3\cdot2^2}=-4\sqrt{3}+15\sqrt{3}-6\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{175}+\sqrt{28}-5\sqrt{63}=\sqrt{7\cdot5^2}+\sqrt{7\cdot2^2}-5\sqrt{7\cdot3^2}=5\sqrt{7}+2\sqrt{7}-15\sqrt{7}=-8\sqrt{7}$

Aplica lo aprendido

23. **Completa en notación científica.**

a) $27\ km^2 = \ldots\ cm^2$ **b)** $50\ cm^3 = \ldots\ m^3$

c) $0{,}8\ ha = \ldots\ km^2$ **d)** $1\,200\ l = \ldots\ mm^3$

e) $180\ \mu = \ldots\ dm$ $(1\ \mu = 10^{-6}\ m)$ **f)** $0{,}075\ Å = \ldots\ \mu$ $(1Å = 10^{-10}\ m)$

a) $27\ km^2 = 2{,}7\cdot10^{11}\ cm^2$

b) $50\ cm^3 = 5\cdot10^{-5}\ m^3$

c) $0{,}8\ ha = 8\cdot10^{-3}\ km^2$

d) $1\,200\ l = 1{,}2\cdot10^{10}\ mm^3$

e) $180\ \mu = 1{,}8\cdot10^{-3}\ dm$

f) $0{,}075\ Å = 7{,}5\cdot10^{-6}\ \mu$

24. **Observa las masas de estos planetas:**

Tierra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg **Marte: $6{,}42\cdot10^{23}$ kg** **Júpiter: $1{,}90\cdot10^{27}$ kg**

a) ¿Cuántos kilos pesa más la Tierra que Marte?

b) ¿Cuántas veces pesa más Júpiter que Marte?

a) La Tierra pesa $5{,}98\cdot10^{24}-6{,}42\cdot10^{23}=5{,}338\cdot10^{24}$ kg más que Marte.

b) Júpiter pesa aproximadamente $\frac{1{,}90\cdot10^{27}}{6{,}42\cdot10^{23}}\approx 3\,000$ veces más (2 959,501).

25. **La galaxia M87, que está a 50 millones de años-luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años-luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.**

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente, $2 \cdot 10^{30}$ kg).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

a) La masa del agujero negro es $2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 4 \cdot 10^{39}$ kg.

b) Un año luz son $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

Distancia $= 50 \cdot 10^6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 4{,}73 \cdot 10^{20}$ km

Diámetro $= 60 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 5{,}68 \cdot 10^{14}$ km

Reflexiona sobre la teoría

26. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) La potencia de un número negativo puede ser igual a 1.

b) Si $x < 0$, entonces $-x^3 > 0$.

c) $-x^2$ es siempre un número positivo.

d) El cubo de un número negativo es siempre menor que dicho número.

a) Verdadero. Por ejemplo: $(-1)^2$.

b) Verdadero. Por ejemplo: $-(-3)^3 > 0$.

c) Falso. Por ejemplo: $-(-3)^2 < 0$.

d) Verdadero. Por ejemplo: $(-3)^3 = -9$; $-9 < -3$.

27. **Si $a^2 = b^2$, ¿qué podemos afirmar de a y b?**

Si $a^2 = b^2$ se pueden afirmar dos cosas. O bien $a = b$, o a es un número cualquiera y b es el mismo número pero negativo.

28. **Ordena los números n, n^2, $\sqrt{n}$ y $1/n$ en los siguientes casos:**

a) Si $n > 1$. **b) Si $0 < n < 1$.**

a) $\frac{1}{n} < \sqrt{n} < n < n^2$ b) $n^2 < n < \sqrt{n} < \frac{1}{n}$

29. **Indica cuáles de las siguientes raíces son racionales y cuáles irracionales:**

a) $\sqrt{64}$ **b) $\sqrt[3]{64}$** **c) $\sqrt[5]{64}$**

d) $\sqrt{100}$ **e) $\sqrt[3]{100}$** **f) $\sqrt{1/4}$**

a) Racional b) Racional c) Irracional

d) Racional e) Irracional f) Racional

30. **Justifica cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que se verifique la igualdad:**

a) $a^3 = 2^6$ **b)** $a^{-1} = 2$ **c)** $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$ **e)** $a^{-2} = \frac{1}{4}$ **f)** $a^{-5} = -1$

a) $a = 2^2$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = \frac{16}{25}$

d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) $a = -1$

31. **¿Por qué no se puede hallar la raíz de índice par de un número negativo?**

Calcula, cuando sea posible, estas raíces:

a) $\sqrt[3]{-27}$ **b)** $-\sqrt{64}$ **c)** $\sqrt[4]{-16}$ **d)** $\sqrt[5]{-1}$

Porque al elevar un número negativo a un exponente par, obtenemos un número positivo.

a) -3 b) -8 c) Imposible. d) -1

Página 38

Conjetura y generaliza

- **OBSERVA:**

$$1^3 = 1 \rightarrow 1^2 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 \rightarrow 3^2 = (1 + 2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

- **HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?**

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ $\quad$ ¡Compruébalo!

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ $\quad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 225$

- **GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:**

— ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$?

— Elabora una fórmula que te permita calcular:

$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ cualquiera que sea el término natural n.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3\,025$

$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

Investiga

- **Observa los resultados de estas secuencias de teclas en la calculadora. En ambas se han realizado diez pulsaciones.**

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=} \rightarrow$ 531441

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{=} \rightarrow$ 43046721

- **¿Qué potencia de base 3 se ha obtenido en cada una?**

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=} \rightarrow (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^3 = [(3)^4]^3 = 3^{12}$

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{=} \rightarrow [(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^2]^2 = [(3)^4]^4 = 3^{16}$

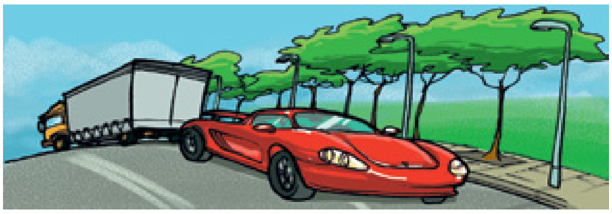
Teniendo en cuenta lo anterior, y utilizando solamente las teclas $\boxed{3}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{=}$, ¿cuál es el mínimo número de pulsaciones que necesitas para calcular 3^{20}?

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{=} \rightarrow [(3 \cdot 3)^5]^2 = (3^2)^{10} = 3^{20}$

Página 39

Entrénate resolviendo problemas

- **Un automóvil y un camión parten simultáneamente de una población, por la misma carretera, pero en sentidos opuestos.**



La velocidad del coche es de 120 km/h, y la del camión es de 90 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de 10 minutos?

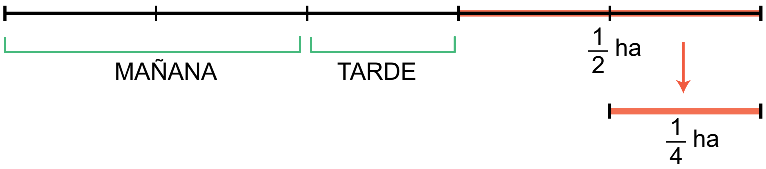
10 min = $\frac{1}{6}$ h

$d_{coche} = v \cdot t = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ km $\qquad d_{camión} = v \cdot t = 80 \cdot \frac{1}{6} = 13{,}33$ km

$d_{total} = 20 + 13{,}33 = 33{,}33$ km

- **Un labrador ara por la mañana dos quintas partes de un campo. Por la tarde, vuelve al trabajo y ara un tercio de lo que le quedaba.**

Sabiendo que aún falta por arar media hectárea, ¿cuál es la superficie del campo?



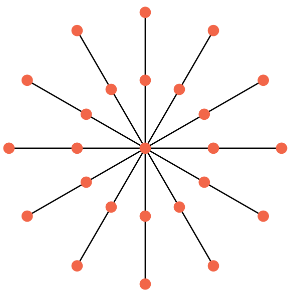
La superficie total del campo es de $\frac{5}{4}$ ha = 125 áreas.

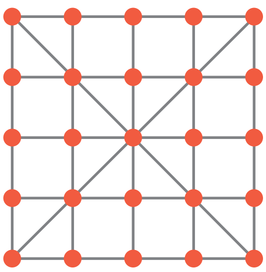
- **Aquí tienes un problema y la solución que ha encontrado Andrés para él:**

"Si tuviésemos veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaríamos con ellos seis filas de cinco soldaditos cada una?".

Sin embargo, Susana ha dispuesto los 25 soldados de modo que el número de filas, con 5 soldados en cada una, son muchas más de seis.

¿Te atreves a probar?





Autoevaluación

1. Calcula.

a) $(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{0} - 3^{-1}$

b) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$

a) $\frac{1}{3^2} + \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$

2. Simplifica.

a) $\frac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$

b) $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$

d) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : \frac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

a) $\frac{1}{2ab}$

b) $-ab^2$

c) $\frac{b^2}{a}$

d) $\frac{1}{ab}$

3. Descompón en factores y utiliza las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:

$$\frac{24^2 \cdot 15^{-2} \cdot 6^4}{8^4 \cdot 9^{-3} \cdot 3^{10}}$$

$\frac{3^2 \cdot 2^6 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 3^4 \cdot 2^4}{2^{12} \cdot 3^{-6} \cdot 3^{10}} = \frac{3^{12} \cdot 2^{10}}{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 5^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{100}$

4. Expresa en notación científica.

a) 234 000 000

b) 0,0000075

c) $758 \cdot 10^{-5}$

d) $0,035 \cdot 10^{13}$

a) $2,34 \cdot 10^8$

b) $7,5 \cdot 10^{-5}$

c) $7,58 \cdot 10^7$

d) $3,5 \cdot 10^{-4}$

5. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{10})$

c) $(2,7 \cdot 10^8) + (3,3 \cdot 10^7)$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$

a) $28 \cdot 10^{-6} = 2,8 \cdot 10^{-5}$

b) $3 \cdot 10^{-18}$

c) $27 \cdot 10^7 + 3,3 \cdot 10^7 = 30,3 \cdot 10^7 = 3,03 \cdot 10^8$

d) $2 \cdot 10^6$

6. Simplifica.

a) $\sqrt[3]{-1\,331}$

b) $\sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{25}$

c) $\sqrt[3]{120a^3b^4}$

a) -11

b) 5

c) $2a\sqrt[3]{15b}$

7. Simplifica cuando sea posible.

a) $\sqrt{3}\sqrt{27}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^5$

a) $\sqrt{3^4}=3^2$

b) $\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{3}\right)$

d) No se puede simplificar.

8. Uno de los campos de gas natural más grande de Asia Central tiene unas reservas de 900 km³. Han descubierto una bolsa de gas que aumenta dichas reservas en $1{,}3\cdot 10^4$ hm³. Su producción anual asciende a $1{,}8\cdot 10^{10}$ m³. ¿Cuántos años se podrá explotar este recurso energético si se mantiene el ritmo de producción actual? Expresa en notación científica y opera.

$$\left.\begin{array}{rcl} 1{,}8\cdot 10^{10}\text{ m}^3 & \rightarrow & 1\text{ año} \\ 9\cdot 10^{11} & \rightarrow & x\text{ años} \end{array}\right\}\ x=\frac{9\cdot 10^{11}}{1{,}8\cdot 10^{10}}=50\text{ años}$$

Página 41

Resuelve

1. Resuelve los dos problemas del papiro de Ahmes que se han propuesto, y respecto al primero de ellos, contesta:

a) ¿Cuánto debe durar una tinaja?

b) ¿Cuánta grasa se puede consumir en un mes?

a) 1 año = 12 meses

Una tinaja debe durar 12 : 10 = 1,2 meses.

b) En un mes se puede consumir 10 : 12 = $\frac{5}{6}$ de tinaja.

2. Un banquero presta a un interés del 6 % anual.

a) ¿Qué intereses obtendrá al prestar 100 doblones durante un año? ¿Y si los presta durante un mes? ¿Y si lo hace durante siete meses?

b) ¿Qué interés obtendrá por prestar 500 euros durante siete meses?

a) $100 \cdot 1{,}06 = 106$

Al cabo de un año obtendrá 106 – 100 = 6 doblones.

$6 : 12 = 0{,}5\,\%$; $1{,}005 \cdot 100 = 100{,}5$

Si los presta durante un mes obtendrá un interés de 100,5 – 100 = 0,5 %.

$100 \cdot 1{,}005^7 = 103{,}55$

Si lo hace durante siete meses obtendrá un interés de 103,55 – 100 = 3,55 %.

b) $500 \cdot 1{,}005^7 = 517{,}76$

Por prestar 500 euros durante siete meses obtendrá un interés de 517,76 – 500 = 17,76 %.

3. Resuelve el problema de la tablilla babilónica mencionado más arriba.

$$C_F = 2 \cdot C \rightarrow 2C = C \cdot 1{,}2^n \rightarrow \frac{2C}{C} = 1{,}2^n \rightarrow 2 = 1{,}2^n$$

$$\log 2 = \log (1{,}2^n) \rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1{,}2 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} = 3{,}08$$

1 Aproximaciones y errores

Página 43

1. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

c) Volumen de un pantano, 326 hm^3.

d) Volumen de un asteroide, $3{,}26 \cdot 10^6$ km^3.

a) Error absoluto < 0,5 *l*

b) Error absoluto < 0,5 m^3 = 500 *l*

c) Error absoluto < 0,5 hm^3 = $5 \cdot 10^8$ *l* = 500 000 000 *l*

d) Error absoluto < $0{,}005 \cdot 10^6$ km^3 = $5 \cdot 10^3$ km^3 = $5 \cdot 10^{15}$ *l*

2. Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

d) La Tierra, $5{,}972 \cdot 10^{21}$ toneladas.

El menor error relativo se da al pesar la Tierra, porque se usan 4 cifras significativas.

Y el mayor error relativo se da al pesar al pavo, porque solo tiene una cifra significativa.

2 La proporcionalidad en los problemas aritméticos

Página 46

1. Un barreño de 150 litros se llena con un grifo que mana 5 litros por minuto. ¿Qué caudal de agua se necesita para llenar una balsa de 2 400 litros en el mismo tiempo?

A más litros a llenar, más caudal habrá $\rightarrow$ directa.

$$\left.\begin{array}{l}150 \text{ litros } \rightarrow \text{ 5 litros/minuto}\\ 2\,400 \text{ litros } \rightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{2\,400 \cdot 5}{150} = 80 \text{ litros}$$

2. En una granja, 16 conejos consumen 100 kg de alfalfa en 12 días. ¿Cuántos días pueden comer 6 conejos con 100 kg de alfalfa?

Para menos conejos, tarda más tiempo en gastarse la alfalfa $\rightarrow$ inversa.

$$\left.\begin{array}{l}16 \text{ conejos } \rightarrow \text{ 12 días}\\ 6 \text{ conejos } \rightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{16 \cdot 12}{6} = 32 \text{ días}$$

Con 100 kg de alfalfa, 6 conejos podrán comer 32 días.

3. Si 15 *l* de agua se convierten en 16 *l* de hielo, ¿qué volumen ocuparán, al congelarse, 2 m³ de agua?

A mayor cantidad de agua, mayor cantidad de hielo $\rightarrow$ directa.

2 m³ de agua = 200 dm³ de agua = 200 *l* de agua.

$$\left.\begin{array}{l}15\, l \text{ de agua } \rightarrow 16\, l \text{ de hielo}\\ 200\, l \text{ de agua } \rightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{16 \cdot 200}{15} = 213,\widehat{3}\; l$$

Ocupará un volumen de 213,3 *l*.

4. Un grifo que mana 5 litros por minuto llena un cierto barreño en 30 minutos. ¿Qué caudal debe tener otro grifo que lo llene en 40 minutos?

A mayor tiempo de llenado, menor caudal $\rightarrow$ inversa.

$$\left.\begin{array}{l}30 \text{ minutos } \rightarrow \text{ 5 litros/minuto}\\ 40 \text{ minutos } \rightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{30 \cdot 5}{40} = 3,75 \text{ litros/minuto}$$

5. Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿Cuántas calorías se necesitarán para subir una pieza de hierro de 3 480 g de 0 °C a 210 °C?

Son dos proporcionalidades directas, a más temperatura se necesitan más calorías y a mayor cantidad de hierro, mayor cantidad de calorías necesarias.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
3 480 g	210 °C	0,105 · 210 · 3 480 = 76 734

Se necesitarán 76 734 calorías.

6. **Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿A qué temperatura se pondrá una pieza de hierro de 5 kg que está a 20 °C, si se le suministran 20 000 cal?**

Es una doble proporcionalidad directa, a más cantidad de hierro se han de suministrar más calorías para que aumente 1 °C y, dando una cantidad de calorías aumentará una cantidad directamente proporcional de grados.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
5 kg = 5 000 g	$\frac{20\,000}{0,105 \cdot 5\,000} \approx 38,1$ °C	20 000

Se pondrá a una temperatura de 38,1 °C.

7. **En los trabajos de una autopista, 20 camiones trabajando 8 horas diarias logran llevar del tajo a la escombrera 4 dam^3 de tierra cada día. ¿Cuánta tierra moverán en un día 12 camiones trabajando en turnos de 10 horas diarias?**

Son dos proporcionalidades directas, a menos camiones menos tierra movida, y a más horas diarias más tierra movida.

N.º CAMIONES	HORAS DIARIAS	VOLUMEN DE TIERRA (dam^3)
20	8	4
1	8	0,2
1	1	0,025
12	10	0,025 · 12 · 10 = 3

Se moverán 3 dam^3 de tierra.

8. **Para que un gramo de agua suba un grado, se necesita una caloría. ¿Cuánto calor es necesario para subir a punto de ebullición un litro de agua que sale del grifo a 12 °C?**

1 *l* de agua = 1 kg de agua = 1 000 g de agua

Punto de ebullición del agua = 100 °C.

Deberá subir 100 – 12 = 88 °C. Es una doble proporcionalidad directa ya que a más cantidad de agua más calorías se necesitan y a mayor temperatura más calorías son necesarias.

GRAMOS DE AGUA	GRADOS QUE AUMENTA	CALORÍAS
1 g	1 °C	1
1 000 g	88 °C	1 · 1 000 · 88 = 88 000

Se necesitarán 88 000 calorías.

9. **Una piara de 23 cerdos se come, en 50 días, 2 990 kg de pienso. ¿Cuántos días duran 6 240 kg de pienso a 75 cerdos?**

PROPORCIONALIDAD DIRECTA
PROPORCIONALIDAD INVERSA

kg DE PIENSO	CERDOS	DÍAS
2 990	23	50
1	23	$\frac{5}{299}$
1	1	$\frac{5}{13}$
6 240	75	$\frac{5}{13} \cdot \frac{6\,240}{75} = 32$

Los 6 240 kg de pienso para 75 cerdos durarán 32 días.

3 Problemas clásicos

Página 47

1. Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones de euros, respectivamente, para crear una empresa. Si las ganancias del primer año ascienden a 75 900 €, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

Entre los tres aportaron 2 + 3 + 6 = 11 millones de euros.

Por tanto, a cada uno le corresponderá:

Primero $\rightarrow \frac{2}{11} \cdot 75\,900 = 13\,800$ €

Segundo $\rightarrow \frac{3}{11} \cdot 75\,900 = 20\,700$ €

Tercero $\rightarrow \frac{6}{11} \cdot 75\,900 = 41\,400$ €

2. ¿Cómo se podrían repartir 2 310 € entre tres hermanos de forma que al mayor le corresponda la mitad que al menor, y a este, el triple que al mediano?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mayor} \rightarrow \frac{3x}{2} \\ \text{Mediano} \rightarrow x \\ \text{Menor} \rightarrow 3x \end{array}\right\} \frac{3x}{2} + x + 3x = 2\,310 \rightarrow x = 420$$

Por tanto, a cada hermano le corresponde:

Mayor → 630 €

Mediano → 420 €

Menor → 1 260 €

3. Tres personas poseían 1/3, 2/9 y 1/6, respectivamente, de una urbanización, junto con un cuarto socio que se retira llevándose su parte. ¿Qué parte de lo que queda corresponde a cada uno?

Los tres propietarios restantes tienen en total $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+3}{18} = \frac{13}{18}$ partes.

Primero $\rightarrow \frac{1}{3} : \frac{13}{18} = \frac{6}{13}$

Segundo $\rightarrow \frac{2}{9} : \frac{13}{18} = \frac{4}{13}$

Tercero $\rightarrow \frac{1}{6} : \frac{13}{18} = \frac{3}{13}$

4. **Una balsa de 12 150 *l* se llena con tres grifos cuyos caudales son 14,6 *l*/s; 8,9 *l*/s y 4,2 *l*/s. ¿Cuánto ha aportado cada uno al total de la balsa? Da la solución aproximando hasta las decenas de litro.**

Entre los tres grifos tienen un caudal de 14,6 + 8,9 + 4,2 = 27,7 *l*/s.

Por tanto, cada grifo aporta:

Primero $\rightarrow \dfrac{14,6}{27,7} \cdot 12\,150 = 6\,403,97\ l$

Segundo $\rightarrow \dfrac{8,9}{27,7} \cdot 12\,150 = 3\,903,79\ l$

Tercero $\rightarrow \dfrac{4,2}{27,7} \cdot 12\,150 = 1\,842,24\ l$

Página 48

5. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ 1	12 kg	12,40 €/kg	12 · 12,40 = 148,80 €
CAFÉ 2	8 kg	7,40 €/kg	8 · 7,40 = 59,20 €
MEZCLA	20 kg		148,80 + 59,20 = 208 €

Precio de la mezcla → $\frac{208 \text{ €}}{20 \text{ kg}} = 10{,}4$ €/kg

6. Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante? ¿Y si añadimos 2 kg de oro puro?

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1er LINGOTE	3 500 g	80	$3\,500 \cdot \frac{80}{100} = 2\,800$ g
2º LINGOTE	1 500 g	95	$1\,500 \cdot \frac{95}{100} = 1\,425$ g
TOTAL	5 000 g		2 800 + 1 425 = 4 225 g

Proporción de oro → $\frac{4\,225 \text{ g oro}}{5\,000 \text{ g totales}} \cdot 100 = 84{,}5\,\%$

Y si añadimos 2 kg de oro puro:

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1er LINGOTE	3 500 g	80	2 800 g
2º LINGOTE	1 500 g	95	1 425 g
3er LINGOTE	2 000 g	100	2 000 g
TOTAL	7 000 g		6 225 g

Proporción de oro → $\frac{6\,225 \text{ g oro}}{7\,000 \text{ g totales}} \cdot 100 = 88{,}9\,\%$

7. Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 *l* de agua con 7 *l* de alcohol?

	LITROS	PESO POR LITRO	PESO TOTAL
AGUA	3	999,2 g/*l*	2 997,6 g
ALCOHOL	7	794,7 g/*l*	5 562,9 g
MEZCLA	10		8 560,5 g

Gramos por litro de la mezcla → $\frac{8\,560{,}5 \text{ g}}{10\ l} = 856{,}05$ g/*l*

8. **Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?**

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE ORO
1.er LINGOTE	2 000 g	0,85	1 700 g
2.º LINGOTE	1 500 g	0,9	1 350 g
TOTAL	3 500 g		3 050 g

Lingote resultante → Ley $= \dfrac{3\,050 \text{ g}}{3\,500 \text{ g}} \approx 0{,}87$

Página 49

9. **Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.**

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

a) El coche se aproxima al camión a una velocidad de 120 – 90 = 30 km/h.

Tardará en alcanzarlo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{30} = 2{,}5 \text{ horas.}$$

b) Se aproximan a una velocidad de 120 + 90 = 210 km/h.

Tardarán en cruzarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{504}{210} = 2{,}4 \text{ h}$$

10. **La capacidad de un pantano es 981,1 hm³. Actualmente se encuentra al 43 % del total, y está recibiendo una aportación de 45 m³/s mientras que se desembalsan 3 200 *l*/s. De mantenerse este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse hasta un 95 % de su capacidad?**

$45 \text{ m}^3/\text{s} = 45\,000 \text{ dm}^3/\text{s} = 45\,000\ l/\text{s}$

$981{,}1 \text{ hm}^3 = 9{,}811 \cdot 10^{11} \text{ dm}^3 = 9{,}811 \cdot 10^{11}\ l$

La velocidad de llenado es 45 000 – 3 200 = 41 800 *l*/s

$43\,\%$ de $9{,}811 \cdot 10^{11}\ l = 4{,}21873 \cdot 10^{11}\ l$

$95\,\%$ de $9{,}811 \cdot 10^{11}\ l = 9{,}32045 \cdot 10^{11}\ l$

Se quieren llenar $9{,}32045 \cdot 10^{11} - 4{,}21873 \cdot 10^{11} = 5{,}10172 \cdot 10^{11}\ l$

Tardará en llenarse al 95 %:

$$t = \frac{vol}{v} = \frac{5{,}10172 \cdot 10^{11}}{41\,800} = 12\,205\,071{,}77 \text{ s}$$

12 205 071,77 s = 141 días, 6 horas y 30 minutos.

4 Cálculos con porcentajes

Página 50

Cálculo mental

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

a) 10 %	**b) 7 %**	**c) 1 %**
d) 160 %	**e) 127 %**	**f) 5 %**
a) 0,1	b) 0,07	c) 0,01
d) 1,6	e) 1,27	f) 0,05

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30.	**b) 5 respecto a 20.**	**c) 2 respecto a 10.**
d) 30 respecto a 3 000.	**e) 3 respecto a 4.**	
a) 50%	b) 25%	c) 20%
d) 1%	e) 75%	

1. Calcula.

a) El 24 % de 300. **b) El 112 % de 560.**

c) El 3 % de 83 200. **d) El 30 % de 83 200.**

e) El 230 % de 5 200. **f) El 300 % de 40.**

a) $300 \cdot 0{,}24 = 72$ b) $560 \cdot 1{,}12 = 627{,}2$

c) $83\,200 \cdot 0{,}03 = 2\,496$ d) $83\,200 \cdot 0{,}3 = 24\,960$

e) $5\,200 \cdot 2{,}30 = 11\,960$ f) $40 \cdot 3 = 120$

2. Calcula el tanto por ciento que representa.

a) 45 respecto a 225. **b) 6 160 respecto a 56 000.**

c) 4 230 respecto a 9 000. **d) 1 922 respecto a 1 240.**

e) 6 000 respecto a 4 000. **f) 975 respecto a 32 500.**

a) $\dfrac{45}{225} \cdot 100 = 20 \to 20\,\%$ b) $\dfrac{6\,160}{56\,000} \cdot 100 = 11 \to 11\,\%$

c) $\dfrac{4\,230}{9\,000} \cdot 100 = 47 \to 47\,\%$ d) $\dfrac{1\,922}{1\,240} \cdot 100 = 155 \to 155\,\%$

e) $\dfrac{6\,000}{4\,000} \cdot 100 = 150 \to 150\,\%$ f) $\dfrac{975}{32\,500} \cdot 100 = 3 \to 3\,\%$

Página 51

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

a) 25 %	**b) 5 %**	**c) 40 %**
d) 80 %	**e) 110 %**	**f) 200 %**
a) 1,25	b) 1,05	c) 1,4
d) 1,8	e) 2,1	f) 3

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

a) 25 %	**b) 5 %**	**c) 40 %**
d) 15 %	**e) 88 %**	**f) 1 %**
a) 0,75	b) 0,95	c) 0,6
d) 0,85	e) 0,12	f) 0,99

3. Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?

Ahora valen 13,70 · 1,35 = 18,50 €.

4. En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15 %. ¿Cuántos hay ahora?

Ahora hay 69 580 · 0,85 = 59 143 parados.

Página 52

Cálculo mental

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50 %. C. final = 1 500. **b) Aumenta 50 %. C. final = 3 000.**

c) Aumenta 25 %. C. final = 125. **d) Aumenta 25 %. C. final = 250.**

e) Disminuye 50 %. C. final = 400. **f) Disminuye 40 %. C. final = 600.**

a) 1 000 b) 2 000 c) 100

d) 200 e) 800 f) 1 000

5. El precio de una batidora, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?

El precio sin IVA es 70,80 : 1,18 = 60 €.

6. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

Sin estirar, la goma mide 104 : 1,30 = 80 cm.

7. En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Su precio era de 50,40 : 0,70 = 72 €.

8. Un cartero ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Si ha repartido el 36 %, le quedan el 64 %; es decir, 1184 : 0,64 = 1 850 cartas.

Página 53

9. Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %.

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

a) $1\,000 \text{ €} \xrightarrow{+30\,\%} 1\,300 \text{ €} \xrightarrow{-30\,\%} 910 \text{ €}$

b) Índice de variación total: $1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91$.

$0{,}91 - 1 = -0{,}09$

Variación porcentual: baja un 9 %.

10. Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5 % anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?

$42\,000 \text{ €} \xrightarrow{1.^{er}\text{ AÑO}} 42\,000 \cdot 1{,}05 = 44\,100 \text{ €}$

$\xrightarrow{2.^{o}\text{ AÑO}} 44\,100 \cdot 1{,}05 = 46\,305 \text{ €}$

$\xrightarrow{3.^{er}\text{ AÑO}} 46\,305 \cdot 1{,}05 = 48\,620{,}25 \text{ €}$

También puede hacerse así:

1 año: $42\,000 \cdot 1{,}05 = 44\,100$ €

2 años: $42\,000 \cdot 1{,}052 = 46\,305$ €

3 años: $42\,000 \cdot 1{,}053 = 48\,620{,}25$ €

5 Interés compuesto

Página 54

1. ¿En cuánto se transforma un capital de 20 000 € colocado al 3,6 % anual durante 5 años?

Se transforma en $20\,000 \cdot (1{,}036)^5 = 23\,868{,}7$ €.

2. ¿En cuánto se transforman 20 000 € colocados 5 años al 3,6 % anual, con pago de intereses mensual?.

Un 3,6 % anual significa un $3{,}6 : 12 = 0{,}3$ % mensual.

Así: $20\,000 \cdot (1{,}003)^{60} = 23\,937{,}9$ €.

Ejercicios y problemas

Página 56

Practica

Aproximaciones y errores

1. Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 150 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

a) 1,8 millones de euros.

b) 480 000 votos.

c) 16 000 000 €.

d) 1,1 mm.

2. ¿En cuál de las aproximaciones dadas en cada caso se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{cases} 4{,}6 \\ 4{,}7 \end{cases}$

b) $1{,}546 \approx \begin{cases} 1{,}5 \\ 1{,}6 \end{cases}$

c) $\sqrt{6} \approx \begin{cases} 2{,}44 \\ 2{,}45 \end{cases}$

d) $\sqrt{10} \approx \begin{cases} 3{,}16 \\ 3{,}2 \end{cases}$

a) $\frac{14}{3} - 4{,}6 = 0{,}0666\ldots$

$4{,}7 - \frac{14}{3} = 0{,}0333\ldots$

Con 4,7 se comete menos error absoluto.

b) $1{,}546 - 1{,}5 = 0{,}046$

$1{,}6 - 1{,}546 = 0{,}054$

Con 1,5 se comete menos error absoluto.

c) $\sqrt{6} - 2{,}44 = 0{,}0095$

$2{,}45 - \sqrt{6} = 0{,}0005$

Con 2,45 se comete menos error absoluto.

d) $\sqrt{10} - 3{,}16 = 0{,}0023$

$3{,}2 - \sqrt{10} = 0{,}04$

Con 3,16 se comete menos error absoluto.

3. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo en cada caso?

a) Precio de un coche: 12 400 €.

b) Tiempo de una carrera: 34,6 min.

c) Asistentes a una manifestación: 250 000.

d) Diámetro de una bacteria: 0,0006 mm.

a) El error absoluto será menor de 50 € y, el error relativo será menor, puesto que tiene 3 cifras significativas.

b) El error absoluto será menor de 3 segundos, y el error relativo será pequeño, puesto que tiene 3 cifras significativas.

c) El error absoluto será menor de 5 000 asistentes, y el error relativo será mayor, solo tiene 2 cifras significativas.

d) El error absoluto será menor de 0,00005 mm, y el error relativo será mayor, ya que tiene una sola cifra significativa.

4. **¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:**

a) Altura de un chica: 1,75 m.

b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

a) Altura: 1,75 m $\rightarrow$ Error absoluto < 0,005 m

b) Precio: 1 175 € $\rightarrow$ Error absoluto < 0,5 €

c) Tiempo: 95 s $\rightarrow$ Error absoluto < 0,5 s

d) N.° de oyentes: 2 millones $\rightarrow$ Error absoluto < 500 000

La de menor error relativo es la b), porque tiene más cifras significativas.

Porcentajes

5. **Calcula mentalmente.**

a) 20 % de 340 **b) 2,5 % de 400** **c) 75 % de 4 000**

d) 150 % de 200 **e) 60 % de 250** **f) 12 % de 12**

a) 68 b) 10 c) 3 000

d) 300 e) 150 f) 1,44

6. **¿Qué porcentaje representa?**

a) 78 de 300 **b) 420 de 500**

c) 25 de 5 000 **d) 340 de 200**

a) 26 % b) 84 %

c) 0,5 % d) 170 %

7. **Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:**

a) El 28 % es 98. **b) El 15 % es 28,5.**

c) El 2 % es 325. **d) El 150 % es 57.**

a) $\frac{98}{0,28} = 350$ b) $\frac{28,5}{0,15} = 190$

c) $\frac{325}{0,02} = 16\,250$ d) $\frac{57}{1,5} = 38$

8. **¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada caso?**

a) Aumenta un 12 %. **b) Disminuye el 37 %.**

c) Aumenta un 150 %. **d) Disminuye un 2 %.**

e) Aumenta un 10 % y, después, el 30 %. **f) Disminuye un 25 % y aumenta un 42 %.**

a) 1 + 0,12 = 1,12 b) 1 – 0,37 = 0,63

c) 1 + 1,5 = 2,5 d) 1 – 0,02 = 0,98

e) (1 + 0,1)(1 + 0,3) = 1,43 f) (1 – 0,25)(1 + 0,42) = 1,065

9. **Calcula el índice de variación y la cantidad final:**

a) 325 aumenta el 28 %. **b) 87 disminuye el 80 %.**

c) 425 aumenta el 120 %. **d) 125 disminuye el 2 %.**

e) 45 aumenta el 40 % y el 30 %. **f) 350 disminuye el 20 % y el 12 %.**

a) $I_V = 1{,}28$ $C_F = 416$

b) $I_V = 0{,}2$ $C_F = 17{,}4$

c) $I_V = 2{,}2$ $C_F = 935$

d) $I_V = 0{,}98$ $C_F = 122{,}5$

e) $I_V = 1{,}4 \cdot 1{,}3 = 1{,}82$ $C_F = 81{,}9$

f) $I_V = 0{,}8 \cdot 0{,}88 = 0{,}704$ $C_F = 246{,}4$

10. **¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?**

a) 1,54 **b) 0,18**

c) 0,05 **d) 2,2**

e) 1,09 **f) 3,5**

a) Aumento 54 %. b) Disminución 82 %.

c) Disminución 95 %. d) Aumento 120 %.

e) Aumento 9 %. f) Aumento 250 %.

11. **¿Qué porcentaje es?**

a) El 40 % del 40 %. **b) El 25 % del 20 %.**

c) El 30 % del 120 %. **d) El 150 % del 20 %.**

a) $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16 \to 16\,\%$ b) $0{,}25 \cdot 0{,}20 = 0{,}05 \to 5\,\%$

c) $0{,}30 \cdot 1{,}2 = 0{,}36 \to 36\,\%$ d) $1{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 \to 30\,\%$

12. **Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:**

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	**↑+18 %**	
4 500	**↓–48 %**	
75	**↑+110 %**	
5 600		**4 592**
326		**603,1**
	↑+32 %	**165**
	↓–0,8 %	**4 140**

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	**↑+18 %**	1 003
4 500	**↓–48 %**	2 340
75	**↑+110 %**	157,5
5 600	↓ –18 %	**4 592**
326	↑ +85 %	**603,1**
125	**↑+32 %**	**165**
4 173,4	**↓–0,8 %**	**4 140**

13. **Relaciona fracciones con porcentajes.**

FRACCIÓN	**13/20**	**77/200**	**11/60**		
PORCENTAJE				**$24,\widehat{8}$ %**	**$13,\widehat{6}$ %**

FRACCIÓN	**13/20**	**77/200**	**11/60**	31/125	41/300 (*)
PORCENTAJE	65 %	38,5 %	18,3 %	**$24,\widehat{8}$ %**	**$13,\widehat{6}$ %**

(*) $13,\widehat{6} = \dfrac{123}{9} \rightarrow \dfrac{123}{9} : 100 = \dfrac{123}{900} = \dfrac{41}{300}$

Página 57

Resuelve problemas

Proporcionalidad

14. **Los vecinos de una urbanización abonan 390 € mensuales por las 130 farolas que alumbran sus calles. ¿Cuántas farolas han de suprimir si desean reducir la factura mensual a 240 €?**

A menos farolas, menos gasto $\rightarrow$ directa.

$$\left.\begin{array}{l} 390 \text{ €} \rightarrow 130 \text{ farolas} \\ 240 \text{ €} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{240 \cdot 130}{390} = 80 \text{ farolas}$$

Deben suprimir 130 – 80 = 50 farolas.

15. **Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo. ¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?**

Proporcionalidad inversa, si se quiere terminar en menos días se debe tener más carpinteros.

$$\left.\begin{array}{l} 21 \text{ días} \rightarrow 5 \text{ carpinteros} \\ 15 \text{ días} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{21 \cdot 5}{15} = 7 \text{ carpinteros}$$

16. **El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?**

A más cajas, mayor precio $\rightarrow$ directa.

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ pedido: } 25 \text{ cajas} \rightarrow 670 \text{ €} \\ 2.^{\text{o}} \text{ pedido: } 17 \text{ cajas} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{670 \cdot 17}{25} = 455{,}6 \text{ €}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ pedido: } 670 \text{ €} \rightarrow 25 \text{ cajas} \\ 2.^{\text{o}} \text{ pedido: } 938 \text{ €} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{25 \cdot 938}{670} = 35 \text{ cajas}$$

17. **Un campamento de refugiados que alberga a 4 600 personas tiene víveres para 24 semanas. ¿En cuánto se reducirá ese tiempo con la llegada de 200 nuevos refugiados?**

A más personas en el refugio, menos tiempo durará la comida $\rightarrow$ inversa.

$$\left.\begin{array}{l} 4\,600 \text{ personas} \rightarrow 24 \text{ semanas} \\ 4\,800 \text{ personas} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{4\,600 \cdot 24}{4\,800} = 23 \text{ semanas}$$

El tiempo se reducirá a 23 semanas.

18. **Un peregrino del Camino de Santiago, que camina seis horas cada jornada, ha invertido 5 días y 2 horas en recorrer una distancia de 128 kilómetros. ¿Qué distancia recorre al día?**

Es una proporcionalidad directa, con la misma velocidad, a más tiempo andando, mayor distancia recorrida.

El tiempo en total que ha estado caminando ha sido 5 días y 2 horas = 5 · 6 + 2 = 32 horas.

$$\left.\begin{array}{l} 32 \text{ horas} \rightarrow 128 \text{ kilómetros} \\ 6 \text{ horas} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{6 \cdot 128}{32} = 24 \text{ kilómetros}$$

Al día recorre una distancia de 24 kilómetros.

19. **En España se consumen, aproximadamente, 8,5 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones). Da la respuesta con un error absoluto menor que 0,5 kg.**

Es una proporcionalidad directa, a menos gente menos papel usado.

8,5 millones de toneladas = 8 500 millones de kg

$$\left.\begin{array}{l} 46{,}5 \text{ millones de toneladas} \rightarrow 8\,500 \text{ millones de kg de papel} \\ 1 \text{ persona} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{8{,}5 \cdot 10^9 \cdot 1}{46{,}5 \cdot 10^6} = 183 \text{ kg}$$

El consumo anual *per cápita* de papel en España es de 183 kg.

20. **Una locomotora, a 85 km/h, tarda 3 horas y 18 minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?**

A mayor velocidad, menor tiempo empleado en el mismo recorrido → inversa.

3 horas y 18 minutos = 3,3 horas

$$\left.\begin{array}{l} 85 \text{ km/h} \rightarrow 3{,}3 \text{ horas} \\ 110 \text{ km/h} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{85 \cdot 3{,}3}{110} = 2{,}55 \text{ horas} = 2 \text{ horas y } 33 \text{ minutos}$$

21. **La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.**

a) ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^9$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

(Da las respuestas con tres cifras significativas.)

a) Distancia que recorre la luz en un año:

$$3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

b) Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Plutón:

$$t = \frac{5{,}914 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 19{,}7 \text{ segundos}$$

c) 4,3 años luz = $4{,}3 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 4{,}07 \cdot 10^{13}$ km

22. **El tamaño de un archivo informático se mide en bytes (B).**

a) ¿Cuántos bytes tiene un archivo de 21,3 MB (megabytes)? ¿Y cuántos KB (kilobytes)?

b) ¿Cuántos bytes puede almacenar mi disco duro de 1 TB (terabytes)? ¿Y archivos de 20 MB?

c) Quiero hacer una copia de seguridad de mi disco duro del que tengo ocupado 310 GB. ¿Puedo hacerlo en un disco de 0,5 TB?

1 GB = 1 024 MB   1 MB = 1 024 KB   1 KB = 1 024 B

a) 21,3 MB = 21,3 · 1 024 · 1 024 = 22 334 668,8 B

20 MB = 20 · 1 024 · 1 024 = 20 971 520 = $2{,}097 \cdot 10^7$ B

b) 1 T = 1 000 GB = $1\,000 \cdot 1\,024^3 = 1{,}074 \cdot 10^{12}$ B

1 000 GB = 1 000 · 1 024 = 1 024 000 MB

Puedo almacenar 1 024 000 : 20 = 51 200 archivos de 20 MB.

c) Sí puedo hacerlo, porque 0,5 T son 500 GB. Por tanto, me sobrarán 500 – 310 = 190 GB.

23. **Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1{,}3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.**

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol. Comprueba si es cierta esta información (dimensiones máximas de un campo de fútbol: 120 m × 75 m).

1 hectárea = 10 000 m^2

$1{,}3 \cdot 10^7$ hectáreas = $1{,}3 \cdot 10^{11}$ m^2

El área de un campo de fútbol es 120 × 75 = 9 000 m^2

10 000 000 campos de fútbol ocupan $9 \cdot 10^{10}$ m^2

$1{,}3 \cdot 10^{11} > 9 \cdot 10^{10}$, por tanto, la información es cierta.

24. **Cuatro mineros abren una galería de 15 metros de longitud en 9 días. ¿Cuántos metros de galería abrirán 6 mineros en 15 días?**

4 mineros que trabajan 9 días, abren una galería de 15 metros.

1 minero, trabajando 1 día, abre $\frac{15}{4 \cdot 9} = 0{,}41\widehat{6}$ metros.

Por tanto, 6 mineros, trabajando 15 días, abrirán una galería de $6 \cdot 15 \cdot 0{,}41\widehat{6} = 37{,}5$ metros.

25. **En una cadena de montaje, 17 operarios, trabajando 8 horas al día, ensamblan 850 aparatos de radio a la semana. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar la próxima semana, para atender un pedido de 1 000 aparatos, teniendo en cuenta que se añadirá un refuerzo de tres trabajadores?**

N.º OPERARIOS	HORAS DIARIAS TRABAJADAS	N.º APARATOS ENSAMBLADOS
17	8	850
1	8	50
1	1	6,25
20	$\frac{1000}{6{,}25 \cdot 20} = 8$	1 000

26. **En un campo de 200 m de largo y 80 m de ancho, se ha recogido una cosecha de 4 800 kg de trigo. ¿Qué cosecha podemos esperar de otro campo que mide 190 m de largo y 90 m de ancho?**

La superficie del primer campo es $200 \cdot 80 = 16\,000$ m^2.

La superficie del segundo campo es $190 \cdot 90 = 17\,100$ m^2.

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ campo: } 16\,000 \text{ m}^2 \;\rightarrow\; 4\,800 \text{ kg de trigo} \\ 2^{\text{o}} \text{ campo: } 17\,100 \text{ m}^2 \;\rightarrow\; x \end{array}\right\} \; x = \frac{4\,800 \cdot 17\,100}{16\,000} = 5130 \text{ kg}$$

Se esperan obtener 5 130 kg de trigo.

27. **Un taller produce 480 tapacubos al día trabajando con cinco máquinas en dos turnos de 8 horas.**

a) ¿Cuántos tapacubos producirá cada día, si se añade una máquina más y se aumenta a 10 el número de horas de cada turno?

b) ¿Cuántas horas debería durar cada turno para cubrir un cupo de 540 piezas al día con seis máquinas en funcionamiento?

N.º MÁQUINAS	N.º TAPACUBOS	HORAS TRABAJADAS
5	480	16
1	$\frac{480}{5 \cdot 16} = 6$	1
6	$6 \cdot 6 \cdot 20 = 720$	20
6	540	$\frac{540}{6 \cdot 6} = 15$

a) Cada día producirá 720 tapacubos.

b) Cada turno debería durar 7,5 horas cada uno.

28. **En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?**

N.º COMENSALES	N.º YOGURES	N.º DÍAS LABORABLES
113	840	20
1	$\frac{840}{113 \cdot 20} = 0{,}37$	1
120	$0{,}37 \cdot 120 \cdot 5 = 222$	5

Para los próximos cinco días, con una afluencia de 120 comensales, se necesitarán 222 yogures, por tanto, la reserva de 200 yogures no será suficiente.

Página 58

29. **La combustión de un litro de gasolina produce 2 370 g de CO_2. El consumo medio de un coche es de 6 litros por cada 100 km. En España hay aproximadamente 480 coches por cada 1 000 habitantes, que hacen una media de 15 000 km al año.**

a) Calcula la cantidad de CO_2 que emite un coche por kilómetro recorrido.

b) ¿Cuántas toneladas de CO_2 se emiten en España en un año? (Población de España: 46,5 millones).

c) Cierta organización ecologista propone una batería de medidas para reducir las emisiones a 120 g/km. ¿Cuántas toneladas de CO_2 se dejarían de emitir en España si fuera efectiva esa propuesta?

a) Un coche emite un CO_2 por kilómetro recorrido de $\dfrac{2\,370 \text{ g}/l \cdot 6l}{100 \text{ km}} = 142{,}2$ g/km

b) $\dfrac{0{,}0001422 \text{ T/km} \cdot 15\,000 \text{ km/año} \cdot 480 \text{ coches} \cdot 46{,}5 \cdot 10^6 \text{ habitantes}}{1\,000 \text{ habitantes}} = 47\,608\,560$ T de CO_2

c) Si las emisiones fueran 120 g/km:

$$x = \frac{0{,}000120 \text{ T/km} \cdot 1500 \text{ km/año} \cdot 480 \text{ coches} \cdot 46{,}5 \cdot 10^6 \text{ habitantes}}{1\,000 \text{ habitantes}} = 40\,176\,000 \text{ T de } CO_2$$

Se reduciría en 47 608 560 – 40 176 000 = 7 432 560 T de CO_2.

Problemas clásicos

30. **Tres socios han obtenido en su negocio un beneficio de 12 900 €.**

¿Qué parte corresponde a cada uno si el primero aportó inicialmente 18 000 €; el segundo, 15 000 €, y el tercero, 10 000 €?

El capital total inicial de la empresa fue 18 000 + 15 000 + 10 000 = 43 000 €.

A cada socio le corresponde:

Socio primero → $\dfrac{18\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 5\,400$ €

Socio segundo → $\dfrac{15\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 4\,500$ €

Socio tercero → $\dfrac{10\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 3\,000$ €

31. **Dos repartidores de pizzas cobran 340 € por un trabajo realizado conjuntamente. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas, ¿cuánto cobrará cada uno?**

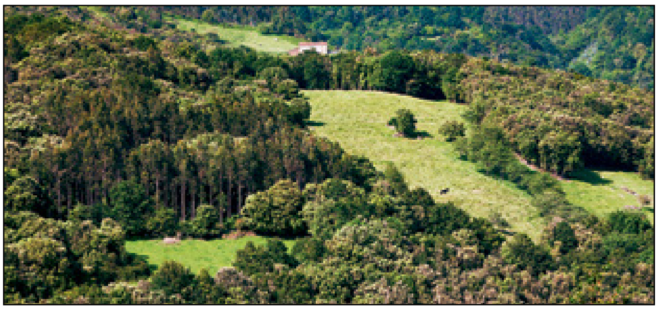
En total trabajaron 3,5 + 5 = 8,5 jornadas.

A cada repartidor le corresponde:

Repartidor 1 → $\dfrac{3{,}5}{8{,}5} \cdot 340 = 140$ €

Repartidor 2 → $\dfrac{5}{8{,}5} \cdot 340 = 200$ €

32. **Se han abonado 15 000 € por la limpieza de un bosque realizada por dos cuadrillas de trabajadores. La primera cuadrilla está formada por 12 operarios y ha trabajado durante 8 días. La segunda cuadrilla tiene 15 personas y ha trabajado 10 días. ¿Cuánto corresponde a cada brigada? ¿Y a cada trabajador? (Da la solución aproximando a las unidades y di de qué orden es el error absoluto cometido).**



Se ha trabajado un total de 8 + 10 = 18 días.

A cada cuadrilla le corresponde:

Primera cuadrilla $\to \dfrac{8}{18} \cdot 15\,000 = 6\,667$ € (con un error absoluto de $0,\overset{\frown}{3}$)

Segunda cuadrilla $\to \dfrac{10}{18} \cdot 15\,000 = 8\,333$ € (con un error absoluto de $0,\overset{\frown}{3}$)

A cada hombre de la primera cuadrilla le corresponde $\dfrac{6\,667}{12} = 556$ € (con un error absoluto de $0,41\overset{\frown}{6}$)

A cada hombre de la segunda cuadrilla le corresponde $\dfrac{8\,333}{15} = 555$ € (con un error absoluto de $0,5\overset{\frown}{3}$)

33. **Tres hermanos se reparten una herencia de 2 820 € de forma que por cada cinco euros que reciba el mayor, el mediano recibirá cuatro, y el pequeño, tres. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?**

Los hermanos se repartirán 2 820 € en partes de 5 + 4 + 3 = 12 €.

A cada hermano le corresponde:

Mayor $\to \dfrac{5}{12} \cdot 2\,820 = 1\,175$ €

Mediano $\to \dfrac{4}{12} \cdot 2\,820 = 940$ €

Pequeño $\to \dfrac{3}{12} \cdot 2\,820 = 705$ €

34. **Se han vertido 3 litros de agua, a 20 °C, en una olla que contenía 5 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla? ¿Cuál sería la temperatura si añadimos además 2 litros a 50 °C?**

	LITROS	TEMPERATURA
OLLA 1	3	20 °C
OLLA 2	5	60 °C
MEZCLA (OLLA 3)	8	$\dfrac{3 \cdot 20 + 5 \cdot 60}{8} = 45$ °C

	LITROS	TEMPERATURA
OLLA 3	8	45 °C
OLLA 4	2	50 °C
MEZCLA (OLLA 5)	10	$\frac{8 \cdot 45 + 2 \cdot 50}{10} = 46$ °C

35. **Añadimos 0,5 *l* de alcohol de 50° a 0,75 *l* de alcohol de 80°. ¿Qué concentración tendrá la mezcla?**

	LITROS	CONCENTRACIÓN
RECIPIENTE 1	0,5	50°
RECIPIENTE 2	0,75	80°
MEZCLA	1,25	$\frac{0,5 \cdot 50 + 0,75 \cdot 80}{1,25} = 68°$

36. **En una bodega se mezclan 7 *hl* de vino de alta calidad que cuesta a 450 € el hectólitro, con 11 *hl* de vino de calidad inferior a 280 €/*hl*. ¿A cómo sale el litro del vino resultante? (Aproxima hasta las décimas y di el orden del error cometido).**

	LITROS	€/*hl*	PRECIO TOTAL
VINO ALTA CALIDAD	7	450	3 150 €
VINO BAJA CALIDAD	11	280	3 080 €
MEZCLA	18	$\frac{6\,230}{18} = 346,1$	6 230 €

37. **Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg y 80 % de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64 % de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?**

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE ORO
1er LINGOTE	3 000 g	88 %	1 700 g
2^{o} LINGOTE	1 000 g	64 %	1 350 g
TOTAL	4 000 g	$\frac{3\,050}{4\,000} \cdot 100 = 76,25$ %	3 050 g

38. **Dos ciudades, A y B, distan 350 km. De A sale hacia B un coche a 110 km/h. Simultáneamente sale de B hacia A un camión a 90 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia que recorre cada uno.**

La velocidad total de los dos coches es 110 + 90 = 200 km/h.

Calculamos el tiempo que tardan en encontrarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{350}{200} = 1,75 \text{ h} = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

La distancia que recorre cada uno es:

Coche $\rightarrow$ 110 · 1,75 = 192,5 km

Camión $\rightarrow$ 90 · 1,75 = 157,5 km

39. **Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120 km/h. La distancia entre A y B es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan.**

Antes de salir el coche, el autobús recorre una distancia de 105 · 0,5 = 52,5 km.

Por tanto, para que se encuentren hay una distancia de 300 – 52,5 = 247,5 km.

La velocidad con la que se aproximan es de 105 + 120 = 225 km/h.

El tiempo que tardan en cruzarse es $t = \frac{d}{v} = \frac{247,5}{225} = 1,1$ h = 1 h 6 min.

La distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan:

Autobús → 52,5 + 105 · 1,1 = 168 km

Coche → 120 · 1,1 = 132 km

40. **Un camión sale de cierta población a una velocidad de 90 km/h. Cinco minutos más tarde sale en su persecución una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al camión?**

5 min = $\frac{1}{12}$ h

El camión recorre $90 \cdot \frac{1}{12} = 7,5$ km antes de que salga la moto.

Se aproximan a una velocidad de 120 – 90 = 30 km/h.

Por tanto, la moto tardará en alcanzar al camión $t = \frac{d}{v} = \frac{7,5}{30} = 0,25$ h = 15 min

41. **Hemos mezclado 30 kg de café de 9 €/kg con 50 kg de otro café de calidad inferior. La mezcla resultante se vende a 7,50 €/kg. ¿Cuál es el precio por kilogramo del café de calidad inferior?**

	CANTIDAD	PRECIO (€/kg)
CAFÉ SUPERIOR	30	9
CAFÉ INFERIOR	50	$\frac{80 \cdot 7,50 - 30 \cdot 9}{50} = 6,60$
MEZCLA	80	7,50

Porcentajes

42. **Un comerciante del mercadillo abre su puesto, por la mañana, con 350 pares de calcetines y 240 pañuelos. Al cerrar, al mediodía, le quedan 210 pares de calcetines y 174 pañuelos. ¿Qué tanto por ciento ha vendido de cada mercancía?**

Al cerrar, el comerciante ha vendido 350 – 210 = 140 pares de calcetines y 240 – 174 = 66 pañuelos.

$$\left.\begin{array}{l}140 \text{ pares de calcetines de } 350\\ x \text{ de } 100\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 100}{350} = 40\%$$

$$\left.\begin{array}{l}66 \text{ pañuelos de } 240\\ x \text{ de } 100\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{66 \cdot 100}{240} = 27,5\%$$

El comerciante ha vendido 40 % de calcetines y 27,5 % de pañuelos.

43. **La masa de un átomo de carbono es el 5 % de la de un átomo de uranio. Si la masa atómica del uranio es $4 \cdot 10^{-25}$ g, ¿cuál es la del carbono?**

La masa de un átomo de carbono es el 5 % de $4 \cdot 10^{-25} = 2 \cdot 10^{-26}$ g.

Página 59

44. La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20 % de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

160 : 0,20 = 800 mg es lo que debe tomar una persona.

45. El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja. Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?

El porcentaje de aceite de soja que se ha vendido es 100 % – (67 % + 21 %) = 12 %.

Litros totales de aceite $\rightarrow x$

$12\,\%$ de $x = 132 \rightarrow x = \dfrac{132 \cdot 100}{12} = 1\,100\ l$

En total hay 1 100 litros de aceite.

$21\,\%$ de $1\,100\ l = \dfrac{21 \cdot 1100}{100} = 231\ l$

$67\,\%$ de $1\,100\ l = \dfrac{67 \cdot 1100}{100} = 737\ l$

Se han vendido 737 litros de aceite de oliva y 231 litros de aceite de girasol.

46. El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,56 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

El precio de la gasolina antes de la subida es de 1,56 : 1,025 = 1,52 €/*l*.

47. Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones. ¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 2{,}8 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 3{,}5 \text{ millones}\end{array}\right\} 2\,800\,000 \cdot x = 3\,500\,000 \rightarrow x = 1{,}25$$

La facturación ha aumentado un 125 % – 100 % = 25 % respecto al año pasado.

48. Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 1{,}5 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 2{,}1 \text{ millones}\end{array}\right\} 1\,500\,000 \cdot x = 2\,100\,000 \rightarrow x = 1{,}4$$

El coste real superó en un 140 % – 100 % = 40 % el coste real.

49. **Pagué 187,20 € por un billete de avión de 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?**

187,2 : 240 = 0,78 → 1 – 0,78 = 0,22

Descuento: 22 %

50. **El kilo de tomates subió un 20 % y después bajó un 25 %. Si costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?**

1,8 · 1,2 · 0,75 = 1,62 €

51. **Un pantano tiene a finales de agosto un 20 % menos de agua que en julio. Y a finales de julio, un 15 % menos que en junio. ¿Qué tanto por ciento ha descendido en los dos meses?**

0,8 · 0,85 = 0,68

En los dos meses ha descendido 1 – 0,68 = 0,32 = 32 %

52. **El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23 % en noviembre y disminuyó un 18 % en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2 202 000 espectadores, ¿cuántos tenía en el mes de octubre?**

$\frac{2\,202\,000}{1,23 \cdot 0,82}$ = 2 183 224 espectadores en octubre.

53. **Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25 % y, después, los rebaja un 25 %, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto del precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50 %?**

1,25 · 0,75 = 0,9375

1 – 0,9375 = 0,0625 → Corresponde a una disminución del 6,25 %.

Si hiciera lo mismo aplicando el 50 %:

1 – 1,5 · 0,5 = 0,25 → Corresponde a una disminución del 25 %.

54. **Los ingresos mensuales de un negocio han aumentado un 20 % y un 30 % en los dos meses anteriores. En el mes actual han disminuido un 25 % y han sido 13 850 €. ¿Cuál ha sido la variación porcentual? Calcula los ingresos del negocio hace tres meses.**

1,2 · 1,3 · 0,75 = 1,17 → Supone un aumento del 17 %.

13 850 : 1,17 = 11 837,6 € son los ingresos de hace tres meses.

55. **Para que el área de un triángulo fuera 100 m^2, su altura actual tendría que disminuir un 18 %. Si la base mide 16,8 m, ¿cuánto mide la altura?**

$\frac{16,8 \cdot al}{2} = 100 \rightarrow al = 11,9$ m tendría que medir la altura para que el área fuera 100 m^2.

h · 0,82 = 11,9 → h = $\frac{11,9}{0,82}$ ≈ 14,5 m mide la altura.

56. **Miguel quiere aplicar un herbicida a su finca. Sabe que debe añadir agua al producto, de forma que tenga una concentración del 5 % como mínimo para que sea eficaz. Mezcla 1/2 litro de herbicida con 5 litros de agua y comienza a aplicarlo.**

Cuando ha gastado 3 litros de la mezcla, se da cuenta de que no va a tener bastante para toda la finca y le añade 2 litros de agua. ¿Tendrá la concentración adecuada en todo momento?

Al principio, la concentración es $\frac{0,5}{5,5} = 0,\widehat{09} \to 9\,\%$

Cuando quedan 2,5 *l* de mezcla, le añade 2 *l* de agua más. Ahora hay 4,5 *l* de mezcla para $2,5 \cdot 0,09 = 0,227$ *l* de herbicida.

Por tanto, la nueva concentración es $\frac{0,227}{45} = 0,05 \to 5\,\%$

Sí, en todo momento la concentración es mayor o igual que el 5 % requerido.

Interés compuesto

57. **¿En cuánto se convertirá un capital de 5 000 € colocado al 4,2 % anual durante tres años?**

$C_F = 5\,000 \cdot 1,042^3 = 5\,656,83$ €

58. **¿En cuánto se transformará un capital de 28 500 € colocado al 0,4 % mensual durante 15 meses?**

$C_F = 28\,500 \cdot 1,004^{15} = 30\,258,72$ €

59. **¿En cuánto se convertirá un capital de 80 000 €, colocado al 3,6 % anual, durante dos años y medio con periodo de capitalización mensual?**

En dos años y medio hay 30 meses.

Un 3,6 % anual significa un 3,6/12 = 0,3 % mensual.

$C_F = 80\,000 \cdot 1,003^{30} = 87\,522,15$ €

60. **Calcula en cuánto se transformarán 60 000 € colocados a interés compuesto en los siguientes casos si el periodo de capitalización es mensual:**

a) Al 3 % anual durante 2 años.

b) Al 5,4 % anual durante 9 meses.

c) Al 0,36 % mensual durante un año y medio.

d) Al 4,8 % anual durante 18 meses.

a) $C_F = 6\,000 \cdot 1,03^2 = 63\,654$ €

b) 5,4/12 = 0,45 % mensual

$C_F = 6\,000 \cdot 1,0045^9 = 62\,474,20$ €

c) $C_F = 6\,000 \cdot 1,0036^{18} = 64\,009,29$ €

d) 4,8/12 = 0,4 % mensual

$C_F = 6\,000 \cdot 1,004^{18} = 64\,470,66$ €

61. **Se depositan en un banco 28 000 € al 6 % anual y el banco nos descuenta un 20 % de los beneficios como retención fiscal.**

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento de ese capital?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio al cabo de 2 años?

a) También podrían habernos preguntado "¿Cuál es el 80 % del 6 %?".

Es decir, $0{,}8 \cdot 0{,}06 = 0{,}048$.

El rendimiento neto es del 4,8 %.

b) $28\,000\left(1+\dfrac{4{,}8}{400}\right)^8 = 30\,803{,}6$

Por tanto, el beneficio obtenido es $30\,803{,}6 - 28\,000 = 2\,803{,}6$ €

Página 60

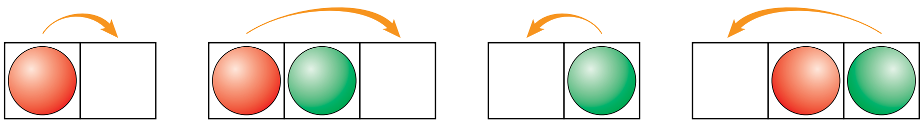
Busca regularidades y generaliza

Un juego de fichas y un reto

- **Objetivo: Poner las rojas en el lugar de las verdes y las verdes en el de las rojas.**

Normas:

- **Las rojas se desplazan únicamente hacia la derecha, y las verdes, hacia la izquierda.**
- **Los movimientos se realizan avanzando a la siguiente casilla o saltando sobre una ficha contraria.**



Cuenta y completa la tabla:

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	…
N.° DE MOVIMIENTOS	?	8	?	?	…

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	n
N.° DE MOVIMIENTOS	4	8	12	16	$4 \cdot n$

Lee y comprende

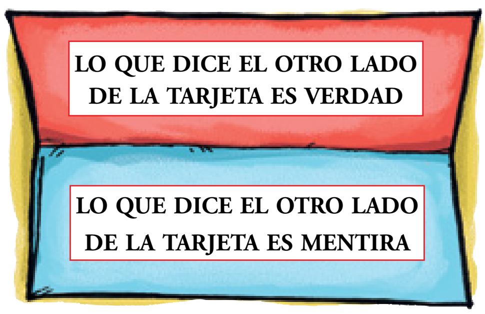
Incógnita difícil de despejar

- **¿Sabes qué es una *paradoja*? Ahora puedes observar una.**

Escribe en uno y otro lado de una tarjeta los mensajes de la derecha.

Y ahora pregúntate:

¿Hay alguna verdad o alguna mentira en alguno de los lados de la tarjeta?



Si hubiera alguna verdad o alguna mentira, en cualquiera de las dos se entraría en contradicción, puesto que es una reducción a lo absurdo.

Reflexiona y saca conclusiones

- **En un supermercado comparan las ventas de cada trimestre con las del trimestre anterior:**

  — EL CONTABLE: **El primer trimestre del año ha sido malo, hemos bajado las ventas un 10 %. Pero en el segundo trimestre hemos vuelto a subir un 10 %.**

  — EL GERENTE: **Entonces, durante el semestre, ni hemos bajado ni hemos subido.**

  — EL CONTABLE: **No, hemos perdido un 1 %.**

  ¿Cuál de los dos tiene razón?

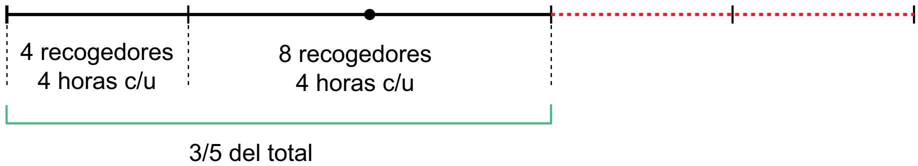
Tiene razón el contable, puesto que, si bajamos un 10 % de una cantidad tenemos un 90 %. Y si a ese 90 % le subimos un 10 % (90 · 1,1 = 99) no obtendremos la cantidad inicial, sino que habremos perdido un 1 %.

Página 61

Entrénate resolviendo problemas

- **Una cuadrilla de 4 recogedores de aceitunas trabaja 4 horas por la mañana en un campo de olivos. Por la tarde, se les unen otros 4 recogedores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día, se han recogido las tres quintas partes del campo.**

  ¿Cuánto tardarán 4 de estos recogedores en rematar la faena?



$\frac{1}{5}$ de la tarea lo hacen 4 recogedores en 4 horas.

Los $\frac{2}{5}$ que faltan lo harán 4 recogedores en 8 horas.

- **La media de las edades de Rosa, Carol y Pilar es de 12 años. ¿Cuál es la edad de Sara, si al incorporarse al grupo la media sube a 15 años?**

  Si la media sube a 15 años es porque Sara ha subido a todas 3 años más y ella ha puesto sus 15. Por tanto, Sara tiene 15 + 3 + 3 + 3 = 15 + 9 = 24 años.

  Si lo resolvemos algebraicamente, sería así:

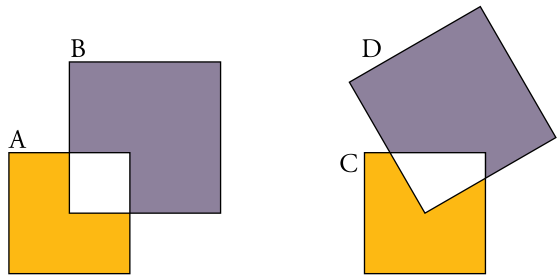
$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar}}{3} = 12 \;\rightarrow\; \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} = 12 \cdot 3 = 36$$

$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara}}{4} = 15 \;\rightarrow\; \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara} = 15 \cdot 4 = 60$$

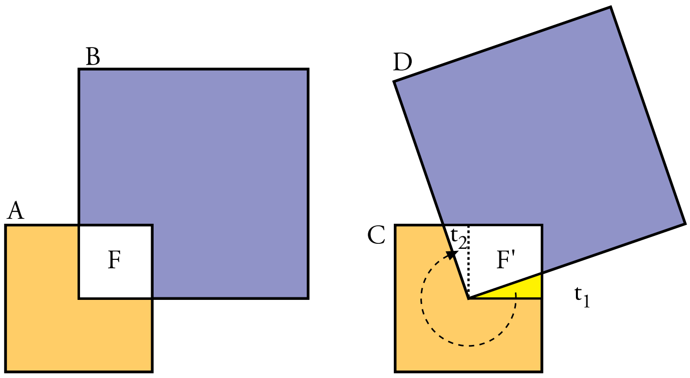
  Como Rosa + Carol + Pilar = 36, entonces 36 + Sara = 60 $\rightarrow$ Sara = 60 – 36 = 24 años.

- **El cuadrado A contiene un 16 % del cuadrado B.**

  ¿Qué porcentaje del cuadrado D contiene el cuadrado C, si el C es igual al A, y el D, al B?



La figura F tiene la misma área que la figura F', ya que $t_1 = t_2$. Por tanto, el cuadrado D tiene un 16 % del cuadrado C.



Autoevaluación

1. Indica el índice de variación y la cantidad final en cada caso:

a) 300 disminuye un 12 % y después un 35 %.

b) 1 520 disminuye un 90 % y después aumenta un 150 %.

a) $1 - 0,12 = 0,82$

$1 - 0,35 = 0,65$

$C_F = 300 \cdot 0,82 \cdot 0,65 = 159,9$

Índice de variación total = $0,82 \cdot 0,65 = 0,533 \rightarrow 1 - 0,533 = 0,467$ = 46,7 % de bajada.

b) $C_F = 1\,520 \cdot 0,1 \cdot 2,5 = 380$

Índice de variación total = $0,1 \cdot 2,5 = 0,25 \rightarrow 1 - 0,25 = 0,75$ = 75 % de bajada.

2. Indica el porcentaje de aumento o de disminución que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación:

a) 1,07 **b) 0,78** **c) 2,2**

a) 7 % de subida. b) 22 % de bajada. c) 120 % de subida.

3. El precio de los tomates ha subido un 3,5 % y su precio es ahora 2,50 € el kilo.

a) ¿Cuál era el precio antes de la subida?

b) Si expresas el resultado del apartado anterior con dos cifras significativas, ¿qué puedes decir del error absoluto cometido?

a) El precio antes de la subida era de 2,50 : 1,035 = 2,41 €.

b) El error absoluto sería de 0,01 € por kilo.

4. Por un libro que costaba 12,50 €, solo he tenido que pagar 9,50 €.

Calcula el tanto por ciento de rebaja que se ha aplicado al libro.

$9,5/12,5 = 0,76 \rightarrow 1 - 0,76 = 0,24$ = 24 %

Se ha rebajado un 24 % a cada libro.

5. Mezclamos 20 kg de harina de 1,25 €/kg con 35 kg de otra harina de 0,75 €/kg.

¿Cuál será el precio final de la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
HARINA 1	20	1,25	$20 \cdot 1,25 = 25$
HARINA 2	35	0,75	$35 \cdot 0,75 = 26,25$
MEZCLA	55	$\frac{51,25}{55} = 0,93$	51,25

6. **Queremos repartir 756 € entre tres amigos de 12, 13 y 15 años de forma proporcional a la edad de cada uno.**

¿Qué cantidades recibirán?

$12 + 13 + 15 = 40$

Cada amigo recibirá:

12 años $\rightarrow \dfrac{12}{40} \cdot 756 = 226{,}8$ €

13 años $\rightarrow \dfrac{13}{40} \cdot 756 = 245{,}7$ €

14 años $\rightarrow \dfrac{14}{40} \cdot 756 = 264{,}6$ €

7. **Un vehículo, a la velocidad de 3 m/s, da 14 vueltas a un circuito en 4 horas.**

¿Cuántas vueltas dará a ese mismo circuito, en 6 horas, si va a una velocidad de 5 m/s?

4 horas = 14 400 s

Calculamos los metros que tiene el circuito:

$d = v \cdot t = 3 \cdot 14\,400 = 43\,200$ m $\rightarrow$ 1 vuelta son 43 200/14 = 3 085,71 m

Si el vehículo va a una velocidad de 5 m/s, en 6 horas (21 600 s) habrá recorrido:

$d = v \cdot t = 5 \cdot 21\,600 = 108\,000$ m

Entonces, el vehículo ha dado 108 000/3 085,71 = 35 vueltas.

8. **Cuatro jardineros tardan 5 horas en segar una parcela de 150 m².**

¿Cuánto tardarán cinco jardineros en segar una parcela de 240 m²?

N.º JARDINEROS	HORAS TRABAJADAS	SUPERFICIE SEGADA (m^2)
4	5	150
1	20	150
1	1	7,5
5	$\dfrac{240}{5 \cdot 7{,}5} = 6{,}4$	240

9. **Dos trenes salen a las 8 de la mañana de dos ciudades A y B distantes entre sí 780 km.**

Si el que sale de A hacia B lleva una velocidad de 110 km/h, y el que sale de B hacia A va a 90 km/h, ¿a qué hora se encontrarán?

La velocidad de aproximación es 110 + 90 = 200 km/h

Calculamos el tiempo que tardan en encontrarse:

$t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{780}{200} = 3{,}9$ h = 3 h 54 min

Por tanto, a las 8:00 + 3 h 54 min = 11 :54.

10. **Depositamos en un banco 4 000 € al 3,5 % de interés anual.**

¿En cuánto se convertirá en 3 años si los periodos de capitalización son trimestrales?

Los periodos de capitalización son trimestrales, por tanto, 3,5/4 = 0,875 %

$C_F = 4\,000 \cdot 1{,}00875^{12} = 4\,440{,}8$ €

Página 63

Resuelve

1. Observa la noria que aparece abajo.

Si C es la cantidad de agua que aporta en una vuelta, y A es la cantidad de agua que tenía inicialmente el pilón al que abastece, ¿qué cantidad de agua habrá en el pilón después de n vueltas?

Después de n vueltas habrá $nC + A$.

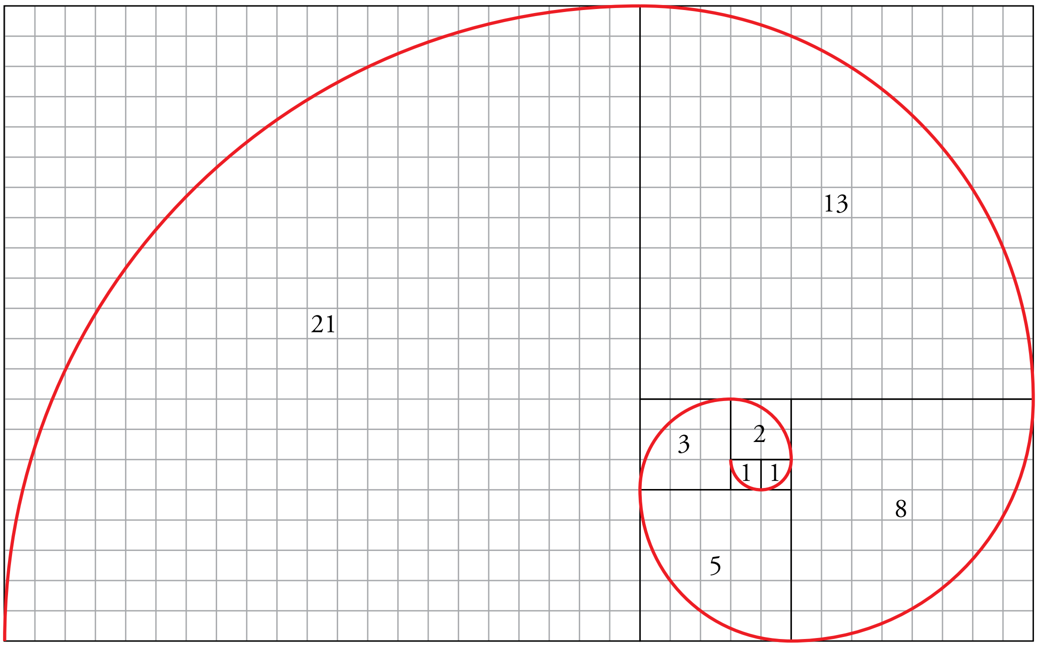
2. ¿Qué criterio hay que seguir para obtener más términos en la sucesión de Fibonacci?

Los dos primeros términos son 1 y 1. Los demás se obtienen como la suma de los dos anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

3. Dibuja las dos filas que siguen en el esquema que muestra la evolución de la descendencia de una pareja de conejos.

¿Cuántas parejas habría en el sexto mes? ¿Y en el séptimo?

4. **Dibuja en papel cuadriculado, ampliándola en dos pasos más, la espiral de Fibonacci.**



1 Sucesiones

Página 64

Ladillo

¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

La torre corresponde a la sucesión b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

La espiral corresponde a la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

1. Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

a) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: Los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: El primer término es 2, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2 (2^1, 2^2, 2^3, …).

128, 256, 512, …

d) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 1, y cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: El primer término es 1, y cada término que ocupa un lugar n se obtiene sumando $n - 1$ al anterior.

22, 29, 37, …

g) Criterio: Cada término que ocupa un lugar n se obtiene multiplicando $n \cdot (n + 1)$

56, 72, 90, …

h) Criterio: El primer término es 170, y cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

i) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 3, y los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

2. Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: Obtenemos cada término mulitplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: Obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: Obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: Los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: Obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

3. Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ entre cada dos términos consecutivos de la sucesión c) de arriba.

La relación es 2.

4. Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.

La relación es –3.

Página 65

5. Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.

Se comprueba.

6. Escribe los cinco primeros términos de:

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$a_n \to 1, 8, 27, 64, 125, \ldots$

$b_n \to 5, 5, 7, 11, 17, \ldots$

$c_n \to -\frac{2}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \ldots$

7. Forma una sucesión recurrente con estos datos:

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8. Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ **b)** $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **c)** $c_n = (n-1)(n-2)$ **d)** $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, … b) 3, 32, 34, 38, … c) 0, 0, 2, 6, … d) 0, 2, 6, 12,…

10. Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625. Ley de recurrencia: $c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2. Ley de recurrencia: $d_n = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).

Respuesta abierta. Por ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12. a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$$a_n \rightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$
$$b_n \rightarrow 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$; $s_2 = (-1)^2 = 1$; $s_3 = (-1)^3 = -1$; $s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$; $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2 Progresiones aritméticas

Página 66

Con calculadora (ladillo)

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 $\boxed{+}\boxed{+}$ **2** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**
b) 20 $\boxed{+}\boxed{+}$ **120** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

c) 2 $\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{+}$ **9** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**
d) 0,04 $\boxed{+}\boxed{+}$ **5,83** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **3** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**
b) 120 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **20** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

c) 9 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}\boxed{(-)}$ **2** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**
d) 5,83 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **0,04** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

a) 20, 23, 26, 29, … Diferencia: 3
b) 240, 260, 280, 300, … Diferencia : 20

c) –7, –9, –11, –13, … Diferencia: –2
d) 6,07; 7,11; 6,15; 6,19; … Diferencia: 0,04

1. **El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2,5$. Escribe sus diez primeros términos.**

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = –3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2. **Calcula, para las progresiones de arriba:**

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1\,000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \to b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 120 + (n-1) \cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \to c_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5,83$ y $d = 0,04 \to d_n = 5,83 + (n-1) \cdot 0,04 = 5,83 + 0,04n - 0,04 = 5,79 + 0,04n$

Así: $d_{1\,000} = 5,79 + 0,04 \cdot 1\,000 = 45,79$

3. **Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).**

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5,79 + 0,04 \cdot n$

4. **a) Si dos términos de una progresión aritmética s son:**

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1,5$
b) $s_n = 6 + 1,5\,(n-1) = 6 + 1,5n - 1,5 = 4,5 + 1,5n$

Página 67

5. Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6. a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 5 \rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n$; $a_{15} = 5 \cdot 15 = 75$

$$S_{15} = \frac{(5 + 75) \cdot 15}{2} = 600$$

b) $b_1 = 5$ y $d = 2 \rightarrow b_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n$; $b_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$

$$S_{40} = \frac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$$

c) $c_1 = 5$ y $d = 7 \rightarrow c_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = -2 + 7n$; $c_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

$$S_{32} = \frac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$$

7. Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \rightarrow d = -2$

Así, $c_n = 17 + (n - 1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

$$S_{20} = \frac{(14 - 21) \cdot 20}{2} = -40$$

8. Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es 650 – 144 = 506.

Página 68

Con calculadora (ladillo)

Añade dos términos a cada una de las progresiones siguientes:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

b) 3, 30, 300, 3 000, …

c) 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; …

d) 80; 8; 0,8; 0,08; …

e) 3, –6, 12, –24, 48, –96, …

a) 192, 384, …

b) 30 000, 300 000, …

c) 1,25; 0,625; …

d) 0,008; 0,0008; …

e) 192, –384, …

3 Progresiones geométricas

Página 69

1. Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2. De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \rightarrow r^2 = 1{,}44 \rightarrow r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3. En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.

$6 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4. En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.

$$\left.\begin{aligned} a_{37} &= 911127{,}781 \\ a_{38} &= 1275578{,}893 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{37}.$$

5. En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.

$$\left.\begin{aligned} a_{31} &= 1{,}237 \\ a_{32} &= 0{,}99 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{31}.$$

Página 70

6. Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + + 192 + 384.

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7. ¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 20^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8. Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9. Si al comienzo de cada año ingresamos 6 000 € al 5 %, ¿qué capital tendremos al final del sexto año?

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6\,000$ y $r = 1{,}05$. Nos están preguntando por a_7.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \to a_n = 6\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

Por tanto, $a_7 = 8\,040{,}57$ €

Página 71

10. En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0{,}75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.

$$S_\infty = \frac{8}{1-0{,}75} = \frac{8}{0{,}25} = 32$$

11. En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0{,}2$. Calcula la suma de "todos" sus términos.

$$S_\infty = \frac{30}{1-(-0{,}2)} = \frac{30}{1{,}2} = 25$$

12. En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0{,}4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \to 0{,}4 = 10 \cdot r^2 \to r^2 = 0{,}04 \to r = \pm 0{,}2$

$r = 0{,}2 \to 10 = a_1 \cdot 0{,}2^3 \to 10 = a_1 \cdot 0{,}008 \to a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0{,}2^7 \to a_8 = 1\,250 \cdot 0{,}2^7 \to a_8 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0{,}2^8}{1-0{,}2} = 1\,562{,}496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1-0{,}2} = 1\,562{,}5$$

$r = -0{,}2 \to 10 = a_1 \cdot (-0{,}2)^3 \to a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0{,}2)^7 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0{,}2)^8}{1-(-0{,}2)} = -1\,041{,}664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1-(-0{,}2)} = \frac{-1\,250}{1{,}2} = -1\,041{,}\widehat{6}$$

4 Progresiones geométricas sorprendentes

Página 73

1. **El día 1 de cierto mes, un banquero le propuso a otro el siguiente trato:**

Cada día de este mes yo te doy 100 000 € con la condición de que tú dupliques el dinero que haya en esta caja en la que ahora hay un céntimo. Al final de mes tú te quedas con lo que te he ido dando día a día y yo me quedo con lo que finalmente haya en la caja.

El otro banquero, después de pensar un rato y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me haces esta propuesta dentro de un año exactamente?

Esta conversación ocurrió entre el 1 de marzo de 2008 y el 1 de septiembre de 2015. Di, justificando tu respuesta, en qué día tuvo lugar.

Era el día 1 de febrero del año 2012, bisiesto. Es decir, un mes con 29 días.

Así, en este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

Sin embargo, febrero del año 2013 tendría un día menos, 28. Y las cuentas serían estas:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$ €, cantidad inferior a la primera.

Ejercicios y problemas

Página 75

Practica

Sucesiones. Término general

1. **Calcula los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$ **b)** $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ **c)** $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$ **e)** $e_n = n(n-2)$ **f)** $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

a) $a_{10} = \frac{10}{2} - 5 = 0 \ ; \ a_{25} = \frac{25}{2} - 5 = 7{,}5$

b) $b_{10} = \frac{10^2 - 1}{10} = \frac{99}{10} = 9{,}9 \ ; \ b_{25} = \frac{25^2 - 1}{25} = \frac{624}{25} = 24{,}96$

c) $c_{10} = (-1)^{10} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \ ; \ c_{25} = (-1)^{25} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

d) $d_{10} = \frac{10 + 10 \cdot (-1)^{10}}{2} = 10 \ ; \ d_{25} = \frac{25 + 25 \cdot (-1)^{25}}{2} = 0$

e) $e_{10} = 10 \cdot (10 - 2) = 80 \ ; \ e_{25} = 25 \cdot (25 - 2) = 575$

f) $f_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 2^{10} = 2^1 = 2 \ ; \ f_{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot 2^{25} = 2^1 = 2$

2. **Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:**

a) $a_1 = 1; \ a_n = 2a_{n-1} + 3$ **b)** $a_1 = 2; \ a_2 = 3; \ a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2; \ a_2 = 3; \ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

a) $a_1 = 1, a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5; a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13; a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29; a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

b) $a_1 = 2, a_2 = 3; a_3 = \frac{3}{2}; a_4 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; a_5 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 3 \cdot 2 = 6; a_4 = 6 \cdot 3 = 18; a_5 = 18 \cdot 6 = 108$

3. **Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones y escribe tres términos más en cada una de ellas:**

a) 11, 9, 7, 5, … **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **c)** 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **e)** 8, 12, 18, 27, … **f)** 0, 3, 8, 15, …

a) Restando 2 unidades al término anterior: $a_n = 11 - (n-1)2 = 13 - 2n$

b) Multiplicando por $\frac{1}{2}$ al término anterior: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Sumando 0,4 al término anterior: $a_n = 2,5 + (n-1) \cdot 0,4 = 2,1 + 0,4n$

d) Dividiendo 1 por n, lugar que ocupa el término: $a_n = \dfrac{1}{n}$

e) Multiplicando por 1,5 al término anterior: $a_n = 8 \cdot 1,5^{n-1}$

f) Restando 1 a los cuadrados de los números naturales: $a_n = n^2 - 1$

4. **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\mathbf{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}}$, …

c) 1, 3, 9, 27, …

d) 1 · 2; 2 · 3; 3 · 4; 4 · 5; …

a) $a_n = 10 + 2n$

b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$

d) $a_n = n \cdot (n+1)$

5. **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, …

b) 4, 1, 3, –2, 5, …

c) 1, 2, 2, 1, 1/2, …

d) 7, 9, 12, 16, 21, …

a) $a_1 = 8$ y $a_2 = 10$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $a_1 = 4$ y $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

d) $a_1 = 7$; $a_n = a_{n-1} + n$

Progresiones

6. **Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos en cada una de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $\mathbf{a_1 = 1,5;\ d = 2}$

b) $\mathbf{a_1 = 32;\ d = -5}$

c) $\mathbf{a_1 = 5;\ d = 0,5}$

d) $\mathbf{a_1 = -3;\ d = -4}$

a) $a_1 = 1,5;\ a_2 = 3,5;\ a_3 = 5,5;\ a_4 = 7,5$

$a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 0,5$

$a_{20} = 39,5;\ S_{20} = \dfrac{(1,5+39,5) \cdot 20}{2} = 410$

b) $a_1 = 32;\ a_2 = 27;\ a_3 = 22;\ a_4 = 17$

$a_n = 32 + (n-1) \cdot (-5) = 37 - 5n$

$a_{20} = -63;\ S_{20} = \dfrac{(32-63) \cdot 20}{2} = -310$

c) $a_1 = 5;\ a_2 = 5,5;\ a_3 = 6;\ a_4 = 6,5$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 0,5 = 4,5 + 0,5n$

$a_{20} = 14,5;\ S_{20} = \dfrac{(5+14,5) \cdot 20}{2} = 195$

d) $a_1 = -3;\ a_2 = -7;\ a_3 = -11;\ a_4 = -15$

$a_n = -3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 1$

$a_{20} = -79;\ S_{20} = \dfrac{(-3-79) \cdot 20}{2} = -820$

7. **Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:**

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) $\mathbf{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 0}$, …

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -7 \to a_n = 25 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

$a_{15} = -73;\ S_{15} = \dfrac{(25-73) \cdot 15}{2} = -360$

b) Progresión aritmética de diferencia $d = 2 \rightarrow a_n = -13 + (n - 1) \cdot 2 = -15 + 2n$

$a_{15} = 15;\ S_{15} = \dfrac{(-13 + 15) \cdot 15}{2} = 15$

c) Progresión aritmética de diferencia $d = 0,5 \rightarrow a_n = 1,4 + (n - 1) \cdot 0,5 = 0,9 + 0,5n$

$a_{15} = 8,4;\ S_{15} = \dfrac{(1,4 + 8,4) \cdot 15}{2} = 73,5$

d) Progresión aritmética de diferencia $d = -1/4 \rightarrow a_n = \dfrac{3}{4} + (n - 1) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}n$

$a_{15} = -\dfrac{11}{4};\ S_{15} = \dfrac{-2 \cdot 15}{2} = -15$

8. **Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:**

a) $\boldsymbol{a_1 = 0,3;\ r = 2}$

b) $\boldsymbol{a_1 = -3;\ r = \dfrac{1}{2}}$

c) $\boldsymbol{a_1 = 200;\ r = -0,1}$

d) $\boldsymbol{a_1 = \dfrac{1}{81};\ r = 3}$

a) $a_1 = 0,3;\ a_2 = 0,6;\ a_3 = 1,2;\ a_4 = 2,4;\ a_n = 0,3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_1 = -3;\ a_2 = -3/2;\ a_3 = -3/4;\ a_4 = -3/8;\ a_n = -3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_1 = 200;\ a_2 = -20;\ a_3 = 2;\ a_4 = -0,2;\ a_n = 200 \cdot (-0,1)^{n-1}$

d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ a_2 = \dfrac{1}{27};\ a_3 = \dfrac{1}{9};\ a_4 = \dfrac{1}{3};\ a_n = \dfrac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$

9. **Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:**

a) **20; 8; 3,2; 1,28; …**

b) **5; 6; 7,2; 8,64; …**

c) **0,7; 0,07; 0,007; …**

d) $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{2}, \ldots}$

a) $a_n = 20 \cdot 0,4^{n-1}$

b) $a_n = 5 \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 0,7 \cdot 0,1^{n-1}$

d) $a_n = \dfrac{1}{6} \cdot (-3)^{n-1}$

10. **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) **3, –6, 12, –24, …**

b) **0,7; 1,4; 2,8; 5,6; …**

c) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, \ldots}$

d) **100; 20; 4; 0,8; …**

a) $r = -2;\ S_{10} = \dfrac{3 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -1\,023$

b) $r = 2;\ S_{10} = \dfrac{0,7 \cdot (2^{10} - 1)}{1} = 716,1$

c) $r = \dfrac{3}{2};\ S_{10} = \dfrac{\dfrac{2}{3} \cdot \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\dfrac{1}{2}} = 75,55$

d) $r = 0,2;\ S_{10} = \dfrac{100 \cdot (0,2^{10} - 1)}{-0,8} \approx 125$

11. **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \dots$ **b)** $18;\ 16{,}2;\ 14{,}58;\ 13{,}122;\ \dots$

a) $r = 1/3;\ S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$

b) $r = 0{,}9;\ S_\infty = \frac{18}{1-0{,}9} = 180$

Aplica lo aprendido

12. **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:**

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$ **b)** $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ **c)** $0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ \dots$

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ **e)** $22;\ -11;\ 5{,}5;\ -2{,}75;\ \dots$ **f)** $18, 13, 8, 3, \dots$

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$.

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0{,}1$.

Término general: $a_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

e) Progresión geométrica, $r = -0{,}5;\ a_n = 22 \cdot (-0{,}5)^{n-1}$

f) Progresión aritmética, $d = -5;\ a_n = 18 + (n-1) \cdot (-5) = 23 - 5n$

13. **¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 42 en la progresión aritmética definida por $a_3 = 6$ y $a_9 = 15$?**

Calculamos la diferencia: $15 = 6 + 6d \rightarrow d = 3/2$

Calculamos el primer término: $6 = a_1 + 2 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow a_1 = 3$.

$42 = 3 + (n-1) \cdot \frac{3}{2} \rightarrow 84 = 6 + 3n - 3 \rightarrow 3n = 81 \rightarrow n = 27$

El número 42 ocupa el lugar 27.

14. **Determina la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y $a_7 = 32$.**

$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 32 = 5 + 6d \rightarrow d = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

Página 76

15. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $d = 5$; $a_8 = 37$ **b)** $a_{11} = 17$; $d = 2$

c) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$ **d)** $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

a) $a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 37 = a_1 + 7 \cdot 5 \rightarrow a_1 = 2$

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 = -3 + 5n$

b) $a_{11} = a_1 + 10d \rightarrow 17 = a_1 + 10 \cdot 2 \rightarrow a_1 = -3$

$a_n = -3 + (n - 1)2 \rightarrow a_n = -5 + 2n$

c) $a_7 = a_2 + 5d \rightarrow -17 = 18 + 5d \rightarrow d = -7$

$a_1 = a_2 - d \rightarrow a_1 = 18 - (-7) = 25$

$a_n = 25 + (n - 1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

d) $a_{12} = a_4 + 8d \rightarrow 39 = 15 + 8d \rightarrow d = 3$

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow a_1 = 15 - 9 = 6$

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 3 = 3 + 3n$

16. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_3 = 3$; $r = 1/10$ **b)** $a_4 = 20,25$; $r = -1,5$

c) $a_2 = 0,6$; $a_4 = 2,4$ **d)** $a_3 = 32$; $a_6 = 4$

a) $a_3 = a_1 r^2 \rightarrow 3 = a_1\left(\frac{1}{10}\right)^2 \rightarrow a_1 = 300;\ a_n = 300\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 20,25 = a_1(-1,5)^3 \rightarrow a_1 = -6;\ a_n = -6 \cdot (-1,5)^{n-1}$

c) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 2,4 = 0,6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$. Hay dos soluciones.

- Si $r = 2$:

  $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 0,6 = a_1 \cdot 2 \rightarrow a_1 = 0,3;\ a_n = 0,3 \cdot 2^{n-1}$

- Si $r = -2$:

  $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 0,6 = a_1 \cdot (-2) \rightarrow a_1 = -0,3;\ a_n = -0,3 \cdot (-2)^{n-1}$

d) $a_6 = a_3 \cdot r^3 \rightarrow 4 = 32 \cdot r^3 \rightarrow r = 0,5$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 32 = a_1 \cdot 0,5^2 \rightarrow a_1 = 128$

$a_n = 128 \cdot 0,5^{n-1}$

17. La suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = -5$ es 120. Calcula a_{10} y la diferencia.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \rightarrow 120 = \frac{(-5 + a_{10}) \cdot 10}{2} \rightarrow 120 = -25 + 5a_{10} \rightarrow a_{10} = 29$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \rightarrow 29 = -5 + 9d \rightarrow d = \frac{34}{9}$$

18. **Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. ¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?**

$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 8 = 1\,000 \cdot r^3 \rightarrow r = 0{,}2$

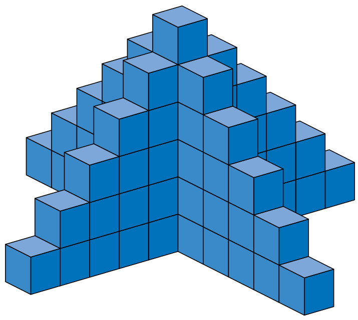
$a_5 = 1\,000 \cdot 0{,}2^4 = 1{,}6;\ S_5 = \dfrac{1000 \cdot (0{,}2^5 - 1)}{0{,}2 - 1} = 1\,249{,}6$

Se puede hallar la suma de los infinitos términos porque $r = 0{,}2 < 1$.

$S_\infty = \dfrac{1\,000}{1 - 0{,}2} = 1\,250$

Resuelve problemas

19. **Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 50 pisos.**



El número de bloques de cada piso es: 1, 5, 9, 13, 17, …

Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 1$ y diferencia $d = 4$.

Término general $\rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 3$

$a_{50} = 4 \cdot 50 - 3 = 197$

$S_{50} = \dfrac{1 + 197}{2} \cdot 50 = 4\,950$

Para construir 50 pisos serán necesarios 4 950 bloques.

20. **Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer 15 km? ¿Cuántos kilómetros recorrerá en total los días que dure el entrenamiento?**

$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 15 = 3 + (n - 1) \cdot 1{,}5 \rightarrow 15 = 1{,}5 + 1{,}5n \rightarrow n = 9$ días

En los 9 días de entrenamiento habrá recorrido: $S_9 = \dfrac{(3 + 15) \cdot 9}{2} = 81$ km.

21. **La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?**

$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870$ mg

22. **Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m durante el primer segundo, 4 m durante el segundo, 7 m durante el tercero, y así durante 10 segundos. ¿Qué distancia ha recorrido en total?**

1, 4, 7, … es una progresión aritmética con $d = 3$.

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 3 \;\to\; a_{10} = 1 + 9 \cdot 3 = 28$ m recorre en 10 s.

23. **La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5 % anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?**

$a_{10} = 3 \cdot 1{,}025^9 = 3\,746\,589$ dentro de 10 años.

24. **En una progresión geométrica se conocen $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

a) $a_1 = 64 = 2^6$; $d = 0{,}75 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^2}$

El primer término no entero es $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^4 = \dfrac{2^6 \cdot 3^4}{2^8} = \dfrac{3^4}{2^2} = \dfrac{81}{4} = 20{,}25$

b) $a_{15} = 64 \cdot 0{,}75^{14} = 1{,}14$; $a_{16} = 64 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}855$

El primer término menor que 1 es $a_{16} = 0{,}855$.

25. **Una máquina envasadora pierde cada año un 15 % de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?**

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \;\to\; a_5 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}15)^4 = 10\,440$ € será su valor dentro de 5 años.

26. **La suma de diez múltiplos de 3 consecutivos es 255. ¿Cuál es el primero y el último de los múltiplos sumados?**

Los múltiplos de 3 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

$$255 = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 27) \cdot 5 = 10a_1 + 135 \;\to\; a_1 = 12$$

$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39$

27. **Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?**

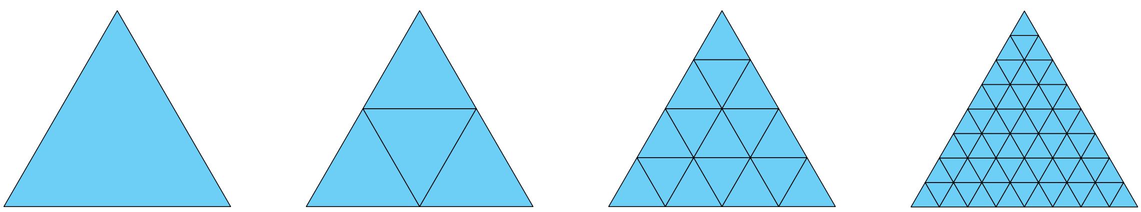
En estos triángulos, vuelve a unir los puntos medios, y así sucesivamente. Escribe las siguientes sucesiones y halla su término general:

a) Número de triángulos que tienes cada vez.

b) Longitudes de los lados de esos triángulos.

c) Áreas de los triángulos.

d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?



a) El número de triángulos que se van formando es 1, 4, 16, 64, …

Forman una progresión geométrica de razón $r = 4$ y primer término $a_1 = 1$.

Su término general es $a_n = 4^{n-1}$.

b) Las longitudes de los lados de los triángulos son: 16, 8, 4, 2, 1, …

Forman una progresión geométrica de primer término $a_1 = 16$ y razón $r = 0,5$.

Su término general es $a_n = 16 \cdot 0,5^{n-1}$.

c) Área del primer triángulo:

$$h_1 = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{2^8 - 2^6} = 2^3\sqrt{2^2 - 1} = 8\sqrt{3};\quad A_1 = \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 8 \cdot 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$$

Área de los segundos triángulos:

$$h_2 = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{2^6 - 2^4} = 2^2\sqrt{2^2 - 1} = 4\sqrt{3};\quad A_2 = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Área de los terceros triángulos:

$$h_3 = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{2^2 - 1} = 2\sqrt{3};\quad A_3 = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Las áreas de los triángulos forman una progresión geométrica de primer término $a_1 = 64\sqrt{3}$ y razón $r = \frac{1}{4}$. Su término general es $a_n = 64\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

d) Se obtiene, para cada término, la suma de las áreas de los triángulos, que, en todos los casos, es igual al área del primer triángulo, $64\sqrt{3}$.

Se puede considerar que es una progresión geométrica de primer término $a_1 = 64\sqrt{3}$ y razón $r = 1$.

28. **Las edades de 4 hermanos están en progresión aritmética y suman 34 años. El mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

$$S_4 = 34;\ a_4 = 13;\ S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} \to 34 = \frac{(a_1 + 13) \cdot 4}{2} \to a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 + 3d \to 13 = 4 + 3d \to d = 3$$

Por tanto, las edades son: 4, 7, 10 y 13 años.

29. **Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, recorriendo su diámetro. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca?¿ Llegará al otro lado de la charca?**

Los saltos forman una progresión geométrica, con $a_1 = 2$ y $r = \frac{2}{3}$.

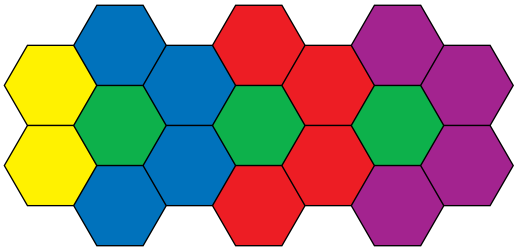
Si la rana salta infinitamente, en total recorrería:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - 2/3} = 6 \text{ cm}$$

Por tanto, sí pasaría del centro de la charca (5 m), pero no llegará nunca al otro lado (19 m).

30. **Para adornar un paseo se colocan a lo largo de su línea central una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma, como muestra la figura. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para poner 25 jardineras?**

Veamos un dibujo:



Así, es fácil entender que hacen falta:

— Para 1 jardinera, $1 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 2 jardineras, $2 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 3 jardineras, $3 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para n jardineras, $n \cdot 4 + 2$ baldosas.

Es una progresión aritmética con $a_1 = 6$ y $d = 4$, ya que:

$$a_n = 6 + (n - 1)4 = 4n + 2$$

Por tanto, para 25 jardineras hacen falta:

$$a_{25} = 4 \cdot 25 + 2 = 102 \text{ baldosas.}$$

Página 77

31. Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando las progresiones geométricas:

a) $7,\widehat{3}$ **b)** $3,5\widehat{4}$ **c)** $0,\widehat{23}$

a) $7,\widehat{3} = 7{,}3333\ldots = 7 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

Suma de los infinitos términos de la progresión $\dfrac{3}{10}, \dfrac{3}{100}, \dfrac{3}{1000} \ldots$

$$S_\infty = \frac{3/10}{1-1/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$7,\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

b) $3,5\widehat{4} = 3{,}54444\ldots = 3{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots = \dfrac{35}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{4}{1000} + \dfrac{4}{10\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{4/100}{1-1/10} = \frac{40}{900} = \frac{2}{45}$$

$$3,5\widehat{4} = \frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

c) $0,\widehat{23} = 0,23232323\ldots = \dfrac{23}{100} + \dfrac{23}{10\,000} + \dfrac{23}{1\,000\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{23/100}{1-1/10} = \frac{23}{99}$$

$$0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$$

32. ¿Cuánto tardará en duplicarse un euro colocado en un banco al 5 % anual si los intereses se van acumulando al final de cada año?

Progresión geométrica con $r = 1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$; $a_1 = 1$ y $a_n = a_1 \cdot 1{,}05^{n-1}$

$2 = 1 \cdot 1{,}05^{n-1} \rightarrow n = 16$ años

33. Una persona inicia un plan de pensiones ingresando, al principio de cada año, 3 000 € al 6 % anual. ¿Qué capital tendrá dentro de 10 años?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}06$ y $r = 1{,}06$.

Lo que nos están pidiendo es S_{10}:

$$S10 = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{3\,000 \cdot 1{,}06^{11} - 3\,000 \cdot 1{,}06}{0{,}06} = 41\,914{,}93\ €$$

34. Un grupo de amigos acuerda ahorrar dinero para un viaje. El primer día de diciembre, cada uno pone 0,50 €; el segundo día, 1 €; el tercero, 1,5 €, y así sucesivamente hasta terminar el mes.

a) ¿Cuánto ahorrará cada uno?

b) El tesorero le dijo a Ana que no había hecho el depósito del día 15. ¿Cuánto debe Ana?

c) En la cuenta de Paco hay 237 €. ¿Qué día no puso el dinero?

a) Progresión aritmética con $a_1 = 0{,}5$; $d = 0{,}5$.

Diciembre tiene 31 días. $a_{31} = 0{,}5 + 30d = 15{,}5$ €

Lo que cada uno ahorra es la suma de los 31 términos $\rightarrow S_{31} = \dfrac{(0{,}5 + 15{,}5) \cdot 31}{2} = 248$ €

b) Ana debe $a_{15} = 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}5 = 7{,}50$ €.

c) $248 - 237 = 11$; $11 = 0{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}5 \rightarrow n = 22$. No puso dinero el día 22.

35. **En una progresión geométrica, la suma de sus infinitos términos es 2 y la diferencia entre el primero y el segundo es 2/9. Halla el primer término y la razón. ¿Hay más de una solución?**

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{9} \rightarrow a_1 - a_1 r = \frac{2}{9} \rightarrow a_1(1 - r) = \frac{2}{9} \rightarrow 1 - \mathrm{r} = \frac{2}{9a_1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{a_1}{\dfrac{2}{9a_1}} = \frac{9a_1^2}{2} \rightarrow 2 = \frac{9a_1^2}{2} \rightarrow 4 = 9a_1^2 \rightarrow a_1^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a_1 = \pm\frac{2}{3}$$

$$a_1 = \pm\frac{2}{3} \begin{cases} 1 - r = \dfrac{2}{9 \cdot \dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \rightarrow r = \dfrac{2}{3} \\[2ex] 1 - r = \dfrac{2}{9 \cdot \dfrac{-2}{3}} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow r = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

La solución $r = \frac{4}{3} > 1$ (con este valor, no se puede calcular S_∞) no es válida.

Hay, por tanto, una única solución: $a_1 = \frac{2}{3}$, $r = \frac{2}{3}$.

Problemas "+"

36. **Un agricultor debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que hay en su huerto. Estos están alineados a distancias regulares de 6 m a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 m.**

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los 20 árboles y dejar el cubo en su posición inicial, junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow$ $a_1 = 24$.

Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow$ $a_2 = 36$.

Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\rightarrow$ $a_3 = 48$.

…

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2760 \text{ m}$$

b) Para regar los árboles 1.º y 2.º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 m: $b_1 = 36$.

Para regar los árboles 3.º y 4.º, recorre 60 m $\rightarrow$ $b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1\,440 \text{ m}$$

37. **Un comerciante recibe un pedido de 20 cajas de naranjas, 7 de clase extra, y 13 de una calidad inferior. Quiere exponerlas al público formando una pirámide de base cuadrada con 12 naranjas de lado en la base, de forma que las naranjas visibles sean de la clase extra. Si en cada caja hay alrededor de 40 naranjas, ¿tendrá suficientes naranjas para ello?**

El primer piso es un cuadrado de 12 naranjas de lado.

Las que se ven son: $12 \cdot 4 - 4 = 44$

En el 2.º piso se ven $11 \cdot 4 - 4 = 40$.

En el 3.er piso se ven $10 \cdot 4 - 4 = 36$.

Las naranjas visibles son $44 + 40 + 36 + \ldots + 4 + 1$.

Los 11 primeros pisos forman una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 44 - (n - 1) \cdot 4 = 48 - 4n$ y cuya suma es:

$$S_{11} = \frac{44 + 4}{2} \cdot 11 = 264$$

Añadimos la que corona la pirámide y son 265 las naranjas visibles.

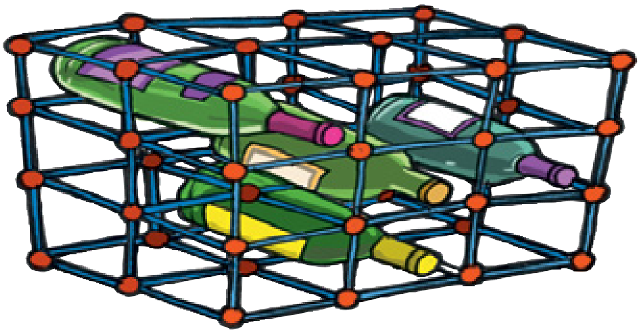
Las 7 cajas de naranjas extras contienen $7 \cdot 40 = 280$ naranjas, que son suficientes para la parte visible.

Las naranjas que no se ven son:

$$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$$

Como tiene $13 \cdot 40 = 520$, también son suficientes.

38. **Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.**



¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?

Para el primer piso se necesitan 24 bolas y 46 palos.

Para dos pisos se necesitan 36 bolas y 75 palos.

Las bolas forman una progresión aritmética con $a_1 = 24$ y $d = 12$. El término general es $a_n = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 12 + 12n$.

Los palos forman una progresión aritmética con:

$a_1 = 46$ y $d = 29 \rightarrow a_n = 46 + (n - 1) \cdot 29 \rightarrow a_n = 17 + 29n$

Para 12 botellas necesitamos un piso más. Por tanto:

$a_4 = 12 + 12 \cdot 4 = 60$ bolas

$a_4 = 17 + 29 \cdot 4 = 133$ palos

Reflexiona sobre la teoría

39. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La diferencia en las progresiones aritméticas es siempre un número negativo.

b) No se puede hallar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica si esta es creciente.

c) La sucesión 3, 3, 3, 3, … no es una progresión.

d) Si sumamos dos progresiones aritméticas, se obtiene otra progresión aritmética.

e) En todas las progresiones aritméticas se verifica que $a_2 + a_{13} = a_{15}$.

f) Si en una progresión aritmética $a_5 + a_{17} = 32$, podemos saber cuánto vale a_{11}.

a) Falso, puede ser positivo o negativo.

b) Verdadero, porque es una progresión geométrica creciente ha de ser $r > 1$.

c) Falso. Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 0$, o una progresión geométrica de primer término $a_1 = 3$ y razón $r = 1$.

d) Verdadero. Se obtiene una progresión aritmética de primer término la suma de los primeros términos y de diferencia, la suma de las diferencias.

$a_n = a_1 + (n-1)d_1$; $b_n = b_1 + (n-1)d_2$; $a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1 + d_2)$

e) Verdadero. $a_2 + a_{13} = a_1 + 14d = a_{15}$

f) Verdadero. $a_5 + a_{17} = 2a_1 + 20d = 32 \rightarrow a_1 + 10d = a_{11} = 16$

40. **Euclides, en sus *Elementos*, utiliza la siguiente fórmula para las progresiones geométricas:**

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

A partir de ella, obtén la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, tal como la hemos estudiado en esta unidad.

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \rightarrow a_1(a_{n+1} - a_1) = S(a_2 - a_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1 r - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1(r-1)} \rightarrow S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Página 78

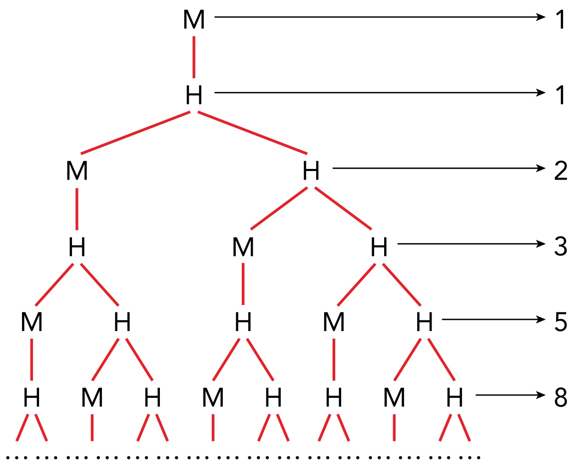
Lee y comprende

Una sucesión famosa

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El siguiente esquema nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**

  El número de antepasados en cada una de las diez primeras generaciones es:

  1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 9

- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**

  Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

  $$a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

  Sucesión de Fibonacci.

Página 79

Entrénate resolviendo problemas

- **Los participantes en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9.**

  ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 1 000 y 1 250?

  El número de participantes es un múltiplo de $3 \cdot 25 = 75$ (ten en cuenta que 25 es múltiplo de 5).

  Los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250 son:

  1 050 1 125 1 200

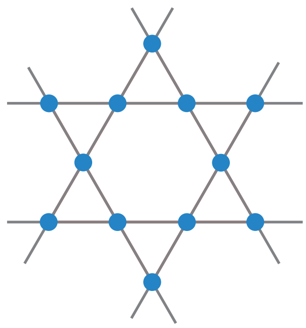
  1 050 no es múltiplo ni de 4 ni de 9.

  1 125 es múltiplo de 9.

  1 200 es múltiplo de 4.

  Por tanto, el número de participantes es de 1 050.

- **Sitúa 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.**



- **a) ¿Cuántas de estas monedas hemos de tocar para que las tres caras estén a la izquierda y las tres cruces a la derecha?**

  b) ¿Cuántas de estas copas hemos de tocar para que queden tres llenas a la izquierda y tres vacías a la derecha?

  a) Da la vuelta a las monedas que están en las posiciones segunda y quinta.

  b) Toma la quinta copa y vierte su contenido en la segunda.

Autoevaluación

1. Escribe el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$

b) **3; 0,6; 0,12; 0,024; …**

c) **1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …**

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

a) $a_n = -5 + \frac{n}{2}$ b) $a_n = 3 \cdot 0{,}2^{n-1}$ c) $a_n = 0{,}1 + 1{,}1n$ d) $a_n = \frac{1}{n+2}$

2. Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.

$a_1 = 8;\ a_2 = 14 \rightarrow a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

Tres términos siguientes: –14, –6, 8, …

3. Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguientes progresiones:

a) **9; 6,5; 4; 1,5; …**

b) **2, –4, 8, –16, …**

a) Progresión aritmética de primer término 9 y diferencia $d = -2{,}5$.

$$a_{10} = 9 - (9 \cdot 2{,}5) = -13{,}5;\quad S_{10} = \frac{(9 - 13{,}5) \cdot 10}{2} = -22{,}5$$

b) Progresión geométrica de primer término 2 y razón $r = -2$.

$$S_{10} = \frac{2 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -682$$

4. En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.

$a_9 = a_5 + 4d \rightarrow 38 = 22 + 4d \rightarrow d = 4$

$22 = a_1 + 4 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 6$

$a_{25} = 6 + 24 \cdot 4 = 102$

$58 = 6 + (n-1) \cdot 4 \rightarrow n = 14$

5. Halla la fracción generatriz de $6,\widehat{4}$ utilizando las progresiones geométricas.

$6,\widehat{4} = 6 + 0,\widehat{4} = 6 + 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 00004 + \ldots$

0,4; 0,04; 0,004; … es una progresión geométrica de primer término 0,4 y razón 0,1. La suma de sus infinitos términos es $S_\infty = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} = \frac{4}{9}$.

$6,\widehat{4} = 6 + 0,\widehat{4} = 6 + \frac{4}{9} = \frac{58}{9}$

6. La suma de doce múltiplos consecutivos de 5 es 750. Halla el primero y el último de los múltiplos sumados.

Los múltiplos de 5 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 5$.

$$750 = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} \rightarrow a_1 = 125 - a_{12}$$

$a_{12} = a_1 + 55$

Sustituyendo, $a_1 = 125 - (a_1 + 55) \rightarrow a_1 = 35$ y $a_{12} = 90$.

7. Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.

En el primer caso tenemos una progresión aritmética:

$a_1 = 15\,000;\ d = 500 \ \rightarrow\ a_5 = 15\,000 + 4 \cdot 500 = 17\,000$ €

En el segundo caso tenemos una progresión geométrica:

$a_1 = 15\,000;\ r = 1,05 \ \rightarrow\ a_5 = 15\,000 \cdot 1,05^4 = 18\,232,59$ €

Es mejor la segunda oferta.

8. Para rodar un anuncio se ha contratado a un gran número de personas que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas. Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.

Es una progresión aritmética de la que sabemos $n = 51$, $d = 2$ y $a_{26} = 57$.

$a_{26} = a_1 + 25d \ \rightarrow\ 57 = a_1 + 25 \cdot 2 \ \rightarrow\ a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50d \ \rightarrow\ a_{51} = 7 + 50 \cdot 2 = 107$

$S_{51} = \frac{7 + 107}{2} \cdot 51 = 2\,907$ personas en total.

9. ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

a) Para calcular S_{20} en una progresión aritmética o geométrica, basta con conocer dos de sus términos.

b) Los términos de una progresión geométrica se pueden obtener multiplicando cada término por el anterior.

c) Se puede calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica si $-1 < r < 1$.

d) Una progresión aritmética es decreciente cuando la diferencia es menor que 1.

a) Verdadero. Con dos términos podemos calcular la diferencia o la razón.

b) Falso. Cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón.

c) Verdadero. Se puede calcular siempre que $|r| < 1$, lo que es equivalente a $-1 < r < 1$.

d) Falso. Es decreciente cuando la diferencia es menor que 0 (negativa).

Página 83

Resuelve

1. ¿Cuál de estas igualdades asocias al enunciado del montón de trigo que aparece en el papiro egipcio? ¿Cuántas *medidas* tiene ese *montón*?

Ⓘ $\boxed{x - \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{2}}$ Ⓘⓘ $\boxed{x - \frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{2}}$ Ⓘⓘⓘ $\boxed{\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{2}}$

La igualdad II.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 5 \rightarrow \frac{6x - 2x - 3x}{6} = 5 \rightarrow \frac{x}{6} = 5 \rightarrow x = 30$$

El montón tiene 30 medidas.

2. Completa en tu cuaderno la igualdad que relaciona las áreas de las dos figuras geométricas que tienes más arriba: $a^2 - b^2 = \ldots$

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

3. Traduce a lenguaje algebraico (al estilo actual) el enunciado del problema de *la cosa*, descrito más arriba. Después, averigua tanteando el valor de dicha *cosa*.

$16x + 35 = 3x \cdot x \rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$

La cosa vale 7.

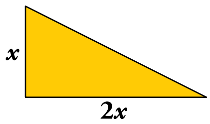
1 Expresiones algebraicas

Página 84

1. Describe mediante una expresión algebraica cada uno de los enunciados siguientes:

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) 

El área de este triángulo es 36 cm^2.

d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

a) $2x - \frac{1}{3}x$

b) $2(x + 3)$

c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$

d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

2 Monomios

Página 85

1. ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$ **b)** $11xy^2$ **c)** -12

a) Su grado es 6. b) Su grado es 3. c) Su grado es 0.

2. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$ **b)** $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$ **d)** $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$ b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$ d) $yz^3 + 6y^3z$

3. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ **b)** $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ **d)** $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $-4x^4$ b) $\frac{-2}{15}x^5$

c) $14xy^3$ d) $-15x^3yz^2$

4. Simplifica cada uno de los siguientes cocientes entre monomios:

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$ **b)** $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2} = \frac{5x^3}{3y}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y} = \frac{5xy}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4} = \frac{\sqrt{3}}{5x^2}$

3 Polinomios

Página 86

1. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

2. Sean $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^3 & & -2x & +1 \\ -x^4 & & -2x^2 & +2x & -2 \\ \hline -x^4 & +5x^3 & -2x^2 & & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^3 & & -2x & +1 \\ x^4 & & +2x^2 & -2x & +2 \\ \hline x^4 & +5x^3 & +2x^2 & -4x & +3 \end{array}$$

3. Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$

b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$

d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$

f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$

h) $8x^2(x^2 + 3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$

j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

a) $2x^3 + 6x^2 - 2x$

Su grado es 3.

b) $6x^4 - 8x^3 + 12x^2$

Su grado es 4.

c) $6x^3 + 2x$

Su grado es 3.

d) $5x^2 + 5x - 5$

Su grado es 2.

e) $-14x^7 + 21x^6 + 7x^5$

Su grado es 7.

f) $-14x^4 + 21x^3 - 7x^2$

Su grado es 4.

g) $12x^2 - 20x^3 + 4x^5 = 4x^5 - 20x^3 + 12x$

Su grado es 5.

h) $8x^4 + 24x^2$

Su grado es 4.

i) $3x^4 - 2x^5 = -2x^5 + 3x^4$

Su grado es 5.

j) $-4x^2 - 36x^3 + 8x = -36x^3 - 4x^2 + 8x$

Su grado es 3.

Página 87

4. Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$ **b)** $P \cdot R$ **c)** $Q \cdot R$

a)
$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & 4x^2 & & & + & 3 \\
 & & & & 5x^2 & - & 3x & + & 7 \\
\cline{4-9}
 & & & & 28x^2 & & & + & 21 \\
 & - & 12x^3 & & & - & 9x & & \\
20x^4 & & & + & 15x^2 & & & & \\
\hline
20x^4 & - & 12x^3 & + & 43x^2 & - & 9x & + & 21
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 4x^2 & & & + & 3 \\
 & & & & 5x & - & 8 \\
\cline{2-7}
 & - & 32x^2 & & & - & 24 \\
20x^3 & & & + & 15x & & \\
\hline
20x^3 & - & 32x^2 & + & 15x & - & 24
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 5x^2 & - & 3x & + & 7 \\
 & & & & 5x & - & 8 \\
\cline{2-7}
 & - & 40x^2 & + & 24x & - & 56 \\
25x^3 & - & 15x^2 & + & 35x & & \\
\hline
25x^3 & - & 55x^2 & + & 59x & - & 56
\end{array}$$

5. Opera y simplifica la expresión resultante.

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 = 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 3x^5 - 10x^4 + 38x^3 + 3x^2 - 4x + 20$

6. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x+4)^2$ **b)** $(2x-5)^2$ **c)** $(1-6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ **e)** $\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(ax+b)^2$

a) $x^2+16+8x$

b) $4x^2+25-20x$

c) $1+36x^2-12x$

d) $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{16}+\frac{3x}{4}=\frac{1}{16}(4x^2+9+12x)$

e) $4x^4+\frac{1}{4}-2x^2=\frac{1}{4}(16x^4+1-8x^2)$

f) $a^2x^2+b^2+2abx$

7. Efectúa los siguientes productos:

a) $(x+1)(x-1)$ **b)** $(2x+3)(2x-3)$

c) $\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)$ **d)** $(ax+b)(ax-b)$

a) x^2-1

b) $4x^2-9$

c) $\frac{x^2}{9}-\frac{1}{4}$

d) $a^2x^2-b^2$

4 Identidades

Página 88

1. De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $a + a + a = 3a$

b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$

c) $x^2 \cdot x = 27$

d) $a + a + a = 15$

e) $x \cdot x \cdot x = x^3$

f) $a + 5 + a = 2a + 5$

g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$

h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

Son identidades a), b), e), f) y h).

2. Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:

a) $\dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

b) $5a - 4 + a - \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b = [?]$

d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 = [?]$

a) a^3

b) $5a - 4 + a - a = 5a - 4$

c) $2ab + ac$

d) $1 - b^2 + b^2 + a - 1 = a$

3. Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \quad \to \quad 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \quad \to \quad x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \quad \to \quad x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \quad \to \quad 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \quad \to \quad 4ab$

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x - 6 = 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) = (x^2 + 6x + 2x + 12) - (x^2 + 5x + 2x + 10) = x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 = (x^2 - 1) - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

Página 89

4. Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

h) $\frac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \frac{4}{3}(2x^2 + 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$

b) $\frac{1}{3}\left(x^4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$

d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$

f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\frac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)$

h) $\frac{1}{3}(2x^2 + 1)[(2x^2 + 1) - 4] = \frac{1}{3}(2x^2 + 1)(2x^2 - 3)$

5. Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.

a) $4x^2 - 25$

b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$

e) $4x^2 + 25 - 20x$

f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$

h) $\frac{(x^3)^2}{25} + \frac{x^3}{5} + \frac{1}{4}$

i) $16x^4 - 9$

j) $\frac{x^6}{100} + \frac{8x^3}{5} + 64$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$

b) $(x + 4)^2$

c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$

e) $(2x - 5)^2$

f) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

g) $(12x^2 - x) \cdot (12x^2 + x)$

h) $\left(\frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$

i) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

j) $\left(\frac{x^3}{10} + 8\right)^2$

6. Completa estas igualdades para que sean identidades:

a) $x^2 - \dots + 1 = (x - \dots)^2$

b) $4x^2 + \dots + 36 = (\dots + 6)^2$

c) $9x^2 - \dots = (3x + \dots)(\dots - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + \dots = (x + \dots)^2$

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

b) $4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$

c) $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(x + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right)^2$

7. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$

b) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$

c) $2(x-5)^2-(2x^2+3x+50)$

d) $(5x-4)(2x+3)-5$

e) $3(x^2+5)-(x^2+40)$

f) $(x+3)^2-[x^2+(x-3)^2]$

a) $x^2-4-x^2-4=-8$

b) $(9x^2-6x+1)-(9x^2+6x+1)=9x^2-6x+1-9x^2-6x-1=-12x$

c) $2(x^2-10x+25)-(2x^2+3x+50)=2x^2-20x+50-2x^2-3x-50=-23x$

d) $10x^2+15x-8x-12-5=10x^2+7x-17$

e) $3x^2+15-x^2-40=2x^2-25$

f) $(x^2+6x+9)-[x^2+(x^2-6x+9)]=x^2+6x+9-x^2-x^2+6x-9=-x^2+12x$

8. Asocia cada expresión de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2$	$2(x-2)$
$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)$	$3x$
$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)$	$x-1$
$9x^2-18xy^2-6xyz+6x$	$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2=4x^2\left(3x-2x^3+y^2-\frac{1}{3}\right)$

$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)=(x-1)\,[(x+1)+(x-1)-4]=(x-1)(2x-4)$

$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)=2(x-2)\,[3(x-2)-(x+2)+15]=2(x-2)(2x+7)$

$9x^2-18xy^2-6xyz+6x=3x(3x-6y^2-2yz+2)$

9. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ **por 8**

b) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ **por 9**

c) $\frac{(2x-4)^2}{8}-\frac{x(x+1)}{2}-5$ **por 8**

d) $\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}$ **por 12**

e) $\frac{x-1}{4}+36-\frac{x+7}{6}-\left(\frac{4x+7}{9}+11\right)$ **por 36**

f) $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{x^2-9}{4}+\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}$ **por 20**

a) $4x+2x+x-6x-2=x-2$

b) $9x+2x-3+3(x-1)-(12x+4)=9x+2x-3+3x-3-12x-4=2x-10$

c) $(2x-4)^2-4x(x+1)-40=(4x^2-16x+16)-4x^2-4x-40=$

$=4x^2-16x+16-4x^2-4x-40=-20x-24$

d) $9(x+2)+6(3x+5)-10(4x+1)+25=9x+18+18x+30-40x-10+25=-13x+63$

e) $9(x-1)+1\,296-6(x+7)-4(4x+7)-396=9x-9+1\,296-6x-42-16x-28-396=$

$=-13x+821$

f) $4(x+2)^2-5(x^2-9)+10(x+3)^2+4=4x^2+16x+16-5x^2+45+10x^2+60x+90+4=$

$=9x^2+76x+155$

5 Cociente de polinomios

Página 91

1. Halla el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$

b) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ **por Ruffini**

a)

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -7x^4 & & +3x^2 & & -8 & x^2-3x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +3x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2-13x-32 \\ \cline{1-3}
 & -4x^4 & -x^3 & +3x^2 & & -8 & \\
 & +4x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -13x^3 & +7x^2 & & -8 & \\
 & & +13x^3 & -39x^2 & +13x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -32x^2 & +13x & -8 & \\
 & & & +32x^2 & -96x & +32 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -83x & +24 &
\end{array}
$$

Cociente: $x^3 - 4x^2 - 13x - 32$; Resto: $-83x + 24$

b)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +3x^3 & & -2x & & 3x^2+2 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & -4x^2 & & & 2x^2+x-4/3 \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & -4x^2 & -2x & & \\
 & -3x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^2 & -4x & & \\
 & & +4x^2 & & +8/3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x & +8/3 &
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 + x - \dfrac{4}{3}$; Resto: $-4x + \dfrac{8}{3}$

c)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & 6 & -11 & 13 \\
2 & & 10 & 20 & 52 & 82 \\ \hline
 & 5 & 10 & 26 & 41 & 95
\end{array}
$$

Cociente: $5x^3 + 10x^2 + 26x + 41$; Resto: 95

2. Transforma los siguientes polinomios en producto de factores:

a) $P(x) = x^3 - 7x - 6$

b) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4x$

c) $P(x) = x^3 - 3x + 2$

d) $P(x) = x^4 - x^2$

a) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$

b) $x(x - 1)(x^2 + x + 4)$

c) $(x + 2)(x - 1)^2$

d) $x^2(x + 1)(x - 1)$

6 Fracciones algebraicas

Página 93

1. Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\dfrac{15x^2}{5x^2(x-3)}$ **b)** $\dfrac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$ **c)** $\dfrac{3x^2-9x^3}{15x^3-3x^4}$

d) $\dfrac{9(x+1)-3(x+1)}{2(x+1)}$ **e)** $\dfrac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$ **f)** $\dfrac{x(3x^3-x^2)}{(3x-1)x^3}$

a) $\dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x-1}{3}$

c) $\dfrac{3x^2(1-3x)}{3x^3(5-x)} = \dfrac{1-3x}{x(5-x)} = \dfrac{-3x+1}{-x^2+5x}$

d) $\dfrac{(x+1)(9-3)}{2(x+1)} = \dfrac{6(x+1)}{2(x+1)} = 3$

e) $\dfrac{x(x-3)(x+3)}{3} = \dfrac{x(x^2-9)}{3} = \dfrac{x^3-9x}{3}$

f) $\dfrac{x \cdot x^2(3x-1)}{(3x-1)x^3} = \dfrac{x^3(3x-1)}{(3x-1)x^3} = 1$

2. Opera y simplifica.

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{x-2}{x}$ **b)** $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\dfrac{2}{x^2-9} - \dfrac{7x}{x-3} + 3$ **d)** $\dfrac{5x^3+15x^2}{x+3} - \dfrac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

a) $\dfrac{4}{2x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{2(x-2)}{2x} = \dfrac{7+2x-4}{2x} = \dfrac{2x+3}{2x}$

b) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x^2+8x}{x(x+1)} - 4x = \dfrac{3x}{x(x+1)} - \dfrac{2x^2+8x}{x(x+1)} - \dfrac{4x \cdot x(x+1)}{x(x+1)} =$

$= \dfrac{3x-2x^2-8x-4x^3-4x^2}{x(x+1)} = \dfrac{-4x^3-6x^2-5x}{x(x+1)} =$

$= \dfrac{-x(4x^2+6x+5)}{x(x+1)} = \dfrac{-4x^2-6x-5}{x+1}$

c) $\dfrac{2}{(x+3)(x-3)} - \dfrac{7x}{x-3} + 3 = \dfrac{2}{(x+3)(x-3)} - \dfrac{7x(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \dfrac{3(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} =$

$= \dfrac{2-7x^2-21x+3x^2-27}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{-4x^2-21x-25}{(x+3)(x-3)}$

d) $\dfrac{5x^2(x+3)}{x+3} - \dfrac{5x^2(2x+3)}{5x^2} + 2x = 5x^2 - (2x+3) + 2x = 5x^2 - 2x - 3 + 2x = 5x^2 - 3$

3. **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:**

a) $\dfrac{x^2-1}{x}:(x-1)$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x}:\dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x}:\dfrac{x-1}{x}$

d) $6x^2\cdot\dfrac{x-3}{x^3}$

e) $\dfrac{3x-3}{x^2}\cdot\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

f) $\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{4x^2}{2x-2}$

g) $\dfrac{x+5}{10}\cdot\dfrac{5}{(x+5)^2}$

h) $\dfrac{2x^2}{3x}\cdot\dfrac{6x}{4x^3}$

i) $\dfrac{4x-3}{2x}\cdot\dfrac{4x^2}{8x-6}$

j) $\dfrac{3x-3}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{18(x-1)}$

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}:(x-1)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x}:\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}=\dfrac{x(x-2)}{x}\cdot\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}=1$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x}:\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}\cdot\dfrac{x}{x-1}=x-1$

d) $\dfrac{6x^2(x-3)}{x^3}=\dfrac{6(x-3)}{x}=\dfrac{6x-18}{x}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2}\cdot\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{3}{x}$

f) $\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{(2x)^2}{2(x-1)}=\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{2(x-1)}{(2x)^2}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

g) $\dfrac{5(x+5)}{10(x+5)^2}=\dfrac{1}{2(x+5)}$

h) $\dfrac{12x^3}{12x^4}=\dfrac{1}{x}$

i) $\dfrac{4x-3}{2x}\cdot\dfrac{(2x)^2}{2(4x-3)}=\dfrac{2x}{2}=x$

j) $\dfrac{3(x-1)}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{18(x-1)}=\dfrac{9x}{8x^2}=\dfrac{1}{2x}$

4. **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{6x^2}{4x^2-9}:\left(\dfrac{5x}{2x-3}+\dfrac{5x}{2x+3}\right)$

b) $\dfrac{x^2}{5x^2-25}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

a) $\dfrac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)}:\dfrac{5x(2x+3)+5x(2x-3)}{(2x+3)(2x-3)}=\dfrac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)}\cdot\dfrac{(2x+3)(2x-3)}{5x(2x+3+2x-3)}=$

$=\dfrac{6x^2}{5x\cdot 4x}=\dfrac{6x^2}{20x^2}=\dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{5(x+1)x^2}{5(x+1)(5x^2-25)}-\dfrac{(x+1)(5x^2-25)}{5(x+1)(5x^2-25)}-\dfrac{5(x^3+x^2)}{5(x+1)(5x^2-25)}=$

$=\dfrac{5x^2(x+1)-(x+1)(5x^2-25)-5x^2(x+1)}{5(x+1)(5x^2-25)}=\dfrac{5x^2-5x^2+25-5x^2}{5(5x^2-25)}=\dfrac{-5x^2+25}{5(5x^2-25)}=-\dfrac{1}{5}$

Ejercicios y problemas

Página 95

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1. **Expresa en lenguaje algebraico con una sola incógnita.**

a) El doble de un número más su cuadrado.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad de un número aumentado en 3.

d) Un múltiplo de 3 menos 7.

a) $2x + x^2$ b) $x(x + 1)$ c) $\frac{(x + 3)}{2}$ d) $3x - 7$

2. **Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:**

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

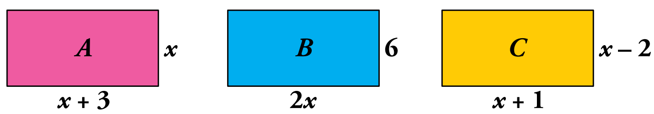
c) La suma de las edades de un padre y su hijo hace 5 años.

a) $x + \frac{y^2}{2}$ b) $(x - y)^2$ c) $(x - 5) + (y - 5)$

3. **Asocia cada una de las siguientes expresiones al périmetro y al área de los rectángulos A, B y C:**

a) $\boldsymbol{12x}$ **b)** $\boldsymbol{4x - 2}$ **c)** $\boldsymbol{4x + 6}$

d) $\boldsymbol{4x + 12}$ **e)** $\boldsymbol{x^2 + 3x}$ **f)** $\boldsymbol{x^2 - x - 2}$



a) $12x$ es el área de B

b) $4x - 2$ es el perímetro de C.

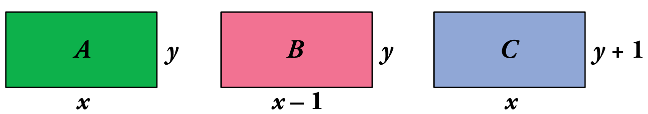
c) $4x + 6$ es el perímetro de A.

d) $4x + 12$ es el perímetro de B.

e) $x^2 + 3x$ es el área de A.

f) $x^2 - x - 2$ es el área de C.

4. **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



a) $A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$

b) $B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$

c) $C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$

5. **Expresa en lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.**

a) La edad de Andrea, dentro de 7 años, será el doble que la que tenga Lucía.

b) En una empresa aceitera se han envasado 1 500 litros de aceite en garrafas de 2,5 litros y de 5 litros.

c) En un test de matemáticas te dan 4 puntos por cada acierto y te restan 1 punto por cada error. Luis obtuvo 60 puntos.

d) El cubo de la diferencia de dos números es 8.

a) $x + 7 = 2y$ b) $2{,}5x + 5y = 1\,500$

c) $4x - y = 60$ d) $(x - y)^3 = 8$

Monomios y polinomios. Operaciones

6. **Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:**

a) $-5xy$ **b)** $(-7x)^3$ **c)** $8x$ **d)** $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{4}{5}x^3$ **g)** $\frac{-3yx}{5}$ **h)** $\frac{1}{2}x$

a) Grado 2. b) Grado 3. c) Grado 1. d) Grado 4.

e) Grado 0. f) Grado 3. g) Grado 2. h) Grado 1.

Son semejantes: a) y g); b) y f); d) y e).

7. **Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.**

a) $-5 \cdot (-1) \cdot 3 = 15$ b) $[-7 \cdot (-1)]^3 = 343$ c) $8(-1) = -8$

d) $[(-1) \cdot 3]^2 = 9$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$

g) $\frac{-3 \cdot 3(-1)}{5} = \frac{9}{5}$ h) $\frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$

8. **Efectúa.**

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$ **b)** $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$ b) $2x + 7y - 3x + y - x^2 = -x^2 - x + 8y$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

9. **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $(6x^2)(-3x)$ **b)** $(2xy^2)(4x^2y)$ **c)** $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2\,(-3x) = -18x^3$ b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

10. **Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:**

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$ **b)** $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$

$= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2 (-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$

$= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow$ Grado 3.

11. **Considera estos polinomios:**

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$ $C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x =$

$= 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$

$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$

$= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$

12. **Prueba si los números –1, 1, 2, 3 son raíces de alguno de los siguientes polinomios:**

a) $x^3 - 7x + 6$ **b)** $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ **c)** $x^3 - 3x^2 - x + 3$

a) 1 y 2 son raíces de $x^3 - 7x + 6$.

b) 3 es raíz de $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

c) –1, 1 y 3 son raíces de $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

13. **Opera y simplifica.**

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$ **b)** $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x = -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 = 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

Página 96

14. **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right)$

c) $20\left[\dfrac{2(x-1)}{10}-\dfrac{x(x+1)}{5}+\dfrac{1}{4}\right]$

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right) = 5x-4+3(2x-3)-2(x-1) =$

$= 5x-4+6x-9-2x+1 = 9x-12$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right) = 4(x+6)-6(x+1)+3(3x-1) =$

$= 4x+24-6x \ldots 6+9x-3 = 7x+15$

c) $20\left[\dfrac{2(x-1)}{10}-\dfrac{x(x+1)}{5}+\dfrac{1}{4}\right] = 4(x-1)-4x(x+1)+5 = 4x-4-4x^2-4x+5 = -4x^2+1$

15. **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2}$

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12} = 24\left(\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}\right) = 3(3+x)-4(5-x)-2(x+1) =$

$= 9+3x-20+4x-2x-2 = 5x-13$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6} = 12\left(\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}\right) =$

$= 3 \cdot 3(x-1)-4(x+1)+2 = 9x-9-4x-4+2 = 5x-11$

c) $\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2} = 30\left[\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2}\right] = 6(3x-3)-10(x+1)+15 =$

$= 18x-18-10x-10+15 = 8x-13$

Igualdades notables

16. **Desarrolla estas expresiones:**

a) $(x+6)^2$

b) $(7-x)^2$

c) $(3x-2)^2$

d) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

e) $(x-2y)^2$

f) $\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{3}y\right)^2$

a) $(x+6)^2 = x^2 + 36 + 12x$

b) $(7-x)^2 = 49 + x^2 - 14x$

c) $(3x-2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + x$

e) $(x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{15}xy$

17. Expresa como diferencia de cuadrados.

a) $(x+7)(x-7)$ **b)** $(3+x)(3-x)$ **c)** $(3+4x)(3-4x)$

d) $(x^2+1)(x^2-1)$ **e)** $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ **f)** $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$

a) $(x+7)(x-7) = x^2 - 49$

b) $(3+x)(3-x) = 9 - x^2$

c) $(3+4x)(3-4x) = 9 - 16x^2$

d) $(x^2+1)(x^2-1) = x^4 - 1$

e) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

f) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$

18. Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:

a) $x^2 + \ldots + 4x$ **b)** $x^2 + \ldots - 10x$

c) $x^2 + 9 + \ldots$ **d)** $x^2 + 16 - \ldots$

a) $x^2 + 4 + 4x$

b) $x^2 + 25 - 10x$

c) $x^2 + 9 + 6x$

d) $x^2 + 16 - 8x$

19. Extrae factor común.

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$ **b)** $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$ **d)** $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x = 4x(3x^2 - 2x - 1)$

b) $-3x^3 + x - x^2 = x(-3x^2 + 1 - x)$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 = xy(2y - 4x + xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x + x^2 - 5)$

20. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

- $x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x+5)^2$

a) $x^2 + 49 - 14x$ **b)** $x^2 + 1 - 2x$

c) $4x^2 + 1 + 4x$ **d)** $x^2 + 12x + 36$

a) $x^2 + 49 - 14x = x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7x = (x-7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1^2 - 2x = (x-1)^2$

c) $4x^2 + 1 + 4x = (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x = (2x+1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (x+6)^2$

21. **Transforma en producto.**

a) $4x^2 - 49$ **b)** $x^2 - 18x + 81$

c) $9x^2 + 12x + 4$ **d)** $121 - 100x^2$

a) $(2x - 7)(2x + 7)$ b) $(x - 9)^2$

c) $(3x + 2)^2$ d) $(11 + 10x)(11 - 10x)$

22. **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $18\left[\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6}\right]$ **b)** $8\left[\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8}\right]$

c) $30\left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2}\right]$

a) $18\left[\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6}\right] = 2(2x-5)^2 - 3(x+1)^2 = 8x^2 - 40x + 50 - 3x^2 - 6x - 3 =$

$= 5x^2 - 46x + 47$

b) $8\left[\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8}\right] = 4x(x-3) + 2x(x+2) - (3x+2)^2 =$

$= 4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x - 9x^2 - 12x - 4 = -3x^2 - 20x - 4$

c) $30\left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2}\right] = 2x(x-2) - 5(x^2 + 1 + 2x) + 15 =$

$= 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5 - 10x + 15 = -3x^2 - 14x + 10$

23. **Extrae factor común, igual que se ha hecho en el ejemplo.**

- $3x(x + 1) - x^2(x + 1) + (x + 1)(x^2 - 2) = (x + 1)(3x - x^2 + x^2 - 2) = (x + 1)(3x - 2)$

a) $2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ **b)** $x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3)$

c) $3x^2(x + 3) - 6x(x + 3)$

a) $2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(2x + x^2 - 3)$

b) $x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3) = x^2[x + 1 - (x + 2) + 2(x - 3)] = x^2(2x - 7)$

c) $3x^2(x + 3) - 6x(x + 3) = x(x + 3)(3x - 6)$

24. **Transforma en producto, como en el ejemplo.**

- $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

a) $x^3 - 4x$ **b)** $4x^3 - 4x^2 + x$

c) $x^4 - x^2$ **d)** $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x - 1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x - 4)^2$

División de polinomios. Regla de Ruffini

25. **Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:**

a) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 5) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 4x + 7) : (x - 1)$

d) $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x + 2)$

e) $(-x^2 + 3x - 7) : (x - 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x - 3$; Resto: 0

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x + 4$; Resto: 1

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & 5 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 2x - 2$; Resto: 5

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ -2 & & -2 & 12 & -10 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 6x + 5$; Resto: 0

e)
$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 3 & -7 \\ 3 & & -3 & 0 \\ \hline & -1 & 0 & -7 \end{array}$$

Cociente: $-x$; Resto: -7

Página 97

26. **Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + x - 1)$

d) $(x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 2x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +\,2x^2 & & +\,1 & x^2+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & -\,x & & x+2 \\ \hline & 2x^2 & -\,x & +\,1 & \\ & -\,2x^2 & & -\,2 & \\ \cline{2-4} & & -\,x & -\,1 & \end{array}$$

Cociente: $x + 2$; Resto: $-x - 1$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -\,x^2 & -\,x & +\,1 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -\,2x^3 & & +\,2x & & 2x-1 \\ \hline & -\,x^2 & +\,x & +\,1 & \\ & +\,x^2 & & -\,1 & \\ \cline{2-4} & & x & & \end{array}$$

Cociente: $2x - 1$; Resto: x

c)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,3x^2 & +\,2x & -\,2 & x^2+x-1 \\ \cline{5-5} -\,x^3 & -\,x^2 & +\,x & & x-4 \\ \hline & -\,4x^2 & +\,3x & -\,2 & \\ & +\,4x^2 & +\,4x & -\,4 & \\ \cline{2-4} & & 7x & -\,6 & \end{array}$$

Cociente: $x - 4$; Resto: $7x - 6$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -\,5x^3 & & +\,2x & & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6} -\,x^4 & +\,2x^3 & -\,x^2 & & & x^2-3x-7 \\ \hline & -\,3x^3 & -\,x^2 & +\,2x & & \\ & +\,3x^3 & -\,6x^2 & +\,3x & & \\ \cline{2-4} & & -\,7x^2 & +\,5x & & \\ & & +\,7x^2 & -\,14x & +\,7 & \\ \cline{3-5} & & & -\,9x & +\,7 & \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 3x - 7$; Resto: $-9x + 7$

27. **Aplica la regla de Ruffini para transformar en producto los polinomios siguientes:**

a) $x^2 + 2x - 3$

b) $x^2 - 4x - 5$

c) $2x^2 - 5x + 2$

d) $x^2 - x - 6$

e) $2x^2 - x - 3$

f) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

a) $(x + 3)(x - 1)$

b) $(x - 5)(x + 1)$

c) $2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $(x - 3)(x + 2)$

e) $2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

f) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

28. **Transforma en producto.**

a) $x^3 - 3x^2 + 2x$ **b)** $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

c) $2x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 6x$ **d)** $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

a) $x(x-1)(x-2)$ b) $x^2(x-3)(x+1)$

c) $2x(x+1)(x+1)(x-3)$ d) $(x-3)(x+2)(x+3)$

Fracciones algebraicas

29. **Simplifica estas fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{9x}{12x^2}$ **b)** $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)}$ **c)** $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3}$

a) $\dfrac{9x}{12x^2} = \dfrac{3}{4x}$ b) $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)} = \dfrac{x}{5}$ c) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3} = \dfrac{x+2}{2x^3}$

30. **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:**

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2}$ **b)** $\dfrac{3x}{x^2+2x}$ **c)** $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}$ **e)** $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}$ **f)** $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2}$

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2} = \dfrac{x(x-4)}{x^2} = \dfrac{x-4}{x}$ b) $\dfrac{3x}{x^2+2x} = \dfrac{3x}{x(x+2)} = \dfrac{3}{x+2}$

c) $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{3(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{x+1}$ d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2} = \dfrac{2x(x+2)}{x^2(x+2)} = \dfrac{2}{x}$

e) $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2(2x-1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2}{2x-1}$ f) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2} = \dfrac{5x(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{5}{x}$

31. **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{5x^2}{15x}$ **b)** $\dfrac{2x(x-3)}{6(x-3)}$ **c)** $\dfrac{12x-4}{3x-1}$ **d)** $\dfrac{x+5}{(x+5)^2}$ **e)** $\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$ **f)** $\dfrac{x^2-2x}{3x}$

a) $\dfrac{x}{3}$ b) $\dfrac{x}{3}$ c) 4 d) $\dfrac{1}{x+5}$ e) $2x$ f) $\dfrac{x-2}{3}$

32. **Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.**

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **c)** $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ **e)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ **f)** $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x} = \dfrac{2(x+2)}{3x(x+2)} = \dfrac{2}{3x}$ b) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x} = \dfrac{x-2}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{x-2}$ d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x}{x+3}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

f) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3} = \dfrac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)} = \dfrac{x(x+1)^2}{3(x+1)} = \dfrac{x(x+1)}{3}$

33. **Reduce a mínimo común denominador y opera estas expresiones:**

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ **b)** $\frac{3}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{5}{3x}$ **c)** $\frac{5}{2x}-\frac{3}{x^2}$

d) $\frac{3-x}{x}+\frac{x-1}{x^2}$ **e)** $2x+\frac{3}{x-1}$ **f)** $\frac{2x}{x+1}-x$

a) $\frac{x+2}{x^2}$

b) $\frac{18+3-10}{6x}=\frac{11}{6x}$

c) $\frac{5x-6}{2x^2}$

d) $\frac{x(3-x)+x-1}{x^2}=\frac{-x^2+4x-1}{x^2}$

e) $\frac{2x(x-1)+3}{x-1}=\frac{2x^2-2x+3}{x-1}$

f) $\frac{2x-x(x+1)}{x+1}=\frac{2x-x^2-x}{x+1}=\frac{x-x^2}{x+1}$

34. **Efectúa.**

a) $\frac{1}{6x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{2x^3}$ **b)** $\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x-7}$ **c)** $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-4}+\frac{x+1}{x-4}$

d) $\frac{2x}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}$ **e)** $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$ **f)** $\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2+x}+2$

a) $\frac{1}{6x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{2x^3}=\frac{x^2+2x-3}{6x^3}$

b) $\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x-7}=\frac{2(x-7)+x(x-1)}{x(x-7)}=\frac{2x-14+x^2-x}{x^2-7x}=\frac{x^2+x-14}{x^2-7x}$

c) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-4}+\frac{x+1}{x-4}=\frac{2(x-4)-3x+x(x+1)}{x(x-4)}=\frac{2x-8-3x+x^2+x}{x(x-4)}=\frac{x^2-8}{x^2-4x}$

d) $\frac{2x}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}=\frac{2(x+3)-(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x+6-(x^2-4x+3)}{x^2-9}=$

$=\frac{2x+6-x^2+4x-3}{x^2-9}=\frac{-x^2+6x+3}{x^2-9}$

e) $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=\frac{12+2(x-1)+x(x-1)}{4(x-1)}=\frac{12+2x-2+x^2-x}{4(x-1)}=\frac{x^2+x+10}{4(x-1)}$

f) $\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2+x}+2=\frac{3(x+1)-1+2x(x+1)}{x(x+1)}=\frac{3x+3-1+2x^2+2x}{x(x+1)}=\frac{2x^2+5x+2}{x(x+1)}$

35. **Opera y reduce.**

a) $\frac{x+2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$ **b)** $\frac{x-3}{2x}\cdot\frac{x^2}{x-3}$

c) $\frac{3}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{2}$ **d)** $\frac{(x-1)^2}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$

e) $\frac{5}{x-2}:\frac{x-1}{x-2}$ **f)** $\frac{x+5}{5x}:\frac{x+5}{x^2}$

a) $\frac{x+2}{3(x+2)}=\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)}=\frac{x}{2}$

c) $\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{3}{2(x-2)}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x}$

e) $\frac{5(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{5}{x-1}$

f) $\frac{x^2(x+5)}{5x(x+5)}=\frac{x}{5}$

36. **Opera, y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x^2}$

b) $\dfrac{3x+2}{x-1} : \dfrac{x+1}{x}$

c) $\dfrac{3}{(x-1)^2} : \dfrac{2}{x-1}$

d) $(x+1) : \dfrac{x^2-1}{2}$

a) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3x}{(x+1)x^2} = \dfrac{3}{(x+1)x}$

b) $\dfrac{3x+2}{x-1} : \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3}{(x-1)^2} : \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \dfrac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \dfrac{x^2-1}{2} = \dfrac{2(x+1)}{x^2-1} = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{x-1}$

37. **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las igualdades notables:**

a) $\left(x - \dfrac{4}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\left(\dfrac{2}{x} : \dfrac{1}{3+x}\right) \cdot \dfrac{x^2}{2}$

c) $\left(x - \dfrac{9}{x}\right) \cdot \dfrac{2}{x+3}$

d) $\left(1 - \dfrac{2}{x}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) : \dfrac{x^2-4}{2x}$

e) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x+1}{3x}\right) \cdot \dfrac{12x}{(x-2)^2}$

f) $\left(\dfrac{x-3}{x} : \dfrac{x+3}{3x}\right) \cdot \dfrac{1}{3x-9}$

a) $\dfrac{x^2-4}{x} : \dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{2x(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = 2(x-2) = 2x-4$

b) $\dfrac{2(3+x)}{x} \cdot \dfrac{x^2}{2} = x(3+x) = x^2+3x$

c) $\dfrac{x^2-9}{x} \cdot \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{2(x+3)(x-3)}{x(x+3)} = \dfrac{2(x-3)}{x} = \dfrac{2x-6}{x}$

d) $\left(\dfrac{x-2}{x} \cdot \dfrac{x+2}{x}\right) : \dfrac{x^2-4}{2x} = \dfrac{2x(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)(x-2)} = \dfrac{2}{x}$

e) $\dfrac{x-2}{6x} \cdot \dfrac{12x}{(x-2)^2} = \dfrac{2}{(x-2)}$

f) $\dfrac{3x(x-3)}{x(x+3)} \cdot \dfrac{1}{3(x-3)} = \dfrac{1}{x+3}$

Página 98

Resuelve problemas

38. **Expresa en lenguaje algebraico.**

a) La cantidad de agua que hay en un depósito del que se sacan, primero, 1/3 de su capacidad; después, 2/5 de lo que queda, y luego, 20 litros.

b) Compré dos pantalones por 60 €. Uno estaba rebajado un 20 %, y el otro, un 25 %.

c) Un refresco vale 1 € más que una botella de agua. Por tres refrescos y dos aguas he pagado 6 €.

a) $x - \frac{x}{3} - \frac{2}{5}\left(x - \frac{x}{3}\right) - 20 = 0$

b) $x \cdot \frac{80}{100} + y \cdot \frac{75}{100} = 60$ o $0{,}8x + 0{,}75y = 60$

c) Si x es el valor de la botella de agua, $3(x + 1) + 2x = 6$

Si x es el precio del refresco, $3x + 2(x - 1) = 6$

39. **La expresión $10a + b$ representa un número de dos cifras. Escribe en forma algebraica:**

a) Un número de tres cifras.

b) El número siguiente y el anterior al que has escrito en a).

c) La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir las cifras del mismo.

a) $100a + 10b + c$

b) $100a + 10b + c + 1$ y $100a + 10b + c - 1$

c) $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$

40. ***La mitad de un número es 20 unidades menor que su triple.* ¿Cuál de estas expresiones algebraicas corresponde a ese enunciado?**

a) $\frac{x - 20}{2} = 3x$ **b)** $\frac{x}{2} - 20 = 3x$ **c)** $\frac{x}{2} + 20 = 3x$

Es la c).

41. **He pagado 9 € por un refresco, un bocadillo y un bollo. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y este, el doble que el bollo. Si el precio del bollo es x, expresa algebraicamente este enunciado.**

$x + 2x + 6x = 9$

42. **Un grupo de amigos quiere comprar un regalo para María y les toca a 12 € cada uno. Si fueran tres amigos más, les tocaría a 4 € menos cada uno. ¿Cuál de estas igualdades representa este enunciado?**

a) $12(x - 4) = 8(x + 3)$ **b)** $12x = 8(x + 3)$ **c)** $12x = 9(x + 4)$

La igualdad b).

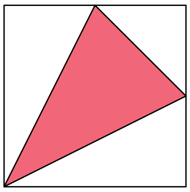
43. **Si mezclamos 6 kg de pintura con 9 kg de otra de calidad inferior, que cuesta 3 € menos por kilo, la mezcla nos sale a 5,20 €/kg. Si x es el precio de la pintura cara, rellena la tabla adjunta y expresa algebraicamente este enunciado.**

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9		
MEZCLA		5,20	

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9	$x - 3$	$9(x - 3)$
MEZCLA	15	5,20	$6x + 9(x - 3)$

Coste de la mezcla $\rightarrow \dfrac{6x + 9(x-3)}{15} = 5{,}20$ €

44. **Expresa algebraicamente el área y el perímetro de la parte coloreada.**



Dos de los vértices del triángulo coinciden con puntos medios de los lados del cuadrado.

Calculamos el lado mayor del triángulo, L:

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow L = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

Calculamos el lado menor del triángulo, l:

$$l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

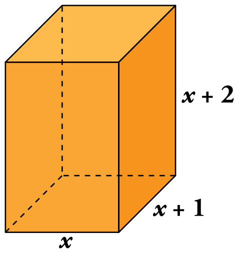
Calculamos la altura que corresponde al lado menor del triángulo, h:

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} - \frac{x^2}{8} = \frac{10x^2 - x^2}{8} = \frac{9x^2}{8} \rightarrow h = \frac{3x}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro} = 2L + l = \sqrt{5}x + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}x + \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5}x + \sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}x$$

$$\text{Área} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3x}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{8}x^2$$

45. **Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales consecutivos.**

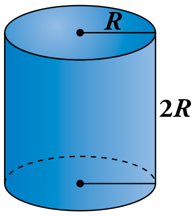


Área: $2[(x+1)(x+2) + x(x+1) + x(x+2)] = 2(x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) =$

$= 2(3x^2 + 6x + 2) = 6x^2 + 12x + 4$

Volumen: $x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$

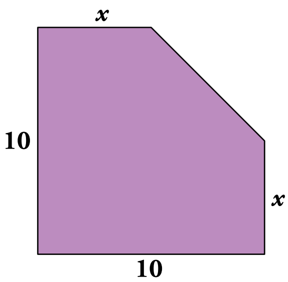
46. **Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un cilindro cuya altura mide el doble que el radio de la base.**



Área: $2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

Volumen: $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

47. **Expresa algebraicamente el área y el perímetro de esta figura:**

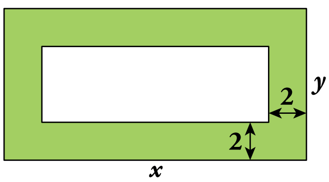


El lado que falta es la hipotenusa de un triángulo de catetos 5 y 5. Mide, por tanto, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Perímetro $= 20 + 2x + 5\sqrt{2}$

Área $= 10x + 10x - \dfrac{25}{2} = 20x - \dfrac{25}{2}$

48. **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.**



$A = xy - (x-4)(x-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$

Página 99

49. Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¡Obtienes siempre 4!

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son x; $x + 1$; $x + 2$

$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$

$\frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$

50. Escribe tres números impares consecutivos. Suma 3 al menor y elévalo al cuadrado. Réstale el producto de los otros dos. ¿Qué obtienes?

Tres números impares consecutivos: $2x - 1$, $2x + 1$, $2x + 3$

$(2x - 1 + 3)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = (2x + 2)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 3 = 1$

Siempre se obtiene 1.

Problemas "+"

51. ¡Adivina el número secreto!

Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.

Razona por qué obtengo el número secreto sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \rightarrow x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x.

52. Piensa un número cualquiera, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado.

¿Cómo puedo saber el número que has pensado?

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplicamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

Si restamos 5 al resultado, obtenemos x.

53. **¿Cuántos números de dos cifras verifican que sumando sus dos cifras más el producto de estas nos da el número inicial?**

Suponemos que el número es ab.

$a + b + a \cdot b = 10a + b \;\rightarrow\; ab = 9a \;\rightarrow\; b = 9$

Los números que acaben en 9 cumplirán esta regla.

54. **Observa:**

$\mathbf{1 + 3 = 4 = 2^2}$

$\mathbf{1 + 3 + 5 = 9 = 3^2}$

$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2}$

¿Cuál será el valor de 1 + 3 + 5 + … + 19?

¿Y de 1 + 3 + 5 + … + $\boldsymbol{n}$**?**

Expresa con palabras esta propiedad e intenta demostrarla.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7… $a_n = 2n - 1$

$S_{10} = \dfrac{1+19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + n \;\rightarrow\; S_n = \dfrac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2.

Reflexiona sobre la teoría

55. **¿Cuándo se dice que un número es raíz de un polinomio?**

¿Cuál de los siguientes polinomios tiene por raíces $\frac{1}{2}$ **y –2?**

a) $x^2 + 2x$ **b)** $4x^2 - 1$ **c)** $3x^2 + 5$

d) $-x^2 - 3x - 2$ **e)** $2x^2 + 3x - 2$ **f)** $2x^2 + 5x + 2$

Un número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

a) –2 es raíz de $x^2 + 2x$.

b) $\frac{1}{2}$ es raíz de $4x^2 - 1$.

c) Ni $\frac{1}{2}$ ni –2 son raíces de $3x^2 + 5$.

d) –2 es raíz de $-x^2 - 3x - 2$.

e) –2 y $\frac{1}{2}$ son raíces de $2x^2 + 3x - 2$.

f) –2 es raíz de $2x^2 + 5x + 2$.

56. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) $(x + a)^2 = (-x - a)^2$

b) $(x - a)^2 = (a - x)^2$

c) $-(x)^2 = x^2$

d) Si multiplicamos dos monomios, obtenemos un binomio.

e) Dos monomios son semejantes si su parte literal tiene las mismas letras.

f) Si la suma de dos monomios es positiva, también lo es su producto.

a) Verdadero. Por ejemplo: $(3+2)^2 = 5^2 = 25 = (-3-2)^2 = (-5)^2 = 25$

$(-x-a)^2 = [-(x+a)]^2 = (x+a)^2$

b) Verdadero. Por ejemplo: $(8-5)^2 = 3^2 = 9 = (5-8)^2 = (-3)^2$

$(x-a)^2 = [-(-x+a)]^2 = (-x+a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax$

c) Falso. Por ejemplo: $-(2)^2 = -4 \neq 2^2$

d) Falso. Por ejemplo: $3ab \cdot 4a^3b^2 = 12a^4b^3$. El producto de dos monomios es un monomio.

e) Falso. Por ejemplo: El monomio $8a^3b^2y$ no es semejante a $3aby$.

f) Falso. Por ejemplo: $7x + (-5)x = 2x$ y, sin embargo, $7x \cdot (-5)x = -35x^2$.

57. **¿Cuál debe ser el valor de k para que –2 sea raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.**

Para que –2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 7(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$

58. **¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por su inversa?**

Compruébalo con $\dfrac{x}{x+2}$ y su inversa.

El producto de una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+2)x} = 1$$

59. **a) Simplifica la expresión $(a+1)^2 - (a-1)^2$.**

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de:

$$2\,501^2 - 2\,499^2$$

a) $(a+1)^2 - (a-1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$

b) $2\,501^2 - 2\,499^2 = 4 \cdot 2\,500 = 10\,000$

60. **Averigua cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:**

a) $(3x+a)(3x-a) + 7$ y $9x^2 - 18$ **b) $(x-a)^2 + 2xa - 46$ y $x^2 + 18$**

a) $(3x+a)(3x-a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$

Si $9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$

b) $(x-a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$

Si $x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

61. **¿Cuáles de las siguientes expresiones son identidades? Justifícalo.**

a) $\sqrt{9x^2} = 3x$ **b) $x(x+1) = x^2 + 1$** **c) $(x-5)^2 = x^2 - 25$**

a) Es una identidad: $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$

b) y c) no son identidades.

62. **Si $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6}$ es un número entero, ¿qué podemos afirmar del valor de x?**

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{4x - x}{6} = \frac{3}{6}x = \frac{1}{2}x$$

Para que $\frac{1}{2}x$ sea entero, x ha de ser un número par.

63. **Al simplificar la fracción algebraica $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2}$, ¿cuál de estas fracciones se obtiene? Justifícalo.**

a) $\frac{3x^2 - 4x}{2}$ **b)** $\frac{x^2 - 8x^3}{6}$ **c)** $\frac{3x^2 - 4x}{6}$

La c): $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2} = \frac{2x^2(3x^2 - 4x)}{12x^2} = \frac{3x^2 - 4x}{6}$

Página 100

Investiga

Un triángulo curioso

- **Esta colección de números que se abre indefinidamente hacia abajo tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.**

  ¿Podrías completar las casillas vacías?

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 ? ?
? ? 10 ? ? ?
…………………………………

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
…………………………………

- **Suma los números de cada fila y completa la tabla:**

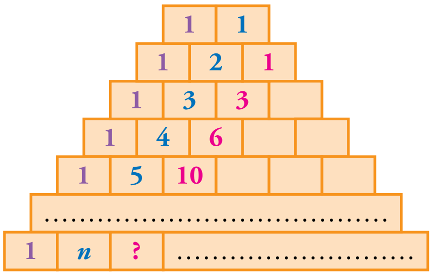
1 1 → S_1
1 2 1 → S_2
1 3 3 1 → S_3
1 4 6 4 1 → S_4
……………………………
1 n …………… n 1 → S_n

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8			…	

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8	16	32	…	2^n

- **Fíjate en estas tres escaleras de números:**



Observa que:

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = …

¿Cuál es el tercer número de la 6.ª fila? | 1 | 6 | ? |

¿Y el de la número 20 (vigésima)? | 1 | 20 | ? |

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la enésima fila: | 1 | *n* | ? |

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Así: $a_{20} = 1 + 2 + \ldots + 20 = \dfrac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$

Y, por fin: $a_n = \dfrac{(1 + n) \cdot n}{2}$

Página 101

Entrénate resolviendo problemas

- **Dos ciclistas parten del mismo lugar, a la misma hora y en el mismo sentido. Sus velocidades respectivas son 30 km/h y 24 km/h.**

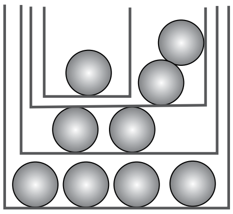
  ¿Qué ventaja le sacará el primero al segundo cuando haya transcurrido una hora y cuarenta minutos?

  Los ciclistas se distancian a una velocidad de $\rightarrow$ $30 - 24 = 6$ km/h

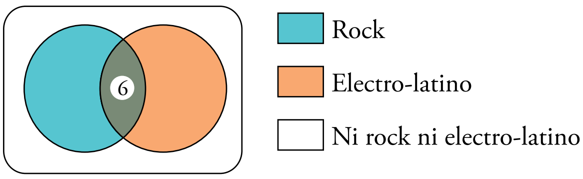
  $$1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{4}{6} \text{ h} = \frac{10}{6} \text{ h} = \frac{5}{3} \text{ h}$$

  En $\frac{5}{3}$ h se distancian $\rightarrow$ $6 \cdot \frac{5}{3} = 10$ km

- **Después de la clase de educación física, hemos guardado en 4 cajas los 9 balones que teníamos. Cada caja contiene un número impar de balones y en ningún caso coinciden el número de balones de dos cajas. ¿Cómo es posible?**



- **De 30 jóvenes a los que se entrevistó en una sala de baile, 15 declararon ser aficionados al rock, y 13, al electro-latino. De ellos, 6 aseguraron ser aficionados a ambos ritmos musicales.**



  ¿Cuántos no son aficionados ni a lo uno ni a lo otro?

  Como hay 6 a quienes les gusta el rock y el electro-latino, a los chicos y a las chicas que les gusta uno de los dos estilos o ambos a la vez son: $15 + 13 - 6 = 22$.

  Como en total hay 30, a quienes no les gusta ni lo uno ni lo otro son $30 - 22 = 8$.

Autoevaluación

1. Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:

a) El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.

b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

c) El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

a) El precio es $\dfrac{3 \cdot 5 + 7 \cdot x}{5 + 7} = \dfrac{15 + 7x}{12}$

b) Si x es el precio de un café, $x + 3x + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{2x + 6x + 3x}{2} = \dfrac{11}{2}x$

c) Área total $= 2x^2 + 4 \cdot 5x = 2x^2 + 20x$

Volumen $= x^2 \cdot 5 = 5x^2$

2. Efectúa y reduce:

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$ **b)** $4\left[(x - 2)^2 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right]$

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x = 9x^3 - 12x^2 + 4x - 2x^3 + 7x^2 - 3x = 7x^3 - 5x^2 + x$

b) $\left[(x - 2)^2 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4\left[x^2 - 4x + 4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 - 16 = x^2 - 16x$

3. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$36\left(\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}\right) = 20(x-1) + 3(7x-2) - 18x(x-1) =$$

$$= 20x - 20 + 21x - 6 - 18x^2 + 18x = -18x^2 + 59x - 26$$

4. Transforma en productos el numerador y el denominador y simplifica la fracción siguiente:

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9}$$

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$$

5. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 + x)$ **b)** $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\ x^3 & +\ 2x^2 & & +\ 4 & x^2 + x \\
\cline{6-6}
-\ 3x^4 & -\ 3x^3 & & & & 3x^2 - 4x + 6 \\
\cline{1-5}
 & -\ 4x^3 & +\ 2x^2 & & +\ 4 & \\
 & +\ 4x^3 & +\ 4x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 6x^2 & & +\ 4 & \\
 & & -\ 6x^2 & -\ 6x & +\ 4 & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ 6x & +\ 4 &
\end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 4x + 6$; Resto: $-6x + 4$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -2 & 2 \\
-2 & & -2 & -2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 10
\end{array}$$

Cociente: $x^2 + x - 4$; Resto: 10

6. Efectúa y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{3-x}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-5}{2x}$ **b)** $\left(\dfrac{x-2}{x} \cdot \dfrac{3x}{x+1}\right) : (x-2)$

a) $\dfrac{3-x}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-5}{2x} = \dfrac{2(3-x)}{2x^2} + \dfrac{2x}{2x^2} - \dfrac{x(x-5)}{2x^2} = \dfrac{6-2x+2x-x^2+5x}{2x^2} = \dfrac{-x^2+5x+6}{2x^2}$

b) $\left(\dfrac{x-2}{x} \cdot \dfrac{3x}{x+1}\right) : (x-2) = \dfrac{3x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \dfrac{3}{x+1}$

7. ¿Cuál debe ser el valor de m para que 2 sea raíz del polinomio $P = 2x^3 + mx^2 + 12$?

$2 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 + 12 = 0 \;\rightarrow\; 16 + 4m + 12 = 0 \;\rightarrow\; 4m = -28 \;\rightarrow\; m = -7$

8. ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La expresión $9x^3 - 15x^2 = 3x^2(3x - 5)$ es una identidad.

b) Si multiplicamos dos binomios de grados 1 y 2, se obtiene un polinomio de grado 3.

c) Si sumamos dos binomios, se obtiene siempre un binomio.

d) Los números son monomios.

e) Los monomios $3a^2b$ y $-3ab^2$ son semejantes.

f) Al dividir $3x^2y^2 : 6xy^2$ se obtiene un monomio.

a) Verdadero, se ha extraído factor común.

b) Verdadero. $(ax) \cdot (byz) = (abxyz)$

c) Falso. Por ejemplo: $(x^2 + 3) + (3x - 2) = x^2 + 3x + 1$.

d) Falso. Un monomio ha de tener parte literal.

e) Falso, ya que las partes literales de ambos son distintas.

f) Verdadero. Se obtiene $\dfrac{x}{2}$.

6 Ecuaciones

Tanteos iniciales

La búsqueda de métodos para resolver ecuaciones fue un empeño de los matemáticos de la Antigüedad. Los primeros intentos, como es natural, fueron titubeantes, poco sólidos: resoluciones por tanteo o mediante procedimientos solo válidos para casos particulares, pero no generalizables.

Por ejemplo, en un papiro egipcio de 1550 a. C. aparece resuelto el siguiente problema:

El montón más un séptimo del montón es igual a 24. ¿Cuántos hay en el montón?

Papiro de Ahmes (o Rhind). Fue escrito en el siglo XVI a. C. y contiene 84 problemas matemáticos.

Se inicia el camino teórico

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto,** en el siglo III. En su libro *Aritmética* trató las resoluciones de ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Además, los problemas que propuso prepararon el terreno para consolidar la teoría de ecuaciones, que se desarrolló siglos más tarde.

En su obra aparecen problemas de este tipo:

Si al número de elefantes que beben en el río le sumo el número de colmillos y el número de patas, obtengo su cuadrado. ¿Cuántos elefantes son?

Avances significativos

En el siglo IX, en Bagdag aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi,** que dio otro importantísimo paso. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser "transposición y cancelación" y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita. El libro acabó siendo denominado, simplemente, *Al-yabr*, y este nombre finalmente designó la ciencia que contenía (al-jabr ~ álgebra).

Sello ruso en honor de Al-Jwarizmi.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Nomenclatura

Las expresiones que hay a ambos lados del signo = se llaman **miembros.** En la ecuación que ves a la derecha:

$2x^2 - \dfrac{10}{x}$ es el **primer miembro** y 3 es el **segundo miembro.**

Las ecuaciones y sus soluciones

Una **ecuación** es una igualdad en la que interviene alguna letra (**incógnita**) cuyo valor queremos conocer.

Solución de la ecuación es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Por ejemplo, $2x^2 - \dfrac{10}{x} = 3$ es una ecuación.

El valor $x = 2$ es solución, porque $2 \cdot 2^2 - \dfrac{10}{x} = 3$.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o sus soluciones) o averiguar que no tiene solución. Seguramente, conoces procedimientos para resolver metódicamente algunos tipos de ecuaciones. Pero si llegamos a la solución mediante cualquier otro camino, también es válida la resolución.

Por ejemplo, vamos a buscar, por tanteo, alguna solución de $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- ¿Será $x = 0$ solución? $0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \neq 0 \rightarrow$ NO
- ¿Y $x = 2$? $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ SÍ

Entrénate

1. Comprueba si alguno de los valores dados es solución de la ecuación correspondiente:

a) $3x + 11 = 38$; $x = 5$, $x = 9$

b) $5(x - 3) = 15$; $x = 6$, $x = -6$

c) $\sqrt{5x+1} = 6$; $x = 1$, $x = 7$

2. Halla, tanteando, alguna solución (busca números enteros) de estas ecuaciones:

a) $5(x^2 + 1) = 50$

b) $(x + 1)^2 = 9$

Ejercicio resuelto

Resolver por tanteo estas ecuaciones: a) $x^x = 3\,125$ b) $x^6 = 1\,200$

a) Tanteando con enteros, encontramos la solución $x = 5$, pues $5^5 = 3\,125$.

b) Dando valores enteros a x, observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 4^6 = 4\,096 \end{array}\right\}$ x está entre 3 y 4. Es decir, $x = 3,\ldots$ Damos a x los valores 3,1; 3,2; 3,3; ... y observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 4^6 = 4\,096 \end{array}\right\}$ $x = 3,2\ldots$ Podemos decir que, aproximando hasta las décimas, la solución es $x = 3,2$.

Piensa y practica

1. Comprueba, en cada caso, si cada uno de los dos valores es o no solución de la ecuación:

a) $x^3 - 20x = -16$; $x = 5$, $x = 4$

b) $\dfrac{12}{x} - \dfrac{x}{2} = 1$; $x = 4$, $x = 6$

c) $2^{x-1} = 512$; $x = 9$, $x = 10$

d) $x^x + 1 = 28$; $x = 3$, $x = 1$

e) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$; $x = 1$, $x = 6$

2. Tantea para hallar alguna solución de estas ecuaciones (todas ellas tienen solución entera):

a) $x^3 + x = 10$ b) $(x - 5)(x + 2) = 0$

c) $3^{x+1} = 81$ d) $x^x = 3\,125$

3. Tanteando con ayuda de la calculadora, encuentra una solución (aproximada hasta las décimas) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 1 = 100$ b) $3^x = 1\,000$ c) $\sqrt{8x - 40} = 5$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Ecuaciones de primer grado

A las ecuaciones polinómicas de primer grado se las llama, simplemente, **ecuaciones de primer grado.** En ellas, la x solo aparece elevada a 1 $(x^1 = x)$.

- Son de primer grado: $4x + 7 = 8$; $\frac{2}{3}x - 2{,}5 = 9$; $\sqrt{3}x + 17 = 4 - 2x$
- No son de primer grado: $(6x + 5)^2 = 8$; $\frac{8}{x} = 5x + 3$; $\sqrt{6x} + 1 = 5x$

Las ecuaciones de primer grado tienen una única solución, que se obtiene despejando la incógnita.

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$

Solución ≡ raíz

La solución de una ecuación también se llama **raíz.**

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución o ambas carecen de solución. Así, las ecuaciones $5x - 9 = 51$ y $3x - 7 = 89 - 5x$ son equivalentes porque la solución de ambas es $x = 12$.

TRANSFORMACIONES QUE MANTIENEN LA EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas:

TRANSFORMACIÓN	REGLA PRÁCTICA
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

Pasos

- $15x - \boxed{5} = \boxed{2x} + 4 \rightarrow$ (pasa sumando; pasa restando)

  $\rightarrow 15x - 2x = 4 + 5$
- $\boxed{3}(x + 4) = 8 \rightarrow x + 4 = \frac{8}{3}$ (pasa dividiendo)

ECUACIONES ANÓMALAS

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

  No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución.**
- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

  $0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x, pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones de primer grado.

Casos especiales

- $\mathbf{0x = b}$, con $b \neq 0$

  La ecuación **no tiene solución.**
- $\mathbf{0x = 0}$

  La ecuación **tiene infinitas soluciones.** Es una identidad.

En la web

Iniciación. Resuelve ecuaciones con denominadores muy sencillas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejemplo

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$$

$\boxed{1}$ mín.c.m. (20, 5, 15) = 60

Se multiplican por 60 los dos miembros.

$$3(3x-1)-24(x+3)=$$
$$=4(4x+2)-60\cdot 5$$

$\boxed{2}\downarrow$

$$9x-3-24x-72=16x+8-300$$

$\boxed{3}\downarrow$

$$9x-24x-16x=8-300+3+72$$

$\boxed{4}\downarrow$

$$-31x=-217$$

$\boxed{5}\downarrow$

$$x=\frac{-217}{-31}.\ \textit{Solución: } x=7$$

$\boxed{6}\downarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3\cdot 7-1}{20}-\dfrac{2(7+3)}{5}=-3\\[2mm] \dfrac{4\cdot 7+2}{15}-5=2-5=-3\end{array}\right\}$$

Coinciden. La solución es correcta.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

Seguramente aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado sencillas el curso pasado. Ahora vamos a entrenarnos para resolver ecuaciones de primer grado algo más complejas.

Con frecuencia, las ecuaciones que tendremos que resolver presentan un aspecto complicado. Por ejemplo:

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$$

Veamos qué pasos conviene dar para, poco a poco, ir despejando la x (en el margen puedes ver cómo hemos resuelto la ecuación del ejemplo siguiendo los pasos que ahora describimos):

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, su mínimo común múltiplo.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Esta secuencia no hay que tomarla como algo rígido, pues habrá ocasiones en que convenga empezar quitando paréntesis, simplificando… El entrenamiento y el sentido común te orientarán sobre cuándo conviene hacer una cosa u otra.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{15}-x=-\frac{3x}{3}+\frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{4x}{27}=\frac{11}{27}-\frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{8}+\frac{2x+2}{16}=\frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20}-\frac{5x}{2}=\frac{10+x}{5}+\frac{1-12x}{10}$

e) $3x-\frac{x+3}{4}=13$

f) $4-\frac{x+2}{4}=x-4$

g) $\frac{x}{2}-\frac{2(x+2)}{7}=\frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25}-\frac{x}{6}+\frac{x+7}{9}=\frac{2}{5}-\frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5}=\frac{2x+4}{25}+\frac{x^2}{5}+\frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8}+\frac{9-x}{12}-\frac{2x-7}{24}+5=x-8$

k) $x+\frac{9(5+x)}{5}=9-x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4}=\frac{3(4x^2+1)}{12}-x$

m) $(x-3)(x+3)=\frac{3(x-1)}{2}+x^2$

n) $\frac{x-7}{4}+\frac{25(x-2)}{3}=\frac{5x+35}{4}+\frac{5}{2}(x-7)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ecuaciones de segundo grado

En la web

- Ayuda al razonamiento. Obtención de la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado.
- Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$

Para despejar la x, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

Soluciones de una ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

Ejemplo

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

es una ecuación de segundo grado donde:

$$a = 3, \; b = -5, \; c = -2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$$

Por eso, esta ecuación tiene dos soluciones.

Número de soluciones

La expresión que está dentro de la raíz en las soluciones de una ecuación de segundo grado, $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay una solución: $x = \frac{-b}{2a}$. Se dice que es una **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Ejercicio resuelto

Resolver estas ecuaciones:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $3x^2 + 2x + 7 = 0$

a) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = -\dfrac{1}{2}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6}$ No tiene solución.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0,1x + 0,2 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Clasificación de ecuaciones de segundo grado.

Ten en cuenta

- Si $x^2 = 25$, entonces $x = \pm 5$, pues 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y -5.
- Para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea 0 alguno de ellos:

$$x \cdot (7x + 11) = 0$$

$x = 0$ o bien $7x + 11 = 0$

En la web

- Practica las ecuaciones incompletas con $b = 0$.
- Practica las ecuaciones incompletas con $c = 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes b o c son cero se llaman **incompletas:** $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Aunque pueden resolverse aplicando la fórmula general, es posible encontrar sus soluciones de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 75 = 0 \;\to\; x^2 = \dfrac{75}{3} = 25 \;\to\; x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- $7x^2 + 11x = 0 \;\to\; x(7x + 11) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 11 = 0 \;\to\; x = -\dfrac{11}{7} \end{cases}$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar x con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \;\to\; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar la x como factor común e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \;\to\; \text{Soluciones: } x_1 = 0,\; x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejercicio resuelto

Resolver:

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $2x^2 + 98 = 0$

c) $5x^2 + 95x = 0$

a) $2x^2 - 98 = 0 \;\to\; 2x^2 = 98 \;\to\; x^2 = \dfrac{98}{2} = 49 \;\to\; x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Las soluciones son $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

b) $2x^2 + 98 = 0 \;\to\; 2x^2 = -98 \;\to\; x^2 = -\dfrac{98}{2} = -49$

No tiene solución, porque el cuadrado de un número no puede ser negativo.

Es decir, $\sqrt{-49}$ no tiene sentido.

c) $5x^2 + 95x = 0 \;\to\; x(5x + 95) = 0 \;\to\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 95 = 0 \;\to\; x_2 = -\dfrac{95}{5} = -19 \end{cases}$

Piensa y practica

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $7x^2 - 28 = 0$
b) $7x^2 + 28 = 0$
c) $4x^2 - 9 = 0$
d) $3x^2 + 42x = 0$
e) $3x^2 = 42x$
f) $11x^2 - 37x = 0$
g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$
h) $7x^2 + 5 = 68$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Ten en cuenta

- $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0) \rightarrow$ Aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\boldsymbol{ax^2 + c = 0} \rightarrow$ Despeja x^2…
- $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0} \rightarrow$ Saca la x como factor común…

Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real, como veremos en la página 112.

  Si la ecuación de partida tiene la x en el denominador cuida no dar como solución ningún valor que anule a algún denominador. Si se diera este caso, hay que rechazar esa solución.

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver la siguiente ecuación:***

$$\boldsymbol{(2x-1)(3x-2) + (2x-3)^2 = 3(4x-4) - (x-2)^2 + 3}$$

$(2x-1)(3x-2) + (2x-3)^2 = 3(4x-4) - (x-2)^2 + 3$

- Desarrollamos los cuadrados y realizamos los productos:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x - 12 - (x^2 - 4x + 4) + 3$$

- Quitamos paréntesis:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x - 12 - x^2 + 4x - 4 + 3$$

- Agrupamos los términos pasándolos todos previamente al primer miembro de la ecuación:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 - 12x + 12 + x^2 - 4x + 4 - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 6x^2 + 4x^2 + x^2 - 4x - 3x - 12x - 12x - 4x + 2 + 9 + 12 + 4 - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 11x^2 - 35x + 24 = 0$$

- Aplicamos la fórmula teniendo en cuenta que $a = 11,\ b = -35,\ c = 24$:

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 24}}{2 \cdot 11} = \frac{35 \pm \sqrt{169}}{22} = \frac{35 \pm 13}{22} \begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{11} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

- Comprobamos que tanto para $x = \dfrac{24}{11}$ como para $x = 1$, el valor que toma el primer miembro de la ecuación inicial coincide con el valor que toma el segundo miembro.

Piensa y practica

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 2(x+5) = (x+3)^2 - 19$

b) $(3x+4)(5x-7) = (2x+7)^2 + 53$

c) $(2x+4)(x-1) + (3x+5)^2 = 3(2x+5)^2 + x$

d) $(x-2)(4x+2) + (3-3x)^2 = 4(5x+1)^2 - (x-1)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Resolución de problemas con ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

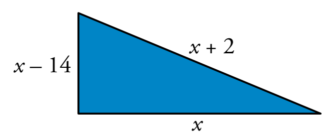
Observación

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que así se simplifica la tarea de traducir un enunciado a ecuaciones.

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Problemas resueltos

1. ***En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcular la longitud de los tres lados.***



Para relacionar las tres longitudes, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(x-14)^2 + x^2 = (x+2)^2$$

Desarrollamos: $x^2 - 28x + 196 + x^2 = x^2 + 4x + 4$

Simplificamos: $x^2 - 32x + 192 = 0$

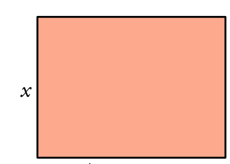
Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 192}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{32 \pm 16}{2} \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

- $x_1 = 24$. *Solución:* los lados miden 10 cm, 24 cm y 26 cm.
- $x_2 = 8$. *No es solución* válida, porque uno de los lados tendría una medida negativa.

2. ***Con 14 m de listones puedo colocar el rodapié a lo largo de toda una habitación rectangular. ¿Qué dimensiones tiene la habitación sabiendo que su superficie es de 12 m²?***

Tenemos una habitación rectangular cuyo perímetro es de 14 m. Sus dimensiones serán, por tanto, las que se indican en la figura:



$\frac{14-2x}{2} = 7 - x$

La habitación tiene una superficie de 12 m², por tanto:

$$x \cdot (7-x) = 12 \rightarrow 7x - x^2 = 12 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

- $x_1 = 4$. *Solución:* los lados miden 4 m y 3 m.
- $x_2 = 3$. *Solución:* los lados miden 3 m y 4 m; es decir, es la misma solución.

Piensa y practica

1. La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm². Calcula las dimensiones de este rectángulo.

2. Al aumentar 10 m de radio, una finca circular aumenta unos 3 456 m² de superficie. ¿Qué diámetro tiene la finca ampliada?

En la web Refuerza la resolución de problemas mediante ecuaciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2$

b) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2}$

d) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}$

e) $\frac{2x-4}{3} = 3 - \frac{4+x}{2}$

3. Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24} = \frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60}$

d) $2x - \frac{1}{2}(1 + 3x) - \frac{3}{5}(x - 2) = \frac{1}{4}(3 - x)$

4. Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución y otras tienen infinitas soluciones. Resuélvelas y comprueba los resultados.

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2)$

b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x)$

c) $\frac{3x+1}{2} = 2x - \frac{1-x}{2}$

d) $x + \frac{2x-7}{4} = 2x + \frac{x-1}{2}$

5. Solo una de las siguientes ecuaciones tiene solución única. Resuélvelas y compruébalo.

a) $\frac{x+1}{2} = 2 + \frac{2x-3}{4}$

b) $\frac{4x-3}{12} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{6}$

c) $\frac{1+x}{3} - \frac{x+3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4+x}{2}$

d) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

6. Resuelve.

a) $\frac{2}{3}(x - 3) + \frac{1}{5}(x - 5) = \frac{3}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{4x}{15}$

b) $2x - \frac{1}{2}(1 + 3x) = \frac{3}{5}(x - 2) + \frac{1}{4}(3 - x)$

c) $\frac{4}{3}(2 - x) - \frac{3}{4}(2x - 1) = 4x - 7\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}$

d) $x(8x - 1) - (3x - 4)^2 = x(7 - x) - 2(x - 4)$

7. Resuelve.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8$

b) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \frac{(3x-1)^2 - 9}{2}$

b) $\frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x+4}{12} = 0$

c) $\frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \frac{x-3}{3}$

d) $\frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} = 0$

e) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{3} + \frac{4-x^2}{2x}$

d) $\frac{15}{x} = \frac{72-6x}{2x^2} + 2$

Aplica lo aprendido

11. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quíntuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?

12. Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los 9/5 de ese número.

13. Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117.

Cualquier número impar se puede escribir de la forma $2x + 1$.

14. He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

15. Calcula la altura de un árbol que es un metro más corto que un poste que mide el doble que el árbol.

16. El precio de unos zapatos ha subido un 15 % en diciembre y ha bajado un 20 % en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

17. Con 3,50 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?

18. Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos 130. ¿Cuál es el número?

19. Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

20. Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31 obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?

Autoevaluación

1. Resuelve.

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{3(x+1)}{10} = \frac{3-x}{4} - \frac{9}{10}$

b) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$

c) $\frac{x}{2} + 1 - \frac{3+x}{3} = \frac{x}{6}$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{5}{2}x^2 - 2x = 0$

b) $4x^2 + 25 = 0$

c) $(x+3)(x-3) - 25x = 9x - 298$

c) $\frac{(x-2)(x-3)}{6} - \frac{(x-1)^2}{4} = 2 - x$

3. Mezclamos 6 kg de harina de 1,30 €/kg con otra de 0,70 €/kg para obtener una mezcla de 1,10 €/kg.

¿Qué cantidad tenemos que poner del segundo tipo de harina?

4. Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m.

¿Cuánto medirán el otro cateto y la hipotenusa?

5. Para embaldosar un salón de 48 m^2 de área se han utilizado 375 baldosas rectangulares en las que un lado mide 8 cm menos que el otro.

Halla las dimensiones de las baldosas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Sistemas de ecuaciones

Relieve encontrado en Nimrud (Irak).

Sistemas de ecuaciones en la antigua Mesopotamia

Toros alados androcéfalos del palacio de Jorsabad (Irak).

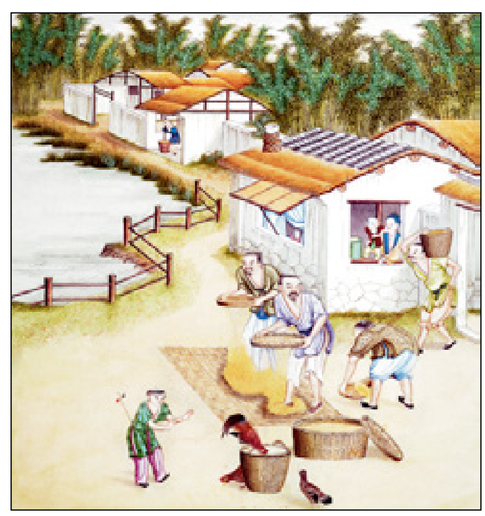
El desarrollo de la resolución de sistemas de ecuaciones se hizo a la par que el de las ecuaciones.

Los babilonios plantearon y resolvieron, entre otras cosas, sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. A estas las llamaban longitud, anchura, área, volumen..., aunque el problema no tuviera nada que ver con cuestiones geométricas.

Avances en China

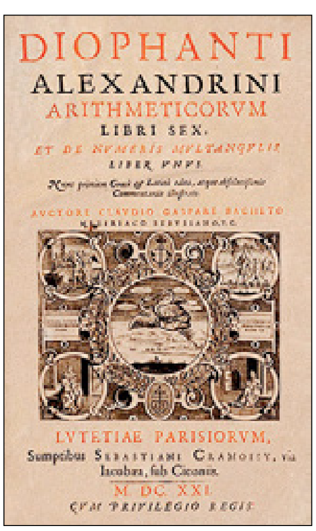
En el siglo I a. C. apareció en China el *Libro de los nueve capítulos*, en el que se incluyen 246 problemas de la vida cotidiana sobre agrimensura, ingeniería, repartos, fiscalidad, etc.

En el capítulo octavo se proponen problemas que dan lugar a sistemas de hasta cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Y se resuelven mediante métodos muy avanzados.



Campesinos chinos tamizando arroz.

También los griegos...



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus Sebastiani Cramoisy, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Portada del libro sexto de la "Aritmética" de Diofanto, en una edición de 1621.

Cuatro siglos más tarde, en Alejandría, **Diofanto** planteó problemas algebraicos que respondían a sistemas de ecuaciones. Pero él los resolvía designando una incógnita, hábilmente escogida, de modo que le permitía entrar, directamente, en una única ecuación.

Diofanto proponía problemas como este:

"Obtener dos números que suman 20 y cuyos cuadrados suman 208".

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones con dos incógnitas

Incógnitas

A las incógnitas se las suele designar con las letras x e y. Sin embargo, pueden usarse otras letras. Por ejemplo, si una corresponde al tiempo y otra a la velocidad, podemos designarlas mediante t y v, respectivamente.

En esta unidad vamos a tratar con ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Las **ecuaciones lineales** son polinómicas de primer grado: $ax + by = c$.

Por ejemplo, $2x + y = 7$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

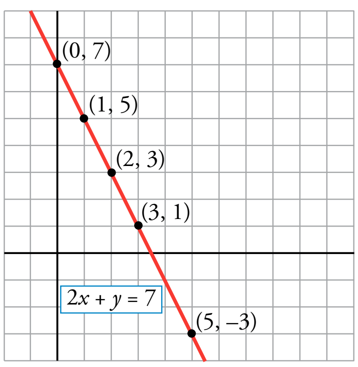
El par de valores $x = 3$, $y = 1$ es una solución de la ecuación anterior porque $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$.

También son soluciones de dicha ecuación $x = 1$, $y = 5$; $x = 3{,}5$, $y = 0$.

Solución de una ecuación con dos incógnitas es cualquier par de valores que hagan cierta la igualdad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Representación gráfica



Para obtener soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra. Por ejemplo, para obtener soluciones de $2x + y = 7$, podemos despejar y:

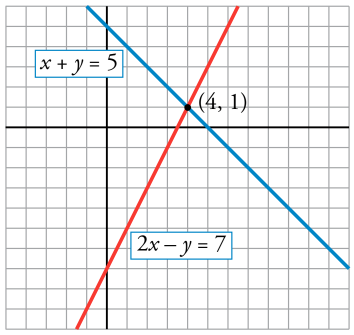
$$2x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 2x$$

Dando valores a x, obtenemos los de y sustituyendo en la última expresión. Así, podemos averiguar todas las soluciones que queramos:

x	0	1	2	5	…
y	$7 - 2 \cdot 0 = 7$	$7 - 2 \cdot 1 = 5$	3	–3	…

Si las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas se interpretan como puntos del plano, entonces la ecuación se representa mediante una **recta** y sus soluciones son los puntos de esta. Este es el motivo por el que una solución $x = a$, $y = b$ se designa, también, así: (a, b).

Ejercicio resuelto



Representar las rectas de ecuaciones $x + y = 5$; $2x - y = 7$.

$x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	5	4	3	2	1	0

$2x - y = 7 \rightarrow y = 2x - 7$

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–9	–7	–5	–3	–1	1	3

Observa que ambas ecuaciones tienen una solución común: $x = 4$, $y = 1$. Es el punto en que se cortan las dos rectas.

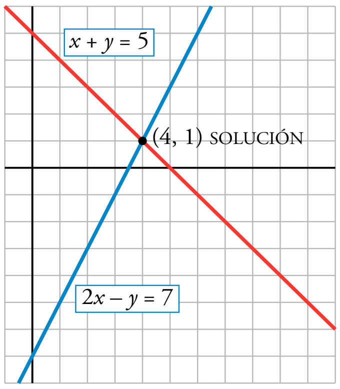
Piensa y practica

1. Representa las rectas correspondientes a estas ecuaciones: a) $2x - y = 3$ b) $-x + y = 1$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Sistemas de ecuaciones



La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el punto donde se cortan las dos rectas.

Dos ecuaciones forman un **sistema** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Cuando dos ecuaciones forman un sistema, las ponemos de esta forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Solución de un sistema de ecuaciones es la solución común a ambas.

Si las dos ecuaciones del ejercicio resuelto de la página anterior las tomamos como sistema de ecuaciones, las pondremos del siguiente modo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 4$, $y = 1$, porque es solución de ambas ecuaciones.

A veces, en lugar de decir **sistema de ecuaciones** diremos, simplemente, **sistema.**

Si ambas ecuaciones del sistema son lineales, lo llamaremos **sistema lineal.**

Ocasionalmente, nos encontraremos con sistemas formados por más de dos ecuaciones.

Problema resuelto

Tenemos 53 céntimos de euro repartidos en 16 monedas, unas de dos céntimos y otras de cinco céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase tenemos?

Elección de incógnitas: $\begin{cases} x: \text{número de monedas de dos céntimos} \\ y: \text{número de monedas de cinco céntimos} \end{cases}$

Relaciones entre las incógnitas:

En total tengo 16 monedas $\longrightarrow$ $x + y = 16$

El valor total es 53 céntimos de euro.
Valor de las monedas de dos céntimos: $2x$
Valor de las monedas de cinco céntimos: $5y$
$\longrightarrow$ $2x + 5y = 53$

Las dos ecuaciones forman un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 5y = 53 \end{cases}$

En las próximas páginas aprenderemos a resolver algebraicamente sistemas lineales. Ahora podemos hacerlo por tanteo. La solución $x = 9$, $y = 7$ significa que tenemos 9 monedas de dos céntimos y 7 monedas de cinco céntimos. Compruébalo.

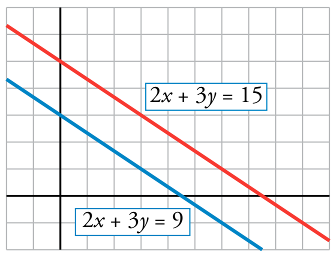
Piensa y practica

1. Tenemos 76 céntimos de euro en veinte monedas de dos y de cinco céntimos.
¿Cuántas monedas de cada clase tenemos?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Número de soluciones de un sistema lineal

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución. Es el punto donde se cortan las dos rectas, como ya hemos visto. Sin embargo, no siempre ocurre así. Veamos, a continuación, los demás casos que pueden darse:



Sistema incompatible. Gráficamente, son dos rectas paralelas. No tienen ningún punto común.

Sistemas sin solución

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 4x+6y=18 \end{cases}$

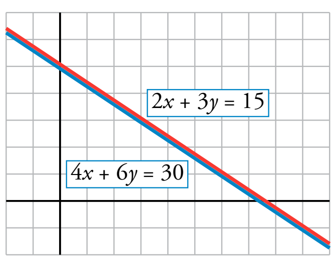
En ambos casos es imposible conseguir que las dos igualdades sean ciertas para los mismos valores de x y de y:

En a), si $2x + 3y$ es igual a 15, no puede ser, a la vez, igual a 9.

En b), como $4x + 6y$ es el doble de $2x + 3y$, debería ser igual a 30 y no a 18.

Se dice que estos sistemas son *incompatibles*.

Los sistemas que no tienen solución se llaman **incompatibles.** Gráficamente, son dos rectas paralelas: no tienen ningún punto en común.



Sistema indeterminado. Gráficamente, es dos veces la misma recta. Todos sus puntos coinciden.

Sistemas con infinitas soluciones

Hay sistemas cuyas dos ecuaciones dicen lo mismo. Es decir, son dos veces la misma ecuación. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 2x+3y=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 4x+6y=30 \end{cases}$

Las soluciones del sistema son las de cualquiera de las dos ecuaciones. Como sabemos, una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Estos sistemas se llaman *indeterminados.*

Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman **indeterminados.** Gráficamente, son dos rectas coincidentes: todos sus puntos son comunes.

Piensa y practica

1. Fijándote bien en las ecuaciones que los forman, di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ -2x+5y=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

2. Completa los siguientes sistemas para que el primero tenga la solución $x = 5$, $y = 3$, el segundo sea incompatible, el tercero sea indeterminado y el cuarto, también:

a) $\begin{cases} x-4y=\dots \\ 2x \quad \dots=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x+2y=\dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x \quad \dots=\dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+11y=\dots \\ \dots+33y=9 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Método de sustitución

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y **sustituir** en la otra.

En la práctica, al aplicar este método solo se escribe en cada paso la ecuación que se transforma, en lugar de escribir el sistema completo cada vez.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

$\boxed{1}$ Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

$\boxed{2}$ Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

$\boxed{3}$ Se resuelve esta ecuación.

$\boxed{4}$ El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

$\boxed{5}$ Se ha obtenido, así, la solución.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$\boxed{1}\downarrow$

$$\boxed{x = 2y - 1}$$

$\boxed{2}\downarrow$

$$2(2y - 1) + 3y = 19$$

$\boxed{3}\downarrow$

$$4y - 2 + 3y = 19 \to \boxed{y = 3}$$

$\boxed{4}\downarrow$

$$x = 2 \cdot 3 - 1 \to \boxed{x = 5}$$

$\boxed{5}\downarrow$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

En la web Repasa la resolución de sistemas por el método de sustitución.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de sustitución este sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 5y = 1} \\ \boldsymbol{x + 6y = -4} \end{cases}$

$\boxed{1}$ Despejamos la x en la 2.ª ecuación: $x = -4 - 6y$

$\boxed{2}$ Sustituimos esta expresión de la x en la 1.ª: $3(-4 - 6y) + 5y = 1$

$\boxed{3}$ Resolvemos la ecuación resultante:

Quitamos paréntesis: $-12 - 18y + 5y = 1$

Simplificamos: $-18y + 5y = 1 + 12 \to -13y = 13$

Despejamos la incógnita: $y = \frac{13}{-13} = -1 \to y = -1$

$\boxed{4}$ Sustituimos el valor de y en $x = -4 - 6y$:

$$x = -4 - 6 \cdot (-1) = -4 + 6 = 2 \to x = 2$$

$\boxed{5}$ Se ha obtenido la solución: $x = 2,\ y = -1$

Comprobación: $\left.\begin{array}{ll} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1 & \text{CORRECTO} \\ 2 + 6 \cdot (-1) = -4 & \text{CORRECTO} \end{array}\right\}$ La solución es válida.

En la web Refuerza el método de sustitución.

Piensa y practica

1. Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + \ 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + \ \ y = 23 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

En la web Practica el método de sustitución.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e **igualar** las expresiones resultantes.

Describimos a continuación los pasos que conviene seguir para aplicar este método:

$\boxed{1}$ Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

$\boxed{2}$ Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.

$\boxed{3}$ Se resuelve esta ecuación.

$\boxed{4}$ El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

$\boxed{5}$ Se ha obtenido, así, la solución.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$\boxed{1}\downarrow$

$$\begin{cases} x = \dfrac{19 - 3y}{2} \\ x = -1 + 2y \end{cases}$$

$\boxed{2}\downarrow$

$$\frac{19 - 3y}{2} = -1 + 2y$$

$\boxed{3}\downarrow$

$$19 - 3y = 2(-1 + 2y) \rightarrow \boxed{y = 3}$$

$\boxed{4}\downarrow$

$$x = -1 + 2 \cdot 3 \rightarrow \boxed{x = 5}$$

$\boxed{5}\downarrow$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

En la web

Repasa la resolución de sistemas por el método de igualación.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de igualación este sistema: $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 6y = -4 \end{cases}$

$\boxed{1}$ Despejamos la x en cada una de las ecuaciones:

$$x = \frac{1 - 5y}{3}; \quad x = -4 - 6y$$

$\boxed{2}$ Igualamos ambas expresiones: $\dfrac{1 - 5y}{3} = -4 - 6y$

$\boxed{3}$ Resolvemos la ecuación resultante:

Quitamos denominadores: $1 - 5y = 3(-4 - 6y)$

Simplificamos:

$$1 - 5y = -12 - 18y \rightarrow -5y + 18y = -12 - 1 \rightarrow 13y = -13$$

Despejamos la incógnita: $y = \dfrac{-13}{13} = -1 \rightarrow y = -1$

$\boxed{4}$ Sustituimos el valor de y en cualquiera de las expresiones del primer paso:

$$x = -4 - 6 \cdot (-1) = -4 + 6 = 2 \rightarrow x = 2$$

$\boxed{5}$ Hemos obtenido la solución: $x = 2,\ y = -1$

La comprobación se haría como en la página anterior.

Piensa y practica

En la web Refuerza el método de igualación.

1. Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Método de reducción

Ten en cuenta

Hemos multiplicado:

- La 1.ª ecuación por el coeficiente de la x en la 2.ª.
- La 2.ª ecuación por el coeficiente de la x en la 1.ª, cambiado de signo.

De ese modo, se obtienen dos ecuaciones con el mismo coeficiente de la x, pero con distinto signo. Al sumarlas, desaparece esta incógnita.

Observa atentamente cómo resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \xrightarrow{\text{multiplicamos los dos miembros por } 4} & 12x + 8y = 28 \\ 4x - 3y = 15 \xrightarrow{\text{multiplicamos los dos miembros por } -3} & -12x + 9y = -45 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones $\longrightarrow$ $17y = -17$

La incógnita y la tenemos despejada $\longrightarrow$ $y = -1$

Sustituimos el valor de y en una de las ecuaciones iniciales y resolvemos:

$$3x + 2 \cdot (-1) = 7 \;\rightarrow\; 3x = 7 + 2 \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; \textit{Solución: } x = 3,\; y = -1$$

Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene otra con solo una incógnita (se ha **reducido** el número de incógnitas). En resumen:

1. Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).
2. Al sumarlas, desaparece una de las incógnitas.
3. Se resuelve la ecuación resultante.
4. El valor obtenido se sustituye en una cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Se tiene, así, la solución.

No lo olvides

Este método es especialmente cómodo cuando:

- Una de las incógnitas tiene coeficientes iguales.
- Los coeficientes de una de las incógnitas son uno múltiplo de otro.

Ejercicio resuelto

Resolver por reducción: ***a)*** $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 5y = 38 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$

a) Sumando ambas ecuaciones desaparece la y:

$$7x = 49 \;\rightarrow\; x = 7; \quad 3 \cdot 7 + 5y = 11 \;\rightarrow\; y = -2$$

Solución: $x = 7,\; y = -2$

b) Multiplicando la segunda por -2, obtenemos el mismo coeficiente en la y, pero con distinto signo:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ -10x - 4y = -30 \end{cases}$$

Sumando: $-7x = -21 \;\rightarrow\; x = 3$

Sustituyendo: $3 \cdot 3 + 4y = 9 \;\rightarrow\; y = 0$

Solución: $x = 3,\; y = 0$

En la web Practica el método de reducción.

Piensa y practica

1. Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$

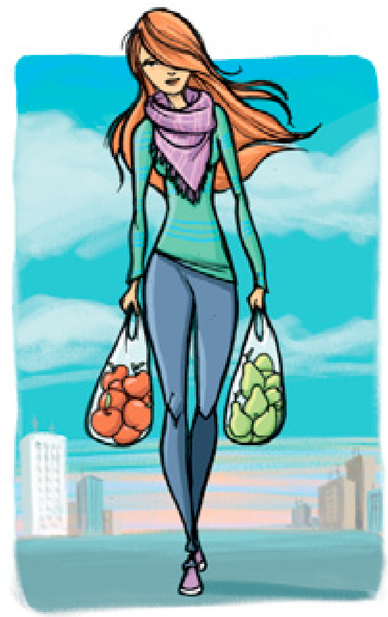
En la web Refuerza el método de reducción.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Traducción de enunciados a sistemas de ecuaciones

Suele ser más sencillo plantear un problema algebraico complejo mediante un sistema de ecuaciones que mediante una única ecuación con una incógnita. Veamos los pasos que conviene dar:

1. Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.
2. Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.
3. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.



Problema resuelto

Dos kilos de peras y tres de manzanas cuestan 7,80 €. Cinco kilos de peras y cuatro de manzanas cuestan 13,20 €. ¿A cómo está el kilo de peras? ¿Y el de manzanas?

1. Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.

   Precio de las peras $\to$ x euros/kilo

   Precio de las manzanas $\to$ y euros/kilo

2. Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.

   2 kg de peras y 3 kg de manzanas cuestan 7,80 € $\to$ $2x + 3y = 7{,}80$

   5 kg de peras y 4 kg de manzanas cuestan 13,20 € $\to$ $5x + 4y = 13{,}20$

3. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

   Aplicamos el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7{,}80 \\ 5x+4y=13{,}20 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{por } 5} \\ \xrightarrow{\text{por } -2} \end{array} \begin{array}{r} 10x+15y=\ \ 39{,}00 \\ -10x-\ \ 8y=-26{,}40 \\ \hline 7y=\ \ 12{,}60 \end{array} \to y = 1{,}80$$

$$2x + 3 \cdot 1{,}80 = 7{,}80 \to 2x = 2{,}40 \to x = 1{,}20$$

4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

   Un kilo de peras cuesta 1,20 €, y uno de manzanas, 1,80 €.

Compruébalo

$2 \cdot 1{,}20 + 3 \cdot 1{,}80 = 7{,}80$

$5 \cdot 1{,}20 + 4 \cdot 1{,}80 = 13{,}20$

En la web Refuerza la traducción de enunciados.

Piensa y practica

1. Por dos cafés y un cruasán hemos pagado 4,30 €. En la mesa de al lado había un grupo de amigos que han pagado 11,60 € por cinco cafés y tres cruasanes. ¿Cuánto cuesta cada café y cada cruasán?

2. Calcula dos números cuya suma sea 191, y su diferencia, 67.

3. Una empresa aceitera ha envasado 3 000 litros de aceite en 1 200 botellas de dos y de cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

4. En un test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido 10,5, ¿cuántos aciertos y cuántos errores he cometido?

5. Para pagar un artículo que costaba 3 €, he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?

Ver el ejercicio resuelto de la página 100.

En la web Resuelve los problemas: "Las latas", "Las mezclas".

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

1. Completa los siguientes sistemas de ecuaciones para que ambos tengan la solución $x = 2,\ y = -1$:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = \dots \\ 3x - 4y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = \dots \\ -2x - 5y = \dots \end{cases}$

2. Comprueba si $x = -2,\ y = 1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

3. a) Busca dos soluciones de la siguiente ecuación: $2x + y = 4$.

b) Representa gráficamente la recta $2x + y = 4$.

c) ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación?

4. Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 5 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ 6x + \ \ y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 8 = y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3y + 1 = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x = 4y - 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

5. Resuelve por igualación.

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x = 4y - 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - \ \ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4 + 3y = x \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

6. Resuelve por reducción.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 10x + 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$

7. Resuelve estos sistemas por el método que consideres más adecuado e interpreta gráficamente la solución (no es necesario que representes las rectas):

a) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x + \ \ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3 + 2y = 10x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x = 2y \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 6y = 4x + 16 \end{cases}$

8. Resuelve por el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 3y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + \ \ y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1{,}2x + 0{,}7y = 13 \\ x - 0{,}5y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = 1 \\ 2(x + y) - 15 = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3(x - 1) + y = 8 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y = 8 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Aplica lo aprendido

9. En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,50 € y bocadillos de tortilla a 2 €. En una mañana vendieron 52 bocadillos y la recaudación final fue de 149 €.

¿Cuántos se vendieron de cada clase?

10. Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,30 € por cada pieza que sale del taller para la venta, pero sufre una pérdida de 0,40 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En una jornada ha fabricado 2 100 bombillas, obteniendo unos beneficios de 484,40 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se han fabricado en ese día?

11. Una cooperativa ha envasado 2 000 *l* de aceite en botellas de 1,5 *l* y de 2 *l*. Sabemos que han utilizado 1 100 botellas en total. ¿Cuántas se han necesitado de cada clase?

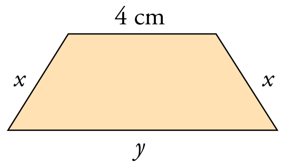
12. Una botella llena de leche pesa 1 220 g. Cuando está por la mitad, pesa 854 g. ¿Cuánto pesa la botella vacía?

13. Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, 8/3.

14. La diferencia entre los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 65°. Halla sus medidas.

Recuerda cuál es la suma de los ángulos del triángulo.

15. El perímetro de este trapecio es de 24 cm. La base mayor mide lo mismo que la suma de los dos lados iguales. Halla las longitudes de todos los lados del trapecio.



16. Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se restan 0,5 puntos.

Si mi nota ha sido 24,5, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?

17. Sabemos que dos números suman 34. Si al mayor lo dividimos entre 3 y al menor entre 4, los resultados obtenidos se diferencian en 2 unidades.

Halla dichos números.

Autoevaluación

1. Di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál es indeterminado:

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1,5x + 0,25y = -2 \\ 2x - 0,5y = -6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

3. Un agricultor comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Traspasa 18 litros del segundo al primero y así este se queda con el doble que el segundo.

Calcula la cantidad de agua que tenía cada depósito.

4. Ana sale a caminar y lo hace a 4 km/h. Un cuarto de hora más tarde sale su hijo a correr por el mismo sendero y lo hace a 7 km/h.

¿Cuánto tardará en alcanzarla?

5. La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio isósceles es de 4 cm; su altura mide 9 cm y su área es de 72 cm^2.

Calcula la medida de las bases.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

8 Funciones y gráficas

Observación de los fenómenos físicos

Sin duda, el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos. En la Antigüedad, la explicación de estos era fruto de la observación y la especulación. Esta actitud se mantuvo durante muchos siglos.

Galileo Galilei (1564-1642).

Llega la medición y la cuantificación

No fue hasta finales del siglo XVI cuando el italiano **Galileo** dio un paso más: consideró imprescindible medir, valorar cuantitativamente causas y efectos, y buscar alguna relación matemática que describiera con sencillez un fenómeno.

Galileo enseñando el uso del telescopio al Dux de Venecia en 1609.

Aunque Galileo no fue el primero en manifestar esta actitud experimental hacia la ciencia (entre otros, **Arquímedes** ya lo hizo dieciocho siglos antes), sí la desarrolló de manera más sistemática y, además, lo supo exponer y transmitir con gran elocuencia.

Aparición de las funciones

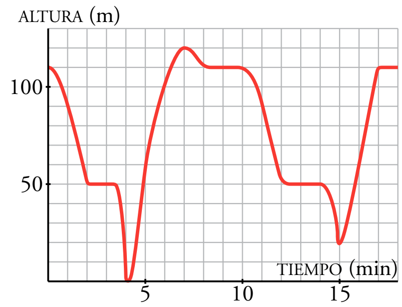
Las investigaciones de Galileo sobre las relaciones matemáticas entre dos variables (x e y, causas y efectos) son un antecedente muy claro del concepto de función que, como objeto de estudio independiente, va tomando forma a lo largo del siglo XVII (**Descartes, Newton** y **Leibniz**) y finalmente queda definido por **Euler** ya en el XVIII.

Sello suizo en honor de Leonhard Euler (1707-1783).

Isaac Newton (1643-1727).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Las funciones y sus gráficas



Un equipo de naturalistas observa un águila: sale de su nido, caza un conejo, regresa a su nido, vuelve a salir, caza una paloma y, de nuevo, vuelve a su nido.

Observando atentamente la gráfica que han dibujado, se pueden averiguar muchas cosas: altura del nido, altura a la que suele otear para buscar caza, momento en que consigue dar caza a cada una de sus presas…

DOS VARIABLES, DOS EJES

La gráfica que describe el vuelo del águila relaciona dos variables:

- El tiempo que ha transcurrido desde que comenzó la observación, t. Es la **variable independiente.**
- La altura a la que se encuentra el águila, a. Es la **variable dependiente.**

La representación se ha hecho en un diagrama cartesiano:

- En el **eje horizontal** o **eje de abscisas,** el tiempo, t.
- En el **eje vertical** o **eje de ordenadas,** la altura, a.

Cada punto de la gráfica representa un *tiempo* y una *altura*, y significa que en ese instante el águila está a esa altura.

Analizando la gráfica apreciamos las subidas y bajadas del águila en su vuelo, y podríamos describirlas con cierto detalle.

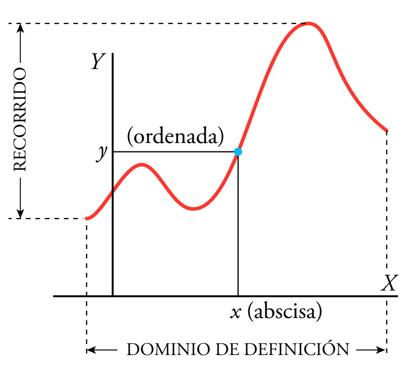
ESCALAS

En cada eje hay una **escala:**

- En el eje horizontal, un cuadrito significa 1 minuto.
- En el eje vertical, un cuadrito significa 10 metros.

Las escalas en los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el comportamiento, sino también cuantificarlo. Por ejemplo: la altura máxima alcanzada durante la observación es de 120 m y eso ocurre a los 7 minutos.

DOMINIO DE DEFINICIÓN Y RECORRIDO



La gráfica del vuelo del águila se extiende en el tramo 0-18. Solo tenemos información del comportamiento del águila en este intervalo de tiempo.

El intervalo 0-18 se llama **dominio de definición** de la función.

La altura a la que se encuentra el águila oscila entre 0 m y 120 m.

Al tramo 0-120 se le llama **recorrido** de la función.

FUNCIÓN

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Observa la gráfica de la página anterior. Responde:

a) ¿A qué altura se encuentra el nido?

b) ¿A qué altura estaba el águila a los cinco minutos de empezar la observación?

c) ¿Desde qué altura otea para buscar caza?

d) ¿En qué instante caza al conejo?

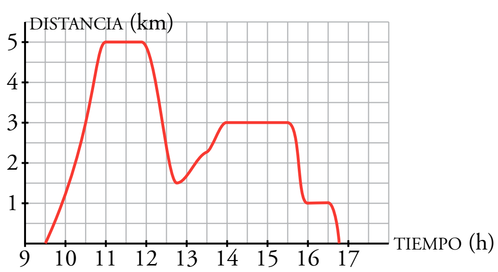
e) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y sus polluelos después de cazar al conejo?

f) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?

g) Desde que caza a la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Halla la velocidad de subida en metros por minuto.

2. En unos ejes cartesianos, describe 10 minutos de un posible vuelo de una cigüeña, desde que sale de su nido en el campanario de una iglesia hasta que vuelve a él, después de haber cazado una rana.

3. Matilde sale de casa y visita al dentista. A continuación recoge un vestido en casa de la modista y come con una amiga en un restaurante. Por último, hace la compra en un supermercado situado camino de casa.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿En qué tramo o tramos está definida la función?

d) ¿Qué representa cada cuadrito del eje de abscisas?

e) ¿Qué representa cada cuadradito del eje de ordenadas?

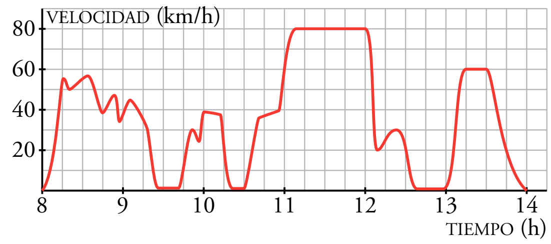
f) ¿A qué distancia de la casa de Matilde está la consulta del dentista?

g) ¿A qué hora llegó Matilde al restaurante?

h) ¿Cuánto duró la comida?

i) ¿Qué le queda a Matilde más lejos de casa, la modista o el supermercado?

4. En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Qué se ha representado en el eje de abscisas?

b) ¿Qué se ha representado en el eje de ordenadas?

c) ¿Qué intervalo es el dominio de definición?

d) ¿Cuál es la variable independiente?

e) ¿Cuál es la variable dependiente?

f) ¿Cuántas paradas ha hecho antes de comer?

g) ¿A qué hora efectuó la primera parada?

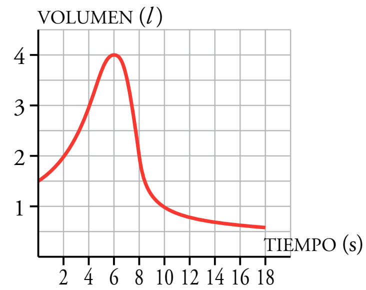
h) ¿Cuánto duró la primera parada?

i) ¿A qué hora entró en la autovía?

j) ¿A qué velocidad circuló por la autovía?

5. Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.

Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

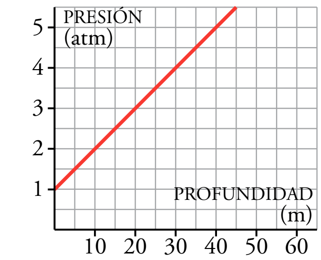
c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina la prueba?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Crecimiento y decrecimiento de una función

- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).

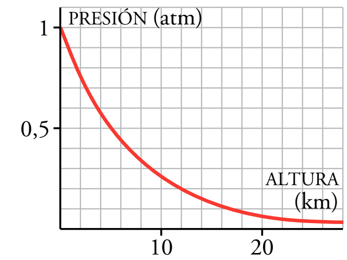
  

  Esta gráfica corresponde a la función:

  profundidad dentro del agua → *presión*

  Esta función es *creciente*, pues a más profundidad, más presión.

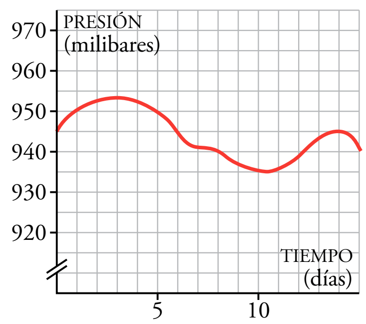
- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.

  Esta gráfica corresponde a la función:

  altura sobre el nivel del mar → *presión*

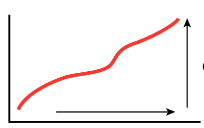
  Es una función *decreciente*, pues a más altura, menos presión.



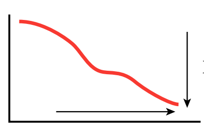
- La variación de la presión atmosférica en un lugar es un indicio importante de cambios en el tiempo meteorológico. La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

  instante de tiempo → *presión*

  Presenta tramos en los que es *creciente* y tramos en los que es *decreciente*.



CRECIENTE



DECRECIENTE

Para estudiar las variaciones de una función hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha, es decir, hemos de ver cómo varía y cuando x aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y.

Una misma función puede tener **tramos crecientes** y tramos **decrecientes.**

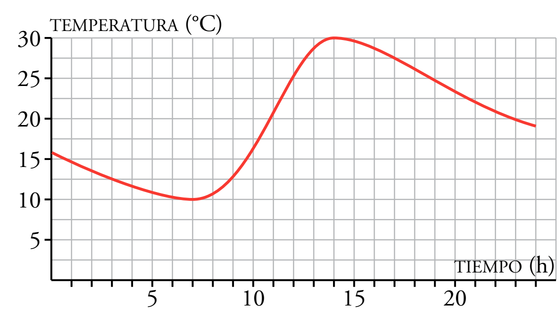
Piensa y practica

1. La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



En la web Refuerza: crecimiento y decrecimiento de una función.

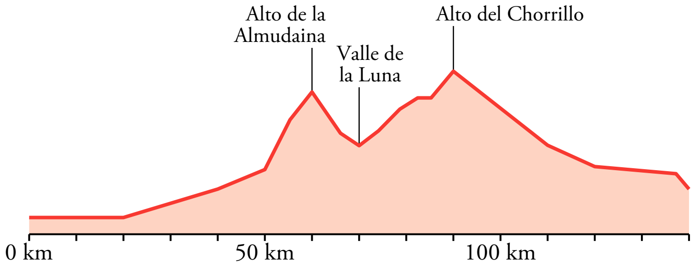
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Máximos y mínimos relativos

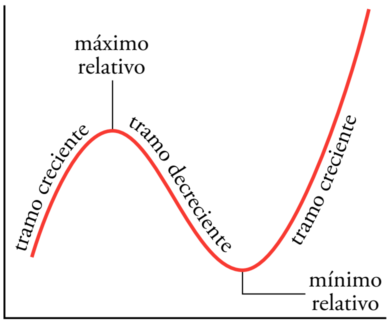
Vamos a analizar ahora la gráfica que refleja el perfil de una etapa de la Vuelta a España. Corresponde a la función *distancia* → *altura.*

La altura a la que ruedan los ciclistas es función del kilómetro por el que van.

La gráfica presenta un tramo creciente desde la salida hasta el Alto de la Almudaina. A partir de ahí hay un tramo decreciente hasta el Valle de la Luna. Donde vuelve a crecer hasta el Alto del Chorrillo. Desde este alto, en el siguiente tramo, que llega hasta la meta, la gráfica es decreciente.



En el perfil de la etapa se aprecian claramente dos *máximos relativos* (kilómetros 60 y 90) y un *mínimo relativo* (kilómetro 70). La altura crece hasta llegar al máximo relativo y decrece a partir de este. La altura decrece hasta llegar al mínimo relativo y crece a partir de este.



Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

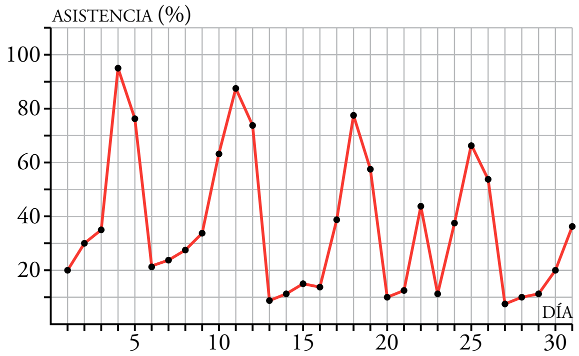
A la izquierda del máximo relativo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo relativo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

Piensa y practica

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:



a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

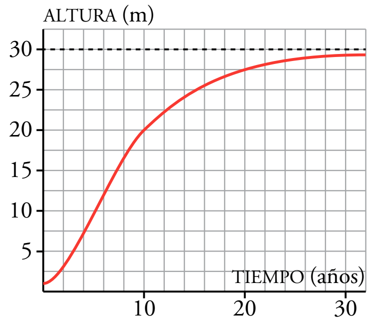
d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Tendencias de una función



Comportamiento a largo plazo

La gráfica del margen muestra la evolución de la altura de un árbol de eucaliptus a lo largo de 31 años. Representa la función:

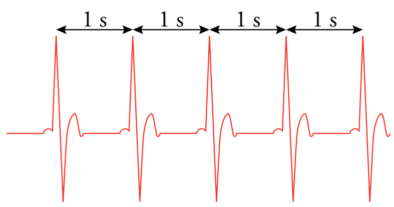
tiempo → *altura*

Es claro que, al pasar el tiempo, la altura del árbol se acerca a 30 m, su tope. Decimos, entonces, que la altura del árbol **tiende** a 30 m con el transcurso del tiempo.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarían lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Estos son otros ejemplos en los que la gráfica de la función tiende a estabilizarse:

- Velocidad de un paracaidista en caída libre (tiende a 200 km/h).
- Temperatura de un refresco al sacarlo de la nevera (tiende a la temperatura de la habitación).



Periodicidad

Un electrocardiograma recoge los impulsos eléctricos del corazón y los refleja en una gráfica. La del margen muestra el electrocardiograma de un paciente sano en estado de relajación. La función es:

tiempo → *intensidad eléctrica*

Como se repite una y otra vez cada segundo, podemos decir que es una función *periódica* de *periodo* 1 segundo.

Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **periodo.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un periodo.

Ejemplos

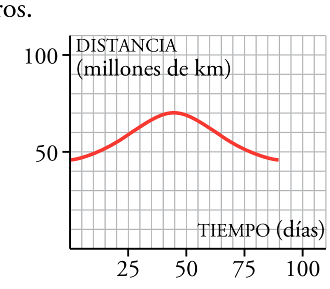
Otros ejemplos de funciones periódicas son:

- Altura a la que se encuentra una cesta cuando la noria está en funcionamiento.
- Distancia al Sol del cometa Halley.

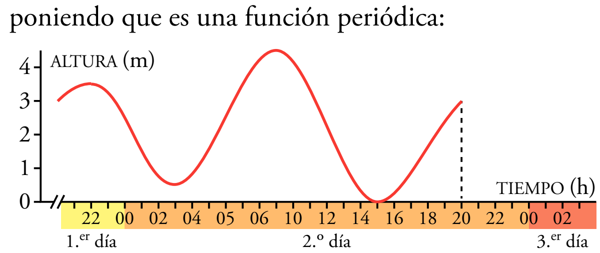
Piensa y practica

1. Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

Copia y completa en tu cuaderno la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.



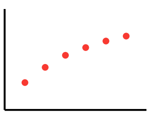
2. La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Cópiala en tu cuaderno y complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica:

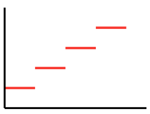


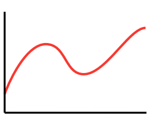
En la web Refuerza: función periódica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Discontinuidades. Continuidad

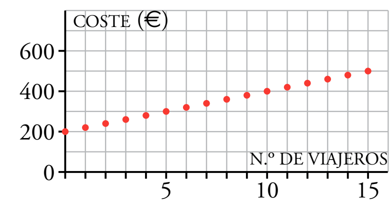

Función discontinua


Función discontinua


Función continua

- Por el alquiler de un autobús nos cobran 200 € fijos más 20 € por viajero. La gráfica de la derecha muestra la función:

  número de viajeros $\longrightarrow$ *coste*

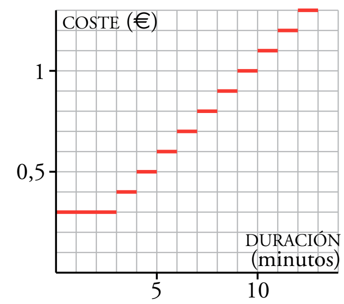


La variable independiente solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 … y no los intermedios, ya que no tiene sentido un número fraccionario de viajeros. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.

- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

  duración $\longrightarrow$ *coste*

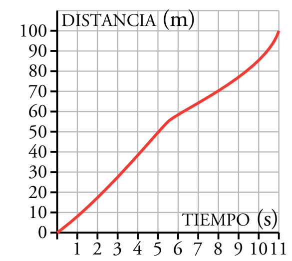
  Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.



- La siguiente gráfica describe la distancia recorrida por un velocista con el paso del tiempo. Se trata de la función:

  tiempo $\longrightarrow$ *distancia*

  La variación de la distancia es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua.**



Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo,** aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Piensa y practica

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta $\longrightarrow$ *coste*

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

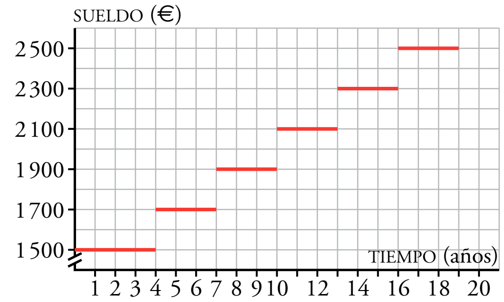
c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

2. La gráfica de la derecha muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



En la web Resuelve los problemas: "Tarifas postales", "El depósito".

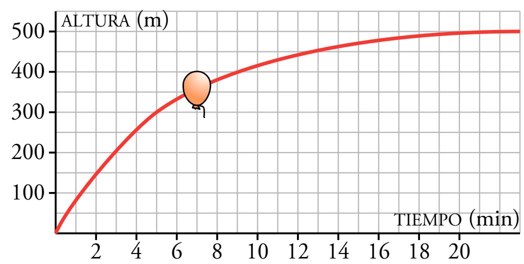
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1. Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:



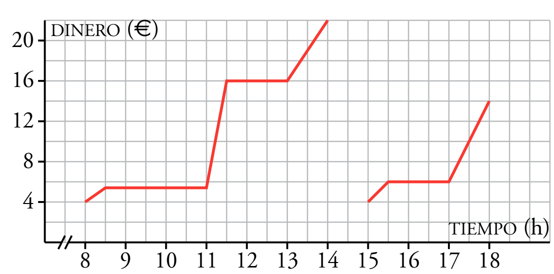
a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

2. En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

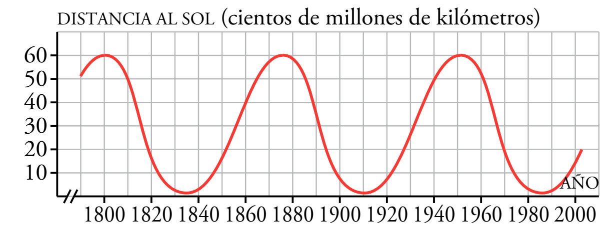
b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

3. La siguiente gráfica describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. Cada 76 años se puede ver desde la Tierra cuando más cerca está del Sol.

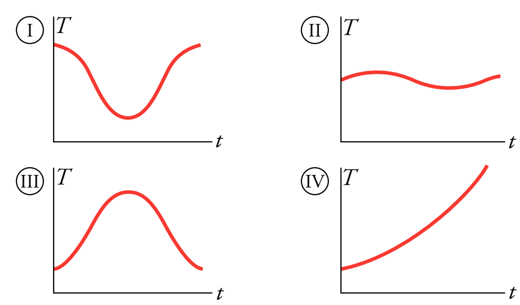


a) ¿Es una función periódica? ¿Qué periodo tiene?

b) ¿Cuándo, aproximadamente, fue la última vez que se dejó ver desde la Tierra? ¿En qué año se volverá a ver?

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los años 2000 a 2100. ¿A qué distancia del Sol, aproximadamente, estará en el 2016?

4. Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

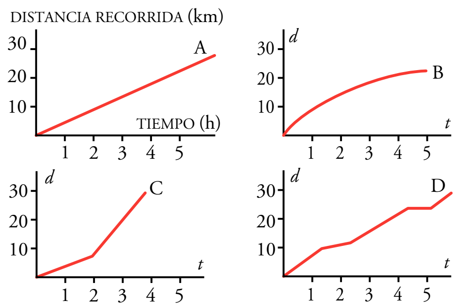
e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

5. Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:



a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Invента una gráfica de un montañero que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

Resuelve problemas

6. Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿a cuánto iba al volver?

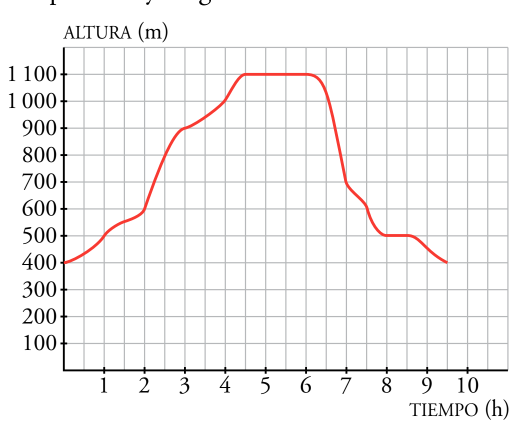
7. Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (La velocidad es constante en cada tramo).

Autoevaluación

1. Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión:



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

2. Una cisterna contiene 5 *l* de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua*.

b) Explica si la función es periódica.

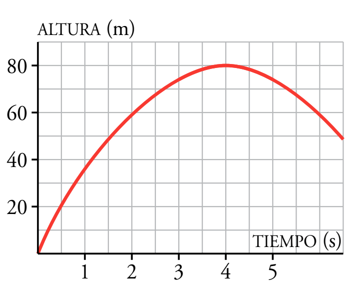
c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

3. Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?

Ⓐ $h = 8t - t^2$

Ⓑ $h = 40t - 5t^2$

Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

a) De forma aproximada, mirando la gráfica.

b) Utilizando la expresión algebraica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

9 Funciones lineales y cuadráticas

René Descartes (1596-1650).

Un gran científico del siglo XVII con...

René Descartes (1596-1650) filósofo y matemático francés, influyó notablemente en el pensamiento de su época y en el de siglos posteriores.

Durante toda su vida tuvo una salud delicada. Por eso, de colegial, se le permitió estudiar acostado. Esto se convirtió en hábito, de modo que una gran parte de su obra la elaboró en la cama.

... Una idea genial

Y en la cama se le ocurrió su sistema de coordenadas: un día se entretuvo siguiendo el vuelo de una mosca e imaginó cómo se designaría su posición en cada instante mediante la distancia a la que se encontrara de cada pared.

Aunque esta idea no era del todo original, pues ya para entonces se manejaban las coordenadas geográficas, longitud y latitud, la invención de Descartes le permitió expresar las curvas mediante ecuaciones que ligan sus coordenadas. Esta ha sido una de las mayores aportaciones al mundo de la ciencia.

René Descartes enseñando astronomía a la Reina Cristina de Suecia en 1649.

GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Página inicial de la "Geometría" de Descartes, publicada en 1637.

¿De dónde viene "cartesiano"?

Como en aquella época los científicos escribían en latín, Descartes era conocido por la forma latina de su nombre: Cartesius. De ahí vienen las expresiones *pensamiento cartesiano* o *coordenadas cartesianas*.

81

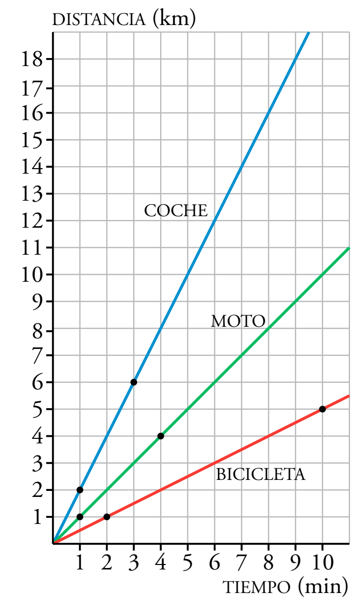
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Función de proporcionalidad $y = mx$

En este apartado vamos a estudiar funciones en las que las dos variables son proporcionales. Por ejemplo:

tiempo que marcha un móvil a velocidad constante $\rightarrow$ *distancia que recorre*

Son funciones que se representan mediante rectas y tienen una expresión analítica similar: $y = mx$



Analicemos tres funciones que responden al modelo *tiempo* $\rightarrow$ *distancia.*

- MOTOCICLETA: su velocidad es de 1 km cada minuto. La recta verde describe la distancia recorrida a lo largo del tiempo.

$$\left.\begin{array}{lll} 1 \text{ min} \rightarrow 1 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (1, 1). \\ 4 \text{ min} \rightarrow 4 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (4, 4). \\ \text{La } y \text{ (distancia) es igual a la } x \text{ (tiempo).} & \end{array}\right\} \text{Ecuación: } y = x$$

- COCHE: su velocidad es de 2 km cada minuto. La recta azul describe la distancia recorrida a lo largo del tiempo.

$$\left.\begin{array}{lll} 1 \text{ min} \rightarrow 2 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (1, 2). \\ 3 \text{ min} \rightarrow 6 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (3, 6). \\ \text{La } y \text{ (distancia) es igual al doble de } x \text{ (tiempo).} & \end{array}\right\} \text{Ecuación: } y = 2x$$

- BICICLETA: su velocidad es de 0,5 km cada minuto. La recta roja describe la distancia recorrida a lo largo del tiempo.

$$\left.\begin{array}{lll} 2 \text{ min} \rightarrow 1 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (2, 1). \\ 10 \text{ min} \rightarrow 5 \text{ km} & \text{Pasa por el punto } (10, 5). \\ \text{La } y \text{ (distancia) es igual a la mitad de } x \text{ (tiempo).} & \end{array}\right\} \text{Ecuación: } y = \frac{1}{2}x$$

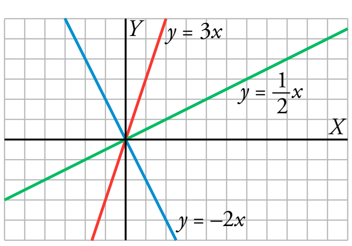
No lo olvides

Cuanto mayor sea la constante de proporcionalidad, mayor pendiente tiene la recta, es decir, más inclinada está respecto al eje X.

La **función de proporcionalidad** tiene por ecuación $y = mx$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m (que puede ser positiva o negativa), se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.



Ejercicio resuelto

Decir la pendiente de cada una de las tres rectas representadas al margen.

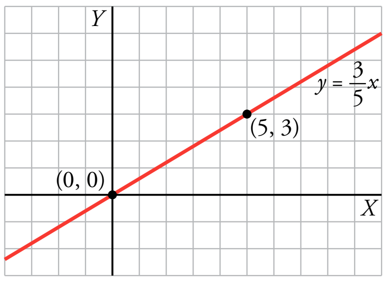
Sus pendientes son, respectivamente, 3, $\frac{1}{2}$ y –2. Observamos que cuanto mayor es la pendiente, mayor es la inclinación. Si la pendiente es positiva, la recta es creciente, y si es negativa, la recta es decreciente.

Piensa y practica

1. Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Representación de la gráfica a partir de su ecuación



Para representar una función de proporcionalidad, $y = mx$, tendremos en cuenta lo siguiente:

— **Es una recta,** pues a variaciones iguales de x corresponden variaciones iguales de y.

— **Pasa por el punto (0, 0),** pues si $x = 0$, entonces $y = m \cdot 0 = 0$.

Por tanto, para representarla solo falta **obtener otro punto.** Esto se consigue dándole un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

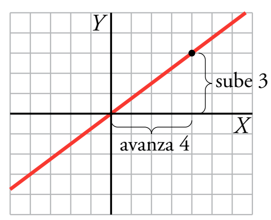
Por ejemplo, para representar $y = \frac{3}{5}x$, obtenemos el punto correspondiente a $x = 5$:

$$\text{Si } x = 5, \text{ entonces } y = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

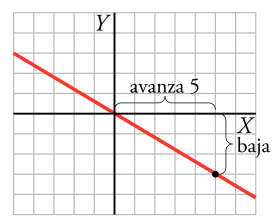
Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 3).

Ecuación a partir de la gráfica. Obtención de la pendiente

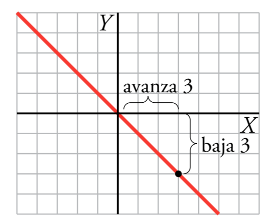
Si la gráfica de una función es una recta que pasa por el origen, entonces es una función de proporcionalidad, $y = mx$. Para determinar su ecuación, solo falta averiguar el valor de m (la pendiente).



Pendiente $m = \frac{3}{4}$



Pendiente $m = -\frac{3}{5}$



Pendiente $m = \frac{-3}{3} = -1$

Importante

La pendiente de una recta

$$y = mx$$

es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

La función $y = 0$ es, también, de proporcionalidad. Su pendiente es 0.

La **pendiente** (coeficiente de la x) es la variación (positiva o negativa) que experimenta la y cuando la x aumenta una unidad. Para hallarla, se divide la variación de la y por la variación de la x entre dos de sus puntos.

Piensa y practica

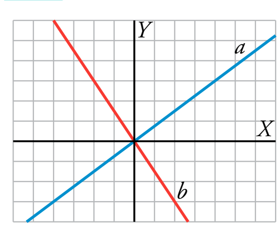
2. Representa las funciones siguientes:

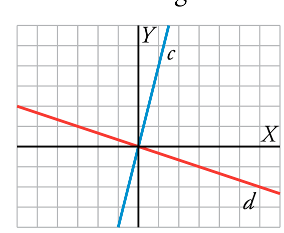
a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

d) $y = -2x$ e) $y = \frac{1}{3}x$ f) $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ h) $y = \frac{-3}{2}x$ i) $y = \frac{2}{3}x$

3. Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:





En la web Refuerza: función de proporcionalidad $y = mx$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 La función $y = mx + n$

Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

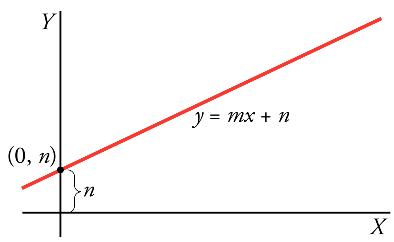
A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines.**

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

lineales $\to$ $y = mx + n$

de proporcionalidad $\to$ $y = mx$



En la factura de agua de una ciudad se paga una cantidad fija de 3 € más 1,50 € por metro cúbico de consumo.

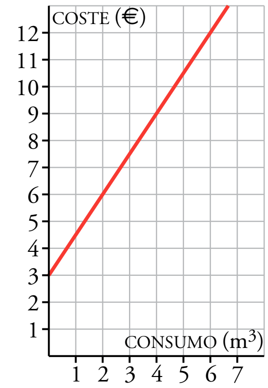
En este enunciado vemos que, una vez pagada la cantidad inicial, 3 €, el coste añadido es proporcional al consumo (en m^3) de agua que hagamos.

La función *consumo* $\to$ *coste* tiene esta ecuación:

$$y = 3 + 1{,}5x$$

Su gráfica es una recta cuya pendiente es 1,5 (lo que aumenta el coste cuando el consumo de agua aumenta 1 m^3).

La cantidad inicial, 3, es el punto del eje Y del cual arranca la función.



La ecuación $y = mx + n$ se representa mediante una recta con las siguientes características:

— Su **pendiente** es m (la pendiente es el coeficiente de la x en la ecuación $y = mx + n$). Representa la variación de y por cada unidad de x.

— Su **ordenada en el origen** es n. Es decir, si $x = 0$, entonces $y = n$. Por tanto, corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

Cuando la pendiente es $m = 0$, la recta $y = n$ es paralela al eje X. Se llama **función constante** porque y siempre vale lo mismo (n) aunque varíe la x.

Las funciones que se representan mediante rectas se llaman **funciones lineales.**

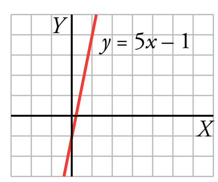
Ejercicio resuelto

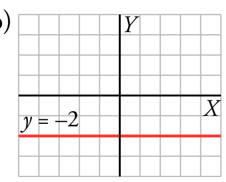
Representar estas rectas:

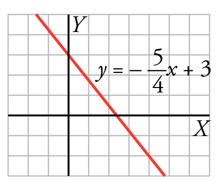
a) $y = 5x - 1$

b) $y = -2$

c) $y = -\frac{5}{4}x + 3$

a) 

b) 

c) 

Piensa y practica

En la web Refuerza: la función $y = mx + n$.

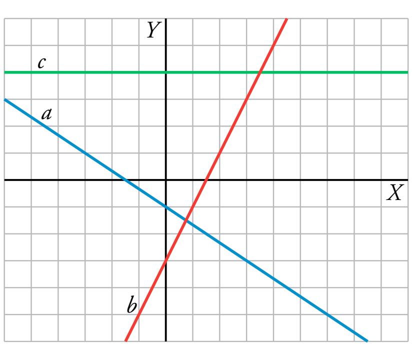
1. Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = 3 - 2x$ c) $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ e) $y = -2$ f) $y = \frac{5x - 3}{2}$

2. Medimos el grosor de los libros de una colección. Cada una de las cubiertas tiene un grosor de 5 mm. Sabiendo que el grosor de 200 páginas es de 1 cm, escribe la ecuación de la función *número de páginas* $\to$ *grosor del libro* y represéntala en unos ejes.

3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:



En la web Practica con funciones $y = mx + n$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Ten en cuenta

Las ecuaciones $y = y_0 + m(x - x_0)$ pueden simplificarse hasta adoptar la forma $y = mx + n$.

Por ejemplo:

$y = 3 + \frac{2}{5}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$

Supongamos que de una recta conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m. Entonces, su ecuación puede ponerse así:

$y = y_0 + m(x - x_0)$ ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

- Es claro que esta recta pasa por (x_0, y_0), pues:

  si $x = x_0$, entonces $y = y_0 + m(x_0 - x_0) = y_0 + m \cdot 0 = y_0$
- Su pendiente es m, por ser el coeficiente de la x al despejar la y.

Ejercicios resueltos

1. ***Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes dadas por un punto y su pendiente:***

a) $P(3, 7)$ $m = 4$

b) $P(-2, 5)$ $m = -\frac{2}{3}$

c) $P(4, -1)$ $m = 1{,}2$

d) $P(-3, 0)$ $m = \frac{1}{5}$

Obtenemos, para cada una de las rectas, su ecuación punto-pendiente.

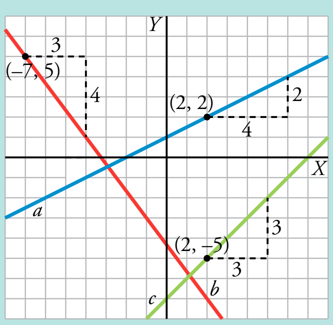
a) ECUACIÓN: $y = 7 + 4(x - 3)$ Es decir, $y = 4x - 5$

b) ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{2}{3}(x + 2)$ Es decir, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

c) ECUACIÓN: $y = -1 + 1{,}2(x - 4)$ Es decir, $y = 1{,}2x - 5{,}8$

d) ECUACIÓN: $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ Es decir, $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

2. ***Escribir la ecuación de las rectas a, b y c.***



a) Pasa por (2, 2). Su pendiente es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ECUACIÓN: $y = 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$

b) Pasa por (–7, 5). Su pendiente es $-\frac{4}{3}$.

ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{4}{3}(x + 7)$

c) Pasa por (2, –5). Su pendiente es $\frac{3}{3} = 1$.

ECUACIÓN: $y = -5 + (x - 2)$

Piensa y practica

En la web Refuerza: la ecuación punto-pendiente.

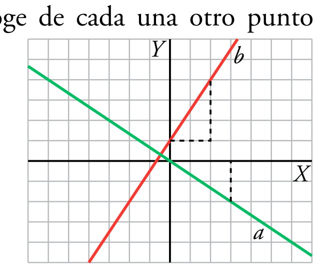
1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ b) $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$ d) $P(0, 0)$, $m = -1$

e) $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ f) $P(0, -2)$, $m = 0$

2. Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.

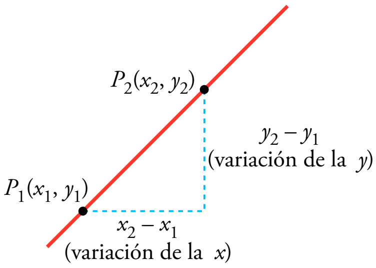


En la web Concepto de pendiente de una recta.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Recta que pasa por dos puntos

Si de una recta conocemos dos puntos, podemos obtener su pendiente a partir de ellos y, después, con la pendiente y uno de los puntos, hallar su ecuación tal y como hemos visto en la página anterior.



Obtención de la pendiente conociendo dos puntos

Para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos, se puede proceder gráficamente, midiendo (o contando cuadraditos) la variación de la x y la variación de la y.

Pero también se obtiene (más rápida y eficazmente) mediante este cálculo:

$$\left.\begin{matrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \end{matrix}\right\} \to m = \frac{\text{variación de la } y}{\text{variación de la } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejercicios resueltos

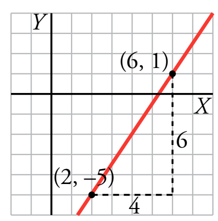
1. ***Hallar las pendientes de las siguientes rectas dadas por dos puntos:***

a) $(2, -5), (6, 1)$

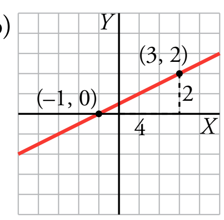
b) $(-1, 0), (3, 2)$

c) $(-3, -1), (2, -2)$

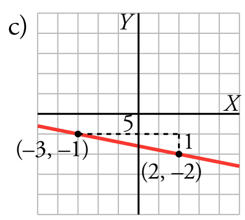
GRÁFICAMENTE:

a) 

$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) 

$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) 

$m = -\frac{1}{5}$

OPERANDO:

a) $m = \frac{1-(-5)}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $m = \frac{2-0}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $m = \frac{-2-(-1)}{2-(-3)} = \frac{-1}{5}$

2. ***Obtener la ecuación de la recta que pasa por P y Q:***

a) $P(5, 3),\ Q(-3, 4)$

b) $P(-3, 5),\ Q(-2, 3)$

a) $m = \frac{4-3}{-3-5} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ ECUACIÓN: $y = 3 - \frac{1}{8}(x-5)$

b) $m = \frac{3-5}{-2-(-3)} = \frac{-2}{1} = -2$ ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x+3)$

Piensa y practica

En la web Refuerza: ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5),\ Q(-3, 6)$

b) $P(3, -4),\ Q(-2, -1)$

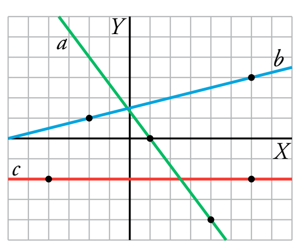
c) $P(-1, 0),\ Q(5, 5)$

d) $P(-7, 1),\ Q(3, 4)$

e) $P(3, 1),\ Q(-2, 1)$

f) $P(2, -2),\ Q(2, 5)$

2. Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Parábolas y funciones cuadráticas

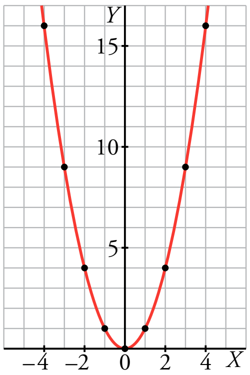
La curva que describe un balón cuando se lanza a canasta es una parábola. También describen parábolas las bolas de golf o los chorros de agua. Parabólicas son las secciones de las antenas que captan las emisiones de televisión procedentes de los satélites artificiales y las secciones de los faros de los coches.

También hay muchas funciones que se representan mediante parábolas:

— El área de un cuadrado en función de su lado $(A = l^2)$ o la de un círculo en función de su radio $(A = \pi r^2)$.

— La altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido desde que se lanzó $(a = v_0 t - 4{,}9t^2)$.

— El espacio que recorre un coche desde que decidimos frenar hasta que realmente se para, en función de la velocidad que llevaba $(e = 0{,}0074v^2 + 0{,}21v)$.



Parábola tipo: la función $y = x^2$

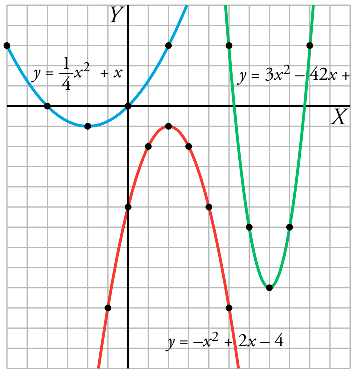
Empecemos por representar el modelo de parábola más sencillo, que corresponde a la función $y = x^2$.

A la derecha puedes ver su tabla de valores, y en el margen, su representación gráfica.

Se trata de una curva **simétrica** respecto al eje Y; tiene un mínimo en el punto (0, 0), al que llamamos **vértice.**

Tiene **dos ramas,** una decreciente y otra creciente.

x	y
–4	16
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
4	16



Funciones cuadráticas

Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas,** se representan todas ellas mediante **parábolas** con su eje de simetría paralelo al eje Y.

Su forma (hacia abajo, hacia arriba, más ancha…) depende de a, coeficiente de x^2, del siguiente modo:

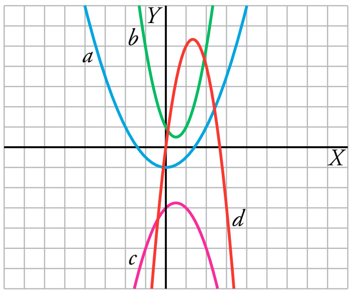
- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente de x^2, las parábolas correspondientes son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.
- Si $a > 0$, tienen las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

Piensa y practica

1. Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:

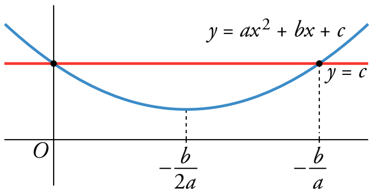
I) $y = 2x^2 - 2x + 1$ II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ IV) $y = -3x^2 + 8x$



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

La abscisa del vértice



$ax^2 + bx + c = c \to ax^2 + bx = 0 \to$

$\to (ax + b)x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

La abscisa del vértice está en el punto medio de x_1 y x_2, es decir, en $p = -\frac{b}{2a}$.

Representación de funciones cuadráticas

Como ya se ha dicho, las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas cuya forma depende, exclusivamente, del coeficiente de x^2. Veamos ahora algunos pasos que conviene dar para la representación de $y = ax^2 + bx + c$:

1.° Obtención de la **abscisa del vértice:** $p = -\frac{b}{2a}$

2.° Obtención de algunos **puntos próximos al vértice.**

Calculamos el valor de la función en abscisas enteras próximas al vértice, a su derecha y a su izquierda. Así conocemos la curva en su parte más interesante.

3.° Obtención de los **puntos de corte con los ejes.**

Con ellos se completa la información sobre los puntos más relevantes de la gráfica:

— Corte con el eje X: se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

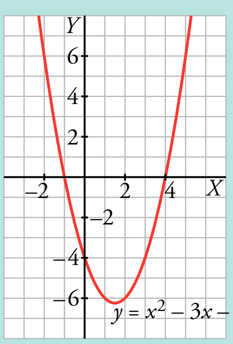
— Corte con el eje Y: es el $(0, c)$.

4.° Representación.

Escogeremos sobre los ejes unas escalas que nos permitan plasmar la información en un espacio razonable.

Ejercicio resuelto

Representar $y = x^2 - 3x - 4$.



1.° Obtención del vértice:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Abscisa: } p = \dfrac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ \text{Ordenada: } f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 4 = -6{,}25\end{array}\right\} \text{El vértice es } (1{,}5; -6{,}25).$$

2.° Obtención de puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

3.° Puntos de corte con los ejes:

- Cortes con el eje X:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \to x_1 = -1,\ x_2 = 4$$

- Corte con el eje Y: $(0, -4)$

(Esta información ya la teníamos en la tabla anterior)

4.° Puedes ver la representación a la izquierda.

Piensa y practica

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2 - 6x + 5$

3. Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ b) $y = 2x^2 - 10x + 8$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Funciones lineales. Rectas

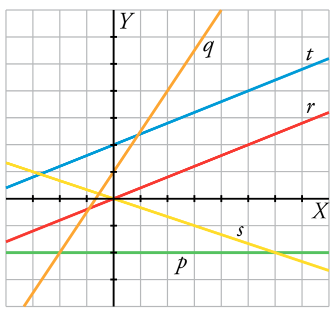
1. Representa las rectas siguientes:

a) $y = 4x$ b) $y = -2{,}4x$ c) $y = -\dfrac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ e) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$ f) $y = -\dfrac{8}{5}$

g) $y = \dfrac{3x-5}{2}$ h) $y = 2{,}5x - 1$ i) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$

2. Asocia cada recta con su ecuación:



a) $y = -\dfrac{1}{3}x$

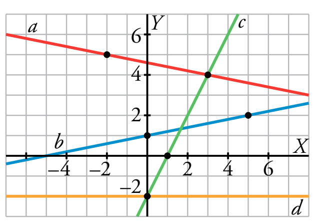
b) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$

c) $y = \dfrac{2}{5}x$

d) $y = \dfrac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$

3. a) Escribe la ecuación de cada recta:



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.

4. Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:

a) $P(-2, 5)$, $m = 3$ b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \dfrac{3}{2}$ d) $P(-2, -4)$, $m = -\dfrac{2}{3}$

5. Obtén la ecuación de la recta que pasa por A y B.

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ b) $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ d) $A\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

6. Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?

a) $y = 2x$ b) $y = 2x - 3$

c) $2x - y + 1 = 0$ d) $4x - 2y + 5 = 0$

7. La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

8. Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:

t (*min*)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

9. Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

c) ¿Qué longitud tendrá la sombra de un poste de 3,5 m?

d) ¿Qué longitud tiene un poste que arroja una sombra de 3 m?

10. Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

11. Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, y, que equivalen a x libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

12. Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Funciones cuadráticas. Parábolas

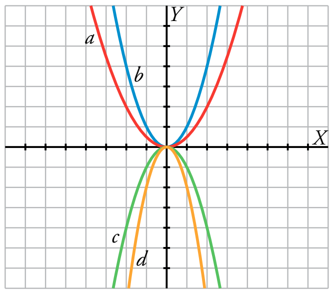
13. Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



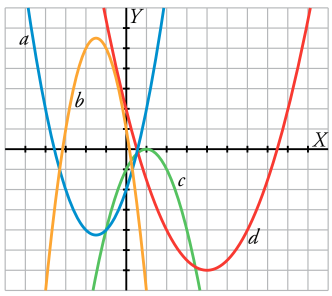
14. Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



15. Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$

c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

16. Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = 3 - x^2$ c) $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$ e) $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

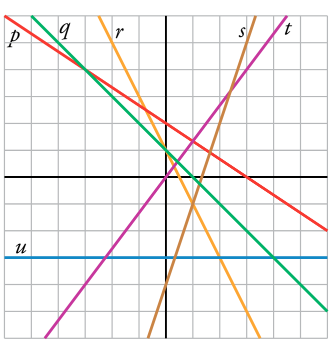
17. Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ d) $y = -x^2 + 5$

Autoevaluación

1. Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:



a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$

2. Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:

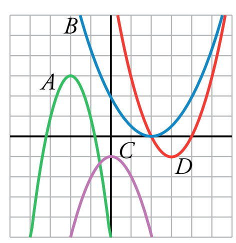
a) $y = 3x + 4$ b) $3x + 2y = 5$

c) Recta de pendiente 1/4 que pasa por (3, 0).

d) Recta que pasa por los puntos (4, 1) y (–2, 4).

e) Función de proporcionalidad que pasa por (4, –3).

3. Asocia cada ecuación con su parábola:



$y = -x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$y = -2x^2 - 8x - 5$

$y = x^2 - 6x + 8$

4. Representa:

a) $y = x^2 - 4x + 1$ b) $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$ d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$

5. La temperatura de hoy es de 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. La temperatura del aire desciende unos 6 °C por cada kilómetro de ascensión.

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10 Problemas métricos en el plano

Moderna Academia de Atenas, con Platón y Sócrates flanqueando la entrada.

Los griegos y la geometría

Los griegos recogieron el saber matemático (práctico, utilitario, pero muy extenso) acumulado durante milenios por egipcios y babilonios. Y le dieron un impulso y una calidad extraordinarios, muy especialmente a la geometría. Cultivaron el conocimiento por sí mismo (filosofía significa amor a la sabiduría), sin buscar ninguna utilidad práctica. Y la geometría fue una bella ocupación en la que llegaron muy lejos.

El primero de los grandes

"Los siete sabios de Grecia", a la izquierda, manteniendo una discusión.

Tales de Mileto (640 a. C.-546 a. C.), gran filósofo, el primero de "los siete sabios de Grecia", marcó la pauta de todo el pensamiento griego posterior. Además de asimilar y mejorar lo que aprendió de los egipcios, inventó y cultivó la matemática deductiva. Su estilo fue sistematizado y mejorado por Euclides, dos siglos y medio después.

Otro gran geómetra

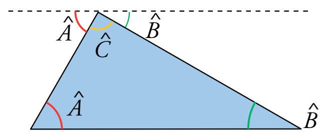
Posterior a Pitágoras y contemporáneo de Arquímedes, el último gran geómetra griego fue **Apolonio** (siglo III a. C.). Con un estilo pulido y sistemático, escribió un tratado dedicado a las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Siguiendo el espíritu de los griegos, su estudio sobre estas curvas, completísimo, fue meramente especulativo. Le hubiera causado asombro saber que dieciocho siglos después se demostraría que planetas y cometas describen órbitas elípticas y, algunos de ellos, hiperbólicas. Y que, posteriormente, las cónicas han sido referentes habituales en la técnica y en el arte.

Apolonio mostrando sus teorías en Alejandría (Egipto).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ángulos en las figuras planas

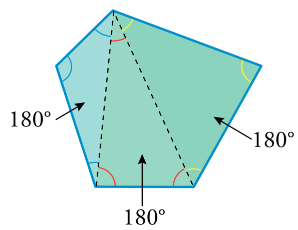
Ángulos en los polígonos



La suma de los ángulos de un **triángulo** cualquiera es 180°.

Por tanto, cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° (180° : 3 = 60°).

La suma de los ángulos de un **polígono de *n* lados** es 180°· (n – 2).



Por tanto, la suma de los ángulos de un cuadrado es 360°, y la suma de los ángulos de un pentágono es 180° · (5 – 2) = 540°.

Ejercicio resuelto

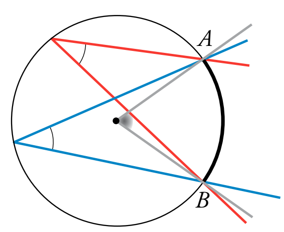
¿Cuánto mide cada ángulo de un decágono regular?

La suma de todos los ángulos de un decágono cualquiera es:

$$180° \cdot (10 - 2) = 180° \cdot 8 = 1\,440°$$

Si el decágono es regular, cada ángulo medirá 1 440° : 10 = 144°.

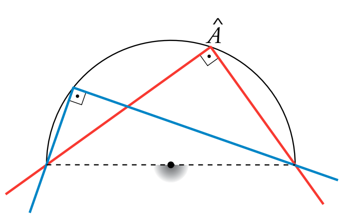
Ángulos en la circunferencia



Los **ángulos** azul y rojo están **inscritos** en la circunferencia, porque tienen sus vértices en ella y sus lados la cortan. Además, ambos **abarcan un mismo arco,** *AB*. Por tanto, son iguales. Su medida es la mitad de la medida del arco; es decir, la mitad del ángulo gris cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.

Dos o más ángulos inscritos en la misma circunferencia y que abarquen el mismo arco son iguales. Su medida es la mitad de la del arco.

Ejercicio resuelto



¿Cuánto mide un ángulo inscrito en una semicircunferencia?

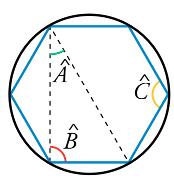
El ángulo rojo, $\hat{A}$, está inscrito en una semicircunferencia. Por tanto, el arco que abarca es la otra semicircunferencia, cuya medida es de 180°. La medida de $\hat{A}$ es, pues, 180° : 2 = 90°. Lo mismo le pasa al ángulo azul: cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

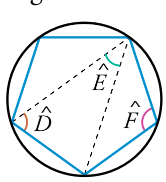
Piensa y practica

1. Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden 147°, 101°, 93°, 122° y 134°. Halla la medida del sexto ángulo.

2. ¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?

3. Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:





En la web Ampliación teórica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Figuras semejantes

Dos **figuras** son **semejantes** cuando tienen la misma forma pero diferente tamaño. Y eso supone que:

- Los ángulos correspondientes son iguales.
- Las longitudes de los segmentos correspondientes son proporcionales.

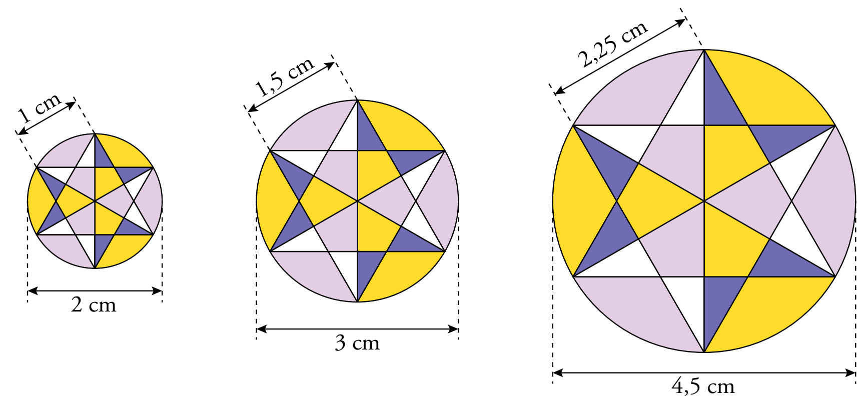
  Es decir, cada longitud en una de ellas es igual a la correspondiente longitud de la otra multiplicada por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

Observa y comprueba

Dos tamaños del mismo modelo de Smartphone.

Ejemplo

Estos tres rosetones son semejantes. Solo se diferencian en el tamaño:



Observa que:

— Los polígonos que tienen en su interior (un hexágono regular, seis triángulos equiláteros, etc.) mantienen los mismos ángulos.

— Si multiplicas la longitud de cualquier segmento del primero por 1,5, obtienes la longitud del correspondiente segmento del segundo. La **razón de semejanza** es 1,5:

$1 \text{ cm} \cdot 1,5 = 1,5 \text{ cm}$ $\qquad$ $2 \text{ cm} \cdot 1,5 = 3 \text{ cm}$

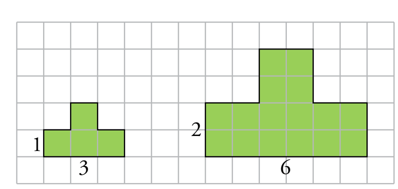
— La razón de semejanza para pasar del primero al tercero es 2,25:

$1 \text{ cm} \cdot 2,25 = 2,25 \text{ cm}$ $\qquad$ $2 \text{ cm} \cdot 2,25 = 4,5 \text{ cm}$

Piensa y practica

1. Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.

2. Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:



¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Planos, mapas y escala

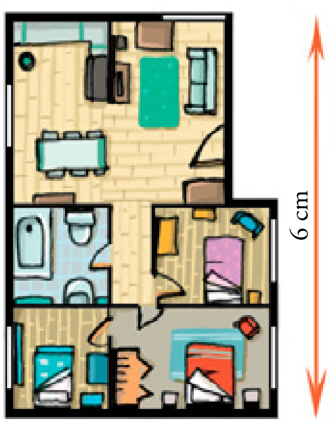
Para estudiar la ruta a seguir en un viaje, o para localizar una población, una carretera o un accidente geográfico, consultamos un **mapa.**

Para informarnos sobre las características de una vivienda, recurrimos a un **plano.**

Los planos y los mapas, además de la forma, informan del tamaño. Para ello incluyen **la escala,** que es el cociente entre las medidas en el papel y las medidas en la realidad.

> Los planos y los mapas son representaciones de la realidad que mantienen con ella la relación de semejanza.
>
> La **razón de semejanza** en los planos y los mapas se llama **escala.**

E → 1/200



Ejemplo 1

La imagen de la izquierda muestra el plano de una vivienda a escala 1/200 (un centímetro en el plano equivale a 200 centímetros en la realidad).

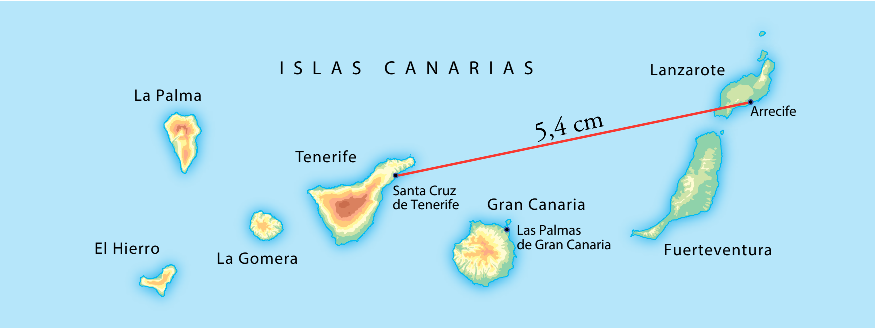
Midiendo una distancia en el plano, por ejemplo el largo de la fachada de la vivienda (6 cm), podemos calcular su dimensión real:

La fachada mide 6 cm · 200 = 1 200 cm = 12 m.

Ejemplo 2

La siguiente imagen muestra un mapa de las islas Canarias en el que se ha señalado la distancia entre Santa Cruz, en Tenerife, y Arrecife, en Lanzarote.

Sabiendo que la distancia real entre ambas ciudades es de 270 km, vamos a calcular la escala del mapa.



Midiendo con la regla, vemos que la distancia señalada es de 5,4 cm. Así:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el papel}} = \frac{270 \text{ km}}{5{,}4 \text{ cm}} = \frac{27\,000\,000 \text{ cm}}{5{,}4 \text{ cm}} = 5\,000\,000$$

La escala es 1/5 000 000.

Piensa y practica

1. Considera el plano del primer ejemplo.

a) Calcula la anchura de la vivienda.

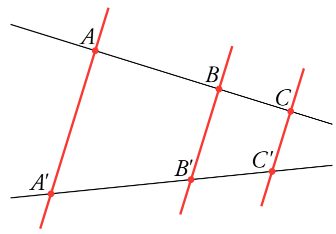
b) ¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?

2. a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.

b) ¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Triángulos semejantes. Teorema de Tales

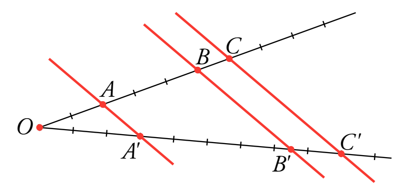


Teorema de Tales

Cuando dos o más rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan sobre ellas segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Compruébalo en el siguiente ejemplo:



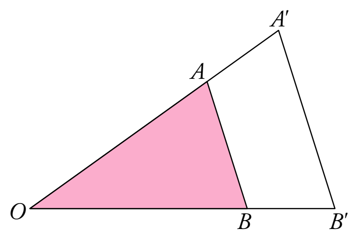
$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5} = \frac{1}{1,5}$$

También:

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{7,5} = \frac{6}{9}$$

En la web
Ampliación teórica: teorema de Tales.

El teorema de Tales es importante porque es el punto de partida para estudiar la semejanza de triángulos.

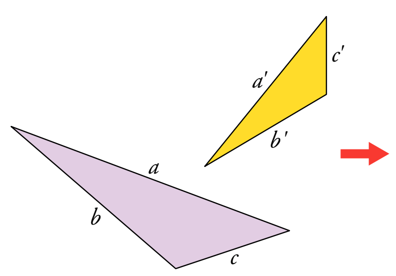


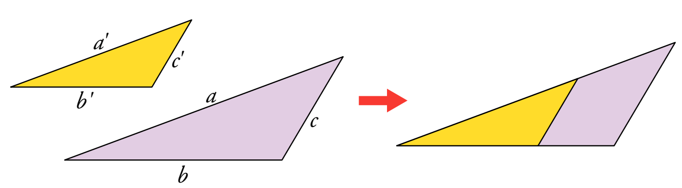
Triángulos en posición de Tales

Los triángulos OAB y $OA'B'$ tienen un ángulo, $\hat{O}$, en común, y los correspondientes lados opuestos, AB y $A'B'$, paralelos. Decimos, entonces, que están en **posición de Tales.**

Observa que los otros dos ángulos también coinciden: $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$.

Dos triángulos en posición de Tales, o que se pueden poner en posición de Tales, son semejantes.



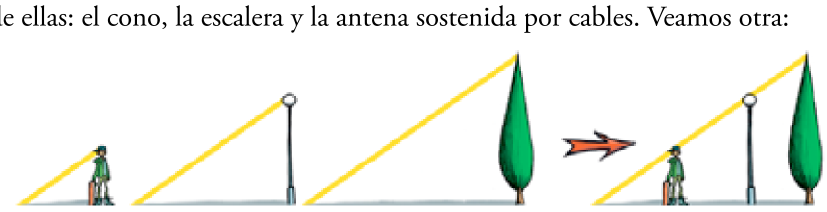


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Triángulos rectángulos semejantes

La aplicación del teorema de Tales que encontrarás con más frecuencia es la que se da en triángulos rectángulos. En la página de la derecha puedes observar tres de ellas: el cono, la escalera y la antena sostenida por cables. Veamos otra:

En la web
- Presentación del teorema de Tales.
- Practica con triángulos en posición de Tales.

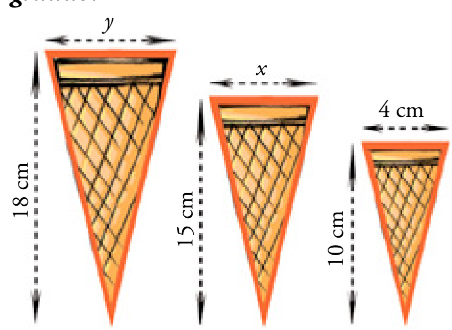


En un mismo instante, distintos objetos verticales (árboles, farolas, personas) y sus respectivas sombras pueden situarse en “posición de Tales”. Es decir, son triángulos rectángulos semejantes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Problemas resueltos

1. ***Una heladería ofrece sus productos en cucuruchos de un mismo formato, en tres tamaños diferentes: maxi, de 18 cm; normal, de 15 cm, y mini, de 10 cm (ver figura). El cucurucho pequeño lleva bolas de helado de 4 cm de diámetro. ¿Qué tamaño tienen las bolas del mediano y las bolas del grande?***



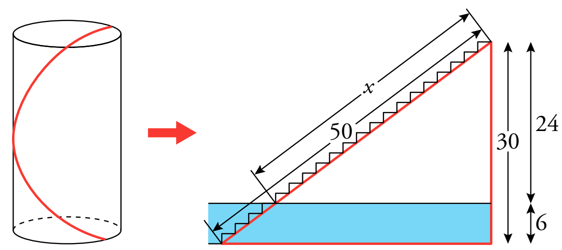
$$\frac{10}{4} = \frac{15}{x} = \frac{18}{y}$$

$$x = \frac{4 \cdot 15}{10} = 6$$

$$y = \frac{4 \cdot 18}{10} = 7{,}2$$

Las bolas medianas tienen un diámetro de 6 cm, y las grandes, un diámetro de 7,2 cm.

2. ***Un pozo de 30 metros de profundidad tiene adosada a la pared una escalera de 50 m de longitud que desciende hasta el fondo. El nivel del agua alcanza los seis metros de altura. ¿Qué distancia hay que recorrer por la escalera para llegar al nivel del agua?***



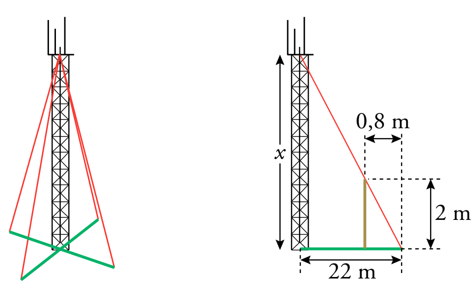
$$\frac{30}{50} = \frac{24}{x}$$

$$x = \frac{50 \cdot 24}{30} = 40$$

Es necesario recorrer 40 m de escalera para llegar al nivel del agua.

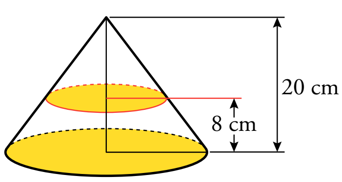
Piensa y practica

1. Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.



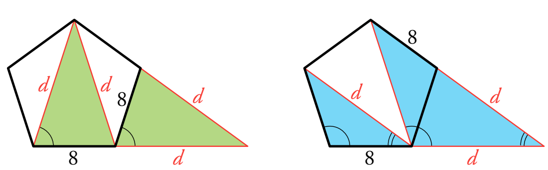
2. Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?

3. La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?



4. Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.

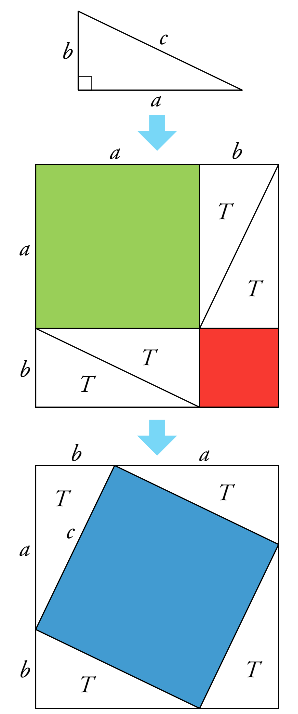
Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.

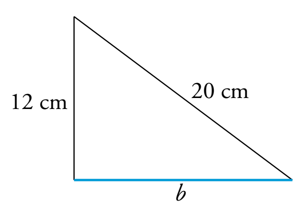


En la web Resuelve el problema "Pirámide de Keops".

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 El teorema de Pitágoras





En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$a^2 + b^2 = c^2$ (**teorema de Pitágoras**)

En el margen hay una bonita demostración de este teorema:

- Los dos cuadrados grandes son iguales. Su lado es $a + b$.
- En el primero, hay dos cuadrados de áreas a^2 y b^2 y cuatro triángulos T.
- En el segundo, hay un cuadrado de área c^2 y cuatro triángulos T.
- Por tanto, al suprimir los cuatro triángulos de cada uno, las áreas de lo que queda coinciden: $a^2 + b^2 = c^2$.

Veamos algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo

Aunque el teorema de Pitágoras es una igualdad entre áreas, se utiliza sobre todo para relacionar los lados de un triángulo rectángulo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Ejercicio resuelto

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 cm, y uno de los catetos, 12 cm. Calcular la longitud del otro cateto.

$$20^2 = b^2 + 12^2 \rightarrow b^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \rightarrow b = \sqrt{256} = 16$$

El cateto desconocido, b, mide 16 cm.

Saber si un triángulo es rectángulo

Conociendo los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo.

Sean a, b, c los lados de un triángulo, siendo c el mayor. Entonces:

— Si $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo.

— Si $a^2 + b^2 < c^2$, el triángulo es obtusángulo.

— Si $a^2 + b^2 > c^2$, el triángulo es acutángulo.

Ejercicio resuelto

Averiguar cómo son los triángulos siguientes:

I) a = 7 cm, b = 8 cm y c = 11 cm

II) a = 11 cm, b = 17 cm y c = 15 cm

III) a = 34 cm, b = 16 cm y c = 30 cm

I) $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$; $11^2 = 121$. Como $113 < 121$, es obtusángulo.

II) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289 \rightarrow$ Es acutángulo.

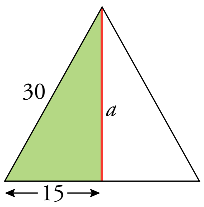
III) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156 \rightarrow$ Es rectángulo.

En la web

- Presentación del teorema de Pitágoras.
- Practica la aplicación del teorema de Pitágoras.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

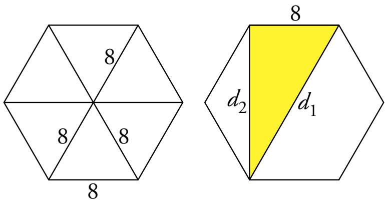
Problemas resueltos



1. ***Hallar la altura de un triángulo equilátero de 30 cm de lado.***

La altura es un cateto del triángulo rectángulo verde que puedes ver a la izquierda.

$$a^2 = 30^2 - 15^2 \rightarrow a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98\ldots \approx 26 \text{ cm}$$

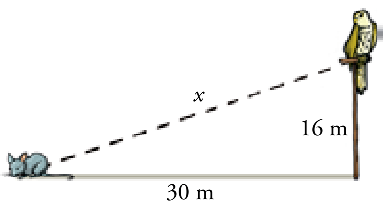


2. ***El lado de un hexágono regular mide 8 cm. Hallar las longitudes de su diagonal larga (d_1) y de su diagonal corta (d_2).***

El hexágono regular se divide en seis triángulos equiláteros iguales, de lado 8 cm. Así, la longitud de d_1 es igual al doble del lado: $d_1 = 8 + 8 = 16$ cm.

Dentro del hexágono, podemos considerar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es d_1 (16 cm); uno de los catetos, un lado del hexágono (8 cm), y el otro cateto, d_2. Y aplicando el teorema de Pitágoras:

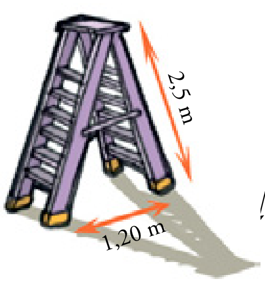
$$16^2 = 8^2 + {d_2}^2 \rightarrow d_2 = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} = 13{,}856\ldots \approx 13{,}9 \text{ cm}$$

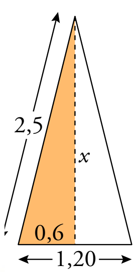


3. ***Un ave rapaz, encaramada a un poste de 16 m de altura, observa a un ratón, posible presa, situado a 30 m de la base del poste. ¿Qué distancia separa al ave del ratón?***

$$x^2 = 16^2 + 30^2 \rightarrow x = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = 34 \text{ m}$$

La distancia que separa al ave del ratón es de 34 metros.





4. ***Los brazos de una escalera de tijera miden 2,5 m y sus pies se apoyan en el suelo a 1,20 m uno del otro. ¿Qué altura alcanza la escalera?***

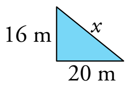
Como puedes observar en el margen, la altura de la escalera se puede considerar un cateto en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un brazo de la escalera (2,5 m) y el otro cateto su proyección sobre el suelo (0,6 m).

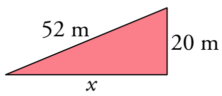
Así: $2{,}5^2 = 0{,}6^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{2{,}5^2 - 0{,}6^2} = \sqrt{5{,}89} = 2{,}426\ldots \approx 2{,}4$ cm

La escalera alcanza una altura de 2,4 m, aproximadamente.

Piensa y practica

1. Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

a) 

b) 

2. Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:

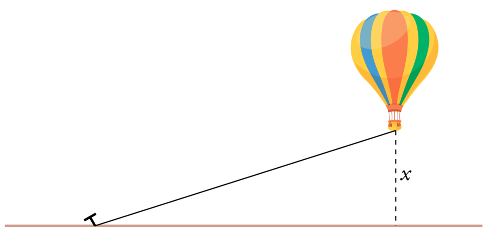
a) 49 m, 18 m y 52 m b) 44 cm, 17 cm y 39 cm

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm d) 15 cm, 15 cm, 15 cm

3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.

4. Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.

5. Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?

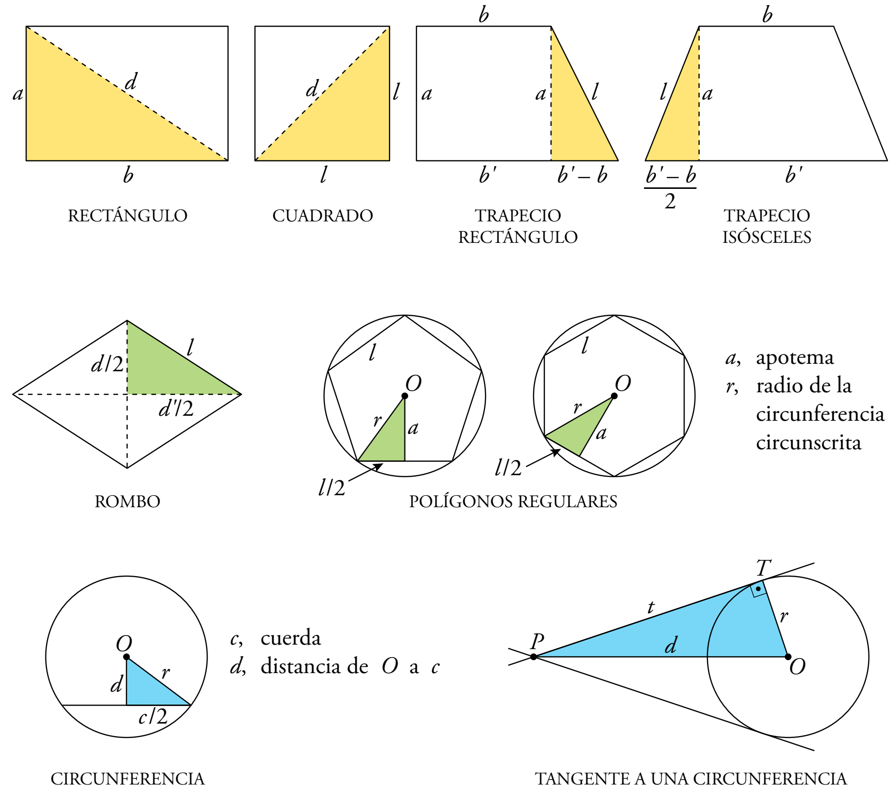


6. ¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de 1,5 × 2 metros, a través del hueco de una ventana de 1 × 1,30 metros? Razona tu respuesta.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

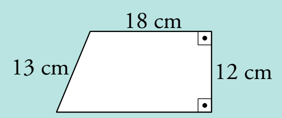
6 Triángulos rectángulos en figuras planas

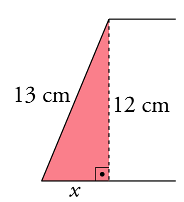
Observa las siguientes figuras planas. En cada una de ellas se ha señalado un triángulo rectángulo que, por el teorema de Pitágoras, permite relacionar algunos de sus elementos:



Ejercicios resueltos

1. ***De un trapecio rectángulo conocemos tres lados. Calcular la longitud del cuarto lado.***



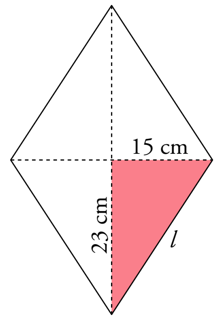


El triángulo coloreado es rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

La diferencia entre los dos lados paralelos es 5 cm. Por tanto, el lado que falta mide 18 + 5 = 23 cm.

2. ***Hallar la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 30 cm y 46 cm.***



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:

$$l = \sqrt{15^2 + 23^2} = \sqrt{225 + 529} = \sqrt{754} \longrightarrow$$

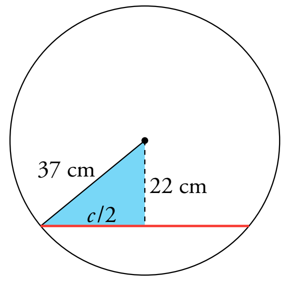
$\xrightarrow{\text{con calculadora}}$ 27.4590604

Por tanto, el lado mide 27,46 cm, aproximadamente.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***En una circunferencia de radio 37 cm trazamos una cuerda a 22 cm del centro. ¿Cuál es su longitud?***

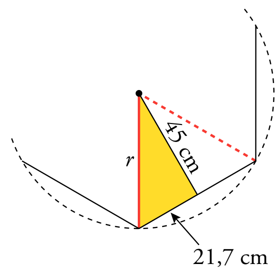


$\frac{c}{2} = \sqrt{37^2 - 22^2} = \sqrt{885} \longrightarrow$ 29.7489495

La mitad de la cuerda mide 29,75 cm.

La longitud de la cuerda es 59,50 cm, aproximadamente.

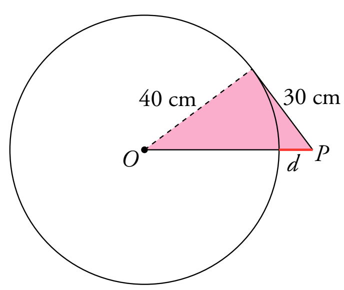
2. ***La apotema de un heptágono regular mide 45 cm, y su lado, 43,4 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono?***



$r = \sqrt{45^2 + 21{,}7^2} = \sqrt{2\,495{,}89} \rightarrow$ 49.9588830

El radio mide 49,96 cm, es decir, aproximadamente 50 cm.

3. ***Desde un punto exterior a una circunferencia de 40 cm de radio trazamos una tangente, que mide 30 cm. ¿A qué distancia de la circunferencia está el punto?***



$\overline{OP}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 40 cm y 30 cm. Por tanto:

$$\overline{OP} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50 \text{ cm}$$

$$d = \overline{OP} - r = 50 - 40 = 10 \text{ cm}$$

El punto P está a 10 cm de la circunferencia.

Piensa y practica

1. Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.

2. Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.

3. El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.

4. En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?

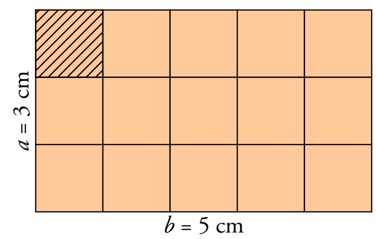
5. Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?

6. Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Áreas de los polígonos

Área de un rectángulo



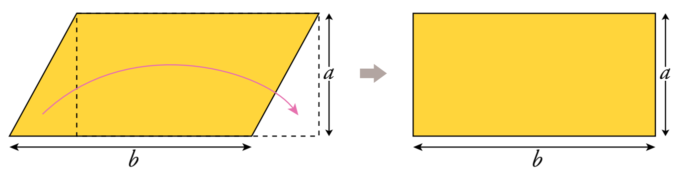
Observa en la figura que hay 3 × 5 cuadrados de 1 cm^2. En general:

El **área de un rectángulo** de dimensiones a y b es $A = a \cdot b$.

Un cuadrado de lado l es un rectángulo en el que $a = b = l$. Por tanto:

El **área de un cuadrado** de lado l es $A = l^2$.

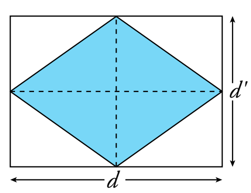
Área de un paralelogramo



Al suprimir un triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones a y b. Por tanto:

El **área de un paralelogramo** de base b y altura a es $A = a \cdot b$.

El rombo como caso particular



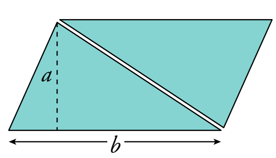
Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área puede obtenerse por el procedimiento anterior. Pero cuando se conocen sus diagonales, el área puede hallarse también del siguiente modo:

Área del rectángulo: $A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$

Área del rombo: $A_{\text{ROMBO}} = \frac{1}{2} A_{\text{RECTÁNGULO}}$. Por tanto:

El **área de un rombo** de diagonales d y d' es $A = \frac{d \cdot d'}{2}$.

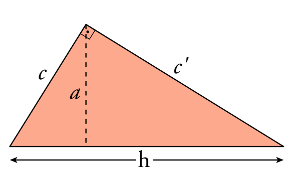
Área de un triángulo



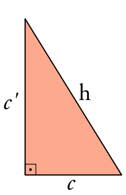
Tenemos un triángulo de base b y altura a. Le adosamos otro igual y se obtiene un paralelogramo. Por tanto:

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

Área de un triángulo rectángulo

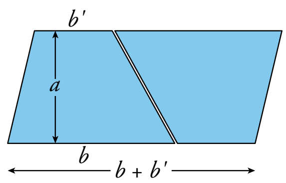


Llamamos c y c' a los catetos; h, a la hipotenusa, y a, a la altura.



$A = \frac{\text{h} \cdot a}{2}$. Pero también $A = \frac{c \cdot c'}{2}$.

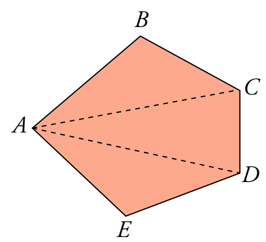
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



Área de un trapecio

Si a un trapecio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a.

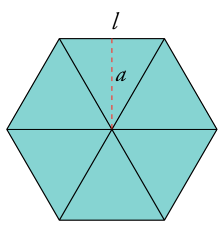
$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$$



Área de un polígono cualquiera

Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se suman las áreas de todos ellos.

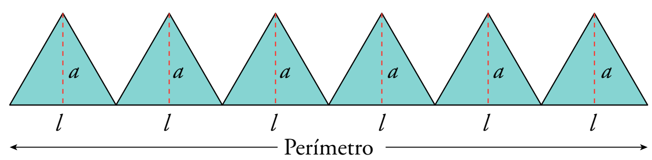
$$A_{\text{POLÍGONO}} = \text{Suma de las áreas de los triángulos}$$



a es la apotema del polígono regular

Área de un polígono regular de n lados

Un polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene.



$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{(n \cdot l) \cdot a}{2} = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}$$

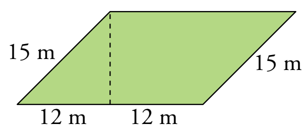
Piensa y practica

1. Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.

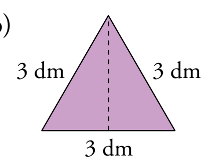
2. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.

3. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:

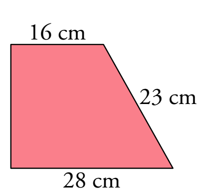
a)



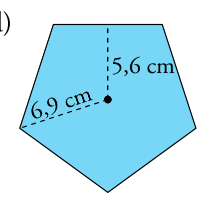
b)



c)



d)



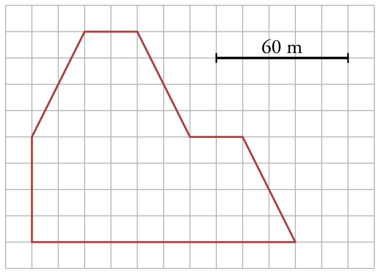
4. Calcula:

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

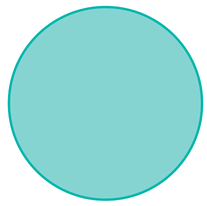
5. La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.

6. En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

8 Áreas y perímetros de algunas figuras curvas

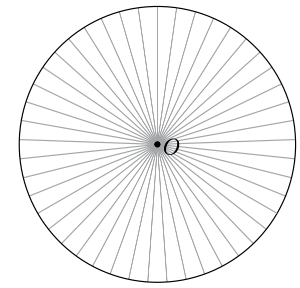


Perímetro de la circunferencia = $2\pi r$

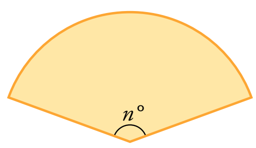
Área del círculo = πr^2

Si consideramos una infinidad de triángulos de vértice en O y base sobre la circunferencia, sus alturas son r, y la suma de sus bases sería $2\pi r$.

Por tanto, la suma de sus áreas sería: $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$



Sector circular de ángulo *n* grados



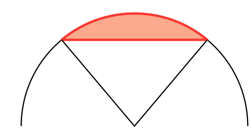
Área = $\frac{\pi r^2 \cdot n}{360}$

Perímetro = $\frac{2\pi r \cdot n}{360} + 2r$

Tanto en el área como en el perímetro, se procede a repartir la parte que corresponde a $n°$ sobre un total de 360°.

Segmento circular

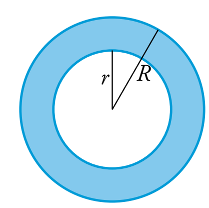
El área del segmento circular se halla restando del área del sector, el área del triángulo.



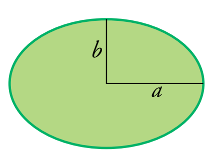
Corona circular

Área = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Perímetro = $2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r)$



Elipse



El área de una elipse de semiejes a y b es:

$A = \pi ab$

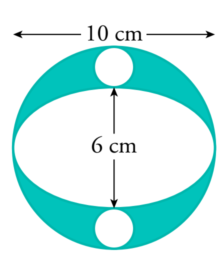
Es como el área de un círculo que tuviera radios distintos en las dos direcciones:

$\pi \cdot r \cdot r \rightarrow \pi \cdot a \cdot b$

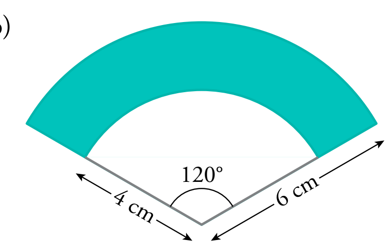
Piensa y practica

1. Halla el área de las figuras coloreadas.

a)



b)



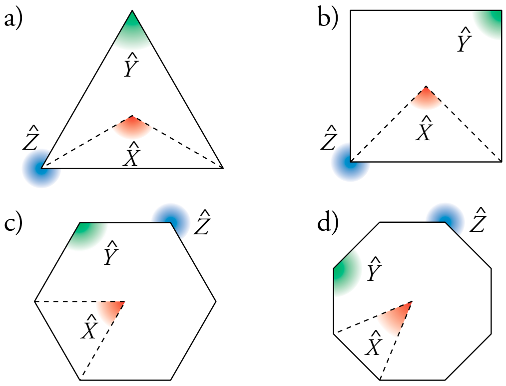
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

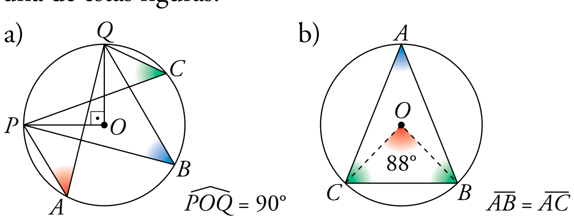
Practica

Ángulos

1. Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:

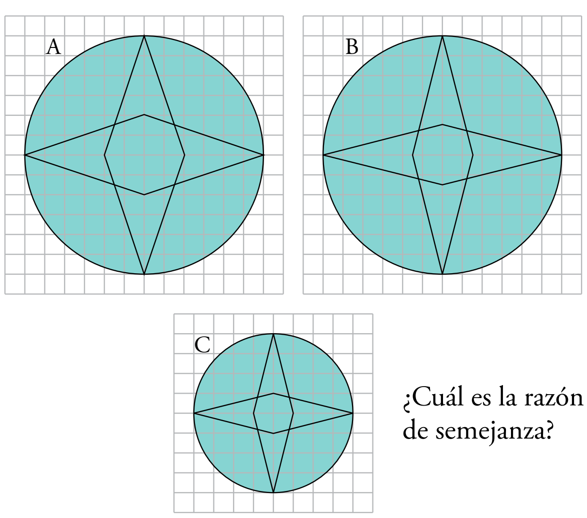


2. ¿Cuánto miden los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en cada una de estas figuras?



Semejanza

3. Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?



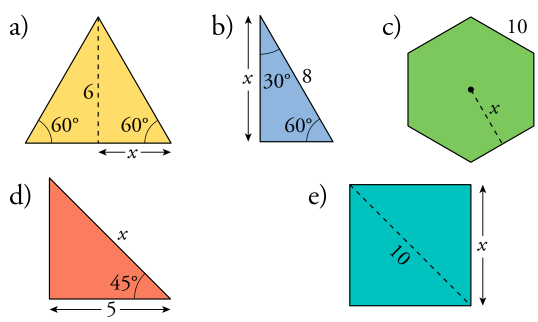
¿Cuál es la razón de semejanza?

Dibuja una figura semejante a la figura A anterior, de forma que la razón de semejanza sea 3/2.

4. Debajo tienes el plano de un piso a escala 1/250. Calcula sus dimensiones (largo y ancho), y su superficie.

Teorema de Pitágoras

5. Calcula x en cada caso:



6. Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 5 m, 6 m y 7 m

b) 13 m, 15 m y 20 m

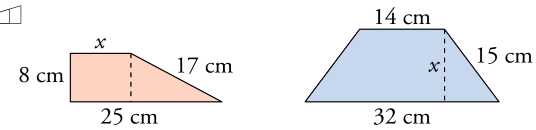
c) 45 m, 27 m y 36 m

d) 35 m, 28 m y 46 m

7. Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?

8. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.

9.



a) Calcula x en cada uno de estos trapecios.

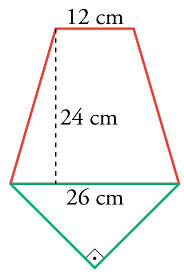
b) Halla las longitudes de sus diagonales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m.

¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?

11. Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.

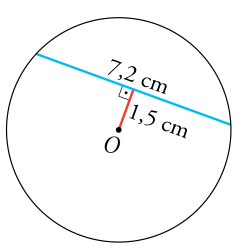


12. En una circunferencia de 15 cm de radio, traza una cuerda AB a 12 cm del centro.

a) ¿Cuál es la longitud de AB?

b) ¿Cuántas cuerdas de la misma longitud que AB hay en esa circunferencia? ¿Cuántas hay que sean paralelas a AB? ¿Cuántas hay paralelas y de la misma longitud que AB?

13. Fíjate en esta circunferencia y responde a las siguientes preguntas:



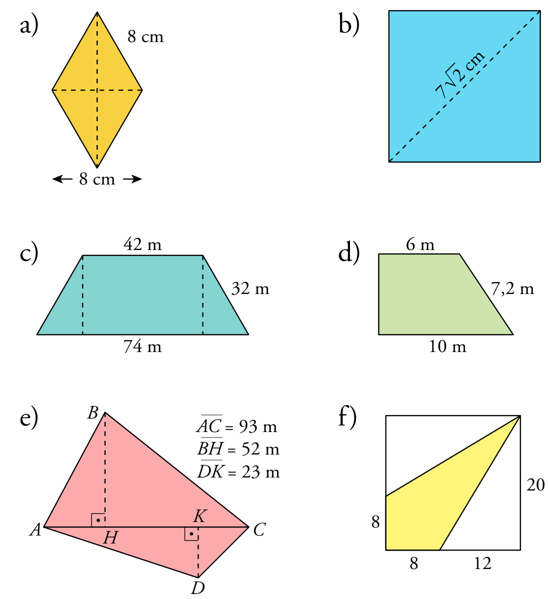
a) ¿Cuánto mide el radio?

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

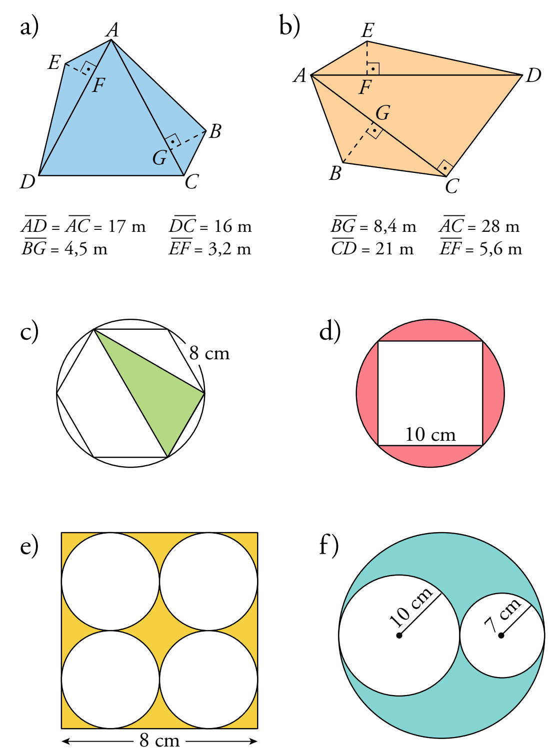
14. Un punto P está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde P a la circunferencia.

Áreas

15. Halla el área de las figuras coloreadas:



16. Calcula el área de las figuras coloreadas:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

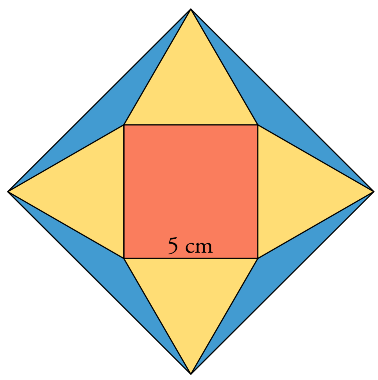
Ejercicios y problemas

17. Calcula:

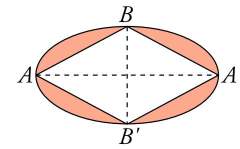
a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



18. Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



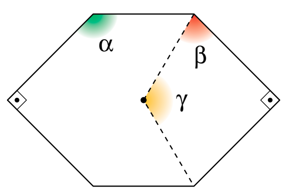
19. En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).

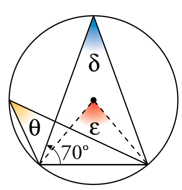
20. Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

a) 90° b) 120° c) 72° d) 153°

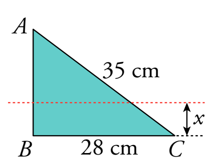
Autoevaluación

1. Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:



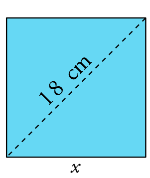


2. ¿A qué altura, x, hay que cortar el triángulo ABC para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?

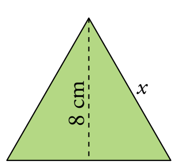


3. Calcula el valor de x en cada caso:

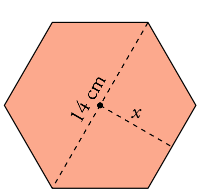
a)



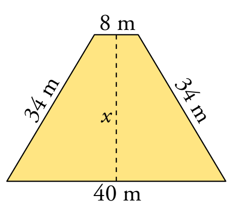
b)



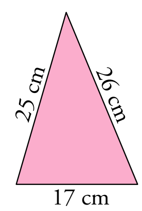
c)

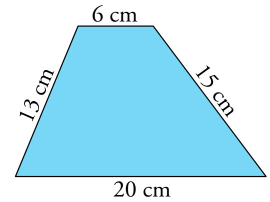


d)



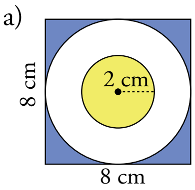
4. Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:



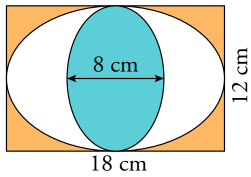


5. Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:

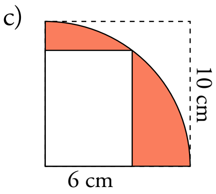
a)



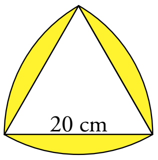
b)



c)



d)



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Página 103

Resuelve

1. Traduce a lenguaje algebraico y resuelve por tanteo el problema del papiro egipcio: *El montón más un séptimo del montón…*

$x + \frac{x}{7} = 24 \rightarrow x = 21$

2. Selecciona, entre las siguientes ecuaciones, la traducción algebraica del problema de los elefantes. Resuélvela primero por tanteo e intenta después resolverla aplicando algún otro método de resolución que conozcas.

Ⓘ $\boxed{x + x^2 + x^4 = 2x}$ Ⓘⓘ $\boxed{x + 2x + 4x = x^2}$ Ⓘⓘⓘ $\boxed{x + 2x + 4x = (6x)^2}$

$x + 2x + 4x = x^2 \rightarrow x = 7$ (por tanteo)

$7x = x^2 \rightarrow x^2 - 7x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 7) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no es solución)} \\ x = 7 \end{cases}$

3. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones resuelve el epitafio de Diofanto?

Ⓘ $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x}$ Ⓘⓘ $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{5}{x} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x} = 1}$

¿A qué edad murió?

Supongamos que la vida entera de Diofanto duró x años. Entonces:

- Juventud: $\frac{x}{6}$
- Su mejilla se cubrió de vello: $+\frac{x}{12}$
- Antes de casarse: $+\frac{x}{7}$
- Tuvo un hijo: +5
- Su hijo murió a los $\frac{x}{2}$ años.
- Diofanto vivió luego: +4

Por tanto, Diofanto vivió:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \rightarrow x = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{75x + 756}{84} \rightarrow 84x = 75x + 756 \rightarrow$$

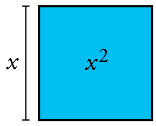
$$\rightarrow 9x = 756 \rightarrow x = 84$$

Diofanto murió a los 84 años.

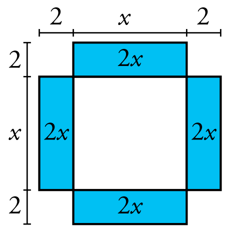
4. **Resuelve, mediante el método geométrico expuesto arriba, las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 + 8x = 84$ **b)** $x^2 + 20x = 169$

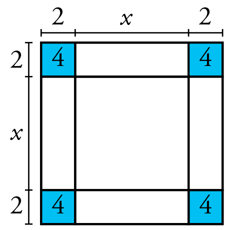
a) $x^2 + 8x = 84$



ÁREA: x^2



ÁREA: $x^2 + 8x (= 84)$

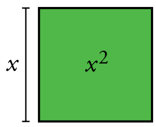


ÁREA: $84 + 4 \cdot 4 = 100$

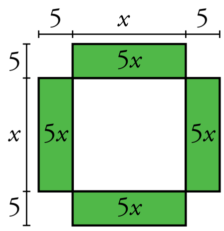
El área del último cuadrado es 100. Por tanto, su lado mide 10. Así:

$2 + x + 2 = 10 \rightarrow x = 6$

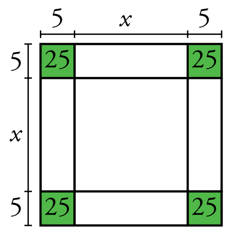
b) $x^2 + 20x = 169$



ÁREA: x^2



ÁREA: $x^2 + 20x (= 169)$



ÁREA: $169 + 4 \cdot 25 = 269$

El área del último cuadrado es 269. Por tanto, su lado mide 16,4.

$5 + x + 5 = 16{,}4 \rightarrow x = 6{,}4$

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Página 104

1. ¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:

a) $8x + 3 = 11x - 12$ **b)** $x^4 - x^3 = 500$ **c)** $3x - 7 = x^2 - 10$

d) $1^x = 5$ **e)** $x^2 - 12 = 4x - 7$ **f)** $2^{x-1} = 16$

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ **h)** $10x + 25 = x^3$ **i)** $x^2 - 20 = 2x - 5$

j) $\sqrt{3x+1} = 16$ **k)** $(2x - 3)^2 = 144$ **l)** $3(x^2 + 3) - 84 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} 8 \cdot 5 + 3 = 43 \\ 11 \cdot 5 - 12 = 43 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

b) $\left.\begin{array}{l} 5^4 - 5^3 = 500 \\ 500 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

c) $\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 5 - 7 = 8 \\ 5^2 - 10 = 15 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

d) $\left.\begin{array}{l} 1^5 = 1 \\ 5 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

e) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 12 = 13 \\ 4 \cdot 5 - 7 = 13 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

f) $\left.\begin{array}{l} 2^{5-1} = 16 \\ 16 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

g) $\left.\begin{array}{l} 5^3 + 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 161 \\ 161 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

h) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 5 + 25 = 75 \\ 5^3 = 125 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

i) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 20 = 5 \\ 2 \cdot 5 - 5 = 5 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4 \\ 16 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

k) $\left.\begin{array}{l} (2 \cdot 5 - 3)^2 = 49 \\ 144 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

l) $\left.\begin{array}{l} 3(5^2 + 3) - 84 = 0 \\ 0 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

2. **En el ejercicio anterior hay varias ecuaciones polinómicas. Escríbelas y di cuál es su grado.**

a) $8x + 3 = 11x - 12$ → Ecuación polinómica de grado 1.

b) $x^4 - x^3 = 500$ → Ecuación polinómica de grado 4.

c) $3x - 7 = x^2 - 10$ → Ecuación polinómica de grado 2.

e) $x^2 - 12 = 4x - 7$ → Ecuación polinómica de grado 2.

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ → Ecuación polinómica de grado 3.

h) $10x + 25 = x^3$ → Ecuación polinómica de grado 3.

i) $x^2 - 20 = 2x - 5$ → Ecuación polinómica de grado 2.

k) $(2x - 3)^2 = 144$ → Ecuación polinómica de grado 2.

l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$ → Ecuación polinómica de grado 2.

Página 105

3. Tanteando, halla la solución entera de estas ecuaciones:

a) $2x^2 = 50$	**b)** $2x^3 + x^2 = 20$	**c)** $4 \cdot 10^x = 40\,000$
d) $(x-12)^4 = 81$	**e)** $(3+x)^{(x-6)} = 121$	**f)** $\sqrt[3]{x-23} = 2$
g) $x^3 + x^2 = 150$	**h)** $3^x = 2\,187$	**i)** $x^x = 46\,656$
j) $\sqrt{7x+4} = 9$	**k)** $5^{x+1} = 15\,625$	**l)** $\sqrt{x-12} = x-8$

a) $x = 5 \rightarrow 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

b) $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 2 \cdot 8 + 4 = 16 + 4 = 20$

c) $x = 4 \rightarrow 4 \cdot 10^4 = 40\,000$

d) $x = 15 \rightarrow (15-12)^4 = 3^4 = 81$

e) $x = 8 \rightarrow (3+8)^{(8-6)} = 11^2 = 121$

f) $x = 31 \rightarrow \sqrt[3]{31-23} = \sqrt[3]{8} = 2$

g) Si $x = 4$, entonces $4^3 + 4^2 = 64 + 16 = 80$. Por tanto, la solución no es válida.
Sin embargo, si $x = 5$, entonces $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$. Luego $x = 5$ es la solución.

h) Si $x = 5$, entonces $3^5 = 243$. Por tanto, la solución no es válida.
Si $x = 6$, entonces $3^6 = 729$. Por tanto, la solución no es válida.
Sin embargo, si $x = 7$, entonces $3^7 = 2\,187$. Luego $x = 7$ es la solución.

i) Si $x = 7$, entonces $7^7 = 823\,543$. Por tanto, la solución no es válida.
Si $x = 6$, entonces $6^6 = 46\,656$. Luego $x = 6$ es la solución.

j) A esta solución es fácil llegar, ya que lo de dentro de la raíz debe valer 81 para que al hacer la raíz salga 9. Si probamos con $x = 10$, tendríamos 74 dentro de la raíz, que no vale. Sin embargo, con $x = 11$, obtenemos $77 + 4 = 81$, por lo tanto, $x = 11$ es la solución.

k) Si $x = 6$, entonces $5^{6+1} = 5^7 = 78\,125$. Por tanto, la solución no es válida.
Si $x = 5$, entonces $5^{5+1} = 5^6 = 15\,625$. Luego $x = 5$ es la solución.

l) Lo primero que vemos es que $x > 12$, ya que si no saldría la raíz de un número negativo, lo cual es imposible. Si probamos con $x = 13$, tendríamos $1 = 5$, que no vale. Si probamos con $x = 16$, tendríamos $2 = 8$, que no vale. Podemos observar que según probemos con números más altos, más dispares van a ser las igualdades. Podemos concluir que esta ecuación no tiene solución.

4. Encuentra la solución, aproximando hasta las décimas, de las siguientes ecuaciones. Hazlo por tanteo ayudándote de la calculadora.

a) $x^2 = 1\,000$	**b)** $x^3 + 1 = 100$	**c)** $x^5 = 1\,500$
d) $x^6 - 40 = 1\,460$	**e)** $(x-3)^4 = 35\,027$	**f)** $x^4 + x^2 = 40$
g) $x^3 + x^2 = 200$	**h)** $x^3 - x^2 = 200$	**i)** $\sqrt{x^2 - x} = 5$
j) $x^{x+1} = 250$		

a) Damos valores enteros a x:

$31^2 = 961 < 1\,000$

$32^2 = 1\,024 > 1\,000$

Por tanto, x es mayor que 31 pero menor que 32.

Damos a x los valores 31,5; 31,6; 31,7; …

$31{,}5^2 = 992{,}25 < 1\,000$

$31{,}6^2 = 998{,}56 < 1\,000$

$31{,}7^2 = 1\,004{,}89 > 1\,000$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 31{,}6$.

b) Es lo mismo que hallar $x^3 = 99$.

Damos valores enteros a x:

$4^3 = 65 < 99$

$5^3 = 126 > 99$

Por tanto, x es mayor que 4 pero menor que 5.

Damos a x los valores 4,5; 4,6; 4,7; …

$4{,}5^3 = 92{,}125 < 99$

$4{,}6^3 = 98{,}336 < 99$

$4{,}7^3 = 104{,}823 > 99$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}6$.

c) Damos valores enteros a x:

$4^5 = 1\,024 < 1\,500$

$5^5 = 3\,125 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 4 y menor que 5.

Damos a x los valores 4,2; 4,3; 4,4; …

$4{,}2^5 = 1\,306{,}912… < 1\,500$

$4{,}3^5 = 1\,470{,}084… < 1\,500$

$4{,}4^5 = 1\,649{,}162… > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}3$.

d) Es lo mismo que hallar $x^6 = 1\,500$.

Damos valores enteros a x:

$3^6 = 729 < 1\,500$

$4^5 = 4\,096 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 3 y menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$3{,}3^6 = 1\,291{,}467… < 1\,500$

$3{,}4^6 = 1\,544{,}804… > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}3$.

e) Damos valores enteros a x:

$(16-3)^4 = 28\,561 < 35\,027$

$(17-3)^4 = 38\,416 > 35\,027$

Por tanto, x es mayor que 16 pero menor que 17.

Damos a x los valores 16,5; 16,6; 16,7; …

$(16{,}5-3)^4 \approx 33\,215{,}06 < 35\,027$

$(16{,}6-3)^4 \approx 34\,210{,}2 < 35\,027$

$(16{,}7-3)^4 \approx 35\,227{,}54$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 16{,}6$.

f) Damos valores enteros a x:

$2^4 + 2^2 = 20 < 40$

$3^4 + 3^2 = 90 > 40$

Por tanto, x es mayor que 2 pero menor que 3.

Damos a x los valores 2,3; 2,4; 2,5; …

$2{,}3^4 + 2{,}3^2 \approx 33{,}27 < 40$

$2{,}4^4 + 2{,}4^2 \approx 38{,}94 > 40$

$2{,}5^4 + 2{,}5^2 \approx 45{,}31 > 40$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 2{,}4$.

g) Damos valores enteros a x:

$5^3 + 5^2 = 150 < 200$

$6^3 + 6^2 = 252 > 200$

Por tanto, x es mayor que 5 y menor que 6.

Damos a x los valores 5,3; 5,4; 5,5; …

$5{,}3^3 + 5{,}3^2 = 176{,}967 < 200$

$5{,}4^3 + 5{,}4^2 = 186{,}624 < 200$

$5{,}5^3 + 5{,}5^2 = 196{,}625 < 200$

$5{,}6^3 + 5{,}6^2 = 206{,}976 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

h) Damos valores enteros a x:

$6^3 - 6^2 = 180 < 200$

$7^3 - 7^2 = 294 > 200$

Por tanto, x es mayor que 6 y menor que 7.

Damos a x los valores 6,1; 6,2; 6,3; …

$6{,}1^3 - 6{,}1^2 = 189{,}771 < 200$

$6{,}2^3 - 6{,}2^2 = 199{,}888 < 200$

$6{,}3^3 - 6{,}3^2 = 210{,}357 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 6{,}2$.

i) Damos valores enteros a x:

$$\sqrt{5^2 - 5} = 4{,}47 < 5$$

$$\sqrt{6^2 - 6} \approx 5{,}48 > 5$$

Por tanto, x es mayor que 5 pero menor que 6.

Damos a x los valores 5,4; 5,5; 5,6; …

$$\sqrt{5{,}4^2 - 5{,}4} \approx 4{,}87 < 5$$

$$\sqrt{5{,}5^2 - 5{,}5} \approx 4{,}97 < 5$$

$$\sqrt{5{,}6^2 - 5{,}6} \approx 5{,}08 > 5$$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

j) Damos valores enteros a x:

$$3^4 = 81 < 250$$

$$4^5 = 1\,024 > 250$$

Por tanto, x es mayor que 3 pero menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$$3{,}3^{4{,}3} \approx 169{,}67 < 250$$

$$3{,}4^{4{,}4} \approx 218{,}03 < 250$$

$$3{,}5^{4{,}5} = 280{,}74 > 250$$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}4$.

2 Ecuaciones de primer grado

Página 107

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

k) $x + \frac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \frac{3(4x^2+1)}{12} - x$

m) $(x-3)(x+3) = \frac{3(x-1)}{2} + x^2$

n) $\frac{x-7}{4} + \frac{25(x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2}(x-7)$

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

$3x - 15x = -15x + 27$

$3x - 15x + 15x = 27$

$3x = 27$

$x = 9$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

$9x + 3x - 4x = 11 - 3x$

$9x + 3x - 4x + 3x = 11$

$11x = 11$

$x = 1$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

$8x + 2(x-3) + 2x + 2 = 8(x-2)$

$8x + 2x - 6 + 2x + 2 = 8x - 16$

$8x + 2x + 2x - 8x = -16 + 6 - 2$

$4x = -12$

$x = -3$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

$13 + x - 50x = 4(10+x) + 2(1-12x)$

$13 + x - 50x = 40 + 4x + 2 - 24x$

$x - 50x - 4x + 24x = 40 + 2 - 13$

$-29x = 29$

$x = -1$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

$12x - (x+3) = 52$

$12x - x - 3 = 52$

$12x - x = 52 + 3$

$11x = 55$

$x = 5$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

$16 - (x+2) = 4(x-4)$

$16 - x - 2 = 4x - 16$

$-x - 4x = -16 - 16 + 2$

$-5x = -30$

$x = 6$

g) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2(x+2)}{7} = \dfrac{x-3}{4}$

$14x - 8(x+2) = 7(x-3)$

$14x - 8x - 16 = 7x - 21$

$14x - 8x - 7x = -21 + 16$

$-x = -5$

$x = 5$

h) $\dfrac{1-x}{25} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{x+7}{9} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3x}{15}$

$18(1-x) - 75x + 50(x+7) = 180 - 90x$

$18 - 18x - 75x + 50x + 350 = 180 - 90x$

$-18x - 75x + 50x + 90x = 180 - 18 - 350$

$47x = -188$

$x = -4$

i) $\dfrac{(1+x)^2}{5} = \dfrac{2x+4}{25} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{5}$

$5(1+x)^2 = 2x + 4 + 5x^2 + 5$

$5(1 + 2x + x^2) = 2x + 5x^2 + 9$

$5 + 10x + 5x^2 = 2x + 5x^2 + 9$

$10x + 5x^2 - 2x - 5x^2 = 9 - 5$

$8x = 4 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{x-4}{8} + \dfrac{9-x}{12} - \dfrac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

$3(x-4) + 2(9-x) - (2x-7) + 120 = 24(x-8)$

$3x - 12 + 18 - 2x - 2x + 7 + 120 = 24x - 192$

$3x - 2x - 2x - 24x = -192 + 12 - 18 - 7 - 120$

$-25x = -325$

$x = 13$

k) $x + \dfrac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

$5x + 9(5+x) = 5(9-x)$

$5x + 45 + 9x = 45 - 5x$

$5x + 9x + 5x = 45 - 45$

$19x = 0$

$x = 0$

l) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \dfrac{3(4x^2+1)}{12} - x$

$3(4x^2 - 1) = 3(4x^2 + 1) - 12x$

$12x^2 - 3 = 12x^2 + 3 - 12x$

$12x^2 - 12x^2 + 12x = 3 + 3$

$12x = 6$

$x = \dfrac{1}{2}$

m) $(x-3)(x+3) = \dfrac{3(x-1)}{2} + x^2$

$2(x^2 - 9) = 3(x-1) + 2x^2$

$2x^2 - 18 = 3x - 3 + 2x^2$

$2x^2 - 3x - 2x^2 = -3 + 18$

$-3x = 15$

$x = -5$

n) $\dfrac{x-7}{4} + \dfrac{25(x-2)}{3} = \dfrac{5x+35}{4} + \dfrac{5}{2}(x-7)$

$3(x-7) + 100(x-2) = 3(5x+35) + 30(x-7)$

$3x - 21 + 100x - 200 = 15x + 105 + 30x - 210$

$3x + 100x - 15x - 30x = 105 - 210 + 21 + 200$

$58x = 116$

$x = 2$

3 Ecuaciones de segundo grado

Página 108

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **d)** $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ **f)** $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ **h)** $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \to x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6 \pm 0}{18} \to x = \dfrac{-1}{3}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{6 \pm 0}{18} = \dfrac{1}{3}$ Solución doble.

d) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ No tiene solución.

e) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \to x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -3$

f) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \dfrac{5 \pm 1}{12} \to x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1}{3}$

g) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 60}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$ No tiene solución.

h) $x = \dfrac{0,1 \pm \sqrt{0,01 - 4 \cdot 1 \cdot 0,2}}{2} = \dfrac{0,1 \pm \sqrt{0,01 - 0,8}}{2} = \dfrac{0,1 \pm \sqrt{-0,79}}{2}$ No tiene solución.

Página 109

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$

f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} \;\rightarrow\; x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -2$

b) $7x^2 + 28 = 0$

$7x^2 = -28$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4} \;\rightarrow$ No tiene solución

c) $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \;\rightarrow\; x_1 = \dfrac{3}{2} \text{ y } x_2 = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x^2 + 42x = 0$

$3x(x + 14) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -14$

e) $3x^2 = 42x$

$3x^2 - 42x = 0$

$3x(x - 14) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 14$

f) $11x^2 - 37x = 0$

$x(11x - 37) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \dfrac{37}{11}$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14x + 56$

$2(x^2 + 10x + 25) + (x^2 - 6x + 9) = 14x + 56$

$2x^2 + 20x + 50 + x^2 - 6x + 9 = 14x + 56$

$3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1 \;\rightarrow$ No tiene solución.

h) $7x^2 + 5 = 68$

$7x^2 = 63$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} \;\rightarrow\; x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -3$

Página 110

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 2(x + 5) = (x + 3)^2 - 19$

b) $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

c) $(2x + 4)(x - 1) + (3x + 5)^2 = 3(2x + 5)^2 + x$

d) $(x - 2)(4x + 2) + (3 - 3x)^2 = 4(5x + 1)^2 - (x - 1)$

a) $3x^2 - 2x - 10 = x^2 + 6x + 9 - 19 \rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \rightarrow 2x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = 4$

b) $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

$15x^2 - 21x + 20x - 28 = 4x^2 + 28x + 49 + 53$

$15x^2 - 4x^2 - 21x + 20x - 28x - 28 - 49 - 53 = 0 \rightarrow 11x^2 - 29x - 130 = 0$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 4 \cdot 11 \cdot (-130)}}{22} = \frac{29 \pm \sqrt{841 + 5720}}{22} = \frac{29 \pm \sqrt{6561}}{22} = \frac{29 \pm 81}{22}$$

$x_1 = 5$ y $x_2 = \dfrac{-52}{22} = \dfrac{-26}{11}$

c) $2x^2 - 2x + 4x - 4 + 9x^2 + 30x + 25 = 12x^2 + 60x + 75 + x$

$11x^2 + 32x + 21 = 12x^2 - 61x + 75 \rightarrow x^2 + 29x + 54 = 0$

$$x = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54}}{2} = \frac{-29 \pm \sqrt{841 - 216}}{2} = \frac{-29 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-29 \pm 25}{2} \rightarrow x_1 = -2 \text{ y } x_2 = -27$$

d) $4x^2 + 2x - 8x - 4 + 9 - 18x + 9x^2 = 100x^2 + 40x + 4 - x + 1$

$13x^2 - 24x + 5 = 100x^2 + 39x + 5 \rightarrow 87x^2 + 63x = 0 \rightarrow 3x \cdot (29x + 21) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -\dfrac{21}{29}$

Página 111

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x(x+1) - \dfrac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{3x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{x}{3} - 1 + \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{2}{3x}$

a) $3x(x+1) - \dfrac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

$3x^2 + 3x - \dfrac{(x-2)^2}{2} = x^2 - x + x - 1 + 15$

$6x^2 + 6x - x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 + 30$

$3x^2 + 10x - 32 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-32)}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-10 \pm 22}{6} \rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = \frac{-32}{6} = \frac{-16}{3}$$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{3x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{2}$

$2(x+1)^2 - 3(x-1) + 6x(x+1) = 6$

$2(x^2 + 2x + 1) - 3x + 3 + 6x^2 + 6x = 6$

$2x^2 + 4x + 2 - 3x + 3 + 6x^2 + 6x - 6 = 0$

$8x^2 + 7x - 1 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{16} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{-7 \pm 9}{16} \rightarrow x_1 = \frac{1}{8} \text{ y } x_2 = -1$$

c) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} \rightarrow 2x \cdot \left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{x}\right) = 2x \cdot \dfrac{3}{2} \rightarrow 3x^2 - 2 = 3x \rightarrow 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{6} \\[2ex] x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6} \end{cases}$$

d) $\dfrac{x}{3} - 1 + \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{2}{3x} \rightarrow 3x \cdot \left(\dfrac{x}{3} - 1 + \dfrac{1}{x}\right) = 3x \cdot \left(1 - \dfrac{2}{3x}\right) \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 3x - 2 \rightarrow$

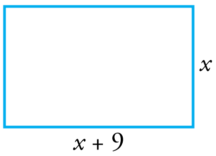
$\rightarrow x^2 - 3x - 3x + 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x = \dfrac{6 + 4}{2} \rightarrow x = \dfrac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\[2ex] x = \dfrac{6 - 4}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

4 Resolución de problemas con ecuaciones

Página 112

1. La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm². Calcula las dimensiones de este rectángulo.



$$x \cdot (x + 9) = 400$$

$$x^2 + 9x - 400 = 0 \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -25 \end{cases}$$

- $x_1 = 16$ La altura es de 16 cm y la base es de $16 + 9 = 25$ cm.
- $x_2 = -25$ No es una solución válida, porque los lados no pueden tener una medida negativa.

2. Al aumentar 10 m de radio, una finca circular aumenta unos 3 456 m² de superficie. ¿Qué diámetro tiene la finca ampliada?

$S = \pi \cdot r^2$

$$\pi \cdot r^2 + 3\,456 = \pi \cdot (r + 10)^2 \;\to\; \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (r^2 + 20r + 100) - 3\,456 \;\to$$

$$\to\; r^2 = r^2 + 20r + 100 - 1\,100 \;\to$$

$$\to\; 20r = 1\,000 \;\to\; r \approx 50$$

El diámetro actual es de, aproximadamente, $(50 + 10) \cdot 2 = 120$ m.

Página 113

3. Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80 % de pureza, junto con otro lingote de oro de 1 kg de peso. ¿Cuál era la pureza del segundo, si la de la mezcla resultante es del 67 %?

Peso puro del primer lingote $\to$ $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ kg

Peso total de la mezcla $\to$ 4 kg

Peso puro de la mezcla $\to$ $4 \cdot 0{,}67 = 2{,}68$ kg

Kilos puros del segundo lingote $\to$ $2{,}68 - 2{,}4 = 0{,}28$ kg

Pureza del segundo lingote $\to$ $\dfrac{0{,}28}{1} \cdot 100 = 28\,\%$

4. Un coche tarda 5 h en cubrir el trayecto entre A-B. Un camión, que ha salido a la misma hora, y realiza el trayecto B-A, tarda 2 h y 55 min en cruzarse con el coche. ¿Cuánto durará el viaje completo del camión?

5 h = 300 min; 2 h 55 min = 175 min

Cuando se cruzan, al coche le faltan 125 min para recorrer el mismo espacio que el camión en 175 min. Por tanto:

$$\frac{175}{125} = \frac{x}{175} \to x = \frac{175^2}{125} = \frac{30\,625}{125} = 245 \text{ min}$$

El viaje completo del camión dura 245 + 175 = 420 min = 7 h.

5. Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?

Llamamos x al tiempo que trabajó uno de los albañiles, entonces, el otro albañil trabajó $\frac{2}{5}x$.

$$x + \frac{2}{5}x = 1\,400 \to \frac{5x + 2x}{5} = 1\,400 \to \frac{7}{5}x = 1\,400 \to x = \frac{1\,400 \cdot 5}{7} = 200 \cdot 5 \to x = 1\,000$$

Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 € y el otro, debe cobrar, $1\,000\frac{2}{5} = 400$ €.

6. Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos por separado en llenar el depósito?

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

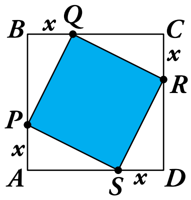
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \to \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \to 2x = 24 \to x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

Página 114

Hazlo tú

En esta misma figura, calcula el valor de x para que el lado del cuadrado coloreado sea igual a $\sqrt{26}$ cm.



$$x^2 + (6 - x)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 \rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones válidas: $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$.

Ejercicios y problemas

Página 115

Practica

Resolución mental y por tanteo

1. **Resuelve mentalmente y explica con palabras el proceso seguido.**

a) $(x+2)^2 = 64$ **b)** $7 - \frac{x+2}{3} = 5$ **c)** $\frac{5x+1}{8} = 2$

d) $\frac{(x+1)^2}{3} - 10 = 2$ **e)** $3 - 2^{x-5} = 2$ **f)** $\sqrt{x-7} = 2$

a) El único número que elevado al cuadrado da 64 es 8; por lo tanto, $(x+2) = 8$, por lo que $x = 6 \rightarrow (6+2)^2 = 8^2 = 64$

b) Necesitamos que $\frac{x+2}{3} = 2$, por lo que $x = 4 \rightarrow 7 - \frac{4+2}{3} = 7 - \frac{6}{3} = 7 - 2 = 5$

c) El número que dividido entre 8 da 2 es 16, por lo que la suma del numerador debe dar 16 y, para ello, $x = 3 \rightarrow \frac{(5 \cdot 3)+1}{8} = \frac{15+1}{8} = \frac{16}{8} = 2$

d) $\frac{(x+1)^2}{3}$ tiene que valer 12, porque $12 - 10 = 2$. Por tanto, $(x+1)^2$ tiene que ser igual a 36, porque $36 : 3 = 12$. Entonces:

$x + 1$ puede ser igual a $6 \rightarrow x = 5$

$x + 1$ puede ser igual a $-6 \rightarrow x = -7$

e) 2^{x-5} tiene que valer $1 \rightarrow x - 5$ tiene que ser igual a $0 \rightarrow x = 5$

f) Para que el resultado sea 2, la raíz cuadrada debe ser la de 4. El número que restándole 7 da 4, es $x = 11$; $\sqrt{11-7} = \sqrt{4} = 2$

2. **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x-5} = 27$ **b)** $\sqrt{x+9} = 13$

c) $(x+1)^3 = 216$ **d)** $x^3 - x^2 - x = 15$

a) $x = 8$ b) $x = 160$ c) $x = 5$ d) $x = 3$

3. **Busca por tanteo una solución aproximada de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^3 = 381$ **b)** $x^4 - x^2 = 54$ **c)** $x - \sqrt{x+5} = 0$

d) $3^{x-1} = 0{,}005$ **e)** $5x = 0{,}32$ **f)** $x^{0,75} = 17$

a) $x \approx 7{,}25$ b) $x \approx 4{,}14$ c) $x \approx 3$

d) $x \approx -4$ e) $x \approx -0{,}7$ f) $x \approx 44$

Ecuaciones de primer grado

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:**

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$ **b)** $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$ **d)** $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x)$

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1) \rightarrow 3x - 2x - 6 = x - 3x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $3 \cdot 1 - 2(1 + 3) = 1 - 3(1 + 1) \rightarrow -5 = -5$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0 \rightarrow 4 + x - 4 + 4x + 10 + 5x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 10x = -10 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $4 - 1 - 4(1 + 1) + 5(2 - 1) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3) \rightarrow 2x + 7 - 2x + 2 = 3x + 9 \rightarrow 0 = 3x \rightarrow x = 0$

Comprobación: $2 \cdot 0 + 7 - 2(0 - 1) = 3 \cdot (0 + 3) \rightarrow 9 = 9$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x) \rightarrow 8x - 28 - 9x - 3 = 2 - 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 26 \rightarrow x = -13$

Comprobación: $4[2(-13) - 7] - 3[3(-13) + 1] = 2 - [7 - (-13)] \rightarrow$

$\rightarrow -132 + 114 = 2 - 20 \rightarrow -18 = -18$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{x+1}{3} - 2$ **b)** $1 = \dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x+4}{5} = \dfrac{x+2}{2}$

d) $\dfrac{5x-16}{6} = -\dfrac{x+8}{12} + \dfrac{x+1}{3}$ **e)** $\dfrac{2x-4}{3} = 3 - \dfrac{4+x}{2}$

a) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{x+1}{3} - 2 \rightarrow 15\left(\dfrac{x-3}{5}\right) = 15\left(\dfrac{x+1}{3} - 2\right)$

$3(x - 3) = 5(x + 1) - 30 \rightarrow 3x - 9 = 5x + 5 - 30 \rightarrow 16 = 2x \rightarrow x = 8$

b) $1 = \dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x}{2} \rightarrow 6 \cdot 1 = 6\left(\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x}{2}\right) \rightarrow 6 = 2(x + 3) - 3x \rightarrow$

$\rightarrow 6 = 2x + 6 - 3x \rightarrow x = 0$

c) $\dfrac{3x+4}{5} = \dfrac{x+2}{2} \rightarrow 2(3x - 4) = 5(x + 2) \rightarrow 6x - 8 = 5x + 10 \rightarrow x = 18$

d) $\dfrac{5x-16}{6} = -\dfrac{x+8}{12} + \dfrac{x+1}{3} \rightarrow 12\left(\dfrac{5x-16}{6}\right) = 12\left(-\dfrac{x+8}{12} + \dfrac{x+1}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2(5x - 16) = -(x + 8) + 4(x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow 10x - 32 = -x - 8 + 4x + 4 \rightarrow 7x = 28 \rightarrow x = 4$

e) $\dfrac{2x-4}{3} = 3 - \dfrac{4+x}{2} \rightarrow 6\left(\dfrac{2x-4}{3}\right) = 6\left(3 - \dfrac{4+x}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2(2x - 4) = 18 - 3(4 + x) \rightarrow$

$\rightarrow 4x - 8 = 18 - 12 - 3x \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$

6. **Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$ **b)** $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24} = \frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60}$ **d)** $2x - \frac{1}{2}(1+3x) - \frac{3}{5}(x-2) = \frac{1}{4}(3-x)$

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5} \rightarrow 60\left(\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3}\right) = 60\left(-\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}\right)$

$30(x+2) - 20(x+3) = -15(x-4) + 12(x-5) \rightarrow$

$\rightarrow 30x + 60 - 20x - 60 = -15x + 60 + 12x - 60 \rightarrow 37x = 0 \rightarrow x = 0$

Comprobación: $\frac{0+2}{2} - \frac{0+3}{3} = -\frac{0-4}{4} + \frac{-5}{5} \rightarrow 1 - 1 = 1 - 1 \rightarrow 0 = 0$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4} \rightarrow 40\left(\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8}\right) = 40\left(\frac{x+1}{4}\right)$

$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$

Comprobación: $\frac{2}{5} - \frac{-1}{10} + \frac{-2}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24} = \frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60} \rightarrow 120\left(\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24}\right) = 120\left(\frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60}\right)$

$24(x+5) - 5(x+5) = 12(x+6) + 2(x+4) \rightarrow$

$\rightarrow 24x + 120 - 5x - 25 = 12x + 72 + 2x + 8 \rightarrow 5x = -15 \rightarrow x = -3$

Comprobación: $\frac{-3+5}{5} - \frac{-3+5}{24} = \frac{2}{5} - \frac{1}{12} = \frac{19}{60}$

$\frac{-3+6}{6} + \frac{-3+4}{60} = \frac{3}{10} + \frac{1}{60} = \frac{19}{60}$

d) $2x - \frac{1}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3}{4} - \frac{x}{4} \rightarrow 20 \cdot \left(2x - \frac{1}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{6}{5}\right) = 20 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 40x - 10 - 30x - 12x + 24 = 15 - 5x \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

Comprobación: $2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2} - \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{2}{3}$

7. **Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:**

a) $(4x-3)(4x+3) - 4(3-2x)^2 = 3x$ **b)** $2x(x+3) + (3-x)^2 = 3x(x+1)$

c) $\frac{x(x+1)}{2} - \frac{(2x-1)^2}{8} = \frac{3x+1}{4} - \frac{1}{8}$

a) $(4x-3)(4x+3) - 4(3-2x)^2 = 3x \rightarrow 16x^2 - 9 - 4(9 + 4x^2 - 12x) = 3x \rightarrow$

$\rightarrow 16x^2 - 9 - 36 - 16x^2 + 48x = 3x \rightarrow 45x = 45 \rightarrow x = 1$

b) $2x(x+3) + (3-x)^2 = 3x(x+1) \;\rightarrow\; 2x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x = 3x^2 + 3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 9 = 3x \;\rightarrow\; x = 3$

c) $\dfrac{x(x+1)}{2} - \dfrac{(2x-1)^2}{8} = \dfrac{3x+1}{4} - \dfrac{1}{8} \;\rightarrow\; 8\left(\dfrac{x(x+1)}{2} - \dfrac{(2x-1)^2}{8}\right) = 8\left(\dfrac{3x+1}{4} - \dfrac{1}{8}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x(x-1) - (2x-1)^2 = 2(3x+1) - 1 \;\rightarrow\; 4x^2 - 4x - (4x^2 + 1 - 4x) = 6x + 2 - 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -1 = 6x + 1 \;\; 8 \;\; -2 = 6x \;\rightarrow\; x = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

8. **Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución y otras tienen infinitas soluciones. Resuélvelas y comprueba los resultados.**

a) $\mathbf{4(2x+1) - 3(x+3) = 5(x-2)}$

b) $\mathbf{2(x-3) + 1 = 3(x-1) - (2+x)}$

c) $\mathbf{\dfrac{3x+1}{2} = 2x - \dfrac{1-x}{2}}$

d) $\mathbf{x + \dfrac{2x-7}{4} = 2x + \dfrac{x-1}{2}}$

a) $8x + 4 - 3x - 9 = 5x - 10 \;\rightarrow\; 5x - 5 = 5x - 10 \;\rightarrow\; 0x = -5 \;\rightarrow$ No tiene solución.

b) $2x - 6 + 1 = 3x - 3 - 2 - x \;\rightarrow\; 2x - 5 = 2x - 5 \;\rightarrow\; 0x = 0 \;\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2 \cdot \left(\dfrac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot \left(2x - \dfrac{1-x}{2}\right) \;\rightarrow\; 3x + 1 = 4x - 1 + x \;\rightarrow\; 2 = 2x \;\rightarrow\; x = 1$

Comprobación: $\dfrac{3 \cdot 1 + 1}{2} = 2 \cdot 1 - \dfrac{1-1}{2} \;\rightarrow\; 2 = 2$

d) $4 \cdot \left(x + \dfrac{2x-7}{4}\right) = 4 \cdot \left(2x + \dfrac{x-1}{2}\right) \;\rightarrow\; 4x + 2x - 7 = 8x + 2x - 2 \;\rightarrow\; 6x - 7 = 10x - 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -4x = 5 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{5}{4}$

Comprobación: $-\dfrac{5}{4} - \dfrac{38}{16} = -\dfrac{10}{4} - \dfrac{9}{8} \;\rightarrow\; -\dfrac{20}{16} - \dfrac{38}{16} = -\dfrac{40}{16} - \dfrac{18}{16} \;\rightarrow\; \dfrac{-58}{16} = \dfrac{-58}{16}$

9. **Solo una de las siguientes ecuaciones tiene solución única. Resuélvelas y compruébalo.**

a) $\mathbf{\dfrac{x+1}{2} = 2 + \dfrac{2x-3}{4}}$

b) $\mathbf{\dfrac{4x-3}{12} - \dfrac{2x+1}{4} = \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{3x+1}{6}}$

c) $\mathbf{\dfrac{1+x}{3} - \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{26}{15} - \dfrac{4+x}{2}}$

d) $\mathbf{\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}}$

a) $4 \cdot \left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4 \cdot \left(2 + \dfrac{2x-3}{4}\right) \;\rightarrow\; 2x + 2 = 8 + 2x - 3 \;\rightarrow\; 2x + 2 = 2x + 5 \;\rightarrow\; 0x = 3 \;\rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

b) $12 \cdot \left(\dfrac{4x-3}{12} - \dfrac{2x+1}{4}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{3x+1}{6}\right) \;\rightarrow\; 4x - 3 - 6x - 3 = 4x - 4 - 6x - 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -2x - 6 = -2x - 6 \;\rightarrow\; 0x = 0 \;\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $30 \cdot \left(\dfrac{1+x}{3} - \dfrac{x+3}{5}\right) = 30 \cdot \left(\dfrac{26}{15} - \dfrac{4+x}{2}\right) \;\rightarrow\; 10 + 10x - 6x - 18 = 52 - 60 - 15x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -8 + 4x = -8 - 15x \;\rightarrow\; 19x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Comprobación: $\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{26}{15} - \dfrac{4}{2} \;\rightarrow\; \dfrac{5}{15} - \dfrac{9}{15} = \dfrac{52}{30} - \dfrac{60}{30} \;\rightarrow\; -\dfrac{4}{15} = -\dfrac{4}{15}$

d) $16 \cdot \left[\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2}\right] = 16 \cdot \left[\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}\right] \to (x+1)^2 - 8 - 8x = (x-1)^2 - 8 - 4x \to$

$\to x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x \to x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x - 7 \to$

$\to 0x = 0 \to$ Tiene infinitas soluciones.

10. **Resuelve.**

a) $\frac{2}{3}(x-3) + \frac{1}{5}(x-5) = \frac{3}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{4x}{15}$

b) $2x - \frac{1}{2}(1 + 3x) = \frac{3}{5}(x-2) + \frac{1}{4}(3-x)$

c) $\frac{4}{3}(2-x) - \frac{3}{4}(2x-1) = 4x - 7\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}$

d) $x(8x-1) - (3x-4)^2 = x(7-x) - 2(x-4)$

a) $\frac{2x}{3} - \frac{6}{3} + \frac{x}{5} - \frac{5}{5} = \frac{3x}{5} + \frac{6}{15} + \frac{4x}{15} \to 15 \cdot \left(\frac{2x}{3} - \frac{6}{3} + \frac{x}{5} - \frac{5}{5}\right) = 15 \cdot \left(\frac{3x}{5} + \frac{6}{15} + \frac{4x}{15}\right) \to$

$\to 10x - 30 + 3x - 15 = 9x + 6 + 4x \to 13x - 45 = 13x + 6 \to$

$\to 0x = 51 \to$ No tiene solución.

b) $20 \cdot \left(2x - \frac{1}{2} - \frac{3x}{2}\right) = 20 \cdot \left(\frac{3x}{5} - \frac{6}{5} + \frac{3}{4} - \frac{x}{4}\right) \to 40x - 10 - 30x = 12x - 24 + 15 - 5x \to$

$\to 10x - 10 = 7x - 9 \to 3x = 1 \to x = \frac{1}{3}$

c) $\frac{8}{3} - \frac{4x}{3} - \frac{6x}{4} + \frac{3}{4} = 4x - 7x + \frac{7}{2} - \frac{3}{4} \to$

$\to 12 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{4x}{3} - \frac{6x}{4} + \frac{3}{4}\right) = 12 \cdot \left(4x - 7x + \frac{7}{2} - \frac{3}{4}\right) \to$

$\to 32 - 16x - 18x + 9 = 48x - 84x + 42 - 9 \to 41 - 34x = 33 - 36x \to 2x = -8 \to$

$\to x = -\frac{8}{2} = -4$

d) $8x^2 - x - (9x^2 - 24x + 16) = 7x - x^2 - 2x + 8 \to -x^2 + 23x - 16 = -x^2 + 5x + 8 \to$

$\to 18x = 24 \to x = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

Página 116

Ecuaciones de segundo grado

11. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:**

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$ **f)** $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$ **h)** $3x^2 - 6 = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(1 - 3x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/3 \end{cases}$

c) $2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5/2 \end{cases}$

d) $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $9x^2 - 25 = 0 \rightarrow 9x^2 = 25 \rightarrow x^2 = \dfrac{25}{9} \begin{cases} x = 5/3 \\ x = -5/3 \end{cases}$

f) $4x^2 + 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = -100$ No tiene solución.

g) $16x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \dfrac{100}{16} \begin{cases} x = 10/4 = 5/2 \\ x = -10/4 = -5/2 \end{cases}$

h) $3x^2 - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

12. **Resuelve.**

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **d)** $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ **f)** $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ **h)** $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

a) $x^2 + 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 21 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \end{cases}$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \dfrac{12 \pm 0}{18} = \dfrac{2}{3}$

d) $x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} = \dfrac{-28 \pm 0}{8} = -\dfrac{7}{2}$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{8} = \dfrac{20 \pm 0}{8} = \dfrac{5}{2}$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2) \cdot 2}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = -2/4 = -1/2 \\ x = 2 \end{cases}$

13. **Resuelve igualando a cero cada factor:**

a) $x(3x - 1) = 0$ **b)** $3x(x + 2) = 0$ **c)** $(x + 1)(x + 3) = 0$

d) $(x - 5)(x + 5) = 0$ **e)** $(x - 5)^2 = 0$ **f)** $(2x - 5)^2 = 0$

a) $x = 0;\ 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ *Soluciones*: $x = 0;\ x = \dfrac{1}{3}$

b) $3x = 0;\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ *Soluciones*: $x = 0;\ x = -2$

c) $x + 1 = 0;\ x + 3 = 0$ *Soluciones*: $x = -1;\ x = -3$

d) $x - 5 = 0;\ x + 5 = 0$ *Soluciones*: $x = 5;\ x = -5$

e) $x - 5 = 0$ *Solución*: $x = 5$

f) $2x - 5 = 0$ *Solución*: $x = \dfrac{5}{2}$

14. **Opera y resuelve.**

a) $(x - 2)(3x + 2) = (x - 4)(2x + 1)$ **b)** $(x - 1)^2 + (1 - x)(x + 2) = 0$

c) $(x + 1)^2 = (x + 1)(2x - 3)$ **d)** $5(x + 2)^2 - (7x + 3)(x + 2) = 0$

a) $3x^2 + 2x - 6x - 4 = 2x^2 + x - 8x - 4 \rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 7x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x + 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -3$

b) $x^2 - 2x + 1 + x + 2 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

c) $x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3x + 2x - 3 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - x - 3 \rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 5}{-2} \rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 4$

d) $5 \cdot (x^2 + 4x + 4) - (7x^2 + 14x + 3x + 6) = 0 \rightarrow 5x^2 + 20x + 20 - 7x^2 - 14x - 3x - 6 = 0$

$\rightarrow -2x^2 + 3x + 14 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 14}}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{121}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 11}{-4} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

15. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8$ **b)** $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)$ **d)** $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8 \rightarrow 2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 - 1 - 8 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} \rightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $(2x-3)(2x+3)-x(x+1)-5=0 \to 4x^2-9-x^2-x-5=0 \to 3x^2-x-14=0 \to$

$\to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 3\cdot(-14)}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \dfrac{1 \pm 13}{6} \begin{cases} x = 7/3 \\ x = -2 \end{cases}$

c) $(2x+1)^2 = 4+(x+2)(x-2) \to 4x^2+1+4x = 4+x^2-4 \to 3x^2+4x+1=0 \to$

$\to x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3\cdot 1}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \dfrac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$

d) $(x+4)^2-(2x-1)^2 = 8x \to x^2+16+8x-(4x^2+1-4x)-8x = 0 \to$

$\to x^2+16+8x-4x^2-1+4x-8x=0 \to -3x^2+4x+15=0 \to$

$\to x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot(-3)\cdot 15}}{-6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{196}}{-6} = \dfrac{-4 \pm 14}{-6} \begin{cases} x = -5/3 \\ x = 3 \end{cases}$

16. **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \dfrac{(3x-1)^2-9}{2}$

b) $\dfrac{x}{3}(x-1) - \dfrac{x}{4}(x+1) + \dfrac{3x+4}{12} = 0$

c) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \dfrac{x-3}{3}$

d) $\dfrac{(x-1)^2-3x+1}{15} + \dfrac{x+1}{5} = 0$

e) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{(x-2)^2}{6} = \dfrac{1}{6}$

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \dfrac{(3x-1)^2-9}{2} \to \dfrac{25x^2-16}{4} = \dfrac{2(9x^2+1-6x-9)}{4} \to$

$\to 25x^2-16 = 18x^2+2-12x-18 \to 7x^2+12x=0 \to$

$\to x(7x+12)=0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -12/7 \end{cases}$

b) $\dfrac{x}{3}(x-1) - \dfrac{x}{4}(x+1) + \dfrac{3x+4}{12} = 0 \to 12\left(\dfrac{x}{3}(x-1) - \dfrac{x}{4}(x+1) + \dfrac{3x+4}{12}\right) \to$

$\to 4x(x-1)-3x(x+1)+3x+4=0 \to 4x^2-4x-3x^2-3x+3x+4=0 \to$

$\to x^2-4x+4=0 \to x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 4}}{2} = 2$

c) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \dfrac{x-3}{3} \to \dfrac{x^2+x-2}{12} - \dfrac{x^2-x-2}{6} - 1 = \dfrac{x-3}{3} \to$

$\to 12\left(\dfrac{x^2+x-2}{12} - \dfrac{x^2-x-2}{6} - 1\right) = 12\left(\dfrac{x-3}{3}\right) \to$

$\to x^2+x-2-2(x^2-x-2)-12 = 4(x-3) \to$

$\to x^2+x-2-2x^2+2x+4-12 = 4x-12 \to -x^2-x+2=0 \to$

$\to x^2+x-2=0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

d) $\dfrac{(x-1)^2-3x+1}{15} + \dfrac{x+1}{5} = 0 \to 15\left[\dfrac{(x-1)^2-3x+1}{15} + \dfrac{x+1}{5}\right] = 0 \to$

$\to x^2-2x+1-3x+1+3x+3=0 \to x^2-2x+5=0 \to$

$\to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 5}}{2} \to$ No tiene solución.

e) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6} \to$

$\to 12\left(\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6}\right) = 12 \cdot \frac{1}{6} \to$

$\to 6(x+1) - 3(x^2 - 2x + 1) - 4(x+2) + 2(x^2 - 4x + 4) = 2 \to$

$\to 6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = 2 \to$

$\to -x^2 + 3 = 0 \to x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

17. **Resuelve.**

a) $\frac{7(x-5)}{8} + x - 2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{11}{4}\right)$

b) $\frac{x+3}{3} - \frac{(4-x)^2}{9} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{(3x+1)(2x+3)}{21} + \frac{x^2+3}{7} = \frac{x^2+x-2}{3}$

d) $\frac{x^2-4}{3} + \frac{(2x-2)^2}{8} = \frac{7x^2-10}{12}$

a) $\frac{7x-35}{8} + x - 2 = x^2 - \frac{11x}{4} - \frac{9x}{2} + \frac{99}{8} \to$

$\to 8 \cdot \left(\frac{7x-35}{8} + x - 2\right) = 8 \cdot \left(x^2 - \frac{11x}{4} - \frac{9x}{2} + \frac{99}{8}\right) \to$

$\to 7x - 35 + 8x - 16 = 8x^2 - 22x - 36x + 99 \to 15x - 51 = 8x^2 - 58x + 99 \to$

$\to 8x^2 - 73x + 150 = 0$

$x = \frac{73 \pm \sqrt{(-73)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 150}}{2 \cdot 8} = \frac{73 \pm \sqrt{5\,329 - 4\,800}}{16} = \frac{73 \pm \sqrt{529}}{16} = \frac{73 \pm 23}{16} \to$

$\to x_1 = 6;\ x_2 = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$

b) $9 \cdot \left(\frac{x+3}{3} - \frac{(4-x)^2}{9}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \to 3x + 9 - (4-x)^2 = 3 \to$

$\to 3x + 9 - 16 + 8x - x^2 = 3 \to -x^2 + 11x - 10 = 0 \to$

$\to x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{-2} = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{-11 \pm 9}{-2} \to x_1 = 1;\ x_2 = 10$

c) $21 \cdot \left[\frac{(3x+1)(2x+3)}{21} + \frac{x^2+3}{7}\right] = 21 \cdot \left(\frac{x^2+x-2}{3}\right) \to$

$\to (3x+1) \cdot (2x+3) + 3x^2 + 9 = 7x^2 + 7x - 14 \to$

$\to 6x^2 + 9x + 2x + 3 + 3x^2 + 9 = 7x^2 + 7x - 14 \to 9x^2 + 11x + 12 = 7x^2 + 7x - 14 \to$

$\to 2x^2 + 4x + 26 = 0 \to x^2 + 2x + 13 = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-48}}{2} \to$

$\to$ No tiene solución.

d) $24 \cdot \left[\frac{x^2-4}{3} + \frac{(2x-2)^2}{8}\right] = 24 \cdot \left(\frac{7x^2-10}{12}\right) \to 8x^2 - 32 + 3 \cdot (2x-2)^2 = 14x^2 - 20 \to$

$\to 8x^2 - 32 + 12x^2 - 24x + 12 = 14x^2 - 20 \to 20x^2 - 24x - 20 = 14x^2 - 20 \to$

$\to 6x^2 - 24x = 0 \to 6x(x-4) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = 4$

18. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

d) $\frac{15}{x} = \frac{72-6x}{2x^2} + 2$

a) $x \cdot \left(5x - \frac{3}{x}\right) = x \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right) \rightarrow 5x^2 - 3 = x + 1 \rightarrow 5x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} \rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

b) $6x \cdot \left(\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x}\right) = 6x \cdot \left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 6x - 18 + 12 - 3x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (5x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{5}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

c) $2x\left(\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x\left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \rightarrow x^2 + 3x - 2 = 2x - 6 + 4 - x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + x = 0 \rightarrow x(2x + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-1}{2}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

d) $2x^2\left(\frac{15}{x}\right) = 2x^2\left(\frac{72-6x}{2x^2} + 2\right) \rightarrow 30x = 72 - 6x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 36x + 72 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$

$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 6;\ x_2 = 3$

Aplica lo aprendido

19. **La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quíntuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?**

Llamemos x, $x + 1$, $x + 2$ a los números. Así:

$x + x + 1 + x + 2 = 5x - 11 \rightarrow 14 = 2x \rightarrow x = 7$

Los números son 7, 8 y 9.

20. **Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los 9/5 de ese número.**

$x + \frac{x}{2} = \frac{9}{5}x - 6 \rightarrow 10\left(x + \frac{x}{2}\right) = 10\left(\frac{9}{5}x - 6\right) \rightarrow 10x + 5x = 18x - 60 \rightarrow$

$\rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20$

El número es 20.

21. **Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117.**

Cualquier número impar se puede escribir de la forma $2x + 1$.

$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 117 \rightarrow 6x = 108 \rightarrow x = 18$

Los números son 37, 39 y 41.

22. **He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?**

Precio del bolígrafo, x; cuaderno, $2x$; carpeta, $5 \cdot 2x$.

$x + 2x + 10x = 14{,}30 \rightarrow 13x = 14{,}30 \rightarrow x = 1{,}1$

El bolígrafo cuesta 1,1 €; el cuaderno, 2,2 €, y la carpeta, 11 €.

23. **Calcula la altura de un árbol que es un metro más corto que un poste que mide el doble que el árbol.**

Altura del árbol: x; altura del poste, $2x$.

$x = 2x - 1 \rightarrow x = 1$ m.

El árbol mide 1 m.

24. **El precio de unos zapatos ha subido un 15 % en diciembre y ha bajado un 20 % en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?**

$x \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}8 = x - 6{,}96 \rightarrow 0{,}92x = x - 6{,}96 \rightarrow 6{,}96 = 0{,}08x \rightarrow x = 87$ €

El precio inicial era 87 €.

Página 117

25. **Con 3,50 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?**

x es el dinero que tengo.

$x + 3{,}5 = 2x - 7{,}25 \rightarrow 3{,}5 + 7{,}25 = x \rightarrow x = 10{,}75$ € es el dinero que tengo.

26. **Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos 130. ¿Cuál es el número?**

x es el número buscado.

$$x^2 - 3x = 130 \rightarrow x^2 - 3x - 130 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 130}}{2} = \frac{3 \pm 23}{2} \begin{cases} x = 13 \\ x = -10 \end{cases}$$

El número puede ser 13 o –10. Hay dos soluciones.

27. **Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.**

Los números son x y $x + 1$.

$$x^2 + (x+1)^2 = 145 \rightarrow x^2 + x^2 + 1 + 2x - 145 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 144 = 0 \rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$$

Son 8 y 9, o bien, –9 y –8. Hay dos soluciones.

28. **Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31 obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?**

x es el número que buscamos.

$$x(x+1) - 31 = 5(x + x + 1) \rightarrow x^2 + x - 31 = 10x + 5 \rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -3 \end{cases}$$

El número puede ser 12, o bien, –3. Hay dos soluciones.

Resuelve problemas

29. **Del dinero de una cuenta bancaria retiramos 1/7; ingresamos después 2/15 de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero había en la cuenta?**

x es el dinero de la cuenta.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Retiramos } \frac{1}{7}x \rightarrow \text{quedan } \frac{6}{7}x \\ \text{Ingresamos } \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{7}x = \frac{4}{35}x \end{array}\right\} \frac{6}{7}x + \frac{4}{35}x + 12 = x \rightarrow \frac{34}{35}x + 12 = x \rightarrow$$

$$\rightarrow 12 = \frac{1}{35}x \rightarrow x = 420 \text{ € había en la cuenta.}$$

30. **Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?**

x son los años que tienen que pasar.

$(9 + x) + (11 + x) = 43 + x \rightarrow 20 + 2x = 43 + x \rightarrow x = 23$

Han de transcurrir 23 años.

31. **Estamos haciendo bocadillos de chorizo para llevar de excursión. Si ponemos 4 rodajas en cada uno, sobran 12, y si ponemos 5, nos faltan 8. ¿Cuántos bocadillos queremos preparar?**

Número de bocadillos que queremos preparar: x

$4x + 12 = 5x - 8 \rightarrow x = 20$

Queremos preparar 20 bocadillos.

32. **En una fiesta celebrada en un restaurante gallego se sirvieron cigalas (un plato para cada dos personas), almejas (un plato para cada tres) y percebes (un plato para cada cuatro). Si en total se sirvieron 65 platos, ¿cuántas personas había?**

Número de personas que había en la fiesta: x

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65 \rightarrow \frac{13}{12}x = 65 \rightarrow x = \frac{65 \cdot 12}{13} = 60$$

Había 60 personas.

33. **¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,60 €/*l* tenemos que añadir a 60 *l* de aceite de oliva de 2,80 €/*l* para obtener una mezcla de 2,50 €/*l*?**

x son los litros de aceite de orujo.

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
ORUJO	x	1,6	$1{,}6x$
OLIVA	60	2,8	$2{,}8 \cdot 60$
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2{,}5(x + 60)$

$1{,}6x + 168 = 2{,}5x + 150 \rightarrow$
$\rightarrow 18 = 0{,}9x \rightarrow x = 20\ l$

Tenemos que añadir 20 litros.

34. **Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PINTURA I	30	$2x$	$60x$
PINTURA II	50	x	$50x$
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3{,}3$

$60x + 50x = 264 \rightarrow 110x = 264 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2{,}4$ €/kg

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

35. **Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30 % de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$0{,}3 \cdot 18 + 0{,}7x = 1 \cdot 14{,}15 \rightarrow 0{,}7x = 8{,}75 \rightarrow x = 12{,}5$ €/kg

El precio del café barato es 12,5 €/kg.

36. **Un centro escolar contrató un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es de 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,5 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?**

x es el número total de plazas.

$x \cdot 12 = (x - 4) \cdot 13,5 \;\rightarrow\; 12x = 13,5x - 54 \;\rightarrow\; 54 = 1,5x \;\rightarrow\; x = 36$

36 es el número de plazas que tiene el autobús.

37. **Un grupo de amigos se van a repartir un premio y les toca a 15 € a cada uno. Deciden compartirlo con cuatro amigos más y de esta forma les toca a 3 € menos a cada uno. ¿Cuántos son en total a repartir?**

Llamamos x al número de amigos que se van a repartir el premio en un principio.

Como el premio es la misma cantidad en ambos casos:

$15 \cdot x = \text{PREMIO}; \;\; 12 \cdot (x + 4) = \text{PREMIO}$

$15x = 12\,(x + 4) \;\rightarrow\; 15x = 12x + 48 \;\rightarrow\; 3x = 48 \;\rightarrow\; x = \dfrac{48}{3} = 16$

Al principio eran 16 personas, y al final, 20 personas.

38. **Si un número aumenta en un 10 %, resulta 42 unidades mayor que si disminuye en un 5 %. ¿Cuál es ese número?**

$1,1x = 42 + 0,95x \;\rightarrow\; 0,15x = 42 \;\rightarrow\; x = \dfrac{42}{0,15} = 280$

Por tanto, el número es 280.

39. **Un inversor, que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 4 %, y el resto, en otro banco al 3,5 %. Si la primera parte le produce anualmente 220 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

Si llamamos x a lo que depositó en el primer banco, en el segundo depositó $28\,000 - x$.

$1,04x = (28\,000 - x)1,035 + 220 \;\rightarrow\; 1,04x = 28\,980 - 1,035x + 220 \;\rightarrow\; 2,075x = 29\,200$

$x = \dfrac{29\,200}{2,075} \approx 14\,072,30$ €

$28\,000 - 14\,072,30 = 13\,927,70$ €

En un banco depositó 14 072,30 €, y en el otro, 13 927,70 €.

40. **Dos ciudades, A y B, distan 250 km. Un camión sale de A hacia B a 90 km/h. A la misma hora sale de B hacia A un coche que tarda una hora y cuarto en encontrarse con el camión. ¿Qué velocidad lleva el coche?**

En una hora, el coche recorre x km, y el camión, 90 km.

La velocidad con la que se acercan es la suma de ambos, $(90 + x)$ km/h.

Tardan 1,25 h en recorrer 250 km entre los dos.

Por tanto:

$1,25(90 + x) = 250 \;\rightarrow\; 112,5 + 1,25x = 250 \;\rightarrow\; x = 110$

La velocidad del coche es $x = 110$ km/h.

41. **Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?**

x es la velocidad del que va delante.

La velocidad con que se acercan es $21 - x$.

Con esa velocidad, deben recorrer 2,25 km en 0,75 h.

$$2{,}25 = (21 - x) \cdot 0{,}75 \rightarrow \frac{2{,}25}{0{,}75} = 21 - x \rightarrow 3 = 21 - x \rightarrow x = 18 \text{ km/h}$$

42. **Ana sale en su coche a 80 km/h. Se para 15 min para echar gasolina y después conduce un buen rato a 100 km/h. Cuando llega a su destino, comprueba que hizo 250 km en 3 horas, contando la parada. ¿Cuánto tiempo condujo a 80 km/h?**

Llamamos x al tiempo que conduce a 80 km/h.

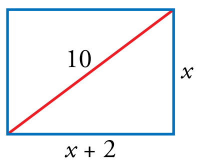
El tiempo del viaje, sin parada, es 3 h – 15 min = 2,75 h. Por tanto, el tiempo que conduce a 100 km/h es $2{,}75 - x$.

El espacio que recorre a 80 km/h es $80x$ y el que recorre a 100 km/h es $100(2{,}75 - x)$. Así:

$$80x + 275 - 100x = 250 \rightarrow -20x = -25 \rightarrow x = \frac{-25}{-20} = 1{,}25$$

Ana conduce 1,25 h a 80 km/h.

43. **Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.**

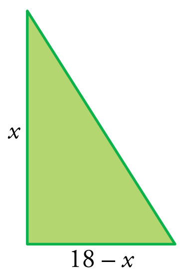


$$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100 \rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-48)}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$$

La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

44. **Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es de 40 cm^2. Halla las medidas de los catetos de este triángulo.**

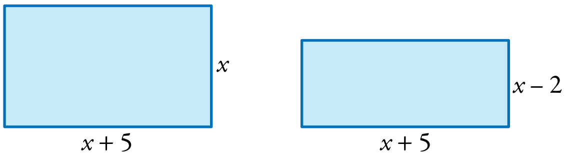


$$\text{Área: } \frac{x(18 - x)}{2} = 40 \rightarrow 18x - x^2 = 80 \rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{18 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 11 \\ x = 7 \end{cases}$$

Los catetos miden 7 cm y 11 cm, respectivamente.

45. **La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?**



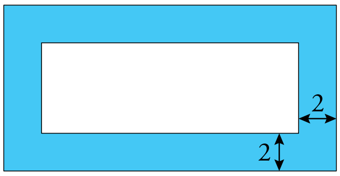
$(x + 5)(x - 2) = 60 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 60 \rightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-70)}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$$

La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

Página 118

46. **Un patio rectangular, que mide 8 m menos de ancho que de largo, tiene un estanque central, también rectangular, rodeado por una zona de paso de 2 m de ancho. Si sabemos que el área de esa zona es de 112 m², ¿cuáles serán las dimensiones del patio y del estanque?**



La superficie que nos dan es la superficie total del patio, S_1, menos la superficie del estanque, S_2:

$112 \text{ m}^2 = S_1 - S_2$

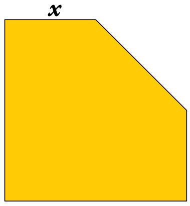
$S_1 = x \cdot (x - 8)$; $S_2 = (x - 4) \cdot [(x - 8) - 4]$

$112 = x \cdot (x - 8) - (x - 4) \cdot (x - 12) \rightarrow 112 = x^2 - 8x - (x^2 - 12x - 4x + 48) \rightarrow$

$\rightarrow 112 = 8x - 48 \rightarrow 160 = 8x \rightarrow x = \dfrac{160}{8} = 20 \text{ m}$

El patio tiene 20 m de largo y 12 m de ancho, y el estanque, 16 m de largo y 8 m de ancho.

47. **¿Cuánto debe valer x para que el área de esa figura sea 82 cm²?**



Dividimos la figura en dos: un rectángulo y un trapecio rectángulo. El área total de la figura será igual a la suma de las áreas de ambas figuras.

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = b \cdot a = 10x$

$A_{\text{TRAPECIO}} = h \cdot \dfrac{a + b}{2} = (10 - x) \cdot \dfrac{10 + x}{2}$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{RECTÁNGULO}} + A_{\text{TRAPECIO}} = 10x + (10 - x) \cdot \dfrac{10 + x}{2} \rightarrow 82 = 10x + \dfrac{10^2 - x^2}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot 82 = 2 \cdot \left(10x + \dfrac{10^2 - x^2}{2}\right) \rightarrow 164 = 20x + 100 - x^2 \rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$

$x = \dfrac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \dfrac{20 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

x debe valer 4 cm, porque x debe ser menor que 10.

48. **Calcula dos números naturales que sumen 85 y tales que al dividir el cuadrado del mayor entre el cuadrado del menor se obtenga 5 de cociente y 475 de resto.**

Si llamamos x a un número, el otro será $85 - x$.

$(85 - x)^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 7225 - 170x + x^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 4x^2 + 170x - 6750 = 0$

$$x = \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6750)}}{2 \cdot 4} = \frac{-170 \pm \sqrt{136900}}{8} = \frac{-170 \pm 370}{8} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = -67,5 \end{cases}$$

La solución $x = -67,5$ no es válida, pues no es un número natural.

Los números son 25 y 60.

49. **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. Averigua cuál es el número sabiendo que la cifra de las unidades es 2.**

Supongamos que el número es ab, y como $b = 2$:

$b + 10a - a - 10b = 18 \rightarrow 9a - 9b = 18 \rightarrow 9a - 18 = 18 \rightarrow 9a = 36 \rightarrow a = 4$

El número es el 42.

50. **Un depósito de agua para riego tiene un grifo de abastecimiento y un desagüe. El grifo llena el depósito en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, el depósito tarda 36 horas en llenarse. Averigua cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito lleno, estando cerrado el grifo.**

El grifo llena, en 1 hora, $\frac{1}{9}$ del depósito.

El desagüe vacía, en 1 hora, $\frac{1}{x}$ del depósito.

Abriendo los dos, llenan en 1 hora $\frac{1}{36}$ del depósito.

Por tanto:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36} \rightarrow \frac{x - 9}{9x} = \frac{1}{36} \rightarrow 36(x - 9) = 9x \rightarrow 36x - 324 = 9x \rightarrow$$
$$\rightarrow 27x = 324 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Tarda en vacias el depósito lleno 12 h.

51. **Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

52. **Un albañil tarda 9 horas en poner los azulejos de una cocina, mientras que otro tarda 10 horas. Se sabe que si trabajan juntos, entre los dos ponen 6 azulejos menos que si trabajan por separado. Un día que reformaron otra cocina trabajando juntos completaron el trabajo en 5 horas. ¿Cuántos azulejos hay que poner en cada cocina?**

Tiene infinitas soluciones.

Si el primer albañil pone x azulejos cada hora, el segundo ha de poner $\frac{9}{10}x$.

Así, si el primero pone 20, el segundo pone 18, y la cocina tendría $20 \cdot 9 = 18 \cdot 10 = 180$ azulejos.

En este caso, en la segunda cocina pondrían $(20 + 18 - 6) \cdot 5 = 160$ azulejos.

Problemas "+"

53. **Ana, en su camino diario al colegio, ha comprobado que si va andando a 4 km/h llega 5 minutos tarde, pero si se da prisa y va a 5 km/h llega 10 minutos antes de la hora. ¿Cuál es la distancia al colegio? ¿Llegará puntual si hace la mitad del camino a 4 km/h y la otra mitad a 5 km/h?**

a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{1}{4} \to \frac{x}{20} = \frac{1}{4} \to x = 5$ km

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si va a 4 km/h tarda } 1{,}25 \text{ h} \to 1 \text{ h y } 15 \text{ min} \\ \text{Si va a 5 km/h tarda } 1 \text{ h}\end{array}\right\} \text{Tiene que tardar 1 h y 10 min.}$$

b) $\underset{v\,=\,4\text{ km/h}}{\overset{2{,}5}{\longmapsto}}\;\underset{v\,=\,5\text{ km/h}}{\overset{2{,}5}{\longmapsto}} \to \frac{2{,}5}{4} + \frac{2{,}5}{5} = 0{,}625 + 0{,}5 = 1{,}125 \to 1 \text{ h } 7' \, 30''$

Llega un poco antes de la hora.

54. **Tenemos tres tipos de tetrabriks con forma de prisma rectangular cuyas bases miden 4 cm × 6 cm, 3 cm × 6 cm y 2 cm × 6 cm, y cuyas alturas son, respectivamente, *a*, *b* y *c*. El primero tiene doble capacidad que el segundo; y el segundo, doble que el tercero. Si la suma de las alturas es 39 cm, ¿cuánto medirá cada una?**

Llamamos V_1, V_2 y V_3 a los volúmenes de cada tetrabrik.

$$\left.\begin{array}{l}V_1 = 4 \cdot 6 \cdot a = 24a \\ V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b\end{array}\right\} \to 24a = 2 \cdot 18b \to a = \frac{36b}{24} \to a = 1{,}5b$$

$$\left.\begin{array}{l}V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b \\ V_3 = 2 \cdot 6 \cdot c = 12c\end{array}\right\} \to 18b = 2 \cdot 12c \to c = \frac{18b}{24} \to c = 0{,}75b$$

$a + b + c = 39 \to 1{,}5b + b + 0{,}75b = 39 \to 3{,}25b = 39 \to b = 12$

$a = 1{,}5 \cdot 12 = 18$ cm; $b = 12$ cm; $c = 0{,}75 \cdot 12 = 9$ cm

55. **Luis y Miguel van a visitar a sus abuelos. Como solo tienen una bicicleta, acuerdan que Miguel la lleve hasta la mitad del camino y la deje allí hasta que Luis, que sale andando, la recoja. La segunda mitad, Miguel caminará y Luis irá en bicicleta. De esta forma tardan una hora en llegar a su destino. El que camina va a 4 km/h y el que va en bicicleta, a 12 km/h. ¿Cuál es la distancia que han recorrido? ¿Cuánto tiempo estuvo parada la bicicleta?**

t: tiempo que emplea Miguel en recorrer la mitad del camino en bicicleta.

$12t = 4(1 - t) \rightarrow 16t = 4 \rightarrow t = \frac{1}{4}$ h

Andando tarda $\frac{3}{4}$ h.

Distancia: $12 \cdot \frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = 3 + 3 = 6$ km

Tiempo de bicicleta parada: La deja cuando ha pasado $\frac{1}{4}$ h y el otro la recoge a los $\frac{3}{4}$ h. Está parada $\frac{1}{2}$ hora.

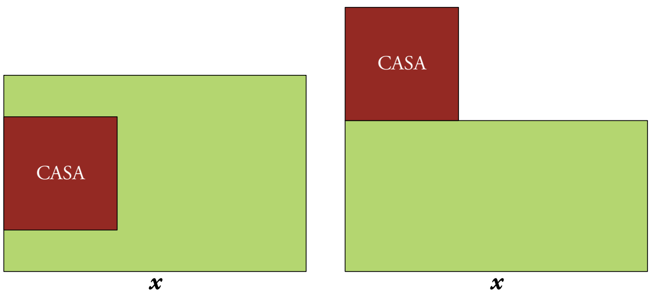
56. **Una empresa constructora está diseñando dos tipos, A y B, de viviendas unifamiliares con jardín.**

Tipo A: Parcela rectangular que mide 25 m menos de ancho que de largo. Dentro de la parcela, la vivienda ocupa un cuadrado de 50 m de lado.

Tipo B: Vivienda del mismo tamaño que en A, y zona de jardín rectangular con el mismo largo que en A y 20 m menos de ancho.

a) Calcula la medida de la base x de ambas parcelas para que la superficie del jardín sea la misma.

b) Para ese valor de x, halla la superficie de cada parcela y la del jardín correspondiente.



a) $x \cdot (x - 20) = x \cdot (x - 25) - 50^2 \rightarrow x^2 - 20x = x^2 - 25x - 2\,500 \rightarrow 5x - 2\,500 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{2\,500}{5} = 500 \text{ m}$$

b) Vivienda tipo A

$A_{\text{PARCELA}} = 500 \cdot 475 = 237\,500 \text{ m}^2$

$A_{\text{JARDÍN}} = 237\,500 - 2\,500 = 235\,000 \text{ m}^2$

Vivienda tipo B

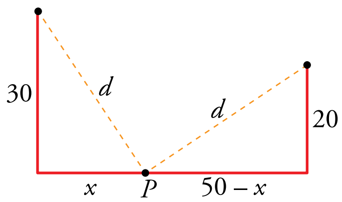
$A_{\text{PARCELA}} = (500 \cdot 480) + 2\,500 = 242\,500 \text{ m}^2$

$A_{\text{JARDÍN}} = 240\,000 \text{ m}^2$

Página 119

57. **En las dos orillas de un río hay dos palmeras. La más alta mide 30 codos; la otra, 20 codos, y la distancia entre ambas es de 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan rápidamente, alcanzando al pez al mismo tiempo.**

¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?



$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 20^2 + (50-x)^2 \\ d^2 = 30^2 + x^2 \end{array}\right\}$$ La distancia a P es la misma desde las dos palmeras.

$20^2 + (50-x)^2 = 30^2 + x^2 \to 400 + 2\,500 - 100x + x^2 = 900 + x^2 \to 2\,000 = 100x \to$

$\to x = 20$ codos

A 20 codos de la palmera más alta.

58. **Carmen hace cuentas sobre las compras que ha hecho y observa que el abrigo le ha costado el triple que el bolso; el bolso, 5 € menos que la camisa; la camisa, 6 € más que los deportivos; los deportivos, el doble que el estuche; el estuche, la mitad que el pantalón, y este, 120 € menos que la suma de todos los demás artículos. Calcula el precio de cada compra y el dinero que se gastó Carmen.**

$A = 3B;\ \ B = C - 5;\ \ C = D + 6;\ \ D = 2E;\ \ E = \dfrac{P}{2}$

$P = A + B + C + D + E - 120$

$A = 3(C - 5) = 3(D + 6 - 5) = 3(D + 1) = 3(2E + 1) = 3(P + 1) = 3P + 3$

$B = D + 6 - 5 = D + 1 = 2E + 1 = P + 1$

$C = 2E + 6 = P + 6$

$D = P$

$P = 3P + 3 + P + 1 + P + 6 + P + \dfrac{P}{2} - 120 \to 5P + \dfrac{P}{2} = 110 \to \dfrac{11P}{2} = 110 \to P = 20$

$P = 20$ € precio pantalón.

E = 10 € estuche; D = 20 € deportivos; C = 26 € camisa; $B = 21$ € bolso; $A = 63$ € abrigo

Gasto total: 140 €

Reflexiona sobre la teoría

59. **¿Es 3 o –2 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Compruébalo.**

a) $\dfrac{3-x}{5} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}$

b) $2^x + 2^{x-1} - 2^{x+1} = -4$

c) $\sqrt{14 - x} = 4$

d) $(2 - x)^3 + 3x = x^2 - 1$

a) $x = 3 \;\rightarrow\; \dfrac{3-3}{5} + \dfrac{3}{3} \neq \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; 0 + 1 \neq \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\;$ 3 no es solución.

$x = -2 \;\rightarrow\; \dfrac{3-(-2)}{5} + \dfrac{-2}{3} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\;$ –2 sí es solución.

b) $x = 3 \;\rightarrow\; 2^3 + 2^2 - 2^4 = 8 + 4 - 16 = -4 \;\rightarrow\;$ 3 es solución.

$x = -2 \;\rightarrow\; 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} \neq -4 \;\rightarrow\;$ –2 no es solución.

c) $x = 3 \;\rightarrow\; \sqrt{14-3} \neq 4 \;\rightarrow\;$ 3 no es solución.

$x = -2 \;\rightarrow\; \sqrt{14-(-2)} = \sqrt{16} = 4 \;\rightarrow\;$ –2 es solución.

d) $x = 3 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l}(2-3)^3 + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8 \\ 3^2 - 1 = 8\end{array}\right\} \rightarrow\;$ 3 es solución.

$x = -2 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l}(2-(-2))^3 + 3(-2) = 64 - 6 = 58 \\ (-2)^2 - 1 = 3\end{array}\right\} \rightarrow\;$ –2 no es solución.

60. **¿Verdadero o falso? Razona las respuestas.**

a) La ecuación $5x = 0$ no tiene solución.

b) Si multiplicamos por –3 los dos miembros de una ecuación, su solución no varía.

c) La ecuación $0x = 4$ tiene infinitas soluciones.

d) El discriminante de una ecuación de segundo grado es $-b^2 + 4ac$.

e) La ecuación $ax^2 + c = 0$ no tiene solución si $c > 0$.

a) Falso, $x = 0$.

b) Verdadero, siempre que sea a ambos miembros.

c) Falso, no tiene solución, pues ningún número multiplicado por 0 da distinto de 0.

d) Falso, el discriminante es $b^2 - 4ac$.

e) Falso. Si a es negativo, tiene solución.

61. **¿Son equivalentes estas ecuaciones?:**

$$\mathbf{2(x-1) + x + 1 = 2x + 1}$$

$$\mathbf{2x - 1 - (x-1) = 2(3x-5)}$$

¿Y $x^2 - 2x = 0$ y $2x - 4 = 0$?

Justifica las respuestas.

- $2(x-1) + x + 1 = 2x + 1 \;\rightarrow\; 2x - 2 + x + 1 = 2x + 1 \;\rightarrow\; x = 2$

  $2x - 1 - (x-1) = 2(3x-5) \;\rightarrow\; 2x - 1 - x + 1 = 6x - 10 \;\rightarrow\; -5x = -10 \;\rightarrow\; x = 2$

  Son equivalentes, porque tienen la misma solución.

- $x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}$

  $2x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

  No son equivalentes, porque no tienen las mismas soluciones.

62. **En la ecuación $5t^2 - 3t + 2 = 2t + 2$ indica:**

a) Cuál es la incógnita.

b) Cuáles son los valores de a, b y c.

c) Cuál es el segundo miembro.

d) Si es una ecuación completa o incompleta.

$5t^2 - t = 0$

a) La incógnita es t.

b) $a = 5$, $b = -1$ y $c = 0$.

c) $2t + 2$

d) Incompleta.

63. **En la ecuación $3x - a(x - 2) = b$:**

a) ¿Cuáles deben ser los valores de a y de b para que tenga infinitas soluciones?

b) ¿Y para que no tenga solución?

$3x - ax + 2a = b$

a) Para que tenga infinitas soluciones, $3x - ax = 0x \rightarrow a = 3$ y $2a - b = 0 \rightarrow b = 6$

b) $a = 3$ y b = cualquier número distinto de 6.

64. **Ejercicio resuelto.**

65. **Inventa ecuaciones de segundo grado con:**

a) Dos soluciones: $x = -2$ y $x = 3$

b) Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\frac{2}{3}$

c) Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

d) Una solución: $x = 4$

e) Ninguna solución.

a) $(x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $(x - 3)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

c) $x(x + 5) = 0 \rightarrow x^2 + 5x = 0$

d) $(x - 4)^2 = 0$

e) $x^2 + 100 = 0$

66. **Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es $\Delta = 5$, ¿qué podemos decir del número de soluciones de la ecuación? ¿Y si $\Delta = 0$?**

Si $\Delta = 5$, el número de soluciones es 2.

Si $\Delta = 0$, el número de soluciones es 1.

67. **En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:**

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

a) $x^2 - 14x + m = 0$

$\Delta = 142 - 4 \cdot m = 0 \rightarrow 196 - 4m = 0 \rightarrow m = 49$

b) Para que sean distintas, $m \neq 49$ y $m < 49$.

c) Para que no tenga solución, $196 - 4m < 0 \rightarrow 196 < 4m \rightarrow m > 49$.

68. **¿Cuál debe ser el valor de a para que $x = 2$ sea solución de la ecuación $(x - 3)^2 - x^3 + a = 0$?**

Justifica tu respuesta.

$(x - 3)^2 - x^3 + a = 0 \rightarrow (2 - 3)^2 - 2^3 + a = 0 \rightarrow 1 - 8 + a = 0 \rightarrow a = 7$

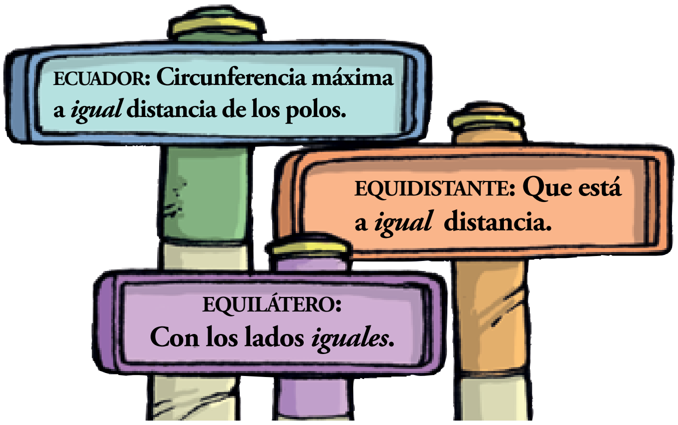
Página 120

Infórmate

Sabías que...

Ecuación viene del término latino *aequatio*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

Abajo tienes otras palabras del castellano con la misma raíz.



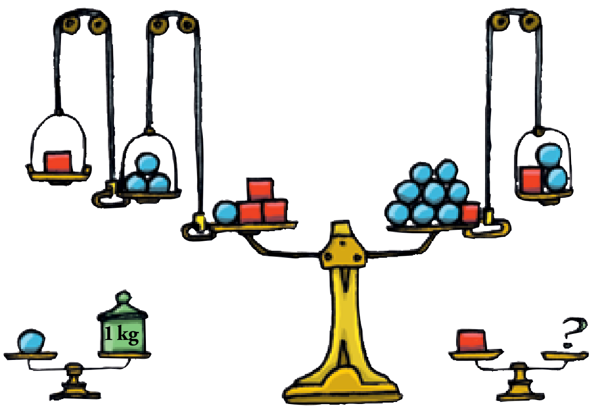
- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que ecuación.**

  Por ejemplo: equitativo, ecuánime, equilibrio y equinocio.

Utiliza tu ingenio

En perfecto equilibrio

- **Si cada bola pesa un kilo, ¿cuánto pesa cada caja?**



Las poleas sirven para restar peso. Teniendo esto en cuenta, las balanzas y los juegos de poleas dan lugar a la siguiente ecuación (llamamos x al peso de la caja):

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (x + 2)$$

Su solución es $x = 2$. La caja pesa 2 kilogramos.

Usa la equis

- **Completa esta tabla de forma que sumando los números de dos casillas consecutivas obtengas el número de la siguiente:**

5						81

5	x	$5 + x$	$5 + 2x$	$10 + 3x$	$15 + 5x$	$25 + 8x = 81$

La solución de la ecuación es $x = 7$. Por tanto, la tabla queda así:

5	7	12	19	31	50	81
1	2	3	4	5	6	7

Ingéniatelas como puedas…

- **…para buscar una solución de esta ecuación:**

$$7 + \sqrt{1 + \sqrt{5 - \sqrt{30 - \sqrt{13 + \sqrt{x}}}}} = 8$$

$x = 144$

Interpreta, describe, exprésate

- **Escribe un número cualquiera de tres cifras:** ***abc***

Escribe el mismo número invertido: cba

Resta al mayor el menor y suma las cifras de la diferencia obtenida.

¡Esta suma es siempre 18!

a) Comprueba, con ejemplos, que siempre se cumple la afirmación anterior. ¿Sabrías justificar por qué ocurre?

b) Analiza y explica el proceso que se expone a continuación.

Sea ***abc*** **un número de tres cifras. Supongamos que** $a > c$**.**

PASO 1

	a	b	c
–	c	b	a
			$c - a < 0$

PASO 2

	a	$b - 1$	$c + 10$
–	c	b	a
			$10 + c - a$

PASO 3

	$a - 1$	$10 + b - 1$	$c + 10$
–	c	b	a
	$a - 1 - c$	9	$10 + c - a$

Sumamos las cifras de la diferencia y…

$824 - 428 = 396$, $3 + 9 + 6 = 18$; $351 - 153 = 198$, $1 + 9 + 8 = 18$

Página 121

Entrénate resolviendo problemas

- **Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:**

— Si los envaso por docenas, me sobran 5.

— Si tuviera uno más, podría envasarlos, exactamente, en cajas de 10.

— Casi he recogido 100 huevos.

¿Cuántos huevos recogió el granjero?

Considerando los puntos tercero y segundo, puede tener 79 u 89 ó 99.

Eliminamos 5 huevos de cada uno de estos grupos (por el punto primero):

74 84 94

La única cantidad que resulta ser múltiplo de 12 es 84.

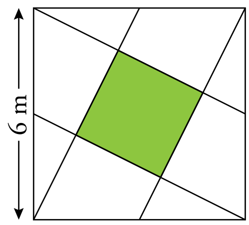
Por tanto, el granjero recogió 89 huevos.

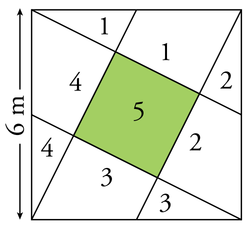
- **El reloj de una torre tarda 15 segundos en dar las seis. ¿Cuánto tardará en dar las doce?**

Entre la primera y la sexta campanadas hay 5 intervalos de tiempo. Los 15 segundos se reparten entre 5 y, así, se obtienen 3 segundos entre campanada y campanada.

Por lo tanto, para dar las 12 (11 intervalos de tiempo) el reloj tarda $11 \cdot 3 = 33$ segundos.

- **Calcula la superficie del cuadrado verde.**





Vemos claramente que el cuadrado grande está formado por cinco cuadrados iguales, uno de los cuales es el verde.

La superficie del cuadrado grande es $6^2 = 36$ m^2.

La superficie del cuadrado verde será $\frac{36}{5} = 7,2$ m^2.

Autoevaluación

1. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones y explica el proceso seguido:

a) $(x + 13)^2 = 25$ **b)** $\sqrt{x^2 + 15} = 8$

a) La suma que hay dentro del paréntesis debe ser 5, porque es el número que elevado al cuadrado da 25, por lo que $x = -8$.

b) La suma que hay dentro de la raíz debe dar 64, cuya raíz cuadrada es 8. Por ello, x^2 debe ser 49, y el número que elevado al cuadrado da 49 es 7, por lo que $x = 7$.

2. Resuelve, por tanteo, con ayuda de la calculadora.

a) $(x - 14)^3 = x + 10$ **b)** $\sqrt{x^4 - x^2} = 5$

a) $x = 17$ b) $x \approx 2{,}37$

3. Resuelve.

a) $\dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{3(x+1)}{10} = \dfrac{3-x}{4} - \dfrac{9}{10}$ **b)** $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

c) $x - 1 + \dfrac{3-x}{2} = \dfrac{2}{3}x$

a) $20\left(\dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{3x+3}{10}\right) = 20\left(\dfrac{3-x}{4} - \dfrac{9}{10}\right) \rightarrow 12x - 8 - 6x - 6 = 15 - 5x - 18 \rightarrow$

$\rightarrow 12x - 6x + 5x = 15 - 18 + 8 + 6 \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$

b) $4\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4\left(x - \dfrac{2x+3}{4}\right) \rightarrow 2x + 2 = 4x - 2x - 3 \rightarrow 2x + 2 = 2x - 3 \rightarrow 0x = -5.$

No tiene solución.

c) $6\left(x - 1 + \dfrac{3-x}{2}\right) = 6\left(\dfrac{2}{3}x\right) \rightarrow 6x - 6 + 9 - 3x = 4x \rightarrow 3x + 3 = 4x \rightarrow x = 3$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{5}{2}x^2 - 2x = 0$ **b)** $4x^2 + 25 = 0$

c) $(x + 3)(x - 3) - 25x = 9x - 298$ **d)** $\dfrac{(x-2)(x-3)}{6} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 2 - x$

a) $2 \cdot \left(\dfrac{5}{2}x^2 - 2x\right) = 0 \rightarrow 5x^2 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (5x - 4) \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

b) $4x^2 = -25 \rightarrow x = \sqrt{-\dfrac{25}{4}} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $x^2 - 9 - 25x = 9x - 298 \rightarrow x^2 - 34x + 289 = 0$

$x = \dfrac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 289}}{2} = \dfrac{34 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{34}{2} = 17 \rightarrow$ Solución única.

d) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{6} - \dfrac{x^2 - 2x + 1}{4} = 2 - x \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 - 3x^2 + 6x - 3 = 24 - 12x \rightarrow$

$\rightarrow -x^2 + 8x - 15 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$

5. Mezclamos 6 kg de harina de 1,30 €/kg con otra de 0,70 €/kg para obtener una mezcla de 1,10 €/kg. ¿Qué cantidad tenemos que poner del segundo tipo de harina?

Llamamos x a la cantidad de harina que desconocemos. La cantidad de la mezcla será $6 + x$.

$$1{,}3 \cdot 6 + 0{,}7x = 1{,}1 \cdot (6 + x) \;\rightarrow\; 7{,}8 + 0{,}7x = 6{,}6 + 1{,}1x \;\rightarrow\; 0{,}4x = 1{,}2 \;\rightarrow\; x = \frac{1{,}2}{0{,}4} = 3 \text{ kg}$$

Tenemos que poner 3 kg del segundo tipo de harina.

6. Un tren sale de A hacia B a 135 km/h. Una hora más tarde sale de B hacia A otro tren a 115 km/h. Si la distancia entre A y B es de 485 km, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

Como el primer tren sale una hora antes, cuando sale el segundo tren, el primero ya ha recorrido 135 km, y le quedan por recorrer 350 km. Si comenzamos a contar el tiempo desde ahí, se cruzan cuando se igualan los tiempos:

$$t = \frac{e}{v} \;\rightarrow\; t_1 = t_2 \;\rightarrow\; \frac{x}{135} = \frac{350 - x}{115} \;\rightarrow\; 115x = -135x + 47\,250 \;\rightarrow\; 250x = 47\,250 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = 189;\;\; t = \frac{189}{135} = 1{,}4 \text{ h}$$

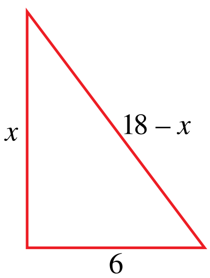
Sumando la hora que le quitamos al principio, los trenes se encuentran 2,4 horas después de que saliera el primer tren.

7. Tres amigos cobran 540 € por hacer un trabajo. El primero trabajó 12 horas y el segundo, que trabajó 2 horas más que el tercero, recibió 180 €. ¿Cuántas horas y cuánto dinero corresponden a cada uno?

$\frac{180}{540} = \frac{1}{3} \;\rightarrow$ Como sabemos que el segundo hizo un tercio del trabajo, y el tercero trabajó dos horas menos, el primero trabajó dos horas más, por lo que trabajaron 12, 10 y 8 horas respecticamente.

El primero cobró: $\frac{12}{30} \cdot 540 = 216$ €   El tercero cobró: $\frac{8}{30} \cdot 540 = 144$ €

8. Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m. ¿Cuánto medirán el otro cateto y la hipotenusa?



$$x^2 + 6^2 = (18 - x)^2 \;\rightarrow\; x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2 \;\rightarrow\; 36x = 288 \;\rightarrow\; x = 8$$

Catetos: 6 y 8 m; hipotenusa: 10 m.

9. Para embaldosar un salón de 48 m² de área se han utilizado 375 baldosas rectangulares en las que un lado mide 8 cm menos que el otro. Halla las dimensiones de las baldosas.

$$x \cdot (x - 0{,}08) \cdot 375 = 48 \;\rightarrow\; (x^2 - 0{,}08x) \cdot 375 = 48 \;\rightarrow\; 375x^2 - 30x = 48 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 375x^2 - 30x - 48 = 0 \;\rightarrow\; 125x^2 - 10x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 125 \cdot (-16)}}{2 \cdot 125} = \frac{10 \pm \sqrt{8100}}{250} = \frac{10 \pm 90}{250} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{10}{25} = 0{,}4 \text{ m};\;\; x_2 = -\frac{8}{25} \text{ m}$$

La única solución válida es 0,4 m (no puede ser un valor negativo).

Las baldosas miden 0,4 m × 0,32 m.

Página 123

Resuelve

1. **Traduce a lenguaje algebraico el problema de la tablilla babilónica y calcula, por tanteo, la longitud y la anchura medidas en manos.**

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 7 \\ x + y = 10 \end{cases} \rightarrow x = 4 \;\; y = 6$$

2. **El problema chino de las gavillas de trigo se resuelve con un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa el que ves en el enunciado de arriba.**

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 20 \\ 2x + 3y + z = 19 \\ x + 2y + 3z = 16 \end{cases}$$

3. **Plantea un sistema de ecuaciones para el problema de Diofanto que aparece en la página anterior y encuéntrale una solución.**

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases} \rightarrow x_1 = 8,\; y_1 = 12 \;\; ; \;\; x_2 = 12,\; y_2 = 8$$

4. **El problema de Diofanto que se muestra en esta página, el de las cántaras de vino, podría traducirse algebraicamente en el sistema de ecuaciones de la derecha, siendo *a*, *b* y *c* números enteros.**

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} 8a + 5b = c^2 \\ a + b = c \end{array}\right\}}$$

¿Qué harías para encontrar una solución?

Daría un valor a una incógnita y despejaría las otras dos.

1 Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones

Página 124

1. Comprueba si cada uno de los pares de valores siguientes son solución de la ecuación $4x - 3y = 12$:

a) $x = 6,\ y = 4$ **b)** $x = 6,\ y = 12$ **c)** $x = 0,\ y = -4$

a) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 24 - 12 = 12$

$x = 6,\ y = 4$ sí es solución de la ecuación.

b) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 12 = 24 - 36 = -12$

$x = 6,\ y = 12$ no es solución de la ecuación.

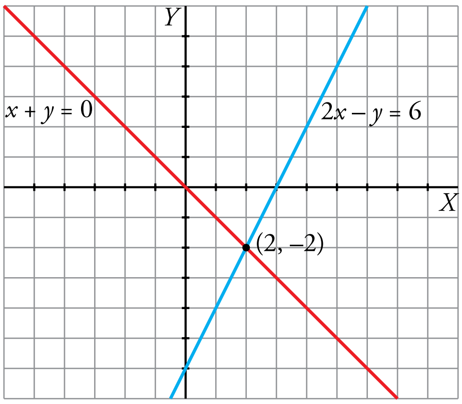
c) $4 \cdot 0 - 3(-4) = 0 + 12 = 12$

$x = 0,\ y = -4$ sí es solución de la ecuación.

2. Representa las rectas de ecuaciones:

$$2x - y = 6 \qquad x + y = 0$$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?



Solución común a las dos ecuaciones: $x = 2,\ y = -2$. Punto $(2, -2)$.

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 125

1. Di si los pares $x = -1,\ y = 4$ o $x = 7,\ y = 8$ son solución de alguno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$6 + 20 = 26$, sí	$-42 + 40 = -2$, no
$-1 - 8 = -9$, sí	$7 - 16 = -9$, sí
sí es solución	no es solución

b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$2 + 16 = 18$, sí	$-14 + 32 = 18$, sí
$-3 - 8 = -11$, no	$21 - 16 = 5$, sí
no es solución	sí es solución

c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-5 + 4 = -1$, no	$35 + 8 = 43$, sí
$-3 + 4 = 1$, sí	$21 + 8 = 29$, no
no es solución	no es solución

d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

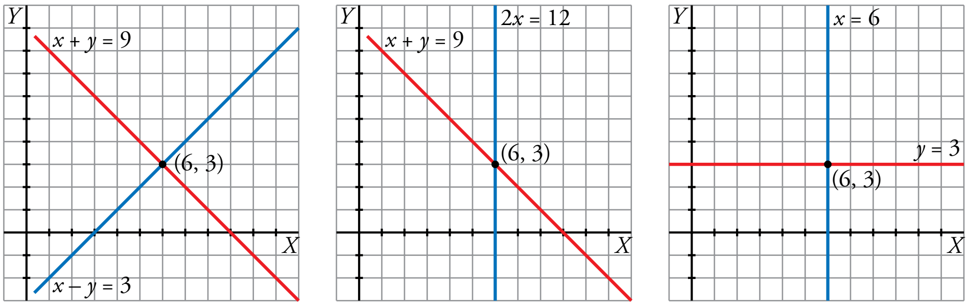
$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-1 + 4 = 3$, no	$7 + 8 = 15$, sí
$-1 - 4 = -5$, no	$7 - 8 = -1$, sí
no es solución	sí es solución

3 Sistemas equivalentes

Página 126

1. Representa estos tres sistemas equivalentes que se obtienen para resolver el primero de ellos:

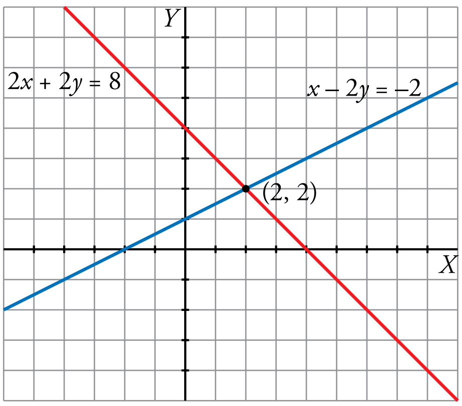
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x \quad = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$



2. Representa los pares de rectas correspondientes a cada sistema y di si son equivalentes:

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad = 2 \end{cases}$

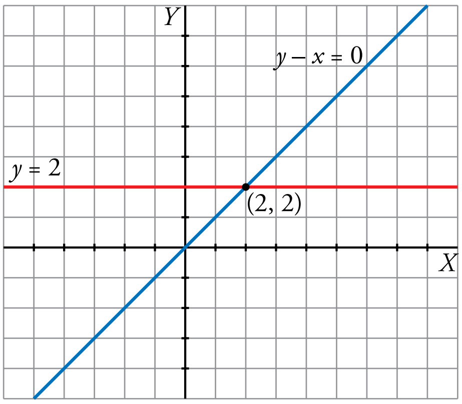
a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

b) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

Los dos sistemas de ecuaciones tienen la misma solución. Por tanto, son equivalentes.

4 Número de soluciones de un sistema lineal

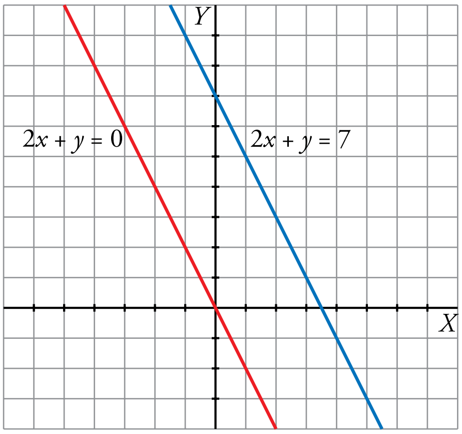
Página 127

1. Fijándote en sus ecuaciones, di cuál de estos sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

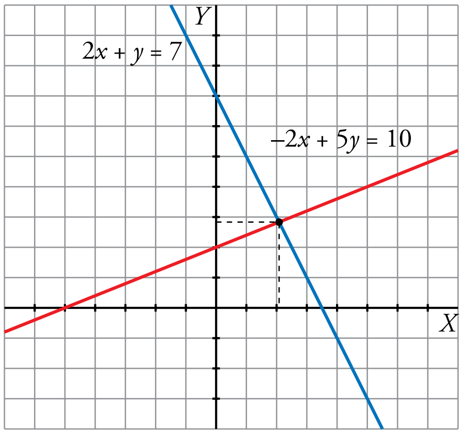
a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

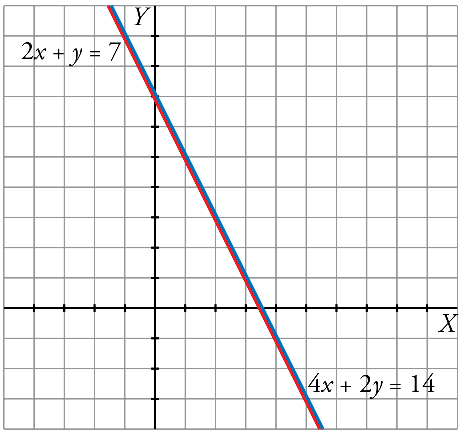
a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ Sistema incompatible



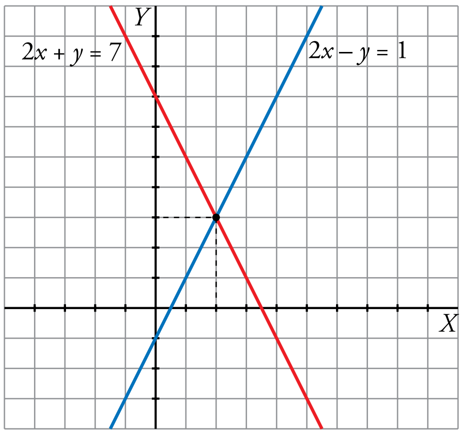
b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ Sistema con una solución



c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ Sistema indeterminado



d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ Sistema con una solución



2. Completa estos sistemas para que el primero tenga la solución $x = 6,\ y = -1$; el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \quad \dots = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x \ \ \dots = \dots \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

a) $6 - 4(-1) = 10$

$2 \cdot 6 + a \cdot (-1) = 13 \ \to\ a = -1$

El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x - \ \ y = 13 \end{cases}$ tiene como solución $x = 6,\ y = -1$.

b) Respuesta abierta.

$\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = 2\,(2x + y) \end{cases}$

Para que el sistema sea incompatible, podemos igualarlo a cualquier número distinto de 16.

c) Como $4x = 2(2x)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 2. Al ser una ecuación equivalente, nos dará la misma recta, lo que es un sistema indeterminado.

$\begin{cases} 2x + \ \ y = \ \ 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$

d) Como $33y = 3(11y)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 3. Esto nos dará el primer miembro de la igualdad; dividiremos el segundo miembro de la segunda ecuación por 3 para obtener el segundo miembro de la primera.

$\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ 15 + 33y = 9 \end{cases}$

5 Métodos de resolución de sistemas

Página 128

1. Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas. ¿Cuál de ellos crees que es más complicado de resolver por este método?

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-\ \ y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+9y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+3y=\ 5 \ \rightarrow\ y=\dfrac{5-x}{3} \\ 5x+7y=13 \end{cases}$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$5x+7\cdot\frac{5-x}{3}=13 \ \rightarrow\ 5x+\frac{35-7x}{3}=13 \ \rightarrow\ 15x+35-7x=39 \ \rightarrow\ 8x=4 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x=\frac{1}{2} \ \rightarrow\ y=\frac{5-\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Solución: $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

b) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-\ \ y=3 \ \rightarrow\ y=3x-3 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$6x+3(3x-3)=0 \ \rightarrow\ 6x+9x-9=0 \ \rightarrow\ 15x=9 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x=\frac{9}{15}=\frac{3}{5} \ \rightarrow\ y=3\cdot\frac{3}{5}-3=-\frac{6}{5}$$

Solución: $x=\dfrac{3}{5},\ y=-\dfrac{6}{5}$

c) $\begin{cases} 3x+9y=4 \ \rightarrow\ y=\dfrac{4-3x}{9} \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$2x+3\cdot\frac{4-3x}{9}=1 \ \rightarrow\ 2x+\frac{4-3x}{9}=1 \ \rightarrow\ 6x+4-3x=3 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 3x=-1 \ \rightarrow\ x=-\frac{1}{3} \ \rightarrow\ y=\frac{4-3\cdot\frac{(-1)}{3}}{9}=\frac{5}{9}$$

Solución: $x=-\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{5}{9}$

d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \;\; 8 \;\; y = \dfrac{x - 11}{4} \\ 5x + 7y = \;\; 1 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$5x + 7 \cdot \frac{x - 11}{4} = 1 \;\rightarrow\; 5x + \frac{7x - 77}{4} = 1 \;\rightarrow\; 20x + 7x - 77 = 4 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 27x = 81 \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; y = \frac{3 - 11}{4} = -2$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$

El más complicado es el apartado c).

Página 129

2. Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 28 \\ 7x + 2y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 7x + 10y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 9y = -1 \\ 3x + 15y = -1 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5 - 8y}{3}, \ x = \dfrac{7 + 2y}{2}$

$\dfrac{5 - 8y}{3} = \dfrac{7 + 2y}{2} \ \to \ 10 - 16y = 21 + 6y \ \to \ -22y = 11 \ \to \ y = \dfrac{-1}{2}$

$x = \dfrac{7 + 2 \cdot \dfrac{-1}{2}}{2} = \dfrac{7 - 1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Solución: $x = 3, \ y = \dfrac{-1}{2}$

b) $x = \dfrac{28 - 3y}{5}; \ x = \dfrac{-7 - 2y}{7}$

$\dfrac{28 - 3y}{5} = \dfrac{-7 - 2y}{7} \ \to \ 196 - 21y = -35 - 10y \ \to \ 11y = 231 \ \to \ y = \dfrac{231}{11} = 21$

$x = \dfrac{-7 - 2 \cdot 21}{7} = -7$

Solución: $x = -7, \ y = 21$

c) $x = \dfrac{-1 + 5y}{3}, \ x = \dfrac{2 - 10y}{7}$

$\dfrac{-1 + 5y}{3} = \dfrac{2 - 10y}{7} \ \to \ -7 + 35y = 6 - 30y \ \to \ 65y = 13 \ \to \ y = \dfrac{1}{5}$

$x = \dfrac{-1 + 5 \cdot \dfrac{1}{5}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

Solución: $x = 0, \ y = \dfrac{1}{5}$

d) $x = \dfrac{-1 - 9y}{2}, \ x = \dfrac{-1 - 15y}{3}$

$-3 - 27y = -2 - 30y \ \to \ 3y = 1 \ \to \ y = \dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{-1 - 9 \cdot \dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Solución: $x = -2, \ y = \dfrac{1}{3}$

Página 130

3. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 7x=49 \rightarrow x=7 \rightarrow 3\cdot 7+5y=11 \rightarrow 5y=-10 \rightarrow y=-2$

Solución: $x=7,\ y=-2$

b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x-15y=-25 \\ 5x+7y=13 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -8y=-12 \rightarrow y=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x+3\cdot\dfrac{3}{2}=5 \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Solución: $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x+20y=-55 \\ 5x+7y=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 27y=-54 \rightarrow y=-2 \rightarrow$

$\rightarrow x-4\cdot(-2)=11 \rightarrow x=3$

Solución: $x=3,\ y=-2$

d) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+3y=0 \\ 9x-3y=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 15x=9 \rightarrow x=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5} \rightarrow$

$\rightarrow 3\cdot\dfrac{3}{5}-y=3 \rightarrow y=\dfrac{9}{5}-3=\dfrac{-6}{5}$

Solución: $x=\dfrac{3}{5},\ y=\dfrac{-6}{5}$

Página 131

4. Resuelve este sistema simplificando previamente:

$$\begin{cases} \mathbf{5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x} \\ \mathbf{\dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x \\ \dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x+15-2y+2=15x-3y-8x \\ 5x+5-7y=70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+y=-17 \\ 5x-7y=65 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases} -14x+7y=-119 \\ 5x-7y=65 \end{cases}$$

$$-9x = -54 \rightarrow x=6 \rightarrow y=-17+2\cdot 6=-5$$

Solución: $x=6,\ y=-5$

5. Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:

$$\begin{cases} \mathbf{7x+5y=11} \\ \mathbf{35x-12y=129} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+5y=11 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

Obtenemos la y:

$$\begin{cases} -35x-25y=-55 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

$$-37y = 74 \rightarrow y=-2$$

Obtenemos la x:

$$\begin{cases} 84x+60y=132 \\ 175x-60y=645 \end{cases}$$

$$259x = 777 \rightarrow x=3$$

Solución: $x=3,\ y=-2$

6 Sistemas de ecuaciones no lineales

Página 132

1. Resuelve estos sistemas dando su solución o señalando que no la tienen:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 16 \\ x^2 + y^2 = 64 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 64 \end{cases}$

a) $x = 6 - y$

$(6 - y)^2 + y^2 = 20 \rightarrow 36 - 12y + y^2 + y^2 = 20 \rightarrow 2y^2 - 12y + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Si $y = 4 \rightarrow x = 6 - 4 = 2$

Si $y = 2 \rightarrow x = 6 - 2 = 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 2, \ y_1 = 4 \\ x_2 = 4, \ y_2 = 2 \end{cases}$

b) Sumamos las dos ecuaciones, utilizando el método de reducción:

$2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5, \ x = -5$

Si $x = 5 \rightarrow y^2 = 41 - 5^2 = 41 - 25 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Si $x = -5 \rightarrow y^2 = 41 - 5^2 = 41 - 25 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 5, \ y_1 = 4 \\ x_2 = 5, \ y_2 = -4 \\ x_3 = -5, \ y_3 = 4 \\ x_4 = -5, \ y_4 = -4 \end{cases}$

c) $x = 16 - y$

$(16 - y)^2 + y^2 = 64 \rightarrow 256 - 32y + 2y^2 = 64 \rightarrow 2y^2 - 32y + 192 = 0 \rightarrow y^2 - 16y + 96 = 0$

$$y = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 96}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{-128}}{2}$$ No tiene solución.

d) $x = 4 + y$

$(4 + y)^2 - y^2 = 64 \rightarrow 16 + 8y = 64 \rightarrow y = \dfrac{48}{8} = 6$

Solución: $x = 10, \ y = 6$

7 Resolución de problemas mediante sistemas

Página 133

1. Dos poblaciones A y B distan 25 km. Un peatón sale de A hacia B a una velocidad de 4 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A otro peatón a 6 km/h. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse y la distancia que ha recorrido cada uno hasta ese instante.

La ecuación del espacio recorrido por el peatón que sale de A es

$$x = 4 \cdot t$$

Como la distancia entre A y B es 25 km, la ecuación para el otro peatón es:

$$25 - x = 6 \cdot t$$

El momento del encuentro se expresa mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4t \\ 25 - x = 6t \end{cases}$$

$$25 = 10t \;\rightarrow\; t = 2{,}5 \;\rightarrow\; x = 4 \cdot 2{,}5 = 10$$

Por tanto, el encuentro se produce a las 2 h 30 min y a 10 km de la ciudad A.

2. Dos poblaciones distan 120 km. En el mismo instante salen un peatón de A hacia B a una velocidad de 6 km/h y un ciclista de B hacia A a 24 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿Qué distancia recorre el peatón?

La ecuación para el peatón es:

$$x = 6t$$

La ecuación para el ciclista es:

$$120 - x = 24t$$

El encuentro se expresa mediante un sistema:

$$\begin{cases} x = 6t \\ 120 - x = 24t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 6t = 0 \\ -x - 24t = -120 \end{cases}$$

$$-30t = -120 \;\rightarrow\; t = 4 \;\rightarrow\; x = 6 \cdot 4 = 24$$

Por tanto, se cruzan a las 4 h de haber iniciado su viaje, cuando el peatón ha recorrido 24 km.

Página 134

3. Hemos mezclado aceite de oliva de 3,50 €/*l* con aceite de girasol de 2 €/*l* para obtener 50 *l* de mezcla a 3,08 €/*l*. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.

	CANTIDAD	PRECIO
OLIVA	x	3,5
GIRASOL	y	2
MEZCLA	50	3,08

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3,5x + 2y = 50 \cdot 3,08 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ 3,5x + 2(50 - x) = 154 \end{cases} \rightarrow 3,5x + 100 - 2x = 154 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,5x = 54 \rightarrow x = 36 \rightarrow y = 14$$

36 *l* de aceite de oliva y 14 *l* de girasol.

4. He pagado 90,50 € por una camisa y un jersey que costaban, entre los dos, 110 €. En la camisa me han rebajado un 20 %, y en el jersey, un 15 %. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

De la camisa que valía x, pagaré $0,8x$ debido a la rebaja; y del jersey, que valía y, pagaré $0,85y$.

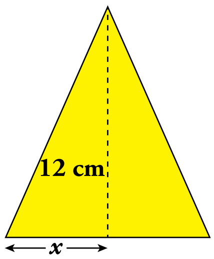
$$\begin{cases} x + y = 110 \\ 0,8x + 0,85y = 90,50 \end{cases}$$

$0,8(110 - y) + 0,85y = 90,50 \rightarrow 88 - 0,8y + 0,85y = 90,50 \rightarrow 0,05y = 2,5 \rightarrow y = 50,\ x = 60$

La camisa valía 60 €, y el jersey, 50 €.

5. El perímetro de un triángulo isósceles es de 36 cm. La altura relativa al lado desigual mide 12 cm. Calcula la medida de los lados iguales.

Si llamas x a la mitad de la base, se simplifican mucho los cálculos.



$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ y^2 - x^2 = 12^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ y^2 - x^2 = 144 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ (18 - x)^2 - x^2 = 144 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 324 - 36x + x^2 - x^2 = 144 \rightarrow 36x = 180 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = 18 - 5 = 13$$

Los lados iguales miden 13 cm.

Página 135

Hazlo tú

Queremos comprar un regalo entre un grupo de amigos. Si ponemos 4 € cada uno, sobran 2 €. Y si ponemos 3 €, faltan 6 €. ¿Cuántos amigos somos y cuánto cuesta el regalo?

Llamamos x al número de amigos e y al precio del regalo.

$$\left.\begin{array}{l} 4x = y + 2 \\ 3x = y - 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+2}{4} \\ \\ x = \dfrac{y-6}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y+2}{4} = \frac{y-6}{3} \rightarrow 3y + 6 = 4y - 24 \rightarrow y = 30$$

Sustituyendo el valor de la y en la 1.ª ecuación: $x = \dfrac{30+2}{4} = 8$

Somos 8 amigos y el regalo nos cuesta 30 €.

Ejercicios y problemas

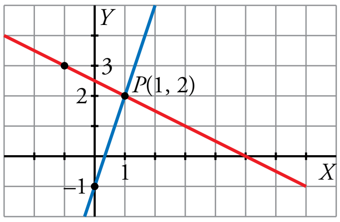
Página 136

Practica

1. **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$



$3x - y = 1$

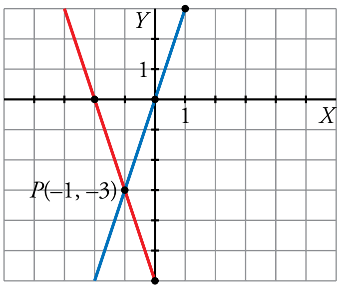
x	0	1
y	–1	2

$x + 2y = 5$

x	1	–1
y	2	3

Solución: $x = 1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$



$3x - y = 0$

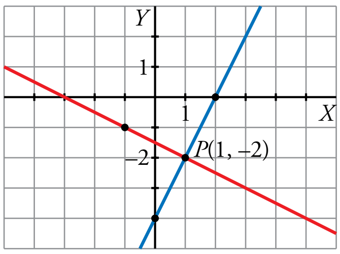
x	0	1
y	0	3

$3x + y = -6$

x	0	–2
y	–6	0

Solución: $x = -1,\ y = -3$

c) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$



$x + 3y = -5$

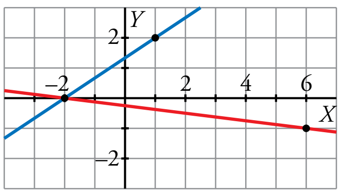
x	1	–2
y	–2	–1

$2x - y = 4$

x	0	1
y	–4	–2

Solución: $x = 1,\ y = -2$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$



$2x - 3y = -4$

x	1	–2
y	2	0

$x + 8y = -2$

x	6	–2
y	–1	0

Solución: $x = -2,\ y = 0$

2. **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3y \\ 2(-3y) + y = -5 \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow -6y + y = -5 \rightarrow -5y = -5 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = -3 \cdot 1 = -3$

Solución: $x = -3,\ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow x = -17 + 5y \rightarrow 8(-17 + 5y) - 3y = -25 \rightarrow -136 + 40y - 3y = -25 \rightarrow$

$\rightarrow 37y = 111 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = -17 + 15 = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} 7x - y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7x + 6 = y \\ 4x + 3(7x + 6) = 3 \rightarrow 4x + 21x + 18 = 3 \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow 25x = -15 \rightarrow x = \dfrac{-15}{25} = -\dfrac{3}{5} \rightarrow y = 7\left(-\dfrac{3}{5} + 6\right) = \dfrac{9}{5}$

Solución: $x = -\dfrac{3}{5},\ y = \dfrac{9}{5}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{2x + 16}{2} = x + 8 \\ 2(x + 8) - 3x = 16 \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow 2x + 16 - 3x = 16 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 8$

Solución: $x = 0,\ y = 8$

3. **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} x = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x = 4 \\ x - y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 6 + y \end{array}\right\} \rightarrow 6 + y = 4 \rightarrow y = -2$

Solución: $x = 4,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -4 - 3y \\ x = 6 + 2y \end{array}\right\} \rightarrow -4 - 3y = 6 + 2y \rightarrow -4 - 6 = 5y \rightarrow$

$\rightarrow y = -2 \rightarrow x = -4 - 3(-2) = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

c) $\left.\begin{array}{r} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 6x \\ y = \dfrac{7x + 5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow 6x = \dfrac{7x + 5}{2} \rightarrow 12x = 7x + 5 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1 \rightarrow y = 6 \cdot 1 = 6$

Solución: $x = 1,\ y = 6$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y = -4 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x+4}{4} \\ y = -1 - 2x \end{array}\right\} \to \dfrac{3x+4}{4} = -1 - 2x \to 3x + 4 = -4 - 8x \to$

$\to 11x = -8 \to x = \dfrac{-8}{11} \to y = -1 - 2\left(\dfrac{-8}{11}\right) = \dfrac{5}{11}$

Solución: $x = \dfrac{-8}{11},\ y = \dfrac{5}{11}$

4. **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = 7/6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 6x + 3y = -12 \end{array}\right\}$

$10x = -10 \to x = -1 \to 2(-1) + y = -4 \to y = -2$

Solución: $x = -1,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 6x - 2y = 14 \end{array}\right\}$

$7x = 15 \to x = \dfrac{15}{7} \to \dfrac{15}{7} + 2y = 1 \to y = \dfrac{1 - 15/7}{2} = -\dfrac{4}{7}$

Solución: $x = \dfrac{15}{7},\ y = -\dfrac{4}{7}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x - 6y = 2 \\ 3x + 6y = 2 \end{array}\right\}$

$5x = 4 \to x = \dfrac{4}{5} \to \dfrac{4}{5} - 3y = 1 \to y = \dfrac{4/5 - 1}{3} = -\dfrac{1}{15}$

Solución: $x = \dfrac{4}{5},\ y = -\dfrac{1}{15}$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = 7/6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ -2x - 2y = -14/6 \end{array}\right\}$

$x = 3 - \dfrac{14}{6} = \dfrac{2}{3} \to \dfrac{2}{3} + y = \dfrac{7}{6} \to y = \dfrac{7}{6} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{1}{2}$

5. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando dos veces el método de reducción para despejar cada una de las incógnitas:**

a) $\begin{cases} 13x - \ \ 8y = 15 \\ 7x - 14y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x - 13y = 54 \\ 11x - \ \ 7y = 22 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 13x - \ \ 8y = 15 \\ \ \ 7x - 14y = \ \ 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ 91x - \ \ 56y = 105 \\ -91x + 182y = -117 \end{cases} \rightarrow 126y = -12 \rightarrow y = \dfrac{-2}{21}$

$\begin{cases} 182x - 112y = 210 \\ -56x + 112y = -72 \end{cases} \rightarrow 126x = 138 \rightarrow x = \dfrac{23}{21}$

Solución: $x = \dfrac{23}{21},\ y = \dfrac{-2}{21}$

b) $\begin{cases} \ \ 9x - 13y = 54 \\ 11x - \ \ 7y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ 99x - 143y = 594 \\ -99x + \ \ 63y = -198 \end{cases} \rightarrow -80y = 396 \rightarrow y = -\dfrac{99}{20}$

$\begin{cases} \ \ \ \ 63x - 91y = 378 \\ -143x + 91y = -286 \end{cases} \rightarrow -80x = 92 \rightarrow x = -\dfrac{23}{20}$

Solución: $x = -\dfrac{23}{20},\ y = -\dfrac{99}{20}$

6. **Resuelve los siguientes sistemas. Indica si alguno de ellos es incompatible o indeterminado:**

a) $\begin{cases} \mathbf{2x - \ \ 5y = -2} \\ \mathbf{3{,}25x - 2{,}5y = 8} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{0{,}2x - 1{,}7y = 6{,}1} \\ \mathbf{1{,}23x + 0{,}8y = 3{,}75} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{3(x-1) + y = 0} \\ \mathbf{3(x+1) + y = -5} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \mathbf{x + y = 4 - y} \\ \mathbf{3x - 5 = 7 - 6y} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \ \ \ \ 2x - \ \ \ 5y = -2 \\ 3{,}25x - 2{,}5y = 8 \end{cases}$ Por reducción: $\begin{cases} \ \ \ \ 2x - 5y = -2 \\ -6{,}5x + 5y = -16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow -4{,}5x = -18 \rightarrow x = 4 \rightarrow 2 \cdot 4 - 5y = -2 \rightarrow 10 = 5y \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \ \ 0{,}2x - 1{,}7y = 6{,}1 \\ 1{,}23x + 0{,}8y = 3{,}75 \end{cases}$ Por sustitución: $y = \dfrac{6{,}1 - 0{,}2x}{1{,}7}$

$1{,}23x + 0{,}8\left(\dfrac{6{,}1 - 0{,}2x}{1{,}7}\right) = 3{,}75 \rightarrow 1{,}23x + \dfrac{4{,}88 - 0{,}16x}{1{,}7} = 3{,}75 \rightarrow$

$\rightarrow 2{,}091x + 4{,}88 - 0{,}16x = 6{,}375 \rightarrow$

$\rightarrow 1{,}931x = 1{,}495 \rightarrow x = \dfrac{1{,}495}{1{,}931} = 0{,}77 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{6{,}1 - 0{,}2 \cdot 0{,}77}{1{,}7} = 3{,}5$

Solución: $x = 0{,}77,\ y = 3{,}5$

c) $\begin{cases} 3(x-1) + y = 0 \\ 3(x+1) + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3 + y = 0 \\ 3x + 3 + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + y = -8 \end{cases}$

No tiene solución. Es incompatible.

d) $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases} \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones. Es indeterminado.

7. **Observa las ecuaciones que forman los siguientes sistemas y di cuál de ellos tiene una única solución, cuál no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones. Compruébalo representando las rectas que los forman:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$

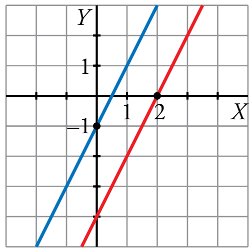
a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$ No tiene solución.

$2x - y = 1$

x	0	2
y	–1	3

$4x - 2y = 8 \rightarrow 2x - y = 4$

x	0	2
y	–4	0



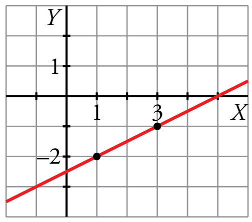
b) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 2x - 4y &= 10 \end{aligned}\right\}$ Tiene infinitas soluciones.

$x - 2y = 5$

x	1	3
y	–2	–1

$2x - 4y = 10 \rightarrow x - 2y = 5$

Es la misma recta



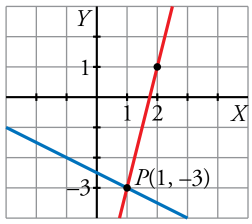
c) $\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}\right\}$ Tiene una solución, $x = 1$, $y = -3$.

$5x + 2y = -1$

x	1	–1
y	–3	–2

$4x - y = 7$

x	1	2
y	–3	1



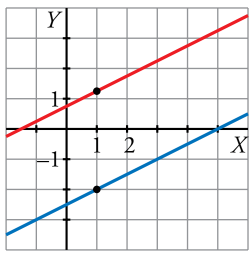
d) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 2x - 4y &= -3 \end{aligned}\right\}$ No tiene solución.

$x - 2y = 5$

x	1	–1
y	–2	–3

$2x - 4y = -3$

x	1	3
y	5/4	9/4



8. **Resuelve los sistemas siguientes:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \dfrac{y - 2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{2 - x}{3} + \dfrac{3 + y}{6} = 2 \\ \dfrac{8 - 3x}{6} - \dfrac{2 + y}{9} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{y + 1}{4} = 1 \\ \dfrac{2x - 1}{2} - \dfrac{2y + 1}{6} = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{array}\right\}$ Por sustitución: $y = -2x \to 5x - 3 = 9(-2x) - 3 \to$

$\to 5x - 3 = -18x - 3 \to 23x = 0 \to x = 0 \to y = -2 \cdot 0 = 0$

Solución: $x = 0,\ y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 6x - 4 = y - 1 \\ 3x + 3y + 2x - 2y = 8 \to 5x + y = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 6x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right\}$

Por reducción: $11x = 11 \to x = 1 \to 6 \cdot 1 - y = 3 \to y = 3$

Solución: $x = 1,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\}$ Por reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x + \ \ y = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ -2x - \ \ y = -8 \end{array}\right\} \to$

$\to -4y = 16 \to y = -4 \to 2x - 3(-4) = 24 \to 2x = 12 \to x = 6$

Solución: $x = 6,\ y = -4$

d) $\left.\begin{array}{l} x + \dfrac{y - 2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y - 2 = 4 \\ 2x - 3y \ \ = 10 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y = 6 \\ 2x - 3y = 10 \end{array}\right\}$ Por reducción:

$\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 18 \\ 2x - 3y = 10 \end{array}\right\} \to 14x = 28 \to x = 2 \to 2 - \dfrac{3}{2}y = 5 \to y = \dfrac{2 - 5}{3/2} = -2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2 - x}{3} + \dfrac{3 + y}{6} = 2 \\ \dfrac{8 - 3x}{6} - \dfrac{2 + y}{9} = 2 \end{array}\right\} \to \begin{cases} 2(2 - x) + 3 + y = 12 \\ 3(8 - 3x) - 2(2 + y) = 36 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 4 - 2x + 3 + y = 12 \\ 24 - 9x - 4 - 2y = 36 \end{cases} \to \begin{cases} -2x + \ \ y = 5 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases} \to -13x = 26 \to x = -2 \to$

$\to \dfrac{2 - (-2)}{3} + \dfrac{3 + y}{6} = 2 \to \dfrac{3 + y}{6} = 2 - \dfrac{4}{3} \to$

$\to \dfrac{3 + y}{6} = \dfrac{2}{3} \to y = 1$

Solución: $x = -2,\ y = 1$

f) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1\\[2mm]\dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{2y+1}{6}=1\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}2(x-1)+y+1=4\\3(2x-1)-(2y+1)=6\end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases}2x-2+\ \ y+1=4\\6x-3-3y-1=6\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x+\ \ y=5\\6x-2y=10\end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases}4x+2y=10\\6x-2y=10\end{cases} \rightarrow 10x=20 \rightarrow x=2 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1 \rightarrow \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{1}{2} \rightarrow y=1$

Solución: $x=2,\ y=1$

9. **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{5}\\3x-y=24\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3y}{4}\\x+2y=50\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}\dfrac{7}{3}x+\dfrac{3}{4}y=41\\-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{5}{2}y=11\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{1}{5}x-0,3y=\dfrac{6}{5}\\0,4x+\dfrac{7}{5}y=-1,6\end{cases}$ **e)** $\begin{cases}\dfrac{x+15}{8}+\dfrac{3(y+1)}{16}=3\\\dfrac{7-x}{2}-\dfrac{1+y}{12}=3\end{cases}$ **f)** $\begin{cases}\dfrac{3x+11}{4}-\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{23}{6}\\\dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

a) Por sustitución: $x=\dfrac{7y}{5}$

$3\left(\dfrac{7y}{5}\right)-y=24 \rightarrow 16y=120 \rightarrow y=7,5 \rightarrow x=\dfrac{7\cdot 7,5}{5}=10,5$

Solución: $x=10,5;\ y=7,5$

b) Por sustitución: $x=\dfrac{9y}{8}$

$\left(\dfrac{9y}{8}\right)+2y=50 \rightarrow 25y=400 \rightarrow y=16 \rightarrow x=\dfrac{9\cdot 16}{8}=18$

Solución: $x=18,\ y=16$

c) Por igualación:

1.ª ecuación [mín.c.m. (3, 4) = 12] $\rightarrow 28x+9y=492 \rightarrow x=\dfrac{492-9y}{28}$

2.ª ecuación [mín.c.m. (5, 2) = 10] $\rightarrow -6x+25y=110 \rightarrow x=\dfrac{110-25y}{-6}$

$\dfrac{492-9y}{28}=\dfrac{110-25y}{-6} \rightarrow -2952+54y=3080-700y \rightarrow 754y=6032 \rightarrow y=8 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{492-9\cdot 8}{28}=15$

Solución: $x=15,\ y=8$

d) Por reducción: multiplicamos por 5 ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - 1{,}5y = 6 \\ 2x + 7y = -8 \end{array}\right\}$$ Multiplicamos por –2 la 1.ª ecuación y sumamos ambas

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -12 \\ 2x + 7y = -\ \ 8 \end{array}\right\} \to 10y = -20 \to y = \frac{-20}{10} = -2 \to x = \frac{-8 - 7 \cdot (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

e) Por reducción: en la 1.ª ecuación, mín.c.m. (8, 16) = 16; y en la 2.ª, mín.c.m. (2, 12) = 12.

$$\left.\begin{array}{l} 2(x + 15) + 3(y + 1) = 48 \\ 6(7 - x) - (1 + y) = 36 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 15 \\ -6x - y = -5 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = \ \ 15 \\ -18x - 3y = -15 \end{array}\right\} \to -16x = 0 \to x = 0 \to y = -6 \cdot 0 + 5 = 5$$

Solución: $x = 0,\ y = 5$

f) Por reducción: mín.c.m. (4, 3, 6) = 12, mín.c.m. (2, 4) = 4

$$\left.\begin{array}{l} 3(3x + 11) - 4(y + 1) = 46 \\ 2(2x - 1) - (y + 3) = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 9x - 4y = 17 \\ 4x - \ \ y = 6 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos por –4 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$$\left.\begin{array}{r} 9x - 4y = \ \ 17 \\ -16x + 4y = -24 \end{array}\right\} \to -7x = -7 \to x = 1 \to y = 4 - 6 = -2$$

Solución: $x = 1,\ y = -2$

10. Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 3)^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

a) $x = 2 + y$

$(2 + y)^2 - y^2 = 16 \to 4 + 4y + y^2 - y^2 = 16 \to 4y = 12 \to y = 3$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

b) $x = 1 - y$

$$2(1 - y)^2 - y^2 = 2 \to 2 - 4y + 2y^2 - y^2 = 2 \to y^2 - 4y = 0 \begin{array}{l} \nearrow y = 0 \\ \searrow y = 4 \end{array}$$

Si $y = 0 \to x = 1 - 0 = 1$

Si $y = 4 \to x = 1 - 4 = -3$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 1,\ \ y_1 = 0 \\ x_2 = -3,\ \ y_2 = 4 \end{cases}$

c) $x = 5 + y$

$(5 + y - 3)^2 + 2y^2 = 11 \rightarrow 4 + 4y + y^2 + 2y^2 = 11 \rightarrow 3y^2 + 4y - 7 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-4 \pm 10}{6} \left\langle \begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{array} \right.$$

Si $y = 1 \rightarrow x = 5 + 1 = 6$

Si $y = \frac{-7}{3} \rightarrow x = 5 - \frac{7}{3} = \frac{15 - 7}{3} = \frac{8}{3}$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 6, \ y_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{8}{3}, \ y_2 = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$

d) $x = 9 - y$

$(9 - y)^2 + y^2 = 41 \rightarrow 81 - 18y + y^2 + y^2 = 41 \rightarrow 2y^2 - 18y + 40 = 0 \rightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 40}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{18 \pm 2}{4} \left\langle \begin{array}{l} y = 5 \\ y = 4 \end{array} \right.$$

Si $y = 5 \rightarrow x = 9 - 5 = 4$

Si $y = 4 \rightarrow x = 9 - 4 = 5$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 4, \ y_1 = 5 \\ x_2 = 5, \ y_2 = 4 \end{cases}$

Página 137

Aplica lo aprendido

11. **Aplica el método de sustitución para resolver estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy + x^2 = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ xy = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2xy = 24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ xy = 24 \end{cases}$

a) $y = 8 - x$

$x(8 - x) + x^2 = 24 \rightarrow 8x - x^2 + x^2 = 24 \rightarrow 8x = 24 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 8 - 3 = 5$

Solución: $x = 3,\ y = 5$

b) $y = 1 - 2x$

$x(1 - 2x) = -3 \rightarrow x - 2x^2 = -3 \rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Si $x = -1 \rightarrow y = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$

Si $x = \dfrac{3}{2} \rightarrow y = 1 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = -2$

Solución: $\begin{cases} x_1 = -1,\ y_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{3}{2},\ y_2 = -2 \end{cases}$

c) $x = \dfrac{1 + 3y}{2}$

$$2\left(\frac{1 + 3y}{2}\right)y = 24 \rightarrow y + 3y^2 = 24 \rightarrow 3y^2 + y - 24 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-24)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 17}{6} \begin{cases} y = \dfrac{8}{3} \\ y = -3 \end{cases}$$

Si $y = \dfrac{8}{3} \rightarrow x = \dfrac{1 + 3 \cdot \dfrac{8}{3}}{2} = \dfrac{9}{2}$

Si $y = -3 \rightarrow x = \dfrac{1 + 3 \cdot (-3)}{2} = -4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{2},\ y_1 = \dfrac{8}{3} \\ x_2 = -4,\ y_2 = -3 \end{cases}$

d) $x = \frac{2y}{3}$

$\left(\frac{2y}{3}\right)y = 24 \rightarrow \frac{2y^2}{3} = 24 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm\sqrt{36} \begin{cases} y = 6 \\ y = -6 \end{cases}$

Si $y = 6 \rightarrow x = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

Si $y = -6 \rightarrow x = \frac{2 \cdot (-6)}{3} = -4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 4, \ y_1 = 6 \\ x_2 = -4, \ y_2 = -6 \end{cases}$

12. **Aplica el método de reducción para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ 2x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$

a) Sumamos las dos ecuaciones: $3x^2 = 27 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Si $x = 3 \rightarrow 9 + y^2 = 2 \rightarrow y^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Si $x = -3 \rightarrow 9 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 3, \ y_1 = 4 \\ x_2 = 3, \ y_2 = -4 \\ x_3 = -3, \ y_3 = 4 \\ x_4 = -3, \ y_4 = -4 \end{cases}$

b) Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$\left.\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 13 \\ 6x^2 - 3y^2 = -6 \end{array}\right\} \rightarrow 7x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 1, \ y_1 = 2 \\ x_2 = 1, \ y_2 = -2 \\ x_3 = -1, \ y_3 = 2 \\ x_4 = -1, \ y_4 = -2 \end{cases}$

c) Multiplicamos la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y las sumamos:

$\left.\begin{array}{r} 9x^2 - 6y^2 = -6 \\ 4x^2 + 6y^2 = 6 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 0, \ y_1 = 1 \\ x_2 = 0, \ y_2 = -1 \end{cases}$

d) Sumamos ambas ecuaciones: $2x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow$ No existe. No tiene solución.

13. **Una cooperativa ha envasado 2 000 *l* de aceite en botellas de 1,5 *l* y de 2 *l*. Sabemos que han utilizado 1 100 botellas en total. ¿Cuántas se han necesitado de cada clase?**

x son las botellas de 1,5 *l*, e y, las de 2 *l*.

$$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 1,5x + 2y = 2000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2200 \\ 1,5x + 2y = 2000 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -0,5x = -200 \rightarrow x = 400 \rightarrow y = 1100 - 400 = 700$$

Se han utilizado 400 botellas de 1,5 *l* y 700 de 2 *l*.

14. **Una botella llena de leche pesa 1 220 g. Cuando está por la mitad, pesa 854 g. ¿Cuánto pesa la botella vacía?**

Llamamos x al peso de la leche, e y, al de la botella vacía.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1220 \\ \frac{x}{2} + y &= 854 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 1220 \\ x + 2y &= 1708 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -x - y &= -1220 \\ x + 2y &= 1708 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 488$$

La botella vacía pesa 488 g.

15. **Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, 8/3.**

Llamamos x e y a los números.

$$\begin{cases} x + y = 154 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 154 - x \\ 3x = 8y \end{cases} \rightarrow 3x = 8(154 - x) \rightarrow 3x = 1232 - 8x \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = 1232 \rightarrow x = 112 \rightarrow y = 154 - 112 = 42$$

Los números son 112 y 42.

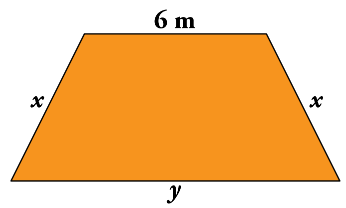
16. **Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se restan 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?**

x es el número de aciertos, e y, el de fallos.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - 0,5y = 24,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ x - 0,5y = 24,5 \end{cases} \rightarrow -1,5y = -25,5 \rightarrow y = 17 \rightarrow x = 33$$

He tenido 33 aciertos y 17 fallos.

17. **Si la base mayor es la suma de los lados oblicuos y el perímetro es 38 m, ¿cuánto mide cada lado de este trapecio isósceles?**



$$\begin{cases} y = 2x \\ 6 + 2x + y = 38 \end{cases} \rightarrow 6 + 2x + 2x = 38 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8 \text{ m} \rightarrow y = 16\text{m}$$

La base mayor mide 16 m, y los lados oblicuos, 8 m, respectivamente.

18. **Los estudiantes de un centro escolar son 420 entre ESO y Bachillerato. El 42 % de los alumnos de ESO y el 52 % de Bachillerato son chicas, lo que supone un total de 196 mujeres. Calcula cuántos estudiantes hay en ESO y cuántos en Bachillerato.**

x es el número de alumnos de ESO e y los de Bachillerato.

$$\begin{cases} x + y = 420 \\ 0,42x + 0,52y = 196 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 420 - x \\ 0,42x + 0,52(420 - x) = 196 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,42x - 0,52x = 196 - 218,4 \rightarrow 0,1x = 22,4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 224 \rightarrow y = 420 - 224 = 196$$

Son 224 alumnos en la ESO y 196 en Bachillerato.

19. **He pagado 55,72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. La camiseta tenía un 18 % de descuento, y el pantalón, un 22 %. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?**

La camiseta vale x; con la rebaja del 18 % pago $0,82x$. El pantalón vale y; con la rebaja del 22 % pago $0,78y$.

Por tanto:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 0,82x + 0,78y = 55,72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 70 - x \\ 0,82x + 0,78(70 - x) = 55,72 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,82x + 54,6 - 0,78x = 55,72 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,04x = 1,12 \rightarrow x = 28 \rightarrow y = 70 - 28 = 42$$

La camiseta vale 28 €, y el pantalón, 42 €.

Comprobación: $\begin{cases} 28 + 42 = 70 \\ 22,96 + 32,76 = 55,72 \end{cases}$

20. **Halla una fracción tal que si se le suma una unidad al numerador y se deja el mismo denominador la fracción es igual a 1/2. Y si se mantiene el numerador inicial y se suman 3 unidades al denominador, la fracción es igual a 1/3.**

Llamamos x al numerador de la fracción e y al denominador.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y+3} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 2 = y \\ 3x = y + 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = -2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 5 \rightarrow y = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

La fracción buscada es $\dfrac{5}{12}$.

21. **Sabemos que dos números suman 34. Si al mayor lo dividimos entre 3 y al menor entre 4, los resultados obtenidos se diferencian en 2 unidades. Halla dichos números.**

Llamamos x e y a los números.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 34 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 34 \\ 4x - 3y = 24 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 102 \\ 4x - 3y = \ \ 24 \end{array}\right\} \to 7x = 126 \to$$

$$\to x = 18 \to y = 34 - 18 = 16$$

El número mayor es 18, y el menor, 16.

Resuelve problemas

22. **Halla dos números naturales que sumen 140 y tales que al dividir el mayor entre el menor obtengamos 2 de cociente y 14 de resto.**

Los números son x e y.

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ x = 2y + 14 \end{cases} \to \begin{cases} 2y + 14 + y = 140 \\ x = 2 \cdot 42 + 14 = 98 \end{cases} \to 3y = 126 \to y = 42$$

98 y 42 son los números buscados.

23. **La suma de las edades de una madre y de su hijo son 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?**

	HOY	HACE 10 AÑOS
MADRE	x	$x - 10$
HIJO	y	$y - 10$
	56	$x - 10 = 5(y - 10)$

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ x - 10 = 5(y - 10) \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 56 \\ x - 10 = 5y - 50 \end{cases} \to \begin{cases} y = 56 - x \\ x - 10 = 5(56 - x) - 50 \end{cases} \to$$

$$\to x - 10 = 280 - 5x - 50 \to 6x = 240 \to$$

$$\to x = 40 \to y = 56 - 40 = 16$$

La madre tiene 40 años, y el hijo 16 años.

24. **La edad de Carmen es el triple de la de su hija Maite. Pero dentro de 15 años será el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Cuál es la edad de cada una?**

Llamamos x a la edad de Maite e y a la de Carmen.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x + 15 = 2(y + 15) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y + 15 \end{array}\right\} \to 3y = 2y + 15 \to y = 15$$

Maite tiene 15 años y su madre, Carmen, tiene 45.

25. **Entre dos autobuses viajan 120 personas. Si del que lleva más pasajeros se trasladan los 2/5 al otro, los dos llevarán el mismo número de personas. ¿Cuántos viajeros llevaba cada autobús?**

Llamamos x e y al número de pasajeros de cada autobús.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - \dfrac{2x}{5} = y + \dfrac{2x}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ 5x - 2x = 5y + 2x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 6y = 120 \rightarrow y = 20 \rightarrow x = 120 - 20 = 100$$

El autobús que más pasajeros llevaba, llevaba 100, y el que menos, 20.

26. **Una empresa recibe el encargo de fabricar cierto número de macetas para una fecha determinada. Al planificar la producción, el gerente advierte que si se fabricasen 250 macetas diarias, faltarían 150 macetas al concluir el plazo. Pero que si se fabricasen 260 macetas diarias, sobrarían 80. ¿Cuántos días de plazo tenían y cuántas macetas les encargaron?**

Llamamos x al número de días de plazo e y al número de macetas.

$$\left.\begin{array}{l} 250x - y = -150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -250x + y = 150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \rightarrow 10x = 230 \rightarrow x = 23 \rightarrow y = 5\,900$$

Tienen 23 días de plazo para un encargo de 5 900 macetas.

Página 138

27. **Por un pantalón y unos zapatos, he pagado 126 €. Si el precio del pantalón aumentara en un 14 %, entonces sería el 75 % del precio de los zapatos. ¿Cuánto pagué por cada uno?**

Llamamos x al precio del pantalón e y al de los zapatos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 126 \\ 1,14x = 0,75y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 126 - x \\ 1,14x = 0,75(126 - x) \end{array}\right\} \;1,14x = 94,5 - 0,75x \to$$

$$\to 1,89x = 94,5 \to x = 50 \to y = 76$$

Por el pantalón he pagado 50 €, y por los zapatos, 76 €.

28. **Si te doy 4 de los libros que tengo, entonces tú tendrás el doble que yo. Si tú me das 6 de los tuyos, entonces seré yo el que tenga el doble que tú. ¿Cuántos libros tenemos cada uno?**

Llamamos x a los libros que yo tengo e y a los que tienes tú.

$$\left.\begin{array}{l} y + 4 = 2(x - 4) \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -4x + 2y = -24 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to -3x = -42 \to x = 14 \to$$

$$\to 2 \cdot 14 - y = 12 \to y = 16$$

Yo tengo 14 libros y tú tienes 16.

29. **Un comerciante compró 35 juegos de un tipo y 25 de otro pagando por ellos 1 220 €. Con la venta de los primeros ganó un 25 % y con la venta de los segundos perdió un 5 %, de forma que obtuvo 170 € de ganancia sobre el precio de compra. Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.**

Precios de compra de cada tipo de juego: x e y.

$$\begin{cases} 35x + 25y = 1220 \\ 1,25 \cdot 35x + 0,95 \cdot 25y = 1390 \end{cases} \to \begin{cases} 7x + 5y = 244 \\ 43,75x + 23,75y = 1390 \end{cases} \to$$

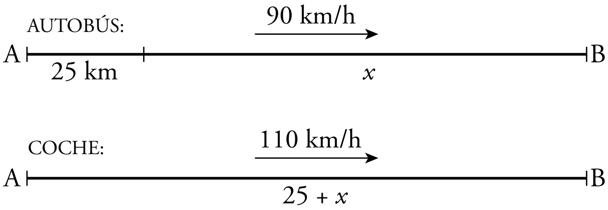
$$\to y = \frac{244 - 7x}{5} \to 43,75x + \left(\frac{244 - 7x}{5}\right) = 1390 \to$$

$$\to 43,75x + 1159 - 33,25x = 1390 \to 10,5x = 231 \to$$

$$\to x = 22 \to y = \frac{244 - 7 \cdot 22}{5} = 18$$

Los precios de compra fueron 22 € y 18 €, respectivamente.

30. **Un autobús sale de A a 90 km/h. Cuando ha recorrido 25 km, sale de A un coche a 110 km/h que quiere alcanzar al autobús. ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo y qué distancia recorre hasta conseguirlo?**



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
AUTOBÚS	x	90	t
COCHE	$25 + x$	110	t

Sabemos que *espacio* = *velocidad* · *tiempo*.

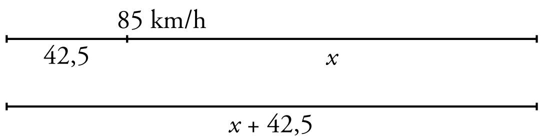
$$\left.\begin{array}{l} x = 90t \\ 25 + x = 110t \end{array}\right\} \rightarrow 25 + 90t = 110t \rightarrow 20t = 25 \rightarrow t = 1{,}25 \rightarrow x = 112{,}5$$

Tarda 1,25 h y recorre 137,5 km.

31. **Un tren regional sale de una estación a una velocidad de 85 km/h. Media hora más tarde sale otro más rápido en la misma dirección a 110 km/h. Calcula el tiempo que tardará en alcanzarlo y la distancia recorrida hasta lograrlo.**

t: tiempo que tarda en alcanzarlo.

x: distancia que recorre el tren regional hasta el alcance.



$85 \cdot 0{,}5 = 42{,}5$

$$\begin{cases} x = 85t \\ x + 42{,}5 = 110t \end{cases} \rightarrow 85t + 42{,}5 = 110t \rightarrow 25t = 42{,}5 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 1{,}7 \rightarrow x = 144{,}5 \rightarrow 144{,}5 + 42{,}5 = 187$$

Tarda 1 h 42 min y recorre 187 km.

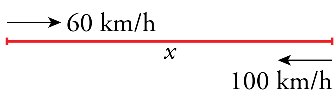
32. **Dos ciudades, A y B, distan 234 km. De A sale un autobús en dirección a B y simultáneamente sale de B un tren en dirección a A. Tardan en cruzarse 1 hora y 30 minutos. ¿Cuál es la velocidad de cada uno sabiendo que la del autobús supera a la del tren en 5 km/h?**

$$\begin{cases} x = v \cdot 1{,}5 \\ 234 - x = (v + 5) \cdot 1{,}5 \end{cases} \rightarrow 234 - 1{,}5v = 1{,}5v - 7{,}5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 234 - 7{,}5 = 3v \rightarrow v = \frac{226{,}5}{3} = 75{,}5 \text{ km/h}$$

El tren va a 75,5 km/h, y el autobús, a 80,5 km/h.

33. **Un autobús escolar hace la ruta entre dos pueblos, A y B. Cuando va con niños lleva una velocidad media de 60 km/h y tarda un cuarto de hora más que si va vacío. Si sabemos que cuando va sin niños lleva una velocidad de 100 km/h, ¿cuál es la distancia entre A y B?**



$$\left.\begin{array}{l} x = 60t \\ x = 100\,(t - 0{,}25) \end{array}\right\} \rightarrow 60t = 100t - 25 \rightarrow 40t = 25 \rightarrow t = 0{,}625 \rightarrow x = 60 \cdot 0{,}625 = 37{,}5$$

La distancia entre A y B es 37,5 km.

34. **Si en un depósito que contiene agua a 50 °C añadimos agua a 15 °C, obtenemos 150 *l* a 36 °C. ¿Cuántos litros había en el depósito y cuántos hemos añadido?**

x son los litros de agua que había en el depósito.

y son los litros que hemos añadido.

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 50x + 15y = 150 \cdot 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ 50x + 15(150 - x) = 5\,400 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 50x + 2\,250 - 15x = 5\,400 \rightarrow$$

$$\rightarrow 35x = 3\,150 \rightarrow x = 90 \rightarrow y = 150 - 90 = 60$$

Había 90 *l* de agua a 50°C y hemos añadido 60 *l* de agua a 15°C.

35. **Se ha fundido una cadena de oro del 80 % de pureza con un anillo del 64 % de pureza. Así se han obtenido 12 gramos de oro de una pureza del 76 %. ¿Cuántos gramos pesaba la cadena y cuántos el anillo?**

Llamamos x al peso de la cadena e y al del anillo.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 0,8x + 0,64y = 12 \cdot 0,76 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 12 - x \\ 0,8x + 0,64(12 - x) = 9,12 \end{array}\right\} \rightarrow 0,8x + 7,68 - 0,64x = 9,12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,16x = 1,44 \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 3$$

La cadena pesa 9 g, y el anillo, 3 g.

36. **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, obtenemos el doble de la cifra de las decenas del número inicial.**

Hállalo sabiendo que sus cifras suman 16.

x es la cifra de las decenas.

y es la cifra de las unidades.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ (10x + y) - (10y + x) = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 16 - x \\ 10x + 16 - x - 10(16 - x) - x = 2x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x + 16 - x - 160 + 10x - x = 2x \rightarrow 16x = 144 \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 7$$

El número es 97.

37. **La diferencia de dos números es 2, y la de sus cuadrados, 20. Halla esos números.**

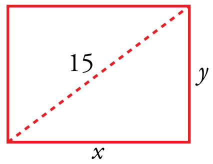
Los números son x e y.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ (2 + y)^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 4y + y^2 - y^2 = 20 \rightarrow 4y = 16 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 6$$

Los números son 6 y 4.

38. **La diagonal de un rectángulo mide 15 cm, y su perímetro, 42 cm. Calcula sus lados.**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 21 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 + (21 - x)^2 = 225 \end{cases} \to x^2 + 441 - 42x + x^2 = 225 \to$$

$$\to 2x^2 - 42x + 216 = 0 \to x^2 - 21x + 108 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = 9 \end{cases}$$

Si $x = 12$, $y = 21 - 12 = 9$.

Si $x = 9$, $y = 21 - 9 = 12$.

Los lados del rectángulo miden 9 cm y 12 cm, respectivamente.

39. **En un triángulo rectángulo, la diferencia entre la medida de sus catetos es de 6 cm. Si la hipotenusa mide 30 cm, ¿cuánto miden los catetos?**

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 6 \\ x^2 + y^2 &= 30^2 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 6 + y \\ (6 + y)^2 + y^2 &= 30^2 \end{aligned}\right\}$$

$$36 + 12y + y^2 + y^2 = 900 \to 2y^2 + 12y - 864 = 0 \to y^2 + 6y - 432 = 0 \begin{cases} y = 18 \\ y = -24 \end{cases}$$

Como los catetos solo pueden tomar valores positivos, la única solución es que el cateto mayor mida 24 cm, y el menor, 18 cm.

40. **Las medidas de las diagonales de un rombo suman 22 cm y su área son 56 cm².** **¿Cuanto mide cada diagonal?**

Llamamos x e y a las medidas de las diagonales.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 22 \\ \frac{xy}{2} &= 56 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 22 - y \\ \frac{(22 - y)\,y}{2} &= 56 \end{aligned}\right\} \to 22y - y^2 = 112 \to -y^2 + 22y - 112 = 0 \begin{cases} y = 8 \\ y = 14 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 14, \ y_1 = 8 \\ x_2 = 8, \ y_2 = 14 \end{cases}$

La diagonal mayor mide 14 cm, y la menor, 8 cm.

41. **Un rectángulo tiene 44 m de perímetro. Si la base aumenta 3 m y la altura se reduce 2 m, su área no varía. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

Llamamos x a la medida de la base e y a la de la altura.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 44 \\ (x + 3)(y - 2) = xy \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 22 \\ xy - 2x + 3y - 6 = xy \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 22 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x = 22 - y \\ -2(22 - y) + 3y = 6 \end{cases} \to -44 + 2y + 3y = 6 \to 5y = 50 \to y = 10 \to x = 12$$

La base mide 12 cm, y la altura, 10 cm.

42. **Si la base de un rectángulo disminuye 80 cm y su altura aumenta 20 cm, se convierte en un cuadrado. Y si la base disminuye 60 cm y la altura aumenta 20 cm, su área disminuye 400 cm². Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x a la medida de la base e y a la de la altura.

$$\begin{cases} x - 80 = y + 20 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 100 \\ xy + 20x - 60y - 1\,200 = xy - 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 100 \\ 20x - 60y = 800 \end{cases}$$

$x = y + 100 \rightarrow 20(y + 100) - 60y = 800 \rightarrow 20y + 2\,000 - 60y = 800 \rightarrow -40y = -1\,200 \rightarrow$

$\rightarrow y = 30 \rightarrow x = 130$

La base del rectángulo mide 130 cm, y la altura, 30 cm.

Problemas "+"

43. **Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son a, 9, $3a - b$ y $3a + b$. ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 187 en esta progresión?**

Al ser una progresión aritmética, la diferencia entre los términos es siempre la misma.

$$\left.\begin{array}{l} 9 - a = 3a - b - 9 \\ 3a - b - 9 = (3a + b) - (3a - b) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a - b = 18 \\ 3a - 3b = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -12a + 3b = -54 \\ 3a - 3b = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

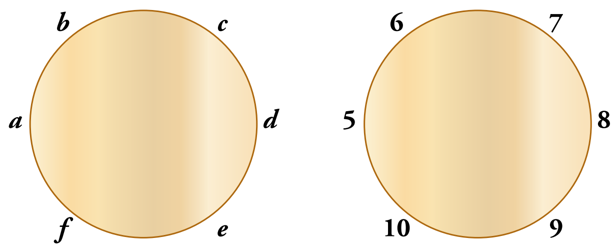
$$\rightarrow -9a = -45 \rightarrow a = 5 \rightarrow b = 4 \cdot 5 - 18 = 2$$

El término que ocupa el lugar 187 en la progresión responderá a la fórmula:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot (a_2 - a_1)$

$a_{187} = 5 + 186 \cdot (9 - 5) = 749$

44. **Seis personas a, b, c, d, e y f, están sentadas en una mesa redonda. Cada una de ellas escribe un número y se lo enseña a las dos que tiene a su lado. Después, cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han enseñado. Si los resultados fueron 5, 6, 7, 8, 9 y 10, ¿cuáles fueron los números que escribieron?**



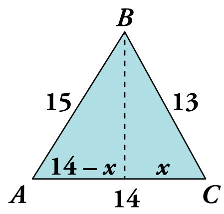
$$\begin{cases} b + f = 10 \rightarrow b = 10 - f \\ d + f = 18 \rightarrow d = 18 - f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + d = 14 \\ (10 - f) + (8 - f) = 14 \end{cases} \rightarrow -2f = -4 \rightarrow f = 2$$

$$\begin{cases} a + c = 12 \rightarrow a = 12 - c \\ e + c = 16 \rightarrow e = 16 - c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + e = 20 \\ (12 - c) + (16 - c) = 20 \end{cases} \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$a = 8,\ b = 8,\ c = 4,\ d = 16,\ e = 12,\ f = 2$

Página 139

45. **En el triángulo ABC de lados $\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{CA} = 14$ cm y $\overline{BC} = 13$ cm, ¿cuánto mide la altura que parte de B?**



Llamamos y a la altura pedida.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13^2 \\ (14-x)^2 + y^2 &= 15^2 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 169 \\ -28x + x^2 + y^2 &= 29 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} y^2 &= 169 - x^2 \\ y^2 &= 29 - 28x - x^2 \end{aligned}\right\} \to$$

$$\to 169 - x^2 = 29 - 28x - x^2 \to 140 = 28x \to x = 5$$

$$25 + y^2 = 169 \to y^2 = 169 - 25 = 144 \to y = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

Como la altura no puede tomar un valor negativo, la única solución válida es 12 cm.

46. **Un tren sale de una ciudad con 134 pasajeros, entre hombres, mujeres y niños. Hace varias paradas y en cada una bajan dos hombres y una mujer, y suben cuatro niños. Llega a su destino con 143 pasajeros, de los cuales los hombres representan los 2/3 de los niños, y las mujeres, los 3/4 de los hombres.**

¿Cuántas paradas hizo el tren? ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay al llegar? ¿Y al partir?

- En cada parada bajan 3 personas y suben 4; por tanto, aumenta un pasajero en cada parada.

  $143 - 134 = 9$

  El tren ha hecho 9 paradas.

- Llamemos x al número de hombres, y al número de mujeres y z al número de niños que hay al llegar.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \\ y &= \frac{3}{4}x \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x + \frac{3}{4}x + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} \frac{7}{4}x + z &= 143 \\ x &= \frac{2}{3}z \end{aligned}\right\} \to$$

$$\to \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3}z + z = 143 \to z = 66, \; x = 44, \; y = 33$$

Llegaron 66 niños, 33 mujeres y 44 hombres.

Como se bajan dos hombres en cada parada, han llegado $9 \cdot 2 = 18$ hombres menos que al partir. 9 mujeres menos que al partir y $9 \cdot 4 = 36$ niños más.

Las personas que había al partir son:

$44 + 18 = 62$ hombres

$33 + 9 = 42$ mujeres

$66 - 36 = 30$ niños

En total, 134.

Reflexiona sobre la teoría

47. **Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución sea $x = 2,\ y = -1$.**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2(-1) = 4 \\ 2 - (-1) = 3 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \text{ es solución.}$$

48. **¿Cuál debe ser el valor de m para que los sistemas a) y b) sean equivalentes?**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + \ y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = m \\ y = 3 \end{cases}$

La solución de a) es $x = 5,\ y = 3$.

b) debe tener la misma solución: $5 - 3 = m \rightarrow m = 2$

49. **Comprueba si $x = 3,\ y = 1$ es solución de alguno de estos sitemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x + \ y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - \ y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + \ y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 + 1 = 4 \\ 3 - 2 = 1 \\ 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0 \end{array}\right\} x = 3,\ y = 1$ es la solución de ese sistema.

b) $\begin{cases} x - \ y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + \ y = 5 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 - 1 = 2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \neq 5 \end{array}\right\} x = 3,\ y = 1$ no es solución de ese sistema.

50. **Completa los siguientes sistemas de modo que el primero tenga la solución $x = 3$, $y = -2$; el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ \dots - \ y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \ y = 5 \\ 2x + 2y = \dots \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \dots - 4y = \dots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \dots \\ \dots - \ y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3 + 2(-2) = 5 \\ \dots = 8 + y = 8 - 2 = 6 \end{cases} \rightarrow$ Solución: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - \ y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \ y = 5 \\ 2x + 2y = \dots \end{cases}$ Puede ser cualquier número distinto de 10.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + \ y = 5 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \dots - 4y = \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -14 \end{cases}$

51. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La ecuación $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ es una ecuación lineal.

b) El sistema $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$ es indeterminado.

c) Los sistemas S_1: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ y S_2: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ son equivalentes.

d) La ecuación $5x + 3y = 18$ no tiene solución.

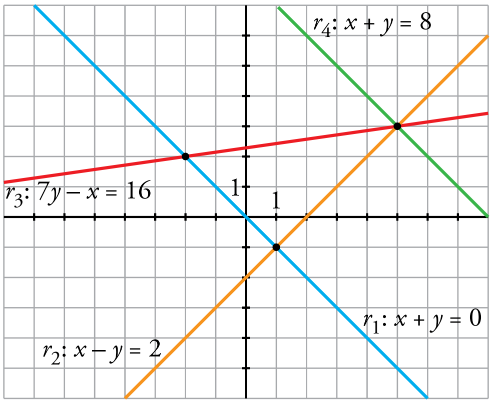
a) Falso. Debería tener otra incógnita para tratarse de un sistema lineal.

b) Verdadero. La segunda ecuación está multiplicada por –2 respecto a la primera.

c) Verdadero. La solución de los dos sistemas es la misma, por lo que son equivalentes.

d) Falso. Tiene infinitas soluciones, damos un valor a una de las incógnitas y despejamos el valor de la otra.

52. **Observa la representación de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 y responde sin resolver.**



a) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones? ¿Alguno es incompatible o indeterminado?

i) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ ***ii)*** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ ***iii)*** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) ¿Alguno de estos sistemas tiene solución?

I) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ ***II)*** $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$

a) *i)* $x = 1$, $y = -1$ *ii)* $x = 5$, $y = 3$ *iii)* Incompatible.

b) Sí, *II)* $\longrightarrow$ *Solución*: $x = 5$, $y = 3$.

53. **¿Qué valores deben tomar a y b para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases}$$

Escribe tres soluciones del sistema.

Para que tenga infinitas soluciones, la segunda ecuación debe ser proporcional a la primera.

Así: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases} \rightarrow a = 9$ y $b = 6$

Soluciones: Damos valores a x para obtener puntos de la recta $3x + 2y = 5$:

$x = 1;\ y = 1;\ x = 0,\ y = \frac{5}{2};\ x = -1,\ y = 4$

54. **¿Qué condición deben cumplir c y d para que este sistema no tenga solución?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = c \\ 6x + 4y = d \end{cases}$$

El sistema no tendrá solución cuando las dos rectas sean paralelas, es decir, cuando $d \neq 2c$.

Página 140

Utiliza el lenguaje algebraico

Peaje solo para algunos

- **Hace muchos, muchos años, allá en el tiempo de las espadas, había un poderoso señor cuyo castillo dominaba el único puente sobre el río del lugar.**

  Un buen día colocó en la entrada del puente el cartel de la derecha.

  Un campesino, algo ambicioso, reunió sus ahorros y se empeñó en pasar varias veces por el puente. Pero a la tercera se encontró con la bolsa vacía.

  Sin embargo, un rico comerciante intentó hacer lo mismo pero el capitán, al ver su bolsa, le dijo que el trato era solo para campesinos. Que los ricos comerciantes debían pagar tres doblones y marchar, sin más.

  Sabiendo que el campesino reunió más de 10 pero menos de 20 doblones, responde:

  — ¿Cuántas monedas tomaba cada vez el señor del castillo?

  — ¿Cuántas monedas llevaba, al menos, el rico comerciante?

  Quizá te resulte más fácil si utilizas el lenguaje algebraico.

	ENTRA CON...	PEAJE	TRAS EL PEAJE	SALE CON...
PRIMERA VEZ	x	a	$x - a$	$2x - 2a$
SEGUNDA VEZ	$2x - 2a$	a	$2x - 3a$	?
TERCERA VEZ	?	?	?	0

— El campesino llevaba 14 doblones al principio. En la mano del señor cabían 8 doblones.

— El rico comerciante llevaba, al menos, 17 monedas. En este caso y con cantidades superiores, el señor del castillo debería entregar más monedas de las que recibiese.

Si es comerciante entra con 17 monedas, el señor le quita 8 y aún le quedan 9. Por lo tanto, el señor recibiría 8 y debería entregar 9. No le interesa.

Investiga

Cuadrado mágico

- **Ya sabes que en un cuadrado mágico, filas, columnas y diagonales suman lo mismo. Trata ahora de completar las casillas vacías para que el cuadrado de abajo resulte mágico.**

3		
		1
	5	

Ayuda:

3		
	a	**1**
	5	b

$\rightarrow$

3	$b-2$	$a+2$
$b+2$	a	**1**
$a-2$	**5**	b

$\rightarrow$ $3 + a + b = (a - 2) + a + (a + 2)$

Si profundizas en el problema, descubrirás la relación que debe existir entre a y b. Y eso te permitirá encontrarle muchas soluciones.

3	3	6
7	4	1
2	5	5

Página 141

Entrénate resolviendo problemas

- **En un salón de té solo se sirve té y tarta. Cada té vale 1,10 € y cada ración de tarta 2,10 €. Varios amigos realizan, todos ellos, la misma consumición. La cuenta asciende a un total de 30,10 €. ¿Cuántos eran? ¿Qué tomó cada uno?**

Un té vale 110 céntimos y una ración de tarta, 210 céntimos.

El total de la factura asciende a 3010 céntimos.

Hemos de buscar posibles consumiciones cuyo coste total sea divisor de 3010.

N.º DE CONSUMICIONES		COSTE TOTAL (en céntimos)	¿ES DIVISIBLE DE 3010?
1	1 té + 1 pasta	110 + 210 = 320	No
2	1 té + 2 pastas	110 + 420 = 530	No
	2 tés + 1 pasta	220 + 210 = 430	Sí

3010 : 430 = 7

Así pues, 7 eran los amigos y cada uno consumió dos tés y un trozo de tarta.

- Otra forma de resolverlo:

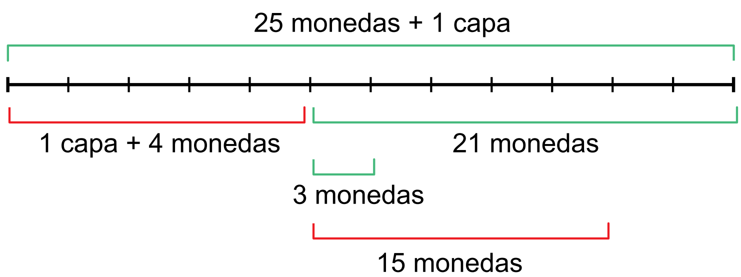
  Consideramos, en lugar de céntimos, decenas de céntimos.

  Un té vale 11 decenas de céntimos, y una ración de tarta, 21. La cuenta asciende a 310 decenas de céntimos.

  Descomponemos: $301 = 7 \cdot 43 = 7 \cdot (2 \cdot 11 + 21)$

  Así es fácil verlo: 7 amigos tomaron 2 tés y 1 ración de tarta cada uno.

- **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de una capa y 25 monedas de oro. A los cinco meses se despide, y recibe como pago la capa y cuatro monedas de oro. ¿En cuántas monedas está valorada la capa?**

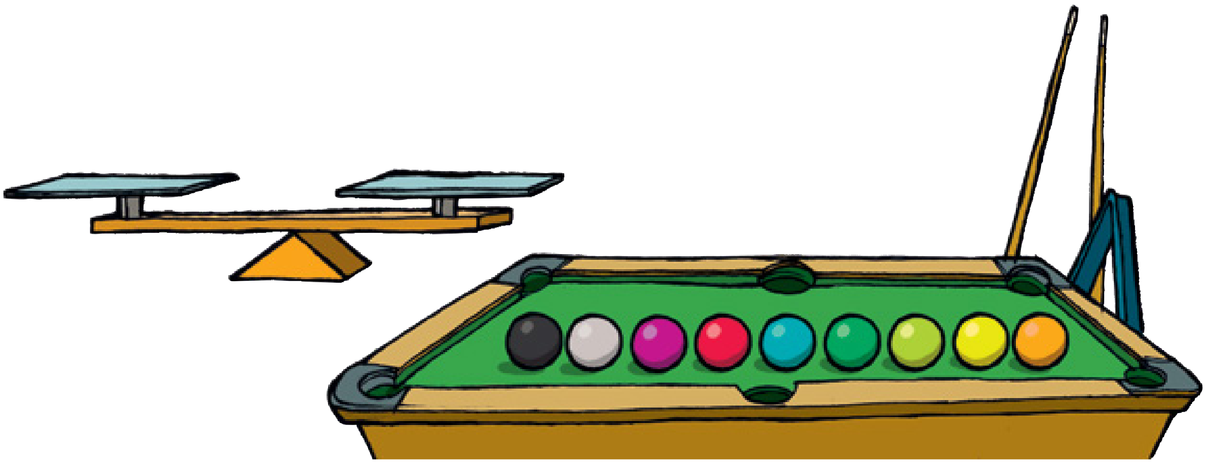


En los 7 meses que le quedaban, habría ganado 21 monedas. Es decir, 3 monedas cada mes. En 5 meses habría ganado 15 monedas.

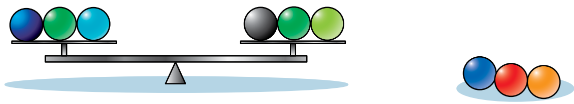
"15 monedas" equivalen a "4 monedas + 1 capa".

Por tanto, una capa vale 11 monedas.

- **Estas nueve bolas de billar tienen exactamente el mismo tamaño y todas pesan lo mismo salvo una que pesa un poco más.**



¿Cuántas pesadas necesitarías hacer para descubrir, con absoluta seguridad, cuál es la bola que pesa más?

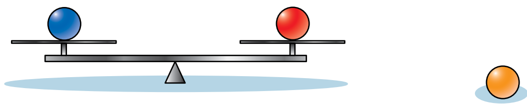


Colocamos tres bolas en cada plato y dejamos tres fuera.

Si pesa más el plato de la izquierda, o el de la derecha, aquí está la bola buscada.

Si pesan lo mismo, la bola buscada es una de las tres que hemos dejado fuera.

En cualquiera de los casos tenemos tres bolas, una de las cuales es la buscada. Ahora, procedemos análogamente.



Colocamos una bola en cada platillo. La que pese más es la buscada.

Si pesan igual, entonces la bola más pesada es la que hemos dejado fuera.

Autoevaluación

1. Di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál es indeterminado:

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - \ y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + \ y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

a) Es indeterminado.

b) Tiene solución $(x = 3,\ y = 1)$.

c) Tiene solución $(x = -3,\ y = -3)$.

d) Es incompatible.

2. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - 3y = 15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \ y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 1{,}5x + 0{,}25y = -2 \\ 2x - \ 0{,}5y = -6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

a) $x = 15 + 3y$

$3(15 + 3y) - 2y = 10 \to 45 + 9y - 2y = 10 \to 7y = -35 \to y = -5 \to x = 15 + 3(-5) = 0$

Solución: $x = 0,\ y = -5$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \ y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{cases}$

$\to 2 - 3y = 7 - 8y \to 8y - 3y = 7 - 2 \to 5y = 5 \to$

$\to y = 1 \to x = 2 - 3 = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 1$

c) Multiplicamos por 2 la primera ecuación y sumamos ambas ecuaciones:

$5x = -10 \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 4$

d) $y = 3x - 4$

$x^2 - (3x - 4)^2 = 0 \to x^2 - 9x^2 + 24x - 16 = 0 \to -8x^2 + 24x - 16 = 0 \to$

$\to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = 2,\ x = 1$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 2,\ y_1 = 2 \\ x_2 = 1,\ y_2 = -1 \end{cases}$

3. Aplica el método de reducción para resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases}$$

$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases} \to \begin{cases} -77x - 22y = -132 \\ 77x - 21y = -427 \end{cases} \to -43y = -559 \to y = 13$

$\begin{cases} 21x + 6y = 36 \\ 22x - 6y = -122 \end{cases} \to 43x = -86 \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 13$

4. La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio isósceles es de 4 cm; su altura mide 9 cm y su área es de 72 cm². Calcula la medida de las bases.

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \dfrac{9(x+y)}{2} = 72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ 4 + y + y = 16 \end{cases} \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 10$$

La base mayor mide 10 cm, y la base menor, 6 cm.

5. Un agricultor comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Traspasa 18 litros del segundo al primero y así este se queda con el doble que el segundo. Calcula la cantidad de agua que tenía cada depósito.

Cantidad de agua en el primer depósito: x

Cantidad de agua en el segundo depósito: y

$$\begin{cases} y = x + 10 \\ x + 18 = 2(y - 18) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ x - 2y = -54 \end{cases} \rightarrow x - 2(x + 10) = -54 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2x - 20 = -54 \rightarrow -x = -34 \rightarrow x = 34, \ y = 44$$

El primero tenía 34 *l*, y el segundo, 44 *l*.

6. Ana sale a caminar y lo hace a 4 km/h. Un cuarto de hora más tarde sale su hijo a correr por el mismo sendero y lo hace a 7 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarla?

Llamemos t al tiempo que camina Ana hasta que su hijo le alcanza.

El espacio recorrido por ambos es el mismo:

$$\begin{cases} e = 4t \\ e = 7(t - 1/4) \end{cases} \rightarrow 4t = 7t - \frac{7}{4} \rightarrow t = \frac{7}{12}\text{h} = 35 \text{ min}$$

Tarda en alcanzarla: 35 – 15 = 20 minutos.

7. He pagado 83 € por una cazadora y unos deportivos. En la cazadora me han rebajado el 20 % y en los deportivos el 10 %, y así me he ahorrado 17 €. ¿Cuáles eran los precios sin rebajar?

Precio de la cazadora sin rebajar: x

Precio de los deportivos sin rebajar: y

$$\begin{cases} x + y = 83 + 17 = 100 \\ 0,8x + 0,9y = 83 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 - y \\ 0,8(100 - y) + 0,9y = 83 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 - y \\ 0,1y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 70 \text{ € es el precio de la cazadora} \\ y = 30 \text{ € es el precio de los deportivos} \end{cases}$$

8. Las medidas de las diagonales de un rombo suman 68 cm y su lado mide 26 cm. Halla las medidas de las diagonales de este rombo.

$$\begin{cases} x + y = 68 \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 26^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 68 - y \\ \left(\dfrac{68 - y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 676 \end{cases}$$

$$\frac{4\,624 - 136y + y^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 676 \rightarrow 4\,624 - 136y + y^2 + y^2 = 2\,704 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y^2 - 136y + 1\,920 = 0 \rightarrow y^2 - 68y + 960 = 0 \begin{cases} y = 48 \\ y = 20 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 20, \ \ y_1 = 48 \\ x_2 = 48, \ \ y_2 = 20 \end{cases}$

La diagonal mayor mide 48 cm, y la menor, 20 cm.

Página 145

Resuelve

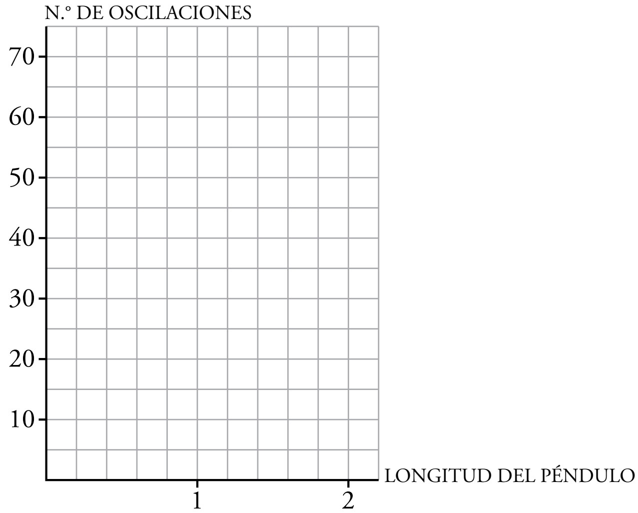
1. Busca información: ¿Qué matemático introdujo la notación $f(x)$ para las funciones?

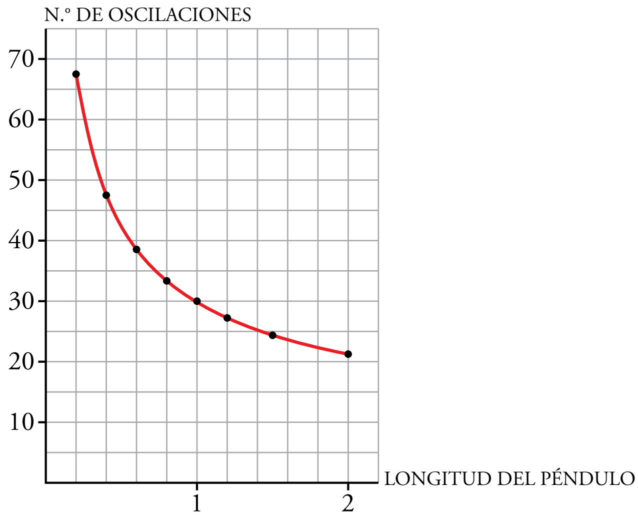
Leonhard Euler.

2. Supón que realizamos un experimento similar al del joven Galileo, con el péndulo, y obtenemos los siguientes resultados (siendo "l" la longitud del péndulo y "n" el número de oscilaciones por minuto):

l	2	1,50	1,20	1	0,80	0,60	0,40	0,20
n	21	24,5	27,5	30	33,5	38,5	47,5	67

Representa estos datos en tu cuaderno elaborando un sistema de referencia como el que te presentamos a continuación. Observa que los valores de la tabla responden bastante bien a la relación: $n = \dfrac{30}{\sqrt{l}}$





Con calculadora: 30 ÷ √ 2 = 21.21320343 ≈ 21

30 ÷ √ 1,5 = 24.49489742 ≈ 24,5

Etcétera.

1 Las funciones y sus gráficas

Página 146

1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

a) Lleva una altura de 280 m.

b) A los 20 min estaba a 60 m del suelo.

Baja casi a altura 0 para coger el agua.

El helicóptero apaga el fuego a los 20 minutos de salir de la base, a 60 m del suelo.

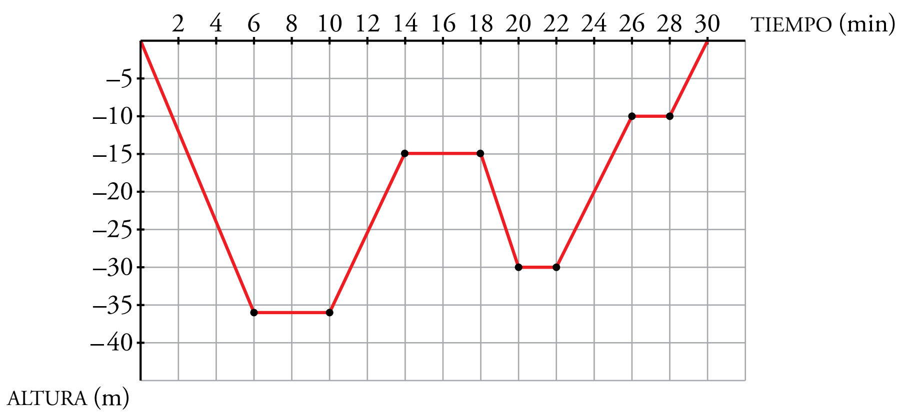
c) Para llenar el depósito de agua necesita 2 minutos.

Para apagar el fuego necesita 1 minuto.

d) Sube a una velocidad media de $v = \dfrac{320}{3} = 106{,}7$ m/min.

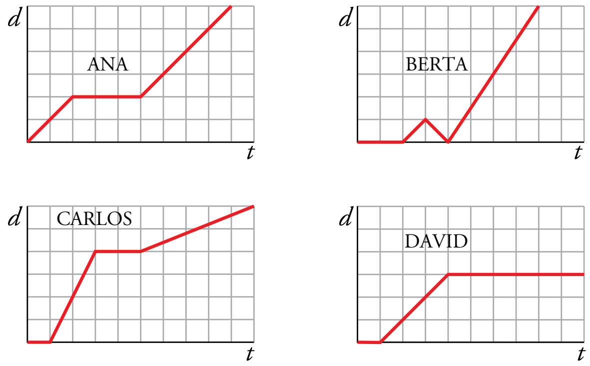
2. Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



Página 147

3. Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (*d*) - tiempo (*t*) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo parado?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

2 Crecimiento y decrecimiento de una función

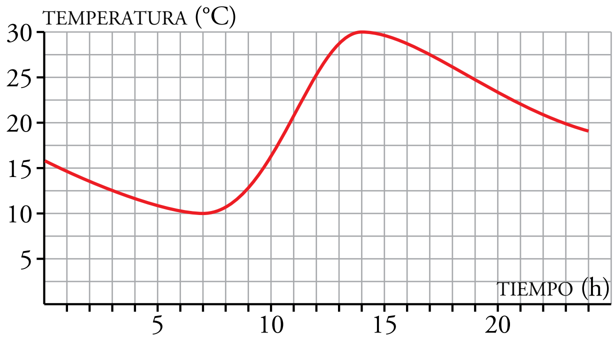
Página 148

1. La gráfica de abajo da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Página 149

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

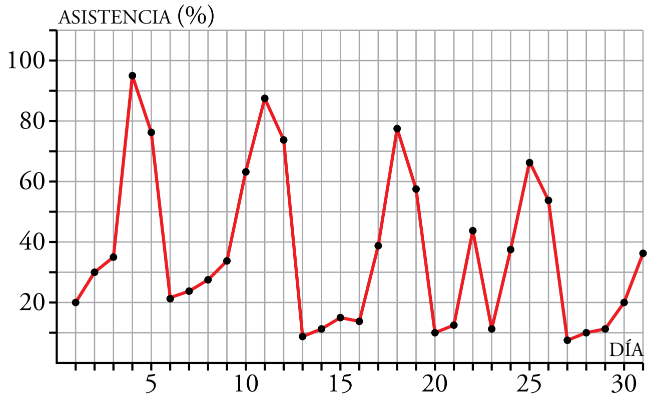
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

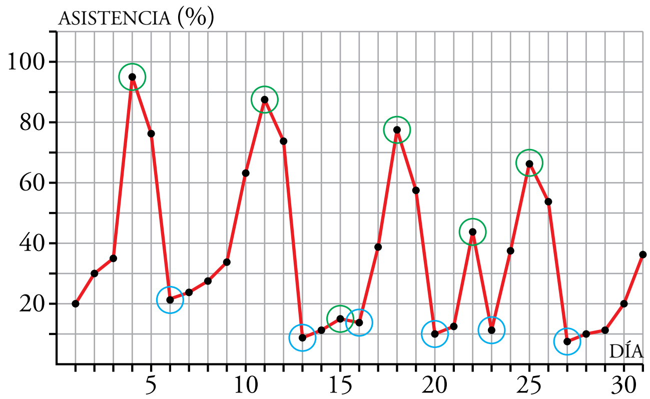
f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



a) Son fines de semana los días 4, 5, 11, 12, 18, 19, 25 y 26. Deducimos que son esos días porque son los días en los que más espectadores van al cine.

b) El día 4 hubo más espectadores y el 27 hubo menos espectadores. Estos días son sábado y lunes, respectivamente.

c) La gráfica tiene 6 máximos (en verde) y 6 mínimos (en azul).



d) El miércoles 22. Es el día entre semana con mayor asistencia.

e) La asistencia es mayor durante los fines de semana, en particular en el primero. A lo largo del mes se puede observar que va disminuyendo con respecto a la primera semana. Desde el lunes al sábado la gráfica es creciente, es decir, el porcentaje de asistencia va aumentando, mientras que del sábado al lunes decrece. Los días de mayor porcentaje de asistencia son los sábados, en general. Sin embargo, en los días 15 y 22 podemos ver dos máximos. El día 22 fue día festivo, y podemos apreciar un considerable aumento de asistencia con respecto a los días anterior y posterior.

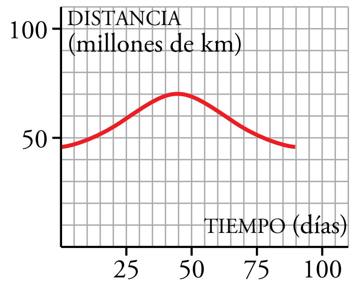
f) El día 3. Es el viernes con la asistencia más baja.

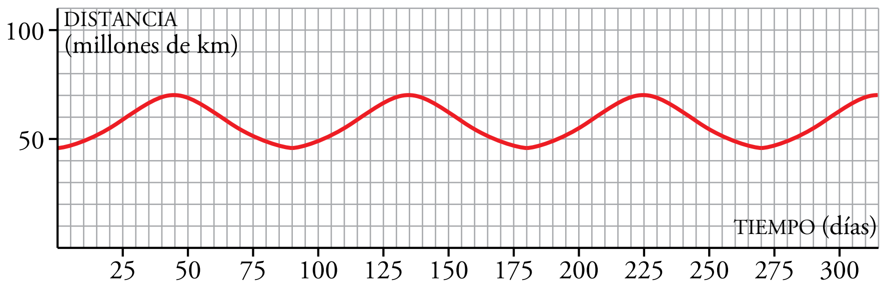
3 Tendencias de una función

Página 150

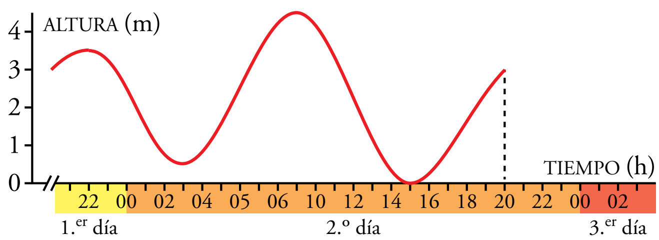
1. Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

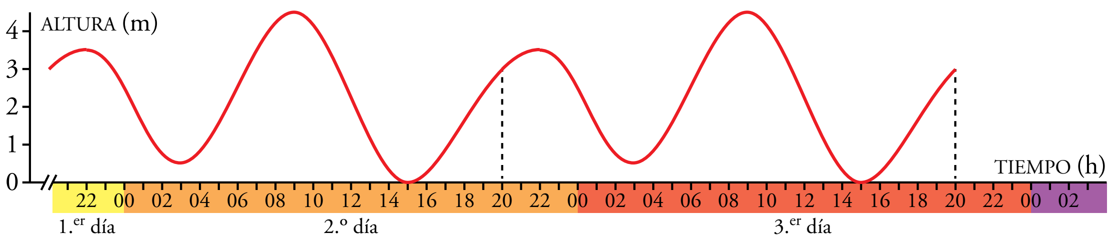
Copia y completa en tu cuaderno la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.





2. La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Cópiala en tu cuaderno y complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica:





4 Discontinuidades. Continuidad

Página 151

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

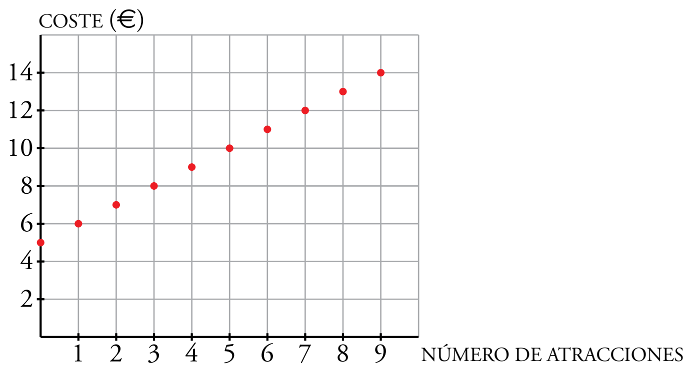
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta $\rightarrow$ ***coste***

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

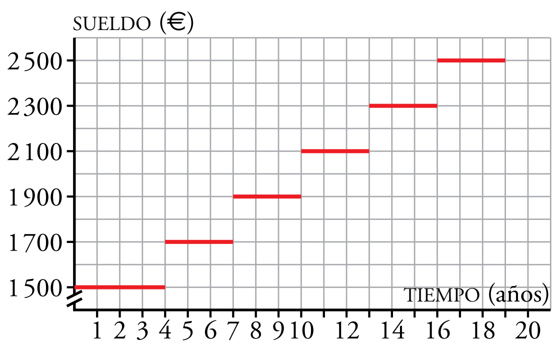
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

2. La gráfica de abajo muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, el trabajador lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

5 Expresión analítica de una función

Página 152

1. Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

La fórmula que deben cumplir para que sean como el ejemplo anterior es $A = x(40 - x)$.

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

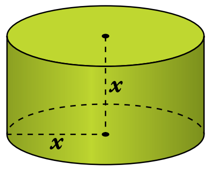
Página 153

2. **Imagina un cilindro cuya altura, *x*, sea igual al radio de su base.**

a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

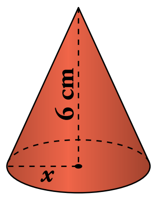
b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.



a) $V = \pi x^2 \cdot x \rightarrow V = \pi x^3$

b) $A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \rightarrow A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \rightarrow A = 4\pi x^2$

3. **Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.**



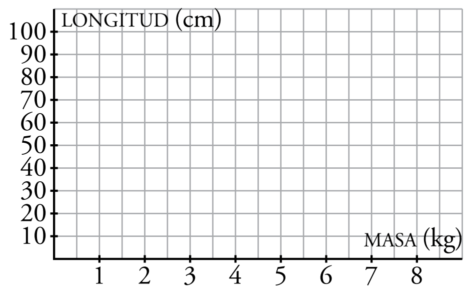
Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

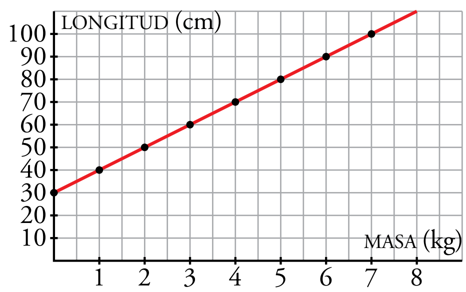
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \rightarrow V = 2\pi x^2$

4. **Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Pero no se pueden colgar más de 7,5 kg.**

La función que relaciona la longitud, *L*, del muelle con la masa, *m*, que soporta es: *L* = 30 + 10*m*.

Represéntala en tu cuaderno en unos ejes cartesianos como estos:





Página 154

Hazlo tú

Comprueba que A (III) pasa por (2, 3) y (4, 1); B (IV) pasa por (1, 3), (2, 4), (3, 3) y (4, 0); C (I) pasa por (1, 2), (2, 1), (3, 2) y (4, 5) y D (II) pasa por (6, 5). Además, en esta última, cuando x se hace grande, la variable y se va acercando a 6. Para verlo, calcula, por ejemplo, el valor de y para $x = 100$ y para $x = 1\,000$.

- $y = 5 - x$

  Si $x = 2 \rightarrow y = 5 - 2 = 3$

  Si $x = 4 \rightarrow y = 5 - 4 = 1$

- $y = 4x - x^2$

  Si $x = 1 \rightarrow y = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$

  Si $x = 2 \rightarrow y = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$

  Si $x = 3 \rightarrow y = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3$

  Si $x = 4 \rightarrow y = 4 \cdot 4 - 4^2 = 0$

- $y = x^2 - 4x + 5$

  Si $x = 1 \rightarrow y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 2$

  Si $x = 2 \rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$

  Si $x = 3 \rightarrow y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2$

  Si $x = 4 \rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 5$

- $y = 6 - \dfrac{6}{x}$

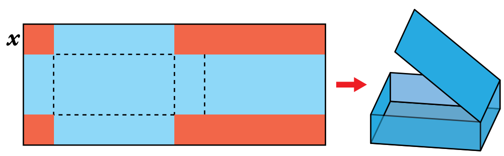
  Si $x = 6 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{6} = 5$

  Si $x = 100 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{100} = 5{,}94$

  Si $x = 1\,000 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{1000} = 5{,}994$

Hazlo tú

Con una cartulina de 30 cm × 12 cm deseamos construir una caja con tapa, recortando y plegando como en la figura. Halla la expresión analítica del área de la base y del volumen de la caja en función de x. Calcula el área y el volumen cuando $x = 3$ cm.



$A = (15 - x)(12 - 2x)$

$V = (15 - x)(12 - 2x)x$

Si $x = 3 \rightarrow \begin{cases} A = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2 \\ V = 12 \cdot 6 \cdot 3 = 216 \text{ cm}^3 \end{cases}$

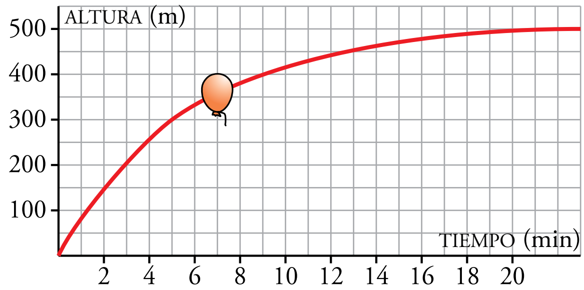
Ejercicios y problemas

Página 155

Practica

Interpretación de gráficas

1. **Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

a) Las variables que intervienen son el tiempo y la altura.

Para la variable tiempo, cada cuadradito representa un minuto y, para la altura, cada cuadradito representa 50 metros.

El intervalo 0-26 es su dominio de definición.

b) Entre el minuto 0 y el 5, el globo gana 300 metros de altura.

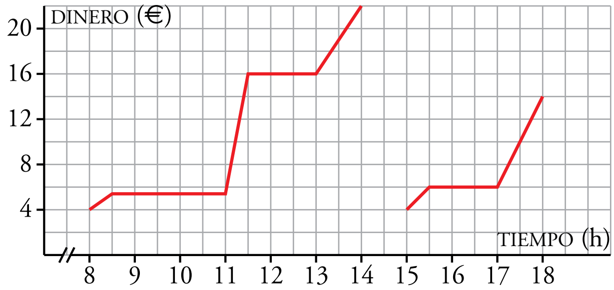
Entre el 5 y el 9, gana 50 metros de altura.

$\frac{300}{5} = 60 > 25 = \frac{50}{2}$ $\rightarrow$ Crece más rápido entre los minutos 0 y 5.

c) El globo tiende a estabilizarse a 500 metros.

d) Al comenzar la observación, el globo está a altura 0, en la tierra. Tras soltarlo, al principio, gana altura con bastante rapidez pero según pasa el tiempo parece que se estabiliza a 500 metros de altura.

2. **En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:**



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

a) Las clases de la mañana empiezan a las ocho y media.

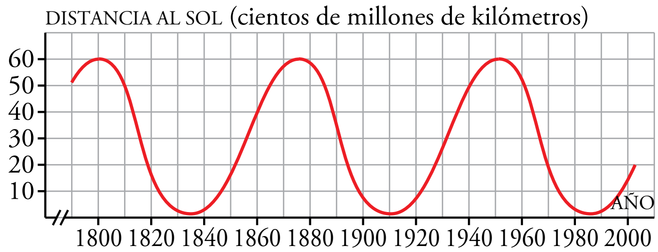
b) El recreo es a las 11 y dura media hora.

c) Por la mañana, los ingresos fueron de 22 €.

d) Por la tarde, las clases empiezan a las tres y media y terminan a las cinco.

e) Es una función discontinua.

3. **La siguiente gráfica describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. Cada 76 años se puede ver desde la Tierra cuando más cerca está del Sol.**



a) ¿Es una función periódica? ¿Qué periodo tiene?

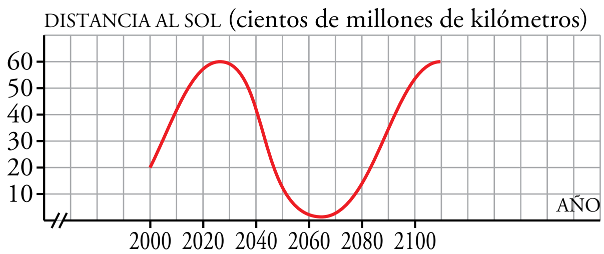
b) ¿Cuándo, aproximadamente, fue la última vez que se dejó ver desde la Tierra? ¿En qué año se volverá a ver?

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los años 2000 a 2100. ¿A qué distancia del Sol, aproximadamente, estará en el 2016?

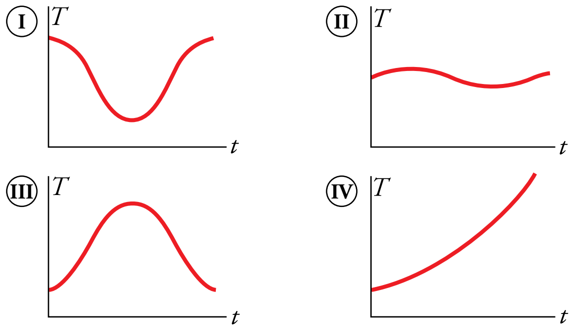
a) Es una función periódica, con periodo de 76 años.

b) La última vez que se vio fue en 1986 y la próxima vez que se verá será en 2062.

c)



4. **Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:**



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

a) En la ciudad b.

b) Las gráficas a y c, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica d es absurda, porque la temperatura solo crece.

d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

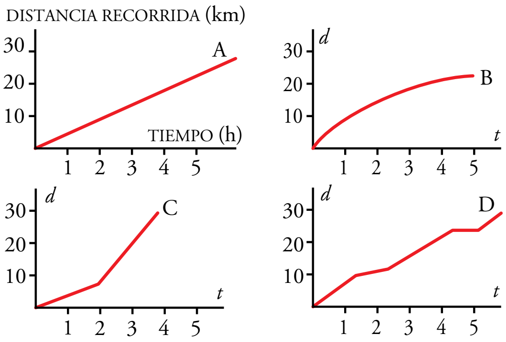
Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad a tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad b, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

Página 156

5. Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:



a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Inventa una gráfica de un montañero que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

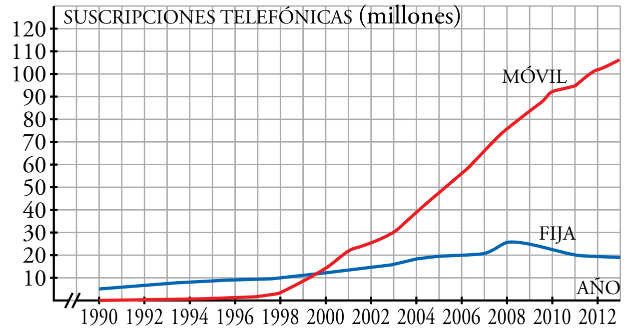
b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

d) Alcanza más velocidad el montañero C.

e)

6. **El uso de teléfonos móviles ha aumentado mucho en los últimos años. Sin embargo, la telefonía fija no ha sufrido grandes variaciones. En esta gráfica vemos la evolución que ha tenido lugar de 1990 a 2013:**



a) **¿Cuántas líneas de telefonía fija y móvil había activadas, aproximadamente, a principios de 2000? ¿Y de 2010? ¿Y de 2013?**

b) **¿Aproximadamente, cuándo había igual número de líneas de teléfonos fijos y móviles?**

c) **¿Cuál ha sido el aumento de líneas de telefonía fija de 1990 a 2013? ¿Y de telefonía móvil?**

d) **Según la gráfica, ¿a qué cantidad de usuarios tienden los teléfonos fijos?**

e) **¿Cuándo hubo el mayor número de usuarios de telefonía fija?**

a) A principios de 2000 había activadas, aproximadamente, 12 millones de líneas de telefonía fija y 15 millones de telefonía móvil. En 2010 había unos 22 millones de telefonía fija y 90 millones de telefonía móvil. En 2013, alrededor de 20 millones de líneas fijas y 113 millones de telefonía móvil.

b) A mediados de 1999 había el mismo número de líneas fijas que de líneas móviles.

c) El aumento de líneas de telefonía fija de 1990 a 2013 ha sido de 15 millones, y el de líneas móviles, de 113 millones.

d) Los teléfonos fijos tienden a los 20 millones de usuarios.

e) El mayor número de usuarios de telefonía fija se registró en 2008.

Relaciones gráficas y expresiones analíticas

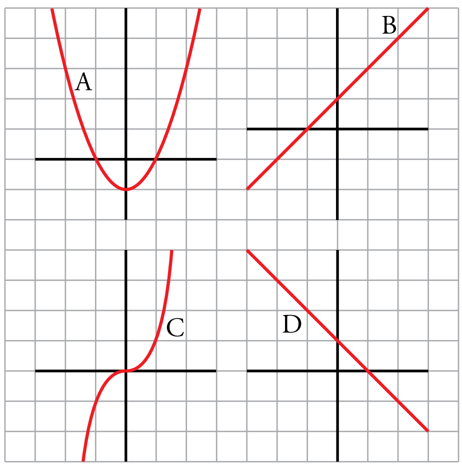
7. **Relaciona cada gráfica con una de las expresiones analíticas siguientes:**

i) $y = x + 1$

ii) $y = x^3$

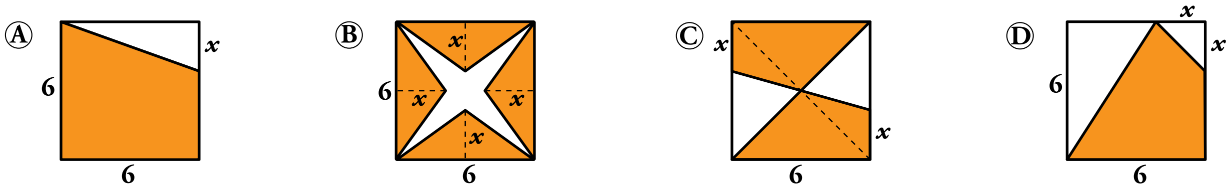
iii) $y = x^2 - 1$

iv) $y = -x + 1$



i) → B ii) → C iii) → A iv) → D

8. **El área de la parte coloreada de las siguientes figuras se puede escribir en función de x:**



¿Cuál de estas expresiones analíticas corresponde al área de cada una de las figuras?

a) $36 - x$ **b)** $3x$ **c)** $18 + 3x$

d) $(6 + x) \cdot 3 - \dfrac{x^2}{2}$ **e)** $12x$ **f)** $18 - \dfrac{x^2}{2}$

g) $36 - 3x$ **h)** $36x$ **i)** $(6 - x) \cdot 3$

Ⓐ → g) $36 - 3x$ Ⓑ → e) $12x$

Ⓒ → c) $18 + 3x$

Cada una de las dos partes coloreadas iguales se puede dividir en dos triángulos de área 9 y $\dfrac{3x}{2}$, por lo que cada una de estas partes tiene área $9 + \dfrac{3x}{2}$. Como son dos,

$$2 \cdot \left(9 + \frac{3x}{2}\right) = 18 + 3x$$

Ⓓ → d) $(6 + x) \cdot 3 - \dfrac{x^2}{2}$

Al área total del cuadrado, 36, hemos de restarle los dos triángulos blancos:

$$36 - \frac{x^2}{2} - 3 \cdot (6 - x) = 18 + 3x - \frac{x^2}{2} = (6 + x) \cdot 3 - \frac{x^2}{2}$$

9. **a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

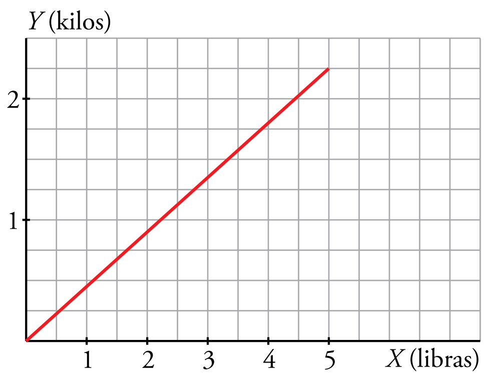
b) Representa la función que convierte libras en kilos.

c) Obtén la expresión analítica que relaciona estas dos variables.

a)

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)	0,225	0,45	0,675	0,9	1,35	1,8	$0{,}45x$

b)



c) $y = 0{,}45x$

Página 157

Resuelve problemas

10. **Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia, en la que tenía que asistir a una reunión de trabajo. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿a cuánto iba al volver?

a)

b) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$

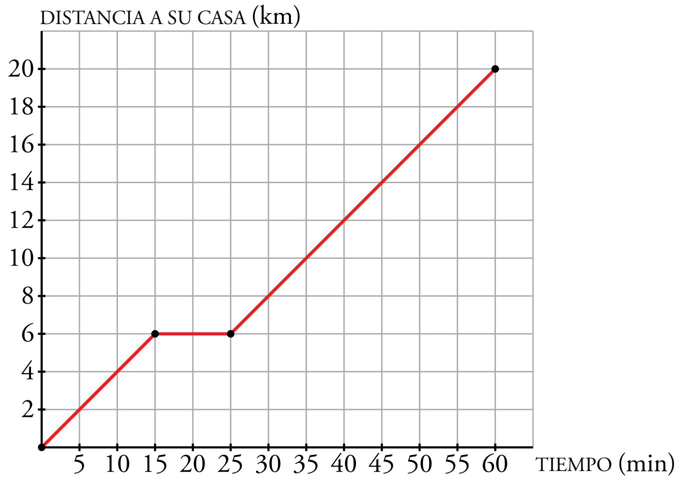
c) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 60 \text{ km/h}$

11. **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que la velocidad es constante en cada tramo).

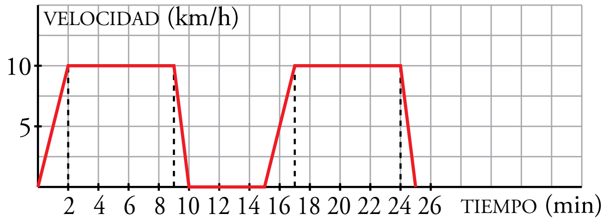
a)



b) Sí, lleva la misma velocidad porque por cada 5 minutos recorre 2 kilómetros en ambos tramos.

12. **Un tiovivo acelera durante 2 minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece a esta velocidad durante 7 minutos y decelera hasta parar en 1 minuto. Tras permanecer 5 minutos parado, comienza otra vuelta.**

Dibuja la gráfica *tiempo-velocidad* para un intervalo de 25 min.



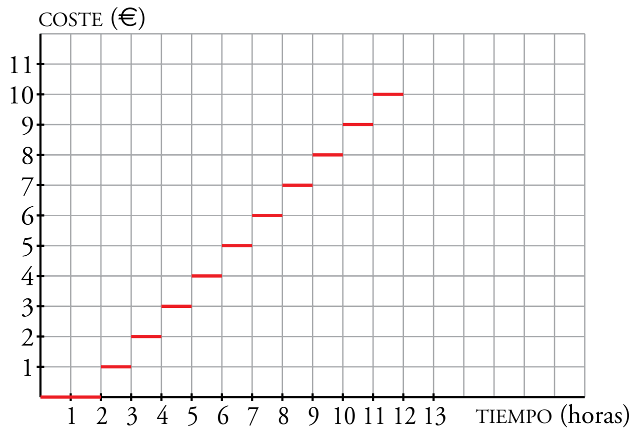
13. **Desde la concejalía de juventud del ayuntamiento de un pueblo se quiere promover el uso de la bicicleta. Para ello, han decidido alquilarlas según las siguientes tarifas:**

HORARIO: DE 9 DE LA MAÑANA A 9 DE LA NOCHE	
Las dos primeras horas......................	gratuito
3.ª hora o fracción, y sucesivas................	1 €

El tiempo máximo diario es de 12 horas (desde las 9 de la mañana hasta las 9 de la noche).

Representa la gráfica de la función:

Tiempo de uso de la bici-coste



14. **En la factura del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 15 € y 0,75 € más por cada metro cúbico consumido.**

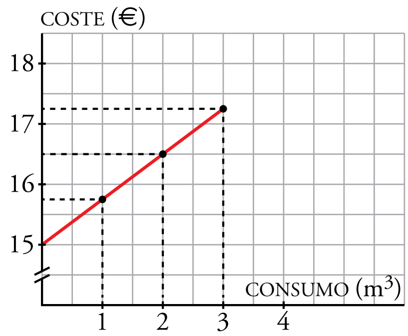
a) ¿Cuánto se paga por 3 m^3? ¿Y por 15 m^3?

b) Dibuja la función: *metros cúbicos consumidos-coste*.

a) Por 3 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 3 = 17{,}25$ €.

Por 15 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 15 = 26{,}25$ €.

b)



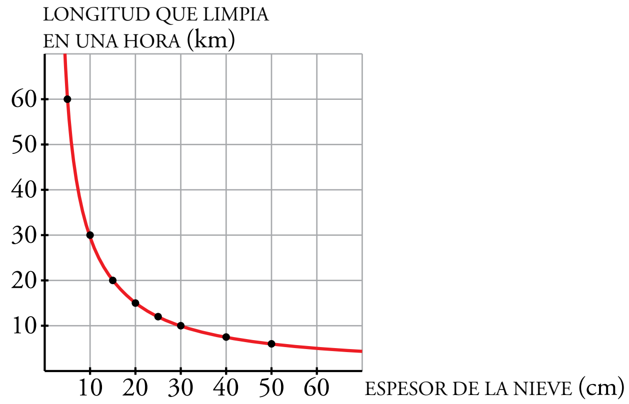
15. **La longitud de carretera que limpia un quitanieves depende del espesor de la nieve. Estos son los datos recogidos para una de estas máquinas:**

ESPESOR DE LA NIEVE (cm)	50	40	30	25	20	15	10	5
LONGITUD QUE LIMPIA EN 1 HORA (km)	6	7,5	10	12	15	20	30	60

a) Representa gráficamente estos datos y une los puntos para poder analizar su gráfica. Descríbela.

b) Supón que para espesores mayores de nieve, la máquina se comporta de manera análoga. Para un espesor de 60 cm, ¿cuántos kilómetros, aproximadamente, despejaría en una hora?

a)



Al aumentar el espesor de la nieve, la longitud de la carretera que limpia en una hora va descendiendo.

b) Limpiaría aproximadamente 5 km.

16. **Esta tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante los primeros meses de vida:**

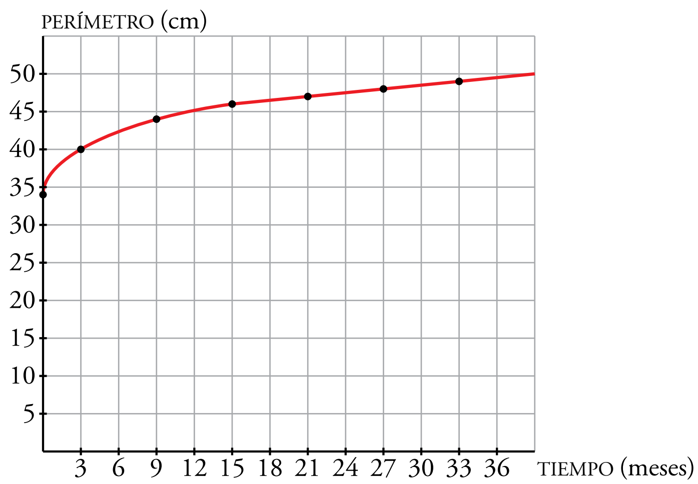
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

a)



b) El tamaño del cráneo parece estabilizarse alrededor de los 50 cm.

c) Medirá unos 50 cm aproximadamente.

17. **Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

TIEMPO (s)	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	3,7	7	9,7	11,4	12

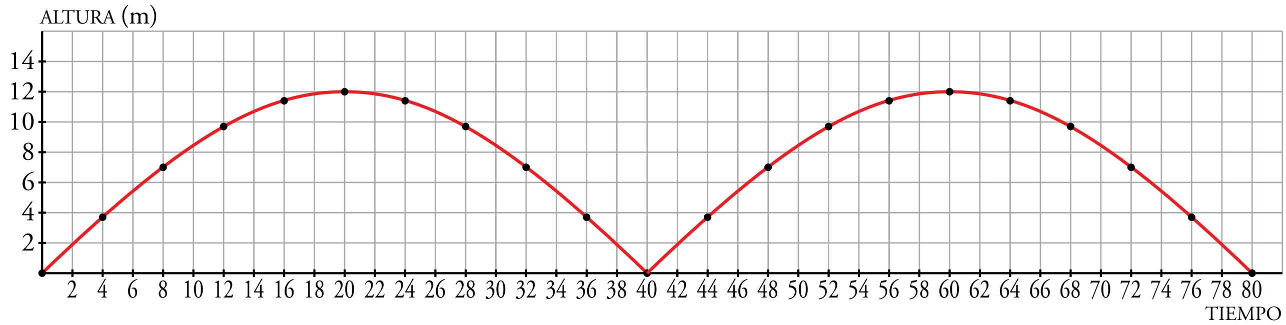
a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿Es una función periódica?

d) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

a)



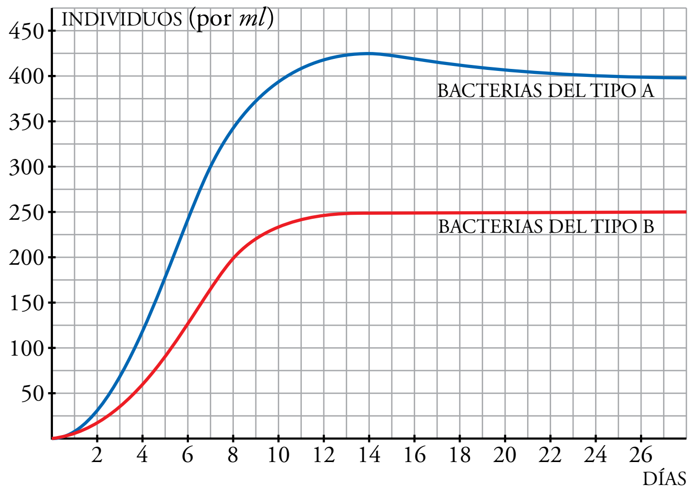
b) Los máximos y mínimos corresponden con los múltiplos de 20.

c) Sí, es una función periódica de periodo 40.

d) Como los valores se repiten cada 40 segundos, tenemos que ver con qué valor corresponde 150 de entre 0 y 40. Dividimos 150 entre 40 y obtenemos como cociente 3 y de resto 30. Es decir, corresponderá con la altura para 30 segundos, que es aproximadamente 8 metros.

Página 158

18. **Se ha realizado una experiencia en un laboratorio de biología molecular con dos tipos de bacteria. La gráfica siguiente nos muestra el crecimiento de cada una de ellas, criándose por separado y en idénticas condiciones:**

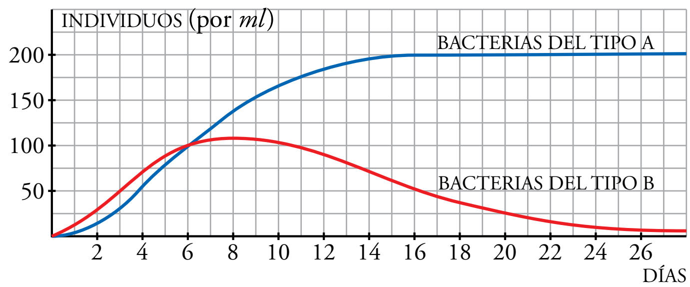


a) El número de individuos de cada tipo, ¿crece indefinidamente o se va estabilizando en torno a algún valor?

b) ¿A qué valor tiende el número de individuos por mililitro en el tipo A (en las condiciones estudiadas que se muestran en la gráfica)?

c) ¿Cuál de los dos tipos de bacteria se multiplica con más rapidez?

Observa en esta otra gráfica lo que sucede cuando se crían los dos tipos de bacterias en un mismo recipiente, compitiendo por el alimento:



d) Ambas poblaciones crecen de forma más lenta estando juntas que si se crían por separado. ¿A qué valor tiende el número de individuos del tipo A en este caso?

e) ¿Cuál es el número máximo de individuos que alcanza la población del tipo B?

f) ¿A qué valor tiende el número de individuos del tipo B al avanzar los días?

a) Se estabiliza.

b) A 800 individuos por mililitro.

c) La especie A.

d) A 200 individuos por mililitro.

e) Aproximadamente, 110 individuos.

f) A 0 individuos, la población B tiende a desaparecer.

Problemas "+"

19. **Ángel, meteorólogo, se encuentra en lo alto de un puerto de montaña midiendo las variaciones de temperatura a lo largo de una noche (empieza con –4 h, porque faltan 4 horas para las 0:00 h). Esta tabla muestra los datos transmitidos:**

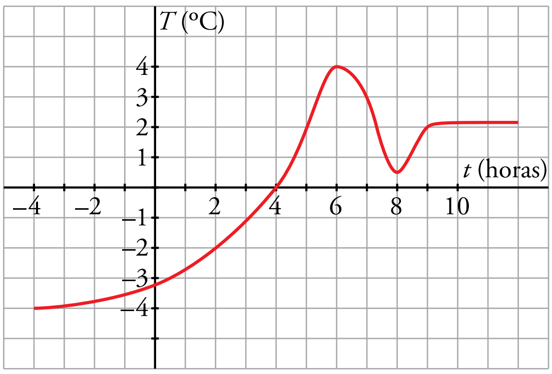
t (h)	–4	–2	0	2	4	6	7	8	9
T (°C)	–4	–3,75	–3,25	–2	0	4	3	0,5	2

a) Represento la gráfica *tiempo-temperatura*.

b) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y el recorrido?

c) ¿En qué valores la gráfica corta a cada uno de los ejes? Explica su significado.

d) ¿En qué periodo la temperatura asciende, por hora, más lentamente? ¿Y más rápidamente? ¿Cuándo es máxima?

a) 

b) Dominio [–4, 10]. Recorrido [–4, 4]

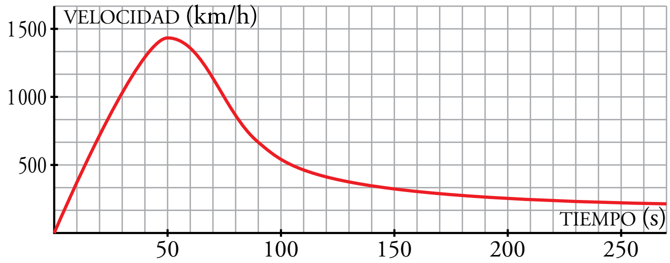
c) Corta al eje t(horas) en t = 4. Punto (4, 0); corta al eje T (temperatura en °C) en T = –3,25. Punto (0; –3,25).

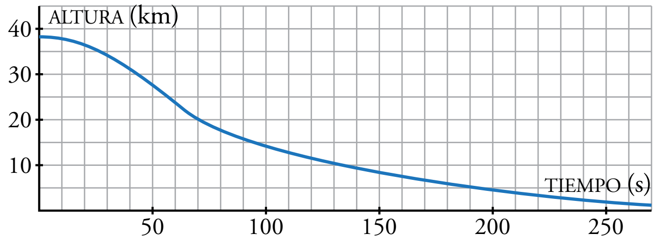
d) La temperatura asciende más rápidamente en el intervalo [4, 6], 2 grados por hora.

El crecimiento más lento se da en el intervalo [–4, 0], 0,75° en 4 horas.

La temperatura máxima se da a las 6 horas.

20. **En 2012, Felix Baumgartner batió el record de velocidad en caída libre, lanzándose desde 39 000 m de altura. Estas son las gráficas de la velocidad y de la altura, respectivamente, que llevó durante los 250 primeros segundos desde que inició el descenso:**





a) ¿En qué momento cogió más velocidad?

b) ¿Cuándo rompió la velocidad del sonido? Recuerda que son 300 m/s. Pásalo a km/h.

c) A una altura de 40 km, la atmósfera es muy poco densa, por lo que casi no hay rozamiento. ¿A qué altura empieza a frenarle la atmósfera? ¿A qué altura se empieza a estabilizar?

d) ¿Cómo es la gráfica de la altura cuando la velocidad se estabiliza, más recta o más curva?

a) Cogió máxima velocidad a los 50 segundos.

b) Pasamos la velocidad del sonido a km/h:

$$300 \text{ m/s} = 300 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1\,080 \text{ km/h}$$

Sobrepasa esta velocidad a los 30 segundos aproximadamente.

c) El saltador comienza a descender su velocidad a los 50 segundos. En ese instante está a una altura aproximada de 27 kilómetros.

Comienza a estabilizarse alrededor del segundo 100, y está a una altura de 14 metros.

d) La gráfica de la altura es más recta.

Página 159

21. **El agua que vierte una fuente de un parque proviene de una cisterna cuya altura es de 90 cm. La cisterna tarda 3 min en llenarse, y se observa una relación entre la altura, *a*, del agua en la cisterna y el tiempo, *t*, transcurrido, dada por esta tabla:**

TIEMPO (min)	0	1	1,5	2	3
ALTURA (cm)	0	50	67,5	80	90

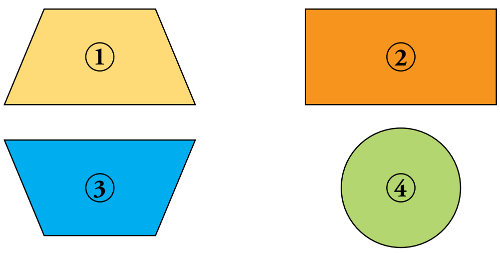
A continuación, la cisterna se vacía en 3 min, a la misma velocidad. Durante 1 min, el agua circula por las tuberías de la fuente, regresando a la cisterna para llenarla, y así sucesivamente.

a) Completa la tabla anterior hasta un tiempo de 15 min. Haz la gráfica de la función *tiempo-altura*.

b) ¿Es continua dicha función? ¿Es periódica? Si lo es, ¿cuál es su periodo? ¿En qué valores de *t* la cisterna está llena?

c) Durante el llenado, ¿sube el agua con igual rapidez en cada minuto? Justifícalo.

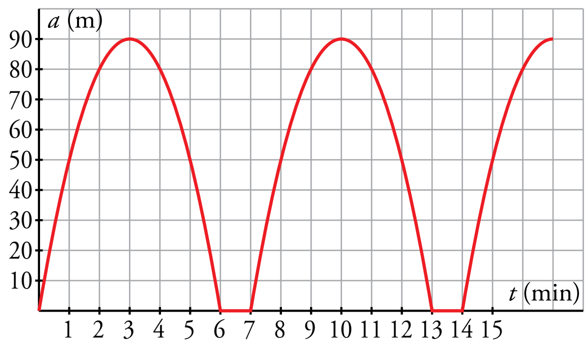
d) Teniendo en cuenta el apartado c), ¿cuál de estas figuras representa la forma del perfil de la cisterna?



a)

t (min)	0	1	1,5	2	3	4	4,5	5	6	7
a (cm)	0	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0

t (min)	8	8,5	9	10	11	11,5	12	13	14	15
a (cm)	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0	50

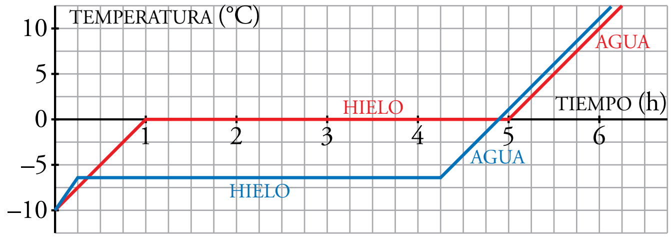


b) La función es continua y periódica. El periodo es 7 min. La cisterna está llena a los 3 minutos, $t = 3$, y a los 10 minutos, $t = 10$ min.

c) En el primer minuto de llenado el agua sube 50 cm. Entre 1 y 2 minutos sube 30 cm y entre 2 y 3 sube 10 cm. Sube más rápidamente en el primer minuto.

d) La cisterna tiene la forma 3 porque al ser más estrecha en la parte de abajo sube la altura del agua más rápidamente que en la parte superior donde la cisterna es más ancha.

22. **Cuando nieva, se echa sal en las calles para que la nieve se derrita. Al echarle sal, el hielo se derrite a menor temperatura (aproximadamente, –6 °C). Hasta que un bloque de hielo no está derretido completamente, no empieza a aumentar su temperatura. Estas son las gráficas *tiempo-tempertura* de un bloque de hielo (luego agua) con sal y de otro sin sal:**



a) ¿Cuál corresponde a cada uno?

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en derretirse?

c) ¿Tendría sentido echar sal a la nieve con una temperatura ambiente de –12 °C? ¿Por qué?

a) La gráfica azul es el bloque de hielo con sal.

b) Los dos tardan 4 horas en derretirse.

c) No tendría sentido, ya que a esa temperatura el hielo no se derretiría aunque echásemos sal.

23. **Estas dos gráficas muestran las funciones *tiempo-espacio* correspondientes a un tren en movimiento y a un viajero que, habiéndolo perdido, corre para alcanzarlo:**

a) ¿Cuál es la gráfica del viajero y cuál la del tren?

b) ¿A qué distancia estaba del tren cuando comenzó a correr?

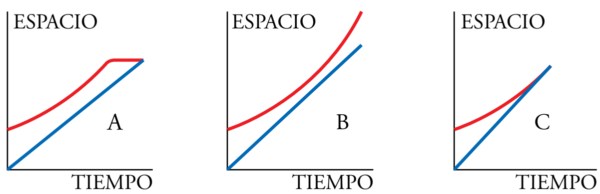
c) ¿Lo alcanza? ¿Dónde y cuándo?

d) Las siguientes gráficas corresponden a tres situaciones similares, asocia cada una a uno de estos enunciados:

I. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo para alcanzarle antes de que se vaya, pero no le coge.

II. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo y le alcanza.

III. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo hacia él. Ríchard, cuando se da cuenta, se para y espera a que llegue Álex.



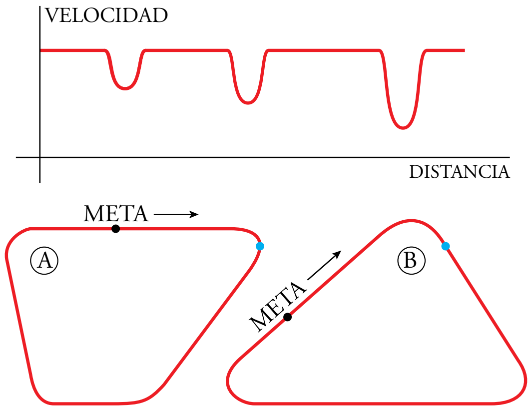
a) La gráfica del viajero es la azul.

b) Cuando empezó a correr estaba a 100 metros del tren.

c) Sí, lo alcanza cuando lleva un minuto y medio corriendo y ha recorrido 200 metros.

d) I → B   II → C   III → A

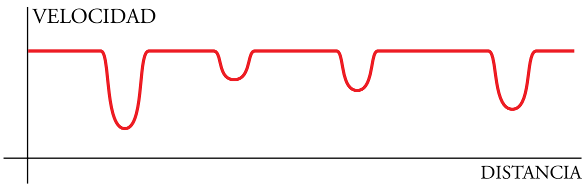
24. **Esta gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados más abajo:**



a) ¿A cuál de los dos corresponde?

b) Haz la gráfica correspondiente al otro.

a) Corresponde al circuito B. Al llegar a la curva, el coche debe bajar su velocidad, tanto más cuanto más cerrada es la curva. Esto se aprecia en la gráfica: tres frenazos, cada uno más fuerte que el anterior, como corresponde a los tres ángulos del circuito B en el orden en que se toman desde la salida, S.

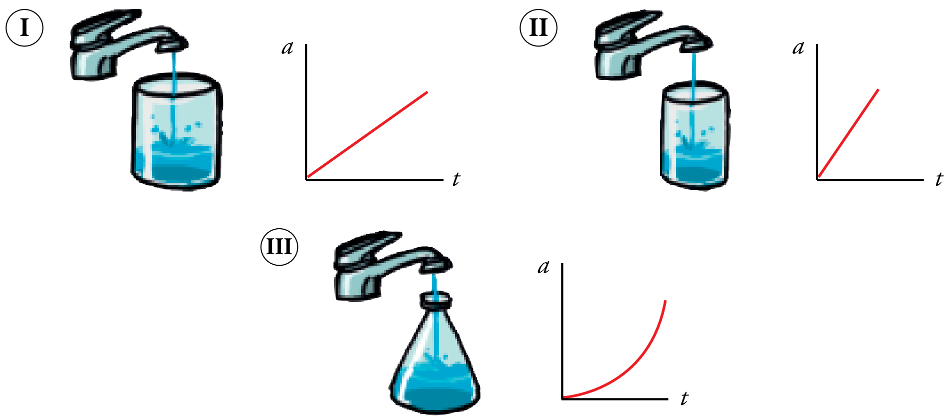
b) 

Página 160

Reflexiona y decide

Al abrir un grifo sobre un recipiente, la altura (*a*) que alcanza el líquido está en función (depende) del tiempo transcurrido (*t*).

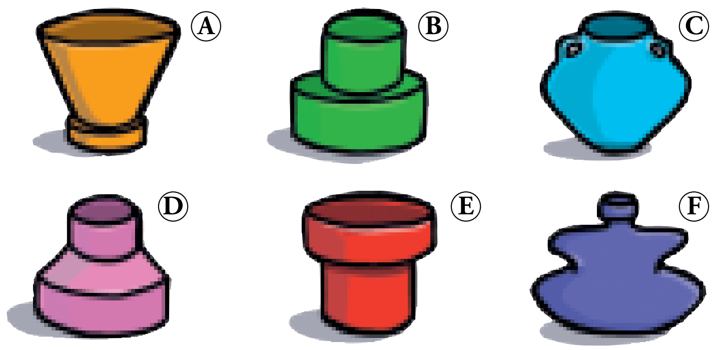
Y al representar esa función vemos que cada recipiente tiene una gráfica característica.

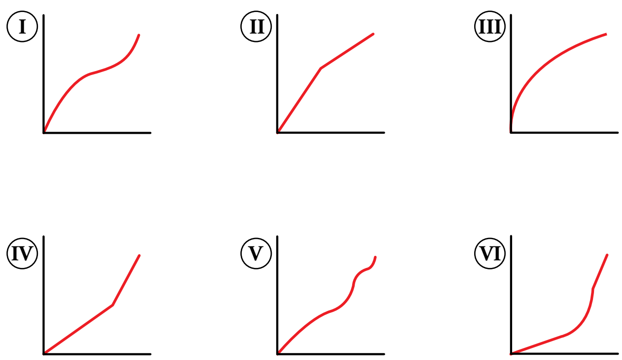


— En los dos primeros recipientes, el nivel sube uniformemente, aunque en el segundo más rápido que en el primero.

— En el tercer recipiente, el nivel sube despacio al principio y rápido al final.

- **Asocia cada uno de estos recipientes con su gráfica:**



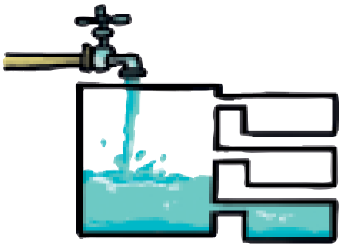


A – III; B – IV; C – I; D – VI; E – II; F – V

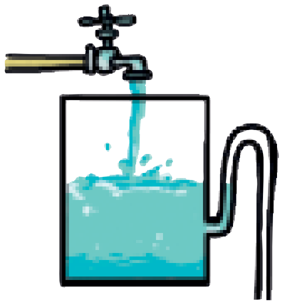
Observa y representa

Dibuja, en cada caso, la gráfica que relaciona la altura que alcanza el agua en el recipiente con el tiempo transcurrido:

a)

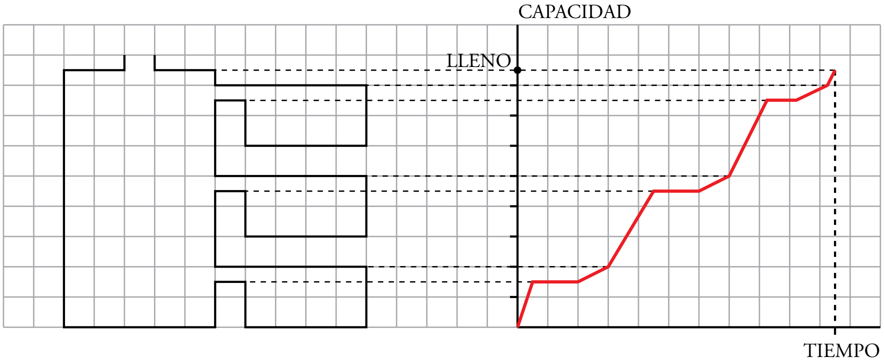


b)

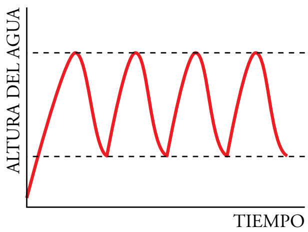


NOTA: Antes de afrontar el apartado b), infórmate: ¿qué es una fuente vauclusiana?

a)



b) Las fuentes vauclusianas se caracterizan por brotar intermitentemente, unas veces echan agua y otras no, y además lo hacen en periodos de tiempo bastante regulares. Estos fenómenos geológicos se deben a la existencia de alguna cueva o depósito subterráneo con un conducto de salida que actúe de sifón y para recargarse requiere que el agua alcance un determinado nivel.



Puesto que cuando el tanque se llena hasta arriba el tubo también se llena y empieza a salir el agua del tanque. Esto ocurre hasta que el nivel del agua alcanza la entrada del tubo (efecto sifón). En ese momento deja de salirse agua y comienza a llenarse de nuevo el tanque.

Página 161

Entrénate resolviendo problemas

- **Dos hermanos rancheros se reparten una herencia a partes iguales. El primero invierte su parte en la compra de una manada de 80 caballos. El segundo invierte la suya en un rebaño de 100 vacas. Si un caballo cuesta 150 € más que una vaca, ¿a cuánto ascendía la herencia?**

$$\left.\begin{array}{l} 80 \text{ caballos} = 80 \text{ vacas} + 80 \cdot 150 \text{ €} = 80 \text{ vacas} + 12\,000 \text{ €} \\ 80 \text{ caballos} = 100 \text{ vacas} \qquad\qquad\qquad = 80 \text{ vacas} + 20 \text{ vacas} \end{array}\right\}$$

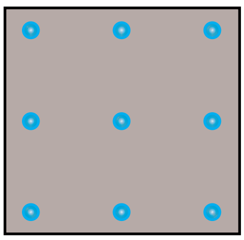
Por tanto, 20 vacas = 12 000 €.

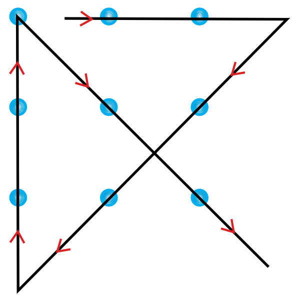
1 vaca cuesta 12 000 : 20 = 600 €.

1 caballo cuesta 600 + 150 = 450 €.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ vacas valen } 60\,000 \text{ €.} \\ 80 \text{ caballos valen } 60\,000 \text{ €.} \end{array}\right\} \text{ La herencia asciende a } 60\,000 + 60\,000 = 120\,000 \text{ €.}$$

- **Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.**





- **a) Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir exactamente un litro de agua?**

  b) Si ahora dispones de dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5, ¿cómo harías para medir 4 litros de agua?

  c) ¿Y cómo medirías 3 litros de agua si tuvieras un cántaro de 9 litros y otro de 5 litros?

a)

3		5
3	3	0
0		3
3	2	3
1		5

Se llena el de 3 litros.	Hay 3 y 0 litros.
El contenido de la de 3 litros se vierte en la de 5 litros.	Hay 0 y 3 litros.
Se vuelve a llenar la de 3 litros.	Hay 3 y 3 litros.
Con el contenido de la de 3 se completa la de 5 litros.	Hay 1 y 5 litros.

En la jarra de 3 litros queda 1 litro, lo que queríamos medir.

b) 5 7
0 5 7
5 2
0 2 2
2 0
2 3 7
5 4

Se llena el de 7 litros.	Hay 0 y 7 litros.
Con el contenido del de 7 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 2 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 2 litros.
Se vierten los 2 litros que hay en el de 7 en el de 5 litros.	Hay 2 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 7 litros.	Hay 2 y 7 litros.
Con el de 7 litros se completa el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.

Así, en el cántaro de 7 litros quedan los 4 litros que queríamos medir.

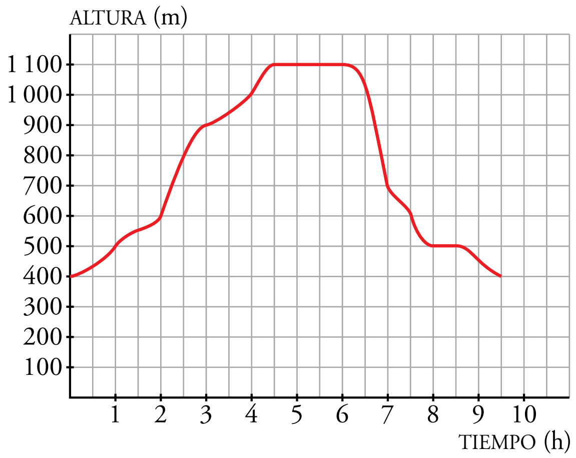
c) 5 9
0 5 9
5 4
0 4 4
4 0
4 1 9
5 8
0 5 8
5 3

Se llena el de 9 litros.	Hay 0 y 9 litros.
Con el contenido del de 9 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 4 litros.
Se vierten los 4 litros que hay en el de 9 en el de 5 litros.	Hay 4 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 9 litros.	Hay 4 y 9 litros.
Se completa el de 5 con un litro del de 9 litros.	Hay 5 y 9 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 8 litros.
Se llena el de 5 litros con el contenido del de 9 litros.	Hay 5 y 3 litros.

En el cántaro de 9 litros quedan los 3 litros que queríamos medir.

Autoevaluación

1. Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a cierta montaña:



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

a) Intervienen las variables tiempo y altura. La variable tiempo utiliza un cuadradito para media hora; la variable altura, un cuadradito para 100 metros. El dominio de la función es 0 - 9,5.

b) La marcha ha durado 9 horas y media. Comienzan a 400 metros de altura. Alcanzan una altura máxima de 1 100 metros. Han parado a comer cuando llevaban 4 horas y media de camino, al llegar a la cima.

c) Suben más rápido entre las 2 y las 3 horas del comienzo. Bajan más rápido entre las 6 y las 7 horas.

d) Comienzan su marcha a 400 metros. En dos horas han ascendido hasta los 600 metros, y en ese momento comienzan a subir más rápido, y mantienen ese ritmo durante una hora, hasta llegar a los 900 metros de altura. Entonces disminuyen la velocidad y continúan su ascensión dos horas más hasta llegar a la cima, a 1 100 metros de altitud. Pasan allí dos horas. Inician su descenso a las 6 horas de travesía, lo hacen rápidamente la primera hora, hasta volver a los 700 metros, y andan una hora más a un ritmo más lento. Hacen una parada de media hora a los 500 metros y reanudan la marcha una hora y media más, descendiendo hasta los 400 metros.

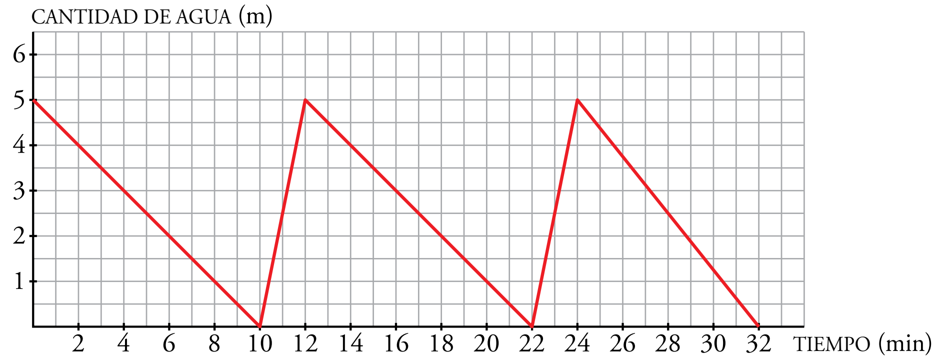
2. Una cisterna contiene 5 *l* de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua*.

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

a)

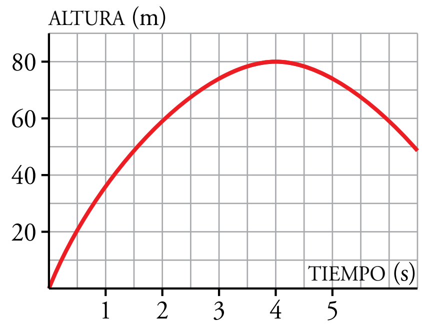


b) Es periódica, puesto que su comportamiento se va repitiendo en periodos de 12 minutos.

c) La cisterna está llena en los minutos 0, 12 y 24; y vacía en 10 y 22.

3. Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, *t*. ¿Cuál de ellas es?

Ⓐ $h = 8t - t^2$ Ⓑ $h = 40t - 5t^2$ Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

a) De forma aproximada, mirando la gráfica.

b) Utilizando la expresión algebraica.

Es la ecuación B.

a) Mirando la gráfica la altua es, aproximadamente, de 75 metros.

b) Utilizando la ecuación, $40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 75$ m.

Página 163

Resuelve

1. Infórmate y resume, en unas pocas líneas, los datos más relevantes en la vida de René Descartes.

Nació en La Haye, Francia, en 1596 y murió en Estocolmo en 1650. Su familia pertenecía a la rica burguesía, por lo que fue educado en un colegio considerado uno de los más famosos de Europa. Descartes tuvo una vida muy agitada y repleta de viajes. Tras alistarse en el ejército y dedicar varios años a la meditación, en 1629 marchó a los Países Bajos, donde conoció a Isaac Beechmann, doctor holandés que le animó a reanudar los estudios; de esta forma Descartes encontró su verdadera vocación.

Su mayor aportación a las matemáticas fue un tratado sobre geometría, *La Géométrie*. En este trabajo consigue establecer una relación entre la geometría y el álgebra, que por entonces caminaban por separado, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica.

2. ¿Cuántos ejes de coordenadas tiene un sistema cartesiano capaz de fijar la posición de una araña que camina por una pared? ¿Y para fijar la posición de una mosca que vuela por la habitación?

Para la araña que camina por la pared solo necesitamos dos coordenadas; para la mosca, tres.

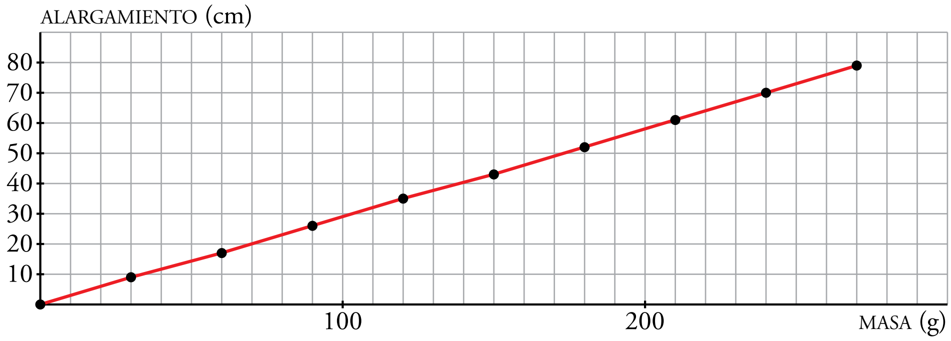
3. Indica las coordenadas de los puntos A, B, C, D y M, en el cuadro de la araña y la mosca. Comprueba que todos ellos responden a la ecuación mencionada.

$A(0, 6)$; $M(10, 11)$; $B(4, 8)$; $C(6, 9)$; $D(8, 10)$

A: $y = \frac{0}{2} + 6 = 6$ $\quad$ M: $y = \frac{10}{2} + 6 = 5 + 6 = 11$ $\quad$ B: $y = \frac{4}{2} + 6 = 2 + 6 = 8$

C: $y = \frac{6}{2} + 6 = 3 + 6 = 9$ $\quad$ D: $y = \frac{8}{2} + 6 = 4 + 6 = 10$

4. Representa sobre unos ejes cartesianos los valores de la tabla que relaciona la masa y el alargamiento del muelle. Comprueba que están alineados y que responden, aproximadamente, a la fórmula $A = 0{,}29 \cdot M$.



$(0, 0)$: $A = 0{,}29 \cdot 0 = 0$

$(30, 9)$: $A = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \approx 9$

$(60, 17)$: $A = 0{,}29 \cdot 60 = 17{,}4 \approx 17$

$(90, 26)$: $A = 0{,}29 \cdot 90 = 26{,}1 \approx 26$

Se puede comprobar que los demás pares también cumplen, aproximadamente, la fórmula.

1 Función de proporcionalidad $y = mx$

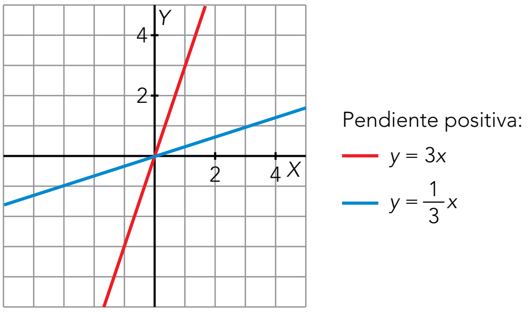
Página 164

1. Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

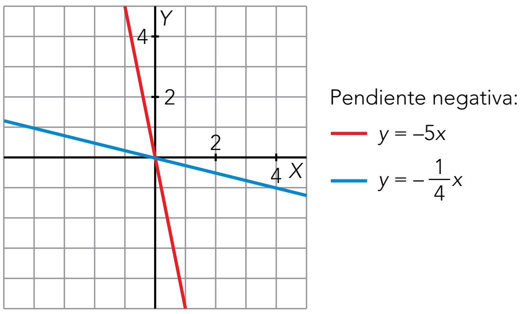
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



Página 165

2. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

d) $y = -2x$ e) $y = \frac{1}{3}x$ f) $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ h) $y = \frac{-3}{2}x$ i) $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

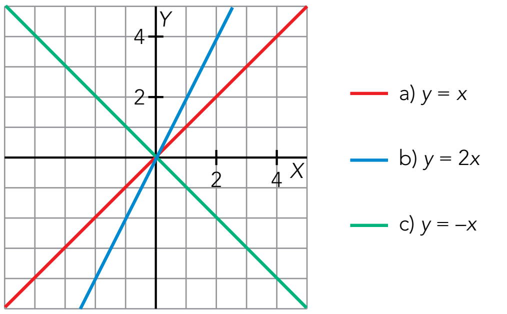
x	$y = x$
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	$y = 2x$
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	$y = -x$
–2	2
0	0
2	–2



d)

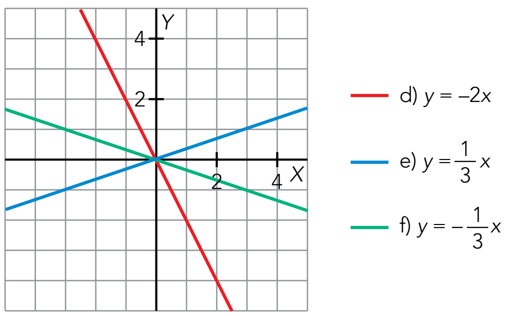
x	$y = -2x$
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	$y = 1/3x$
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	$y = -1/3\ x$
–3	1
0	0
3	–1



g)

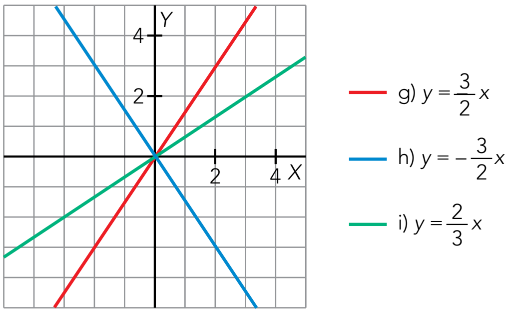
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

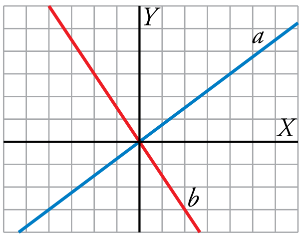
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

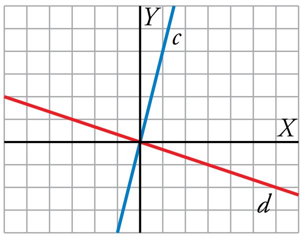
i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



3. **Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**





Buscamos puntos de coordenadas enteras para calcular la pendiente.

- La recta a pasa por los puntos (0, 0) y (4, 3). Su pendiente es $\frac{3}{4}$. Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x$.
- La recta b pasa por los puntos (0, 0) y (2, –3). Su pendiente es $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es $y = -\frac{3}{2}x$.
- La recta c pasa por los puntos (0, 0) y (1, 4). Su pendiente es 4. Su ecuación es $y = 4x$.
- La recta d pasa por los puntos (0, 0) y (6, –2). Su pendiente es $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$.

2 La función $y = mx + n$

Página 166

1. Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

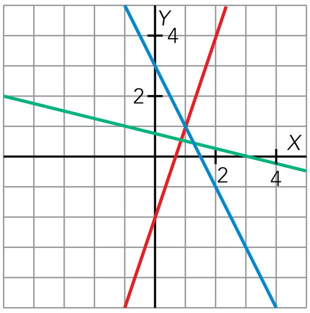
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



a) $y = 3x - 2$

b) $y = 3 - 2x$

c) $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d)

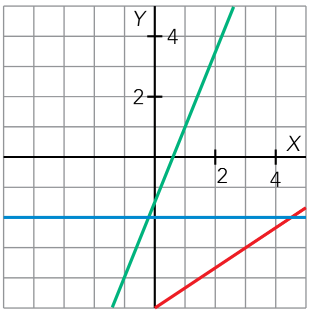
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



d) $y = \frac{2}{3}x - 5$

e) $y = -2$

f) $y = \frac{5x - 3}{2}$

2. Medimos el grosor de los libros de una colección. Cada una de las cubiertas tiene un grosor de 5 mm. Sabiendo que el grosor de 200 páginas es de 1 cm, escribe la ecuación de la función *número de páginas* → *grosor del libro* y represéntala en unos ejes.

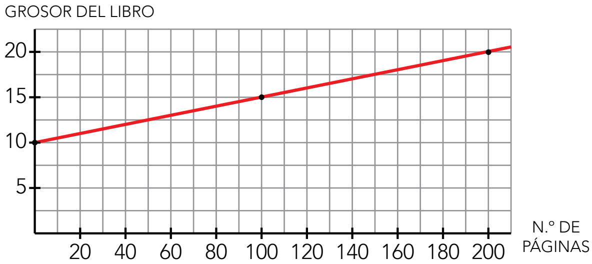
El grosor de las cubiertas es $2 \cdot 5 = 10$ mm.

1 cm = 10 mm

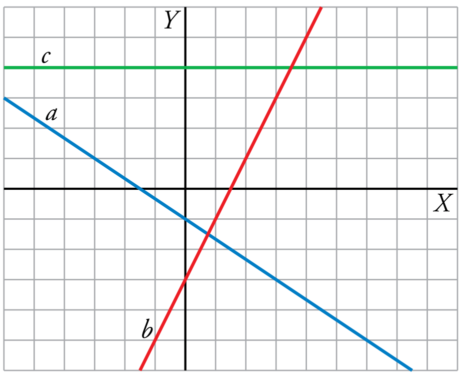
Una página tiene un grosor de $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ mm.

La función es: $f(x) = \frac{1}{20}x + 10$

x	$y = 1/20x + 10$
0	10
100	15
200	20



3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje Y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por $(0, -1)$ y $(3, -3)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por $(0, -3)$ y $(2, 1)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por $(0, 4)$ y $(4, 4)$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{0}{4} \\ n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0x + 4 \rightarrow y = 4$$

3 Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Página 167

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$ **c)** $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$ **e)** $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

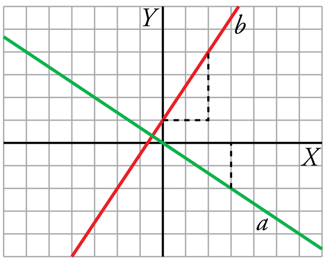
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

2. Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta a:

  $P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  En lugar de $P(0, 0)$, tomamos $Q(3, -2)$:

  $Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

- Recta b

  $R(0, 1)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 1 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

  En lugar de $R(0, 1)$, tomamos $S(2, 4)$:

  $S(2, 4)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

  Obtenemos la misma ecuación.

4 Recta que pasa por dos puntos

Página 168

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q*:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ **b)** $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ **c)** $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$ **e)** $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ **f)** $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = -\dfrac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\dfrac{1}{5} \to y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2) \to y = \dfrac{27}{5} - \dfrac{1}{5}x$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\dfrac{3}{5} \to y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3) \to y = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}x$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{5}{6} \to y = 0 + \dfrac{5}{6}(x+1) \to y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6}$

d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\dfrac{3}{10} \to y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7) \to y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{31}{10}$

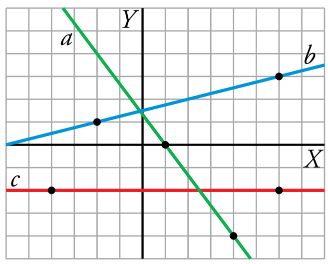
e) $m = \dfrac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente 0 $\to y = 1 - 0(x-3) \to y = 1$

f) $m = \dfrac{5-(-2)}{2-2} = \dfrac{7}{0}$ $\to$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es 2 $\to x = 2$.

2. Halla las ecuaciones de las rectas *a*, *b* y *c*. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.



- En la recta *a*:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \to y = 0 + \left(\dfrac{-4}{3}\right)(x-1) \to y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}x$$

- En la recta *b*:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \to y = 1 + \dfrac{1}{4}(x+2) \to y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$$

- En la recta *c*:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \to y = -2 + 0(x+4) \to y = -2$$

5 Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos

Página 169

1. Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2. Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3. Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$.

4. A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

6 Estudio conjunto de dos funciones lineales

Página 170

1. Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió dos horas antes de nuestra ciudad y va a 50 km/h por un vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de *t* horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

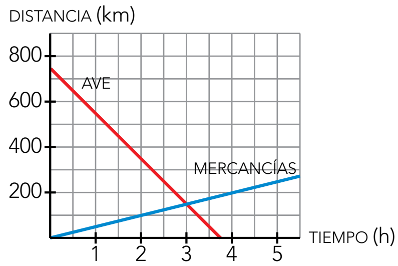
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \to 750 - 200t = 50t \to 750 = 250t \to t = 3 \text{ horas}$

Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

7 Parábolas y funciones cuadráticas

Página 171

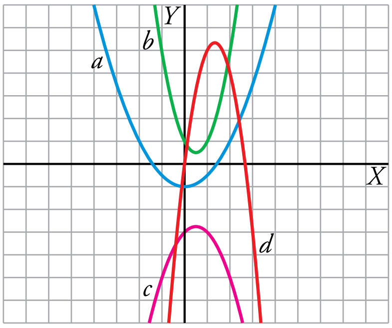
1. **Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:**

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 172

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

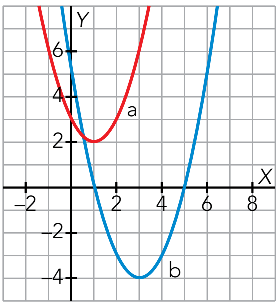
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3. Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

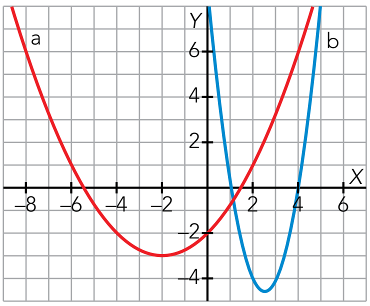
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \;\to\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \;\to\; \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \;\to\; (-2+2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \;\to\; (-2-2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	-6	$-2-2\sqrt{3}$	-4	-2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	-2	-3	-2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \;\to\; x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \;\to\; \begin{cases} x = 4 \;\to\; (4, 0) \\ x = 1 \;\to\; (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	0	8



Página 173

Hazlo tú

Un ave está a 1 120 m de altura. Se lanza en picado hacia abajo a 20 m/s en el mismo momento que desde el suelo sale hacia arriba una bala a 160 m/s. La ecuación del movimiento de la bala es: *altura* = 160*t* – 5*t*². ¿En qué momento coinciden?

$$\left.\begin{array}{l} a = 1120 - 20t \\ a = 160t - 5t^2 \end{array}\right\} \rightarrow 1\,120 - 20t = 160t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 180t + 1\,120 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t^2 - 36t + 224 = 0 \rightarrow t_1 = 8,\ t_2 = 28$$

Coinciden a los 8 segundos y a los 28.

Ejercicios y problemas

Página 174

Practica

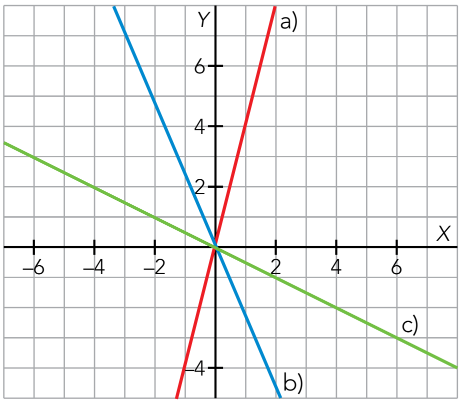
Funciones lineales. Rectas

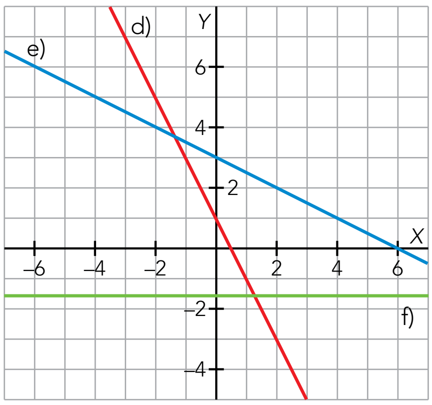
1. **Representa las rectas siguientes:**

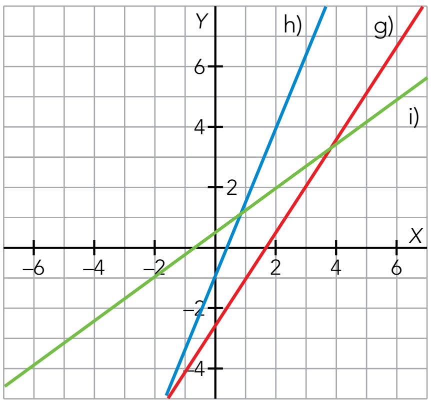
a) $y = 4x$ b) $y = -2{,}4x$ c) $y = -\dfrac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ e) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$ f) $y = -\dfrac{8}{5}$

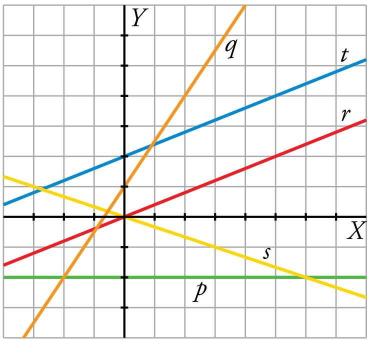
g) $y = \dfrac{3x - 5}{2}$ h) $y = 2{,}5x - 1$ i) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$







2. **Asocia cada recta con su ecuación:**



a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

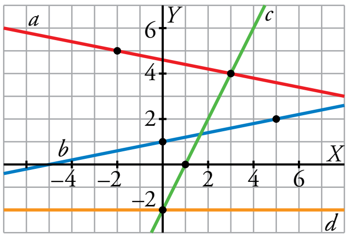
c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = \frac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$

a) s b) q c) r d) t e) p

3. **a) Escribe la ecuación de cada recta:**



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.

a) Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).

  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.

- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).

  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.

- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).

  Su ecuación es $y = 2x - 2$.

- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

b) Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.

La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.

La función d es constante, y su pendiente es 0.

4. **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $P(-2, 5)$, $m = 3$ **b)** $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$ **d)** $P(-2, -4)$, $m = -\frac{3}{2}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$

b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

5. **Obtén la ecuación de la recta que pasa por A y B.**

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ **b)** $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$ **d)** $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \dfrac{4-(-1)}{3-2} = 5$

$y = -1 + 5(x - 2)$

b) $m = \dfrac{1-2}{-3-(-5)} = \dfrac{-1}{2}$

$y = 2 - \dfrac{1}{2}(x+5)$

c) $m = \dfrac{\frac{2}{3}-2}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{8}{3}$

$y = 2 + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{10}$

$y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{10}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

6. **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

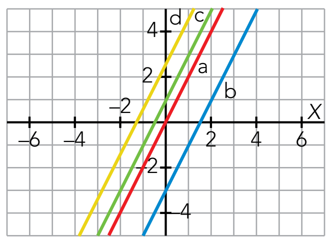
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \dfrac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

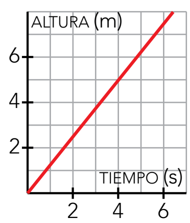
7. **La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) **Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?**

b) **¿Es una función de proporcionalidad?**

c) **Di cuál es la pendiente y explica su significado.**

a) $a(t) = \dfrac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\dfrac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 - 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\dfrac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

8. **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (*min*)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

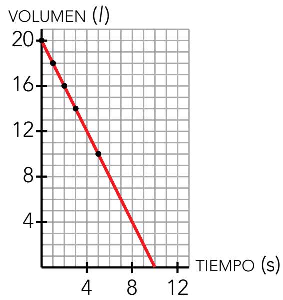
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 - 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

9. **Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:**

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

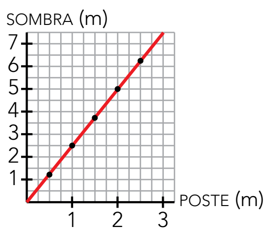
a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

c) ¿Qué longitud tendrá la sombra de un poste de 3,5 m?

d) ¿Qué longitud tiene un poste que arroja una sombra de 3 m?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{5}{2}$ y pasa por el origen de coordenadas. La ecuación de la función es $y = \frac{5}{2}x$.

c) $y = \frac{5}{2} \cdot 3,5 = 8,75 \rightarrow 8,75$ m

d) $3 = \frac{5}{2}x \rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow x = 1,2 \rightarrow 1,2$ m

10. **Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.**

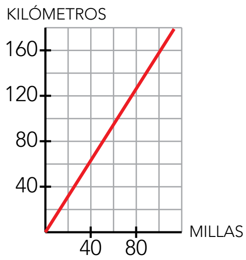
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1,6x$



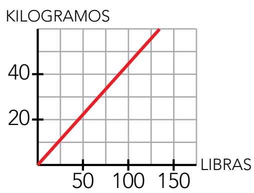
11. **Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:**

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, *y*, que equivalen a *x* libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\rightarrow y = \frac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)

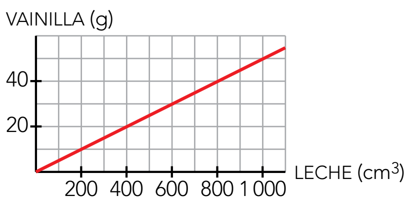


12. **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.**

Son 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche.

La función que da la relación entre la cantidad de leche, x, y de vainilla, y, es:

$$y = \frac{10}{200}x \rightarrow y = 0,05x$$



Página 175

13. **Mamen anda a una velocidad de 3 km/h y su casa se encuentra a 10 km de la piscina. Asocia cada uno de estos enunciados con una de las ecuaciones de más abajo:**

a) Si empieza a andar ahora, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

b) Si empezó a andar hace 3 h, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

c) Si sale de su casa para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

d) Si salió desde su casa a las 10:00 h para bañarse, ¿a qué distancia se encontrará de la piscina a las *t* horas?

e) Si salió desde su casa hace 3 horas para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

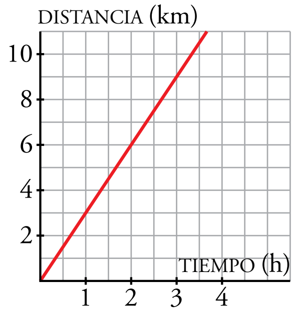
$d = 3t + 3$	$d = 10 + 3(t - 10)$	$d = 3(t + 3)$
$d = 3(t - 3)$	$d = 10 - 3(t - 10)$	$d = 10 - 3t$
$d = 3t$	$d = 10 - 3(t + 3)$	$d = 10 + 3(t + 3)$

a) $d = 3t$ b) $d = 3(t + 3)$ c) $d = 10 - 3t$

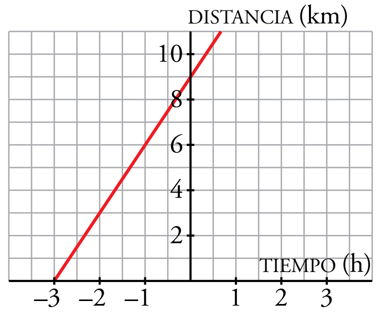
d) $d = 10 - 3(t - 10)$ e) $d = 10 - 3(t + 3)$

14. **Dibuja la gráfica de cada uno de los enunciados del ejercicio anterior.**

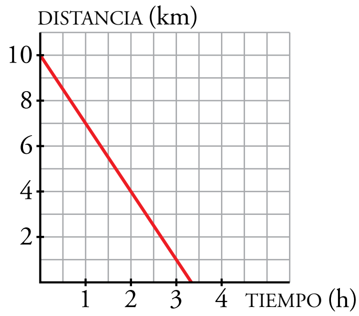
a) $d = 3t$



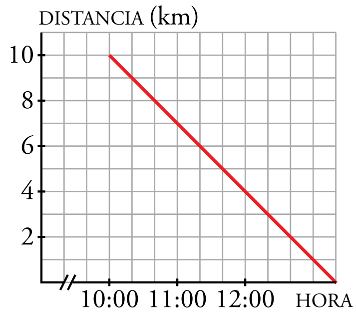
b) $d = 3(t + 3) \to d = 3t + 9$



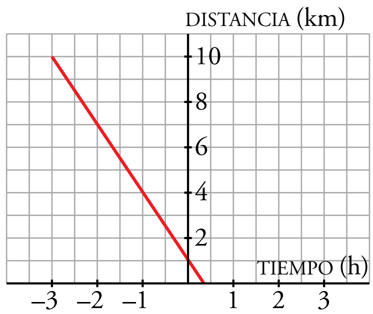
c) $d = 10 - 3t$



d) $d = 10 - 3(t - 10) \to d = -3t + 40$



e) $d = 10 - 3(t + 3) \to d = -3t + 1$



15. **En cada uno de los siguientes enunciados, halla la ecuación y representa la función lineal en unos ejes coordenados:**

a) Antonio compra naranjas a 3 €/kg. ¿Cuánto le costarán *p* kg de naranjas?

b) Sonia sale de viaje a las 8:00 h a 120 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido a las *t* horas?

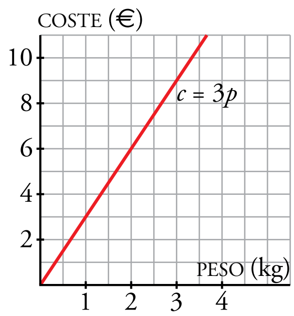
c) A Juan le cobran 5 € por alquilar unos patines, más 1 € por cada hora que esté patinando. ¿Cuánto le cobrarán por *t* horas de patinaje?

d) Tengo 25 € y el taxi me ha cobrado 2,50 € por la bajada de bandera más 1,20 € por kilómetro recorrido. ¿Cuánto dinero me quedará si el taxi me lleva a *d* km de distancia?

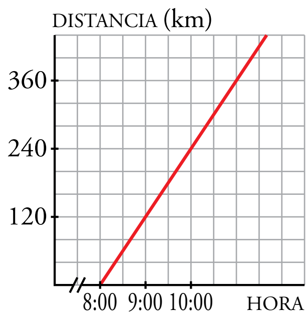
e) A las 12:00 he sacado un refresco a 10 °C de la nevera. Si cada minuto se calienta 1,5 °C, ¿a qué temperatura estará a las *t* horas?

f) Hace 10 min he abierto el grifo que llena la bañera. Si el nivel sube a razón de 2 cm de altura por minuto y la bañera tiene 40 cm de profundidad, ¿cuántos centímetros faltarán para que rebose el agua dentro de *t* minutos?

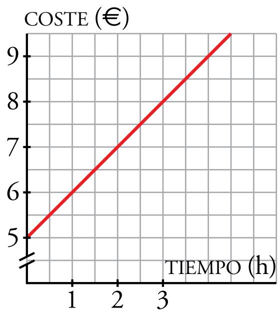
a) $c = 3p$



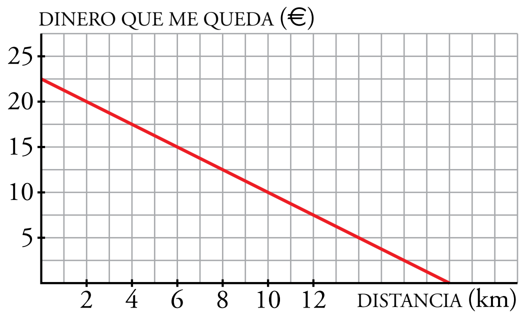
b) $d = 120(t - 8) \rightarrow d = 120t - 960$



c) $c = 5 + t$

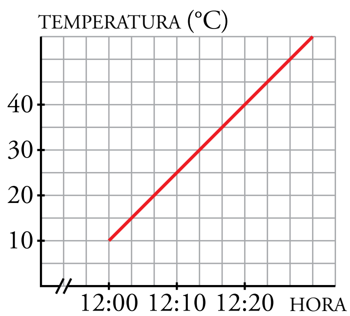


d) $D = 25 - (2{,}50 + 1{,}20d) \rightarrow D = -1{,}2d + 22{,}5$



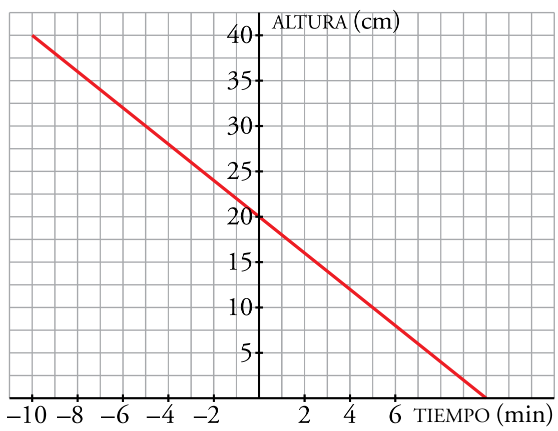
e) $g = 10 + 1{,}5 \cdot 60(t - 12) \rightarrow$

$\rightarrow g = 10 + 90t - 1\,080 \rightarrow g = 90t - 1\,070$



f) $n = 40 - 2(t + 10) \rightarrow n = 40 - 2t - 20 \rightarrow$

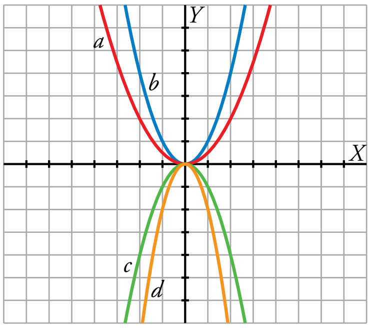
$\rightarrow n = -2t + 20$



Funciones cuadráticas. Parábolas

16. **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

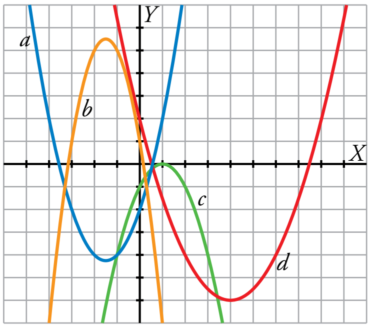
I) $y = x^2$ II) $y = -x^2$ III) $y = -2x^2$ IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b II) c III) d IV) a

17. **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$ II) $y = -x^2 + 2x - 1$ III) $y = -2x^2 - 6x + 1$ IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a II) c III) b IV) d

18. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

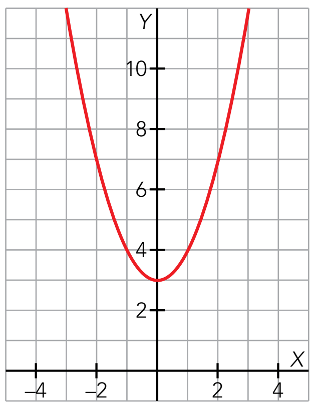
X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

a) $y = x^2 + 3$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

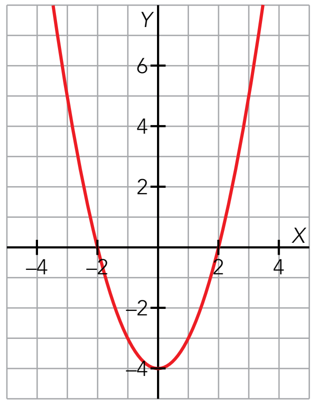
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

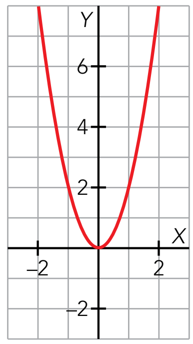
La abscisa del vértice es $p = \dfrac{0}{2} = 0 \;\rightarrow\;$ El vértice es $(0, -4)$.



c) $y = 2x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

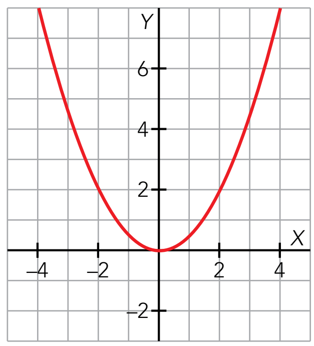
La abscisa del vértice es $p = \dfrac{0}{4} = 0 \;\rightarrow\;$ El vértice es $(0, 0)$



d) $y = 0{,}5x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	8

La abscisa del vértice es $p = \dfrac{0}{1} = 0 \;\rightarrow\;$ El vértice es $(0, 0)$



19. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$ **e)** $y = -\dfrac{5}{2}x^2 + 5x - \dfrac{3}{2}$

a) $p = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0;\; f(0) = -5;\; V(0, -5)$. Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

b) $p = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{0}{-2} = 0;\; f(0) = 3;\; V(0, 3)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

c) $p = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1;\; f(-1) = 5;\; V(-1,-5)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

d) $p = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2 \cdot 5} = -2;\; f(-2) = 0;\; V(-2, 0)$. Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

e) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot \frac{-5}{2}} = 1$; $f(1) = 1$; $V(1, 1)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

20. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ **c)** $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \to y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-8}{2} = -4$

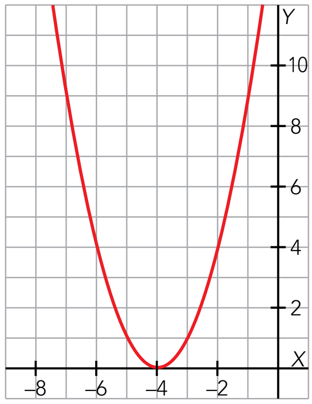
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 0 + 0 + 16 \to (0, 16)$

$y = 0 \to (x + 4)^2 = 0 \to x = -4 \to (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
Y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

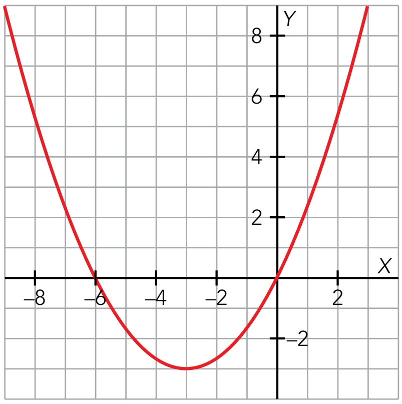
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

$y = 0 \to \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \to x\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = -6 \to (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
Y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

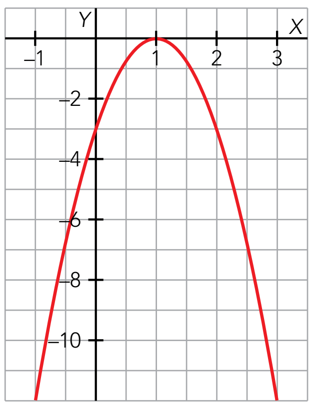
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = -3 \to (0, -3)$

$y = 0 \to -3x^2 + 6x - 3 = 0 \to -3(x - 1)^2 = 0 \to x = 1 \to (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–1	0	1	2	3
Y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

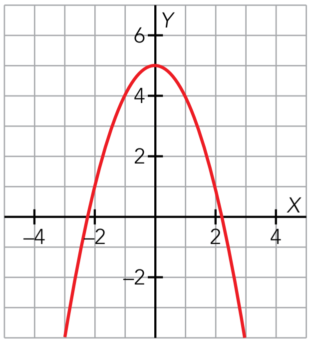
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 5 \;\rightarrow\; (0,\ 5)$

$y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 5 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -\sqrt{5} \;\rightarrow\; (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \;\rightarrow\; (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
Y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Página 176

Aplica lo aprendido

21. **a) Calcula c para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto (–2, 4).**

b) Calcula b para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto (2, –5).

c) Halla k para que la parábola $y = kx^2 - 2x + 3$ pase por el punto (–1, 0).

d) Halla el valor de a para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga su vértice en el punto de abscisa $x = 2$.

e) Calcula el valor del parámetro m para que la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ tengan un solo punto de corte.

a) El punto (–2, 4) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = c \to c = -26$

b) El punto (2, –5) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$2 \cdot 2 + b \cdot (-5) = -11 \to b = 3$

c) Sustituimos el punto en la parábola, para hacer que cumpla la ecuación, y despejamos k:

$k + 2 + 3 = 0 \to k = -5$

d) Sustituimos el punto en la ecuación del vértice para hallar el coeficiente a:

$p = -\dfrac{2}{2a} = 2 \to a = \dfrac{-1}{2}$

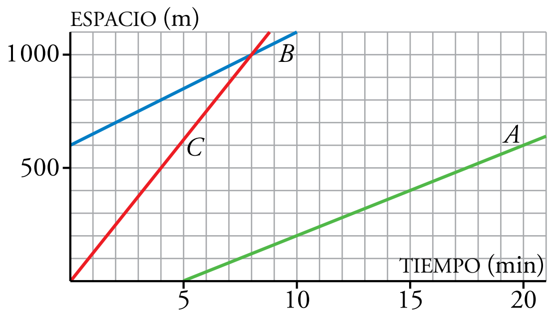
e) Resolvemos el sistema por igualación de ambas ecuaciones para que exista ese punto de corte entre ambas:

$mx + 2 = x^2 - 3x + 2 \to x^2 - 3x - mx = 0 \to x(x - 3 - m) = 0 \to x = 0$ y $x = m + 3$

Para que solo haya un único punto de cortem la segunda solución debe dar 0:

$m + 3 = 0 \to m = -3$

22. **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad, en m/min, lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

C lleva una velocidad de $\dfrac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

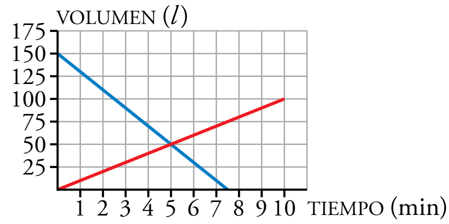
b) $A \to y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$

$B \to y = \frac{100}{3}x + 500$

$C \to y = \frac{400}{3}x$

23. **Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se vacía, B se va llenando.**

Estas son las gráficas:



a) Indica cuál es la gráfica de A, cuál la de B y escribe sus ecuaciones.

b) ¿Cuáles son las velocidades de entrada y de salida del agua?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

a) Como A se vacía, su gráfica debe ser decreciente y como B se llena, su gráfica debe ser creciente. Por lo tanto, la gráfica azul corresponde al depósito A y la roja, al B.

Ecuación de A: $y = -20x + 150$

Ecuación de B: $y = 10x$

b) El agua sale a una velocidad de 20 l/min y entra a 10 l/min.

c) En el minuto 5.

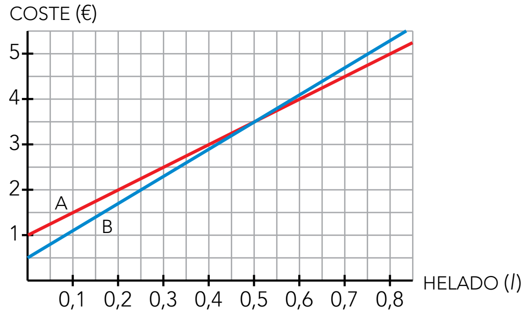
Resuelve problemas

24. **En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.**

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a)



Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\to y = 1 + 5x$

Heladería B $\to y = 0,5 + 6x$

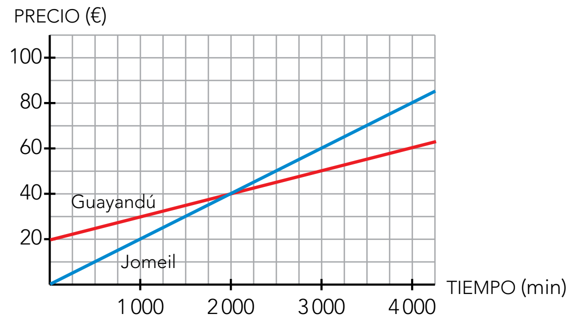
b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

25. **El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, con cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € cada minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY, sin cuota fija y 0,02 € por minuto.**

a) Haz una gráfica de cada tarifa en función del tiempo y escribe sus expresiones analíticas.

b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

a)

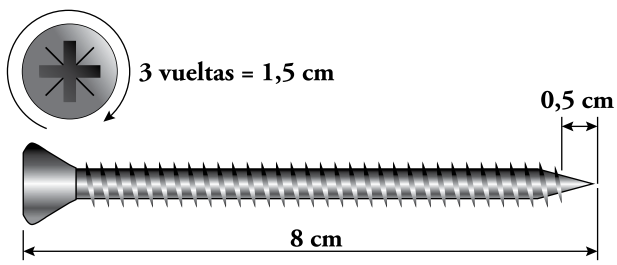


Guayandú $\rightarrow$ $y = 20 + 0{,}01x$

Jomeil $\rightarrow$ $y = 0{,}02x$

b) La tarifa GUAY es más rentable que la tarifa CHUPY a partir de 2 000 minutos.

26. **Este tornillo penetra 1,5 cm por cada tres vueltas que se le hace girar. Para colocarlo en una viga de madera, se le ha dado, previamente, un martillazo, con el que ha penetrado 0,5 cm.**



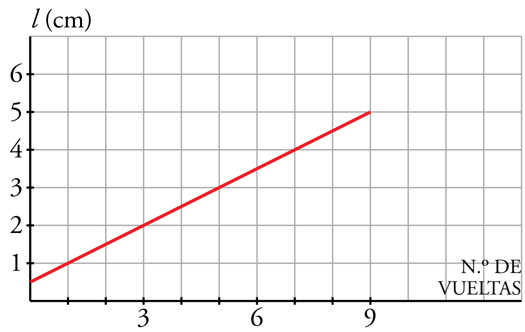
a) Haz una tabla que relacione el número de vueltas que se le da al tornillo, *x*, con la longitud que penetra, *y*. Construye la gráfica de dicha relación.

b) ¿Cuál es la expresión analítica? ¿Cuál es el paso de rosca del tornillo (longitud que penetra por cada vuelta)? ¿Cuántas vueltas habrá que darle hasta que todo el tornillo esté hundido en la viga?

c) Supongamos que se ha seguido el mismo procedimiento para atravesar un listón de 5 cm de grosor. ¿Después de cuántas vueltas empezará el tornillo a asomar por el otro lado del listón?

a)

N.º DE VUELTAS (x)	0	3	6	9
LONGITUD QUE ENTRA (y)	0,5	2	3,5	5



b) $y = 0,5 + 05x \rightarrow$ En cada vuelta penetra 0,5 cm.

Estará totalmente hundido para un número de vueltas x tal que:

$$7,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 14 \text{ vueltas}$$

c) Después del martillazo quedan 4,5 cm de grosor por recorrer. Por tanto:

$$4,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 8 \text{ vueltas}$$

27. **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C; 36,5 °C; 10 °C.

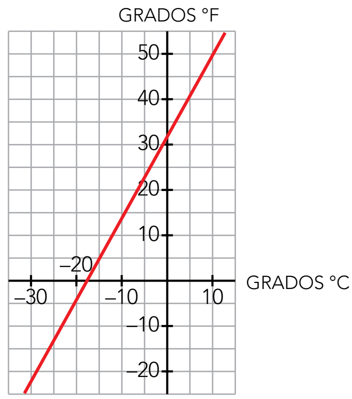
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

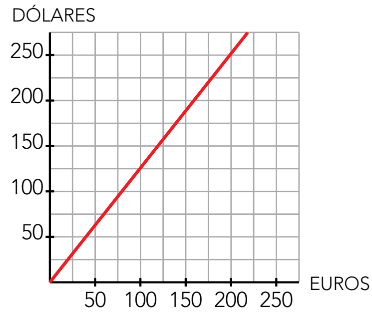
Página 177

28. **Israel y Susana, para un viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,20 dólares por 120 euros.**

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 €? ¿Y por 350 €? ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,50 dólares?

EUROS (€)	150	120
DÓLARES ($)	189	151,20



a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{151,20 - 189}{120 - 150} = \dfrac{-37,8}{-30} = \dfrac{63}{50}$

Tomamos $P(150, 189)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y = 189 + \frac{63}{50}(x - 150) \;\rightarrow\; y = \frac{63}{50}x$$

b) $y = \dfrac{63}{50} \cdot 200 \;\rightarrow\; y = 252\,\$$ $\quad y = \dfrac{63}{50} \cdot 350 \;\rightarrow\; y = 441\,\$$ $\quad 220,5 = \dfrac{63}{50} \cdot x \;\rightarrow\; x = 175$ €

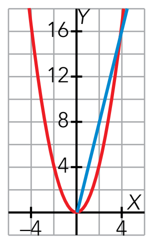
29. **a) ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?**

b) Dibuja ambas funciones.

a) El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$

b)



30. **La altura, a, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba es $a = 20t - 5t^2$.**

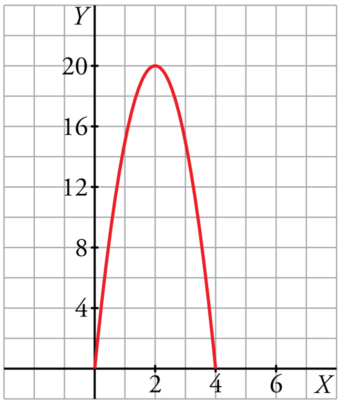
a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es el dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento toca la piedra el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a) 

b) El dominio de definición es el intervalo 0-4, incluyendo los extremos.

c) Alcanza su altura máxima a los 2 s de ser lanzada, llegando a los 20 m de altura.

d) Toca el suelo a los 4 s de haber sido lanzada.

e) En el intervalo 1-3, sin tener en cuenta los extremos, ya que se pide una altura superior, no igual.

31. **Representa las siguientes funciones lineal y cuadrática, respectivamente, y halla gráficamente los puntos de corte. Calcula luego, mediante un sistema de ecuaciones, dichos puntos y comprueba que coinciden.**

$$\boldsymbol{y = -2x + 1} \qquad\qquad \boldsymbol{y = x^2 - 3x - 5}$$

- $y = x^2 - 3x - 5$

  Calculamos la abscisa del vértice, $p = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

  Calculamos los cortes con los ejes:

  $x = 0 \to y = -5 \to (0, -5)$

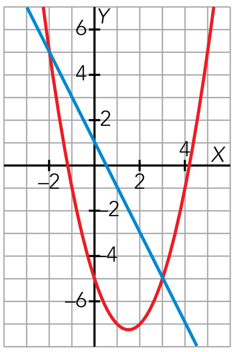
  $$y = 0 \to x^2 - 3x - 5 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \approx -1,19 \to \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, 0\right) \\ x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \approx 4,19 \to \left(\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

  Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–2	$\frac{3-\sqrt{29}}{2}$	–1	0	1	1,5	3	4	$\frac{3+\sqrt{29}}{2}$	5
y	5	0	–1	–5	–7	–7,25	–5	–1	0	5

- $y = -2x + 1$ es una función afín con pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $n = 1$.

  Representamos las funciones:



Vemos que se cortan en los puntos (–2, 5) y (3, –5).

Comprobémoslo de forma analítica:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{array}\right\} \to x^2 - 3x - 5 = -2x + 1 \to x^2 - x - 6 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \to \begin{cases} x = -2 \to y = 5 \\ x = 3 \to y = -5 \end{cases}$$

Vemos que obtenemos los mismos puntos de intersección.

32. **Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores vienen dados por esta expresión:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos; es decir, para que haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \to 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \to \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

- Si $x < 58{,}1 \to G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \to G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \to G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

Problemas "+"

33. **Se ha soltado un globo de helio que sube a una velocidad constante de 5 m/s. A los 30 s, se lanza una flecha verticalmente hacia arriba cuya altura, a, con respecto al tiempo, t, viene dada por la ecuación $a = 60t - 5t^2$.**

a) ¿A qué altura pincha la flecha al globo? ¿Cuánto tiempo pasó desde que se lanzó la flecha?

b) Si la flecha no hubiera pinchado el globo cuando subía, ¿a qué altura lo pincharía al bajar?

c) Dibuja las gráficas correspondientes a las alturas de la flecha y el globo. Toma como origen del tiempo el momento en que se lanza la flecha.

a) $\left.\begin{array}{l} a = 5(t+30) \\ a = 60t - 5t^2 \end{array}\right\}$ $5(t+30) = 60t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 55t + 150 = 0 \rightarrow t_1 = 5,\ t_2 = 6$

$a = 60 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 175$

La flecha pinchará el globo a 175 metros, a los 5 segundos de ser lanzada.

b) $a = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 180$. Lo pincharía a los 180 metros de altura.

c)

34. **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg. ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?**

Si llamamos x a los días que han de pasar, la función que nos da el precio de las naranjas es la siguiente:

$f(x) = (200 - x)(0{,}40 + 0{,}01x) \rightarrow f(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}60x + 80$

El beneficio máximo se encontrará en el vértice de la parábola:

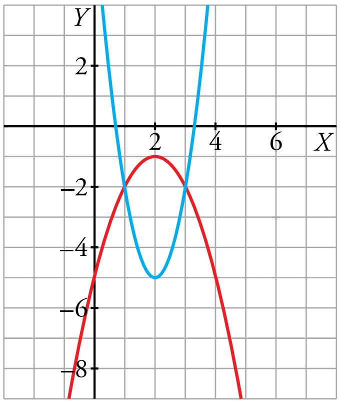
$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}60}{2 \cdot (-0{,}01)} = 80 \rightarrow f(80) = 144$$

Para obtener el máximo beneficio, las naranjas se deberán vender, tras 80 días, por 144 €.

35. **Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son:**

$$y = 3x^2 - 12x + 7 \qquad\qquad y = -x^2 + 4x - 5$$

Busca los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 12x + 7 \\ y = -x^2 + 4x - 5 \end{array}\right\} \; 3x^2 - 12x + 7 = -x^2 + 4x - 5 \;\to\; 4x^2 - 16x + 12 = 0 \;\to$$

$$\to x^2 - 4x + 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \;\to\; y = -2 \\ x = 3 \;\to\; y = -2 \end{array}\right.$$

Reflexiona sobre la teoría

36. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Se puede obtener la ecuación de una recta sabiendo su pendiente y el punto de corte con el eje *Y*.

b) Con los puntos de corte con los ejes siempre es posible obtener la ecuación de una recta.

c) La pendiente de una recta es lo que aumenta la x cuando la y aumenta 1.

d) La pendiente de una recta es lo que aumenta la y cuando la x aumenta 1.

e) Si una parábola corta al eje *X* en dos puntos, su vértice está entre medias de estos puntos.

a) Verdadero. Tenemos la pendiente y un punto de la recta, suficiente para hallar su ecuación.

b) Verdadero. Tendríamos un par de puntos con los que hallar la pendiente y la ecuación de la recta.

c) Falso. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

d) Verdadero. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

e) Verdadero. Los dos puntos de corte con el eje *X* son simétricos, por lo que entre medias se encontrará el vértice.

Página 178

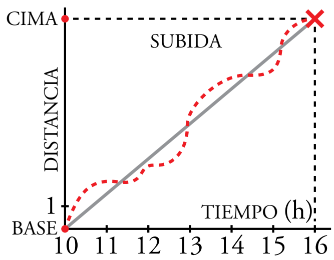
Reflexiona

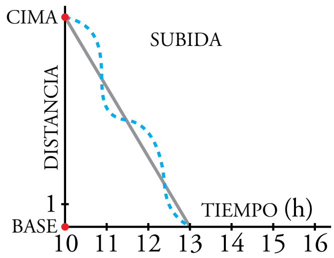
Subir y bajar

Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.

- **¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?**

  Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.

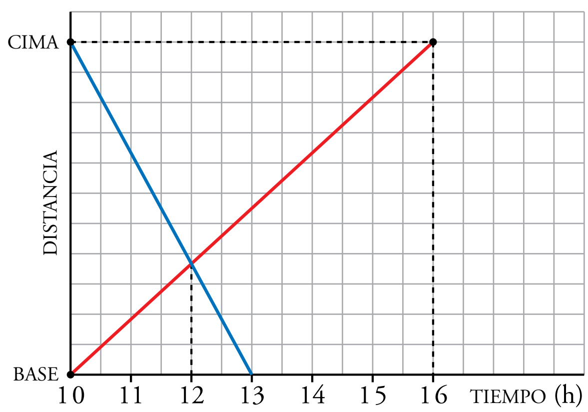




Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



Piensa y decide

¿Cuál es cuál?

- **Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta. Asocia cada enunciado con una gráfica:**

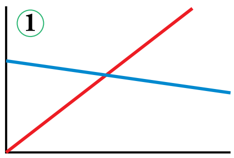
Ⓐ Un coche partió y una moto salió en su persecución.

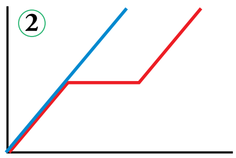
Ⓑ Un coche va, otro viene, y chocan.

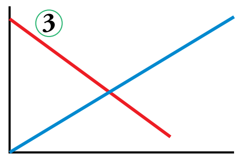
Ⓒ Un coche va, un camión viene, y se cruzan.

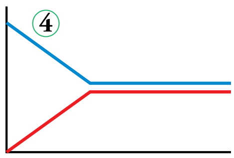
Ⓓ Un coche se acerca y otro se aleja.

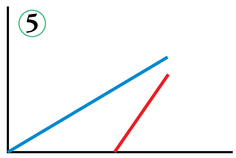
Ⓔ Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.











A ↔ 5 B ↔ 4 C ↔ 1 D ↔ 3 E ↔ 2

Página 179

Entrénate resolviendo problemas

- **Un grupo de 17 chicas y chicos de la misma edad organizan un gran viaje. A la reunión inicial acuden los padres y las madres de todos ellos, cuya edad media es de 45 años. Pero si consideramos al grupo formado por padres, madres e hijos, la edad media es de 35 años. ¿Qué edad tienen los chicos y las chicas?**

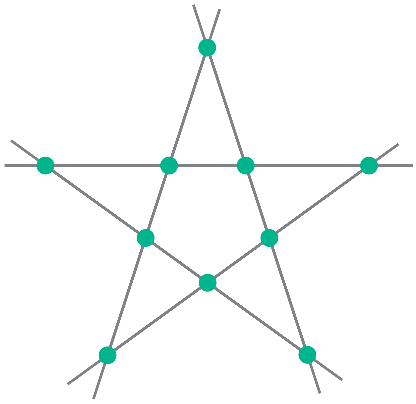
  Entre padres y madres suman ⟶ $45 \cdot 17 \cdot 2 = 1\,530$ años

  Entre madres, padres e hijos suman ⟶ $35 \cdot 17 \cdot 3 = 1\,785$ años

  Solo los hijos suman ⟶ $1\,785 - 1\,530 = 255$ años

  Cada hijo tiene ⟶ $255 : 17 = 15$ años

- **Sitúa 10 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 5 filas de 4 soldados.**



• **a) Tienes estas tres monedas:**

¿Cuántas cantidades de dinero distintas puedes formar con ellas?

b) ¿Y si tuvieras estas cinco monedas?

a) Puedes poner una moneda y obtendrías:

 0,10 €;  0,20 € y  0,50 €

Con dos monedas, obtendrías:

0,10 + 0,20 = 0,30 €

0,10 + 0,50 = 0,60 €

0,20 + 0,50 = 0,70 €

Con tres monedas, obtendrías:

 0,10 + 0,20 + 0,50 = 0,80 €

En total, son 7 cantidades distintas de dinero.

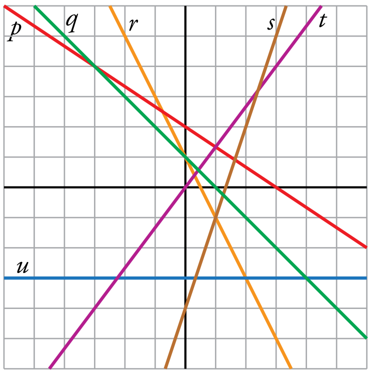
Si añadimos la cantidad 0 € (no tenemos ninguna moneda) serían 8 posibles cantidades.

b) Tomando una moneda, hay 5 posibilidades, una por cada moneda. Tomando dos monedas hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént.	 20 cént. + 50 cént.	 50 cént. + 1 €	 1 € + 2 €
 10 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 1 €	 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 1 €	 20 cént. + 2 €		
 10 cént. + 2 €			

Autoevaluación

1. Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:



a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$

a) Recta s, $m = 3$ b) Recta r, $m = -2$ c) Recta t, $m = 4/3$

d) Recta p, $m = -2/3$ e) Recta u, $m = 0$ f) Recta q, $m = -1$

2. Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:

a) $y = 3x + 4$

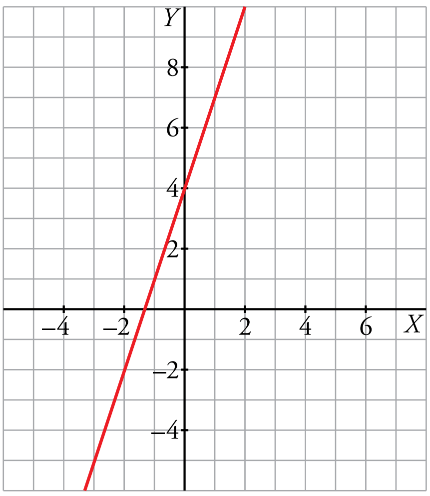
b) $3x + 2y = 5$

c) Recta de pendiente 1/4 que pasa por (3, 0).

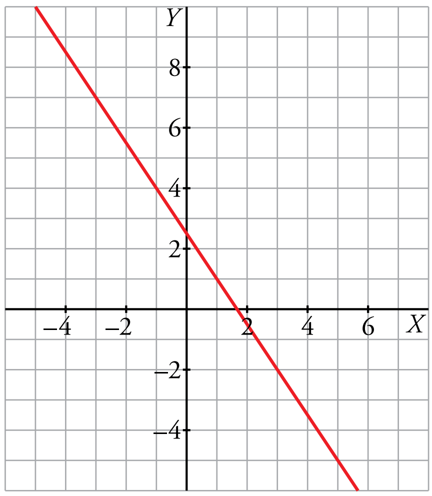
d) Recta que pasa por los puntos (4, 1) y (–2, 4).

e) Función de proporcionalidad que pasa por (4, –3).

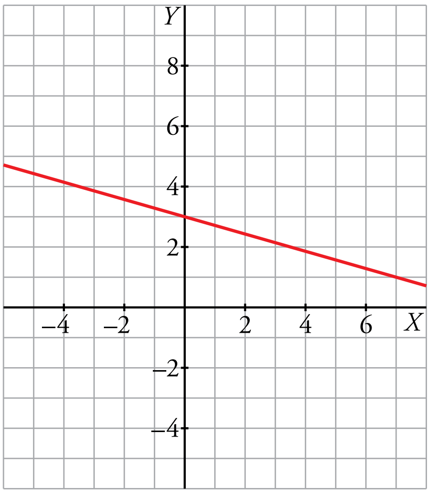
a) $y = 3x + 4$



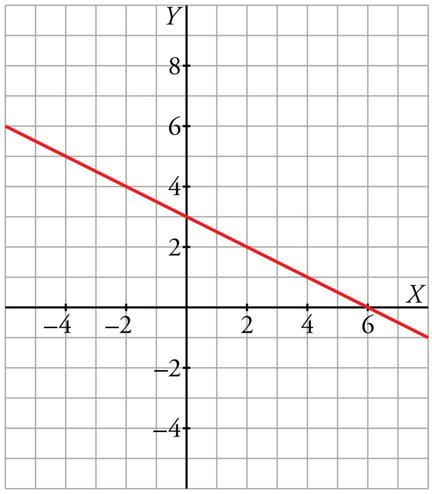
b) $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$



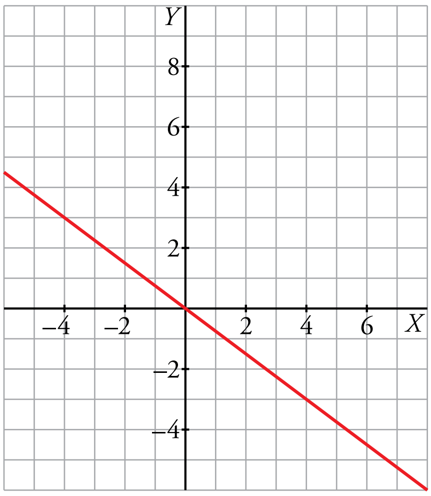
c) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$



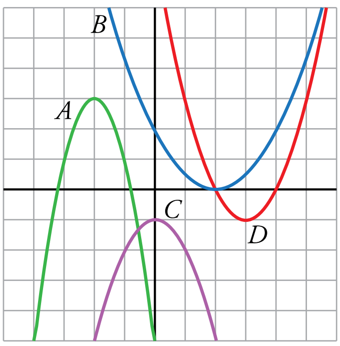
d) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$



e) La función pasa por (0, 0). $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{4}$; $y = -\frac{3}{4}x$



3. Asocia cada ecuación con su parábola:



$\boldsymbol{y = -x^2 - 1}$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2}$

$\boldsymbol{y = -2x^2 - 8x - 5}$

$\boldsymbol{y = x^2 - 6x + 8}$

A $\rightarrow$ $y = -2x^2 - 8x - 5$

B $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

C $\rightarrow$ $y = -x^2 - 1$

D $\rightarrow$ $y = x^2 - 6x + 8$

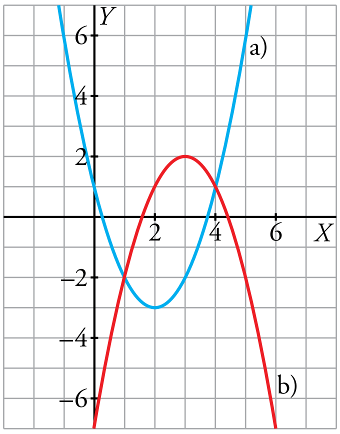
4. **Representa estas parábolas:**

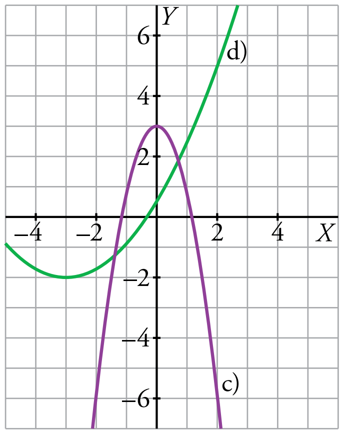
a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$

d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$





5. **La temperatura de hoy es de 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión.**

a) **¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?**

b) **Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.**

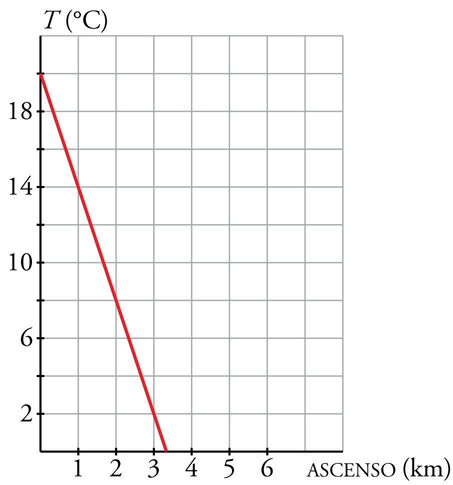
a) $20 - 6 \cdot 3 = 2°$

Si estamos a 11 °C habremos ascendido 1,5 km.

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$y = 20 - 3x$



6. **Halla la ecuación para cada uno de estos enunciados y representa las funciones correspondientes:**

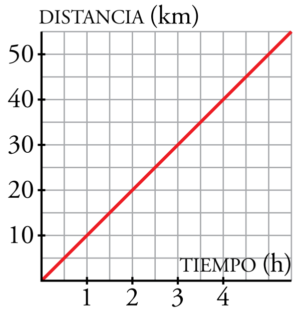
a) **Begoña empieza ahora a correr a 10 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?**

b) **Sonia salió de casa hace dos horas a 6 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?**

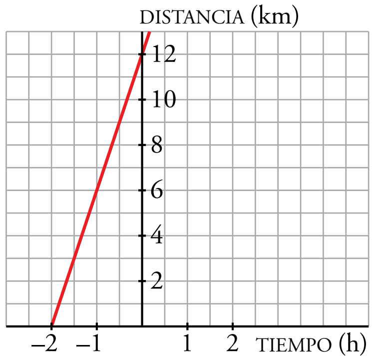
c) **Mariajo sale a 4 km/h desde su casa hacia la mía, que está a 18 km. ¿A qué distancia se encontrará de mi casa dentro de *t* horas?**

d) **Lluch salió a 5 km/h a las 7:00 h hacia el puerto, que está a 14 km. ¿A qué distancia del puerto se encuentra a las *t* horas?**

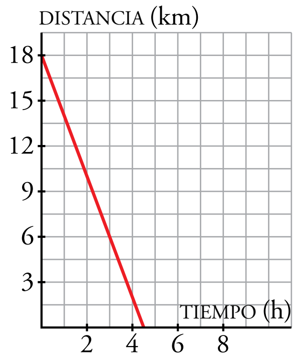
a) $d = 10t$



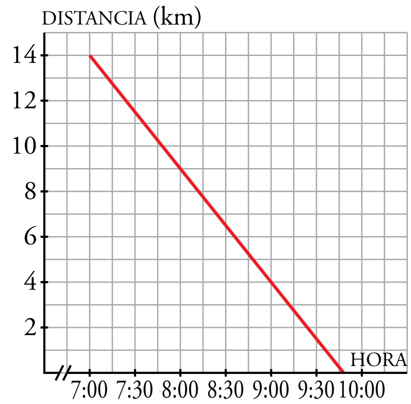
b) $d = 6(t + 2) \rightarrow d = 6t + 12$



c) $d = 18 - 4t$



d) $d = 14 - 5(t - 7) \rightarrow d = -5t + 49$



7. Hace dos horas, Estefanía salió de su casa hacia la casa de Víctor en bici a 15 km/h. Víctor sale ahora andando a 6 km/h en busca de ella. Si viven a 58 km, ¿dónde se encontrarán? ¿Cuánto tiempo ha estado Estefanía en bici?

Llamamos d a la distancia a casa de Estefanía y tomaremos $t = 0$ en el momento en el que Víctor sale de su casa.

Ecuación del movimiento de Estefanía: $d = 15(t + 2)$

Ecuación del movimiento de Víctor: $d = 58 - 6t$

$$\left.\begin{array}{l} d = 15(t+2) \\ d = 58 - 6t \end{array}\right\} \quad 15(t + 2) = 58 - 6t;\ \ 15t + 30 = 58 - 6t;\ \ 21t = 28;\ \ t = 4/3$$

$$d = 58 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 50$$

Se encuentran a 50 km de casa de Estefanía, cuando esta lleva 3 h y 20 min en bici.

Página 183

Resuelve

1. Busca información sobre siete grandes geómetras griegos. Escribe sus nombres ordenados cronológicamente.

Tales de Mileto (600 a. C.). Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, como el teorema que lleva su nombre.

Pitágoras (572 a. C.). Fundó la escuela pitagórica, a la que se le atribuye la demostración del teorema de Pitágoras y, como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela.

Pappus de Alejandría (300 a. C.). Hizo anotaciones al teorema de Pitágoras y demostró que el hexágono es la forma geométrica que almacena mayor cantidad de miel utilizando menor cantidad de cera.

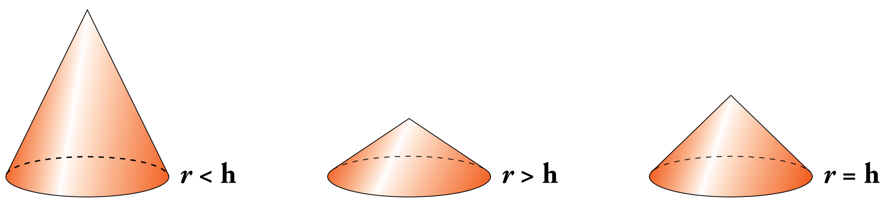
Euclides (300 a. C.). Se le conoce, sobre todo, por su obra *Elementos*, que durante más de 20 siglos fue la base de las matemáticas en todo el mundo.

Arquímedes de Siracusa (287 a. C.). Elaboró un método para calcular una aproximación del valor de π, la proporción entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.

Erastótenes (276 a. C.). Fue el primero en medir la longitud de la Tierra, formulando dos hipótesis muy atrevidas para su época: la Tierra tiene forma esférica y los rayos del Sol son paralelos. También conocemos su criba para encontrar números primos.

Apolonio de Perga (262 a. C.). Estudió la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrió muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de la física; por ejemplo, en las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

2. Observa estos conos, similares a los de arriba, pero no ordenados de igual manera:



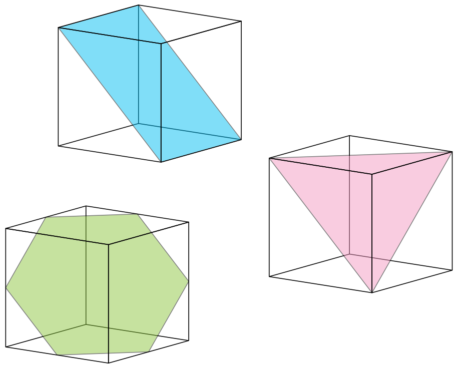
¿Qué cónica obtendrías en cada caso si los cortases con un plano perpendicular a la generatriz? Puedes experimentarlo construyendo conos de plastilina y cortándolos con un cuchillo o un cúter.

Con el primer cono, $r < h$, se obtendría una elipse.

Con el segundo cono, $r > h$, se obtendría una hipérbola.

Con el tercer cono, $r = h$, se obtendría una parábola.

3. **De las tres secciones del cubo que ves abajo, ¿cuál crees que tiene mayor perímetro? ¿Y mayor área? Cuando termines la unidad, sabrás contestar con seguridad a estas cuestiones.**



Tomamos como medida de la arista del cubo 1 m. Las diagonales de sus caras miden entonces $\sqrt{2}$ m.

Rectángulo. Su base coincide con la diagonal de las caras de los lados del cubo, $\sqrt{2}$ m, y su altura coincide con la arista, 1 m. Por tanto:

$P = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$ m $\qquad\qquad A = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m^2

Triángulo. Es equilátero y su lado coincide con la diagonal de las caras del cubo, $\sqrt{2}$ m.

$P = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Calculamos su altura para hallar el área: $h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m

$$A = \frac{\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \text{ m}^2$$

Hexágono. Los vértices del hexágono coinciden con los puntos medios de las aristas del cubo.

Calculamos su lado: $l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m

Ahora el perímetro: $P = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Recordando que en los hexágonos regulares coinciden las medidas del radio y el lado, calculamos la apotema: $ap = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ m

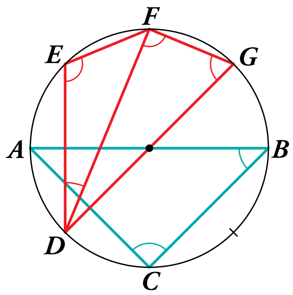
Por último, calculamos su área: $A = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \dfrac{3\sqrt{12}}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$ m^2

Tras estos resultados, concluimos que el rectángulo es la sección con mayor perímetro y mayor área.

1 Relaciones angulares

Página 185

1. **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia? Di el valor de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{FDE}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFG}$, $\widehat{FGD}$.**

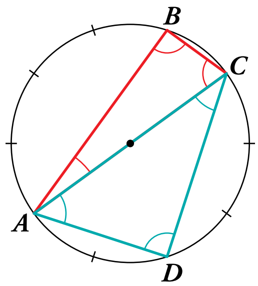


La medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\frac{360°}{8} = 45°$.

$\widehat{ABC} = \frac{2 \cdot 45°}{2} = 45°$ $\widehat{DFG} = \frac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$ $\widehat{ACB} = \frac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$

$\widehat{FDE} = \frac{45°}{2} = 22°\ 30'$ $\widehat{FGD} = \frac{3 \cdot 45°}{2} = 67°\ 30'$ $\widehat{DEF} = \frac{5 \cdot 45°}{2} = 112°\ 30'$

2. **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACD}$.**



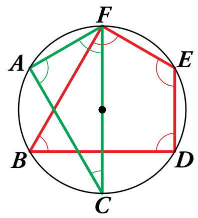
La medida angular de cada uno de los diez arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\frac{360°}{10} = 36°$.

$\widehat{CAB} = \frac{36°}{2} = 18°$ $\widehat{CAD} = \frac{3 \cdot 36°}{2} = 54°$ $\widehat{ABC} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\widehat{ADC} = \frac{180°}{2} = 90°$ $\widehat{BCA} = \frac{4 \cdot 36°}{2} = 72°$ $\widehat{ACD} = \frac{2 \cdot 36°}{2} = 36°$

3. **Di, razonadamente, el valor de estos ángulos:**

$$\widehat{FAC},\ \widehat{ACF},\ \widehat{AFC},\ \widehat{FBD},\ \widehat{BDE},\ \widehat{DEF},\ \widehat{BFE}.$$



La circunferencia está dividida en 6 arcos iguales.

La medida de cada uno de ellos es $\frac{360°}{6} = 60°$.

$\widehat{FAC} = \frac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{ACF} = \frac{60°}{2} = 30°$ $\widehat{AFC} = \frac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$

$\widehat{FBD} = \frac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\widehat{BDE} = \frac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{DEF} = \frac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$

$\widehat{BFE} = \frac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$

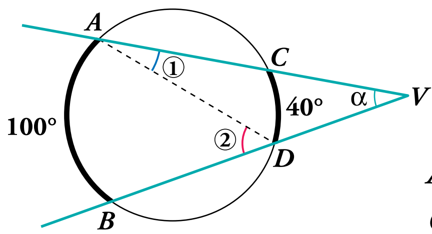
4. **Halla:**

a) $\widehat{CAD}$ = ①

b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{ADV}$

d) $\widehat{AVD}$ = α



$\overset{\frown}{AB}$ = 100°

$\overset{\frown}{CD}$ = 40°

a) $\widehat{CAD}$ = ① = $\dfrac{40°}{2}$ = 20°

b) $\widehat{ADB}$ = ② = $\dfrac{100°}{2}$ = 50°

c) $\widehat{ADV}$ = 180° – ② = 180° – 50° = 130°

d) $\widehat{AVD}$ = 180° – ① – 130° = 180° – 20° – 130° = 30°

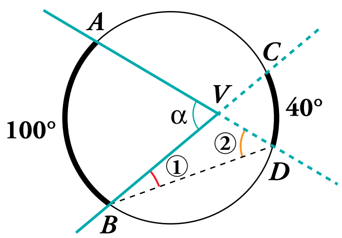
5. **Halla:**

a) $\widehat{CBD}$ = ①

b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{BVD}$

d) $\widehat{AVB}$ = α



$\overset{\frown}{AB}$ = 100°

$\overset{\frown}{CD}$ = 40°

a) $\widehat{CBD}$ = ① = $\dfrac{40°}{2}$ = 20°

b) $\widehat{ADB}$ = ② = $\dfrac{100°}{2}$ = 50°

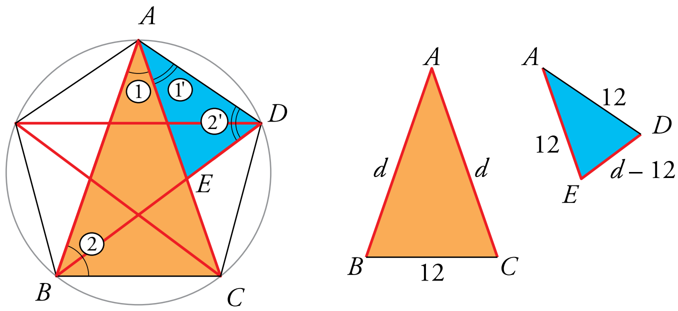
c) $\widehat{BVD}$ = 180° – ① – ② = 180° – 20° – 50° = 110°

d) $\widehat{AVB}$ = α = 180° – 110° = 70°

2 Semejanza de triángulos

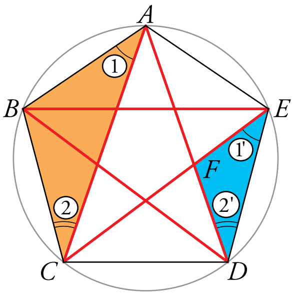
Página 187

1. Repite el razonamiento del ejercicio resuelto, pero suponiendo ahora que el lado del pentágono mide 12 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?



$$\frac{d}{12} = \frac{12}{d-12} \rightarrow d^2 - 12d = 144 \rightarrow d = 6 + 6\sqrt{5} = 19{,}4 \text{ cm}$$

2. Prueba que los triángulos *ABC* y *EFD* del pentágono de arriba son semejantes. A partir de esa semejanza, vuelve a obtener la relación entre *d* y *l*.

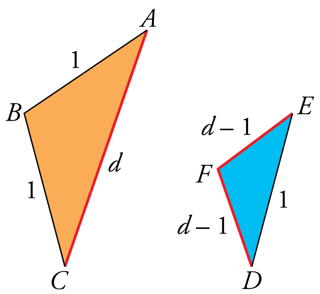


1 = 1' porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

2 = 2' por el mismo motivo.

Por tanto, los triángulos *ABC* y *EFD* son semejantes y sus lados son proporcionales.

Tomamos como unidad el lado del pentágono, $l = 1$. Además, $\overline{EF} = \overline{FD} = d - 1$.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos la solución positiva.

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

3 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Página 188

1. En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm **b) 16 cm y 30 cm**

a = hipotenusa

a) $a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3\,394} \approx 58{,}3$ cm   b) $a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

2. En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm **b) 39 cm y 15 cm**

c = cateto que falta

a) $c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}6$ cm   b) $c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1\,296} = 36$ cm

3. Averigua cómo son los triángulos de lados:

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm **b) 11 cm, 17 cm, 15 cm**

c) 34 m, 16 m, 30 m **d) 65 m, 72 m, 97 m**

e) 12 cm, 13 cm, 20 cm **f) 15 m, 36 m, 39 m**

a) $7^2 + 8^2 = 113$; $11^2 = 121$

Como $11^2 > 7^2 + 8^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

b) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289$

Como $17^2 < 11^2 + 15^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

c) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156$

Como $34^2 = 16^2 + 30^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

d) $65^2 + 72^2 = 9\,409$; $97^2 = 9\,409$

Como $97^2 = 65^2 + 72^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

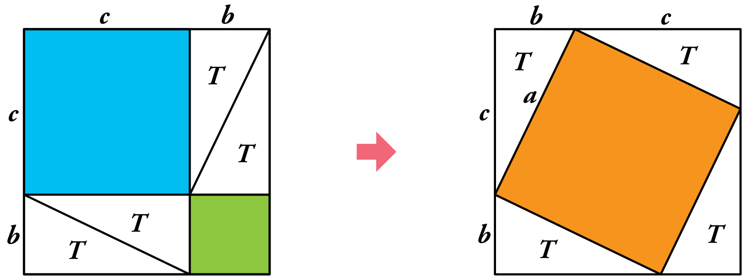
e) $12^2 + 13^2 = 313$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 12^2 + 13^3$, entonces el triángulo es obtusángulo.

f) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como $39^2 = 15^2 + 36^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

4. **Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.**



Puesto que los cuatro triángulos blancos son rectángulos de catetos b y c, sus hipotenusas, que coinciden con el lado del cuadrado, miden a. Por tanto, la figura naranja es un cuadrado de lado a y área a^2.

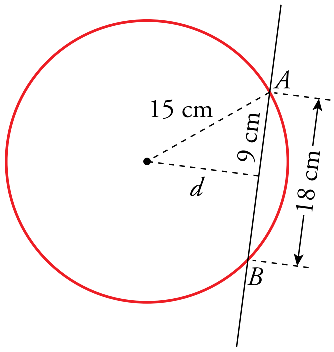
En el otro cuadrado vuelven a aparecer los mismos triángulos blancos, dejando ahora un cuadrado verde de lado b, cuya área será b^2, y otro azul de lado c y área c^2.

Por último, nos fijamos en los dos cuadrados completos de lado $b + c$. Si a dos cuadrados iguales les quitamos la misma parte (los cuatro triángulos blancos), la parte que queda también será igual. En este caso, en el primer cuadrado nos quedan dos cuadrados más pequeños, el verde y el azul, de áreas b^2 y c^2 y en el segundo cuadrado queda el cuadrado naranja de área a^2.

Por tanto, $b^2 + c^2 = a^2$.

Página 189

5. **Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, *r*, corta a la circunferencia en dos puntos, *A* y *B*. La distancia entre *A* y *B* es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?**



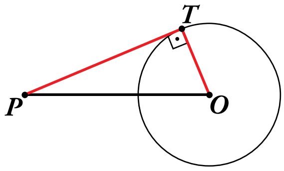
$d = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es 12 cm.

6. **Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:**

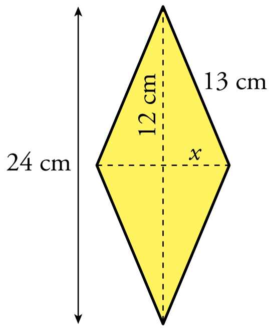
$\overline{OP} = 39$ **cm**

$\overline{PT} = 36$ **cm**



$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15$ cm

7. **De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.**

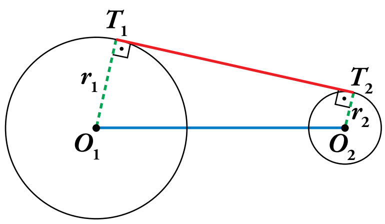


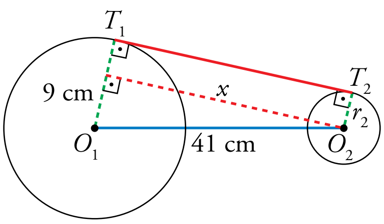
$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

La otra diagonal mide $2 \cdot 5 = 10$ cm.

8. $r_1 = 15$ **cm,** $r_2 = 6$ **cm,** $\overline{O_1O_2} = 41$ **cm.**

Halla la longitud del segmento T_1T_2.

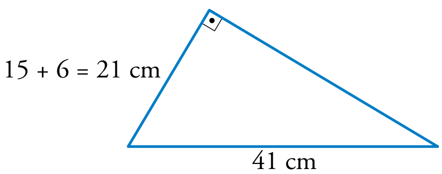




La longitud del segmento T_1T_2 es igual que x:

$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ cm

9. **Halla la longitud del segmento tangente interior común a las dos circunferencias del ejercicio anterior.**



$x = \sqrt{41^2 - 21^2} = \sqrt{1240} \approx 35{,}21$ cm

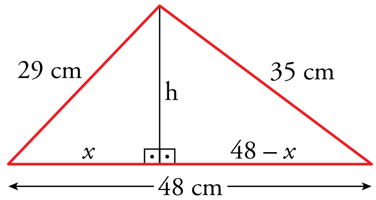
4 Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras

Página 190

1. Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

$29^2 + 35^2 = 2\,066$; $48^2 = 2\,304$

Como $48^2 > 29^2 + 35^2$, el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + h^2 = 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 = 35^2 \end{array}\right\} \text{ Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

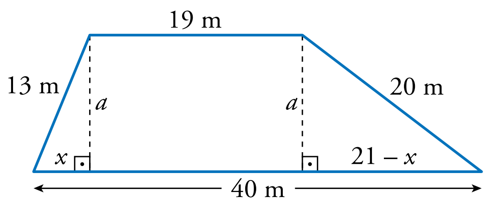
Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 20$ cm.

Calculamos h:

$20^2 + h^2 = 29^2 \rightarrow h = 21$ cm

La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

2. Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 = 20^2 \end{array}\right\}$$

Restando: $x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 5$ m.

Ahora se obtiene el valor de a: $a^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow a = 12$ m

La altura del trapecio mide 12 m.

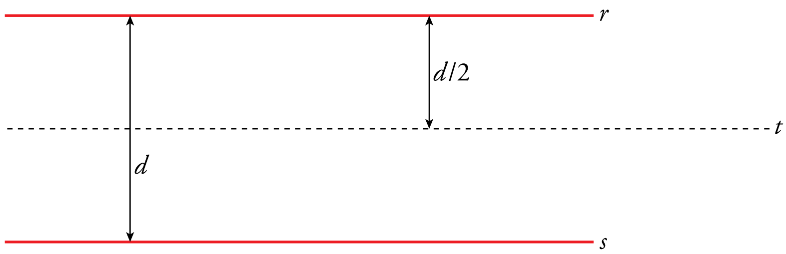
5 Lugares geométricos

Página 191

1. Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

La circunferencia de centro C y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a C es 8 cm: $\overline{CP}$ = 8 cm.

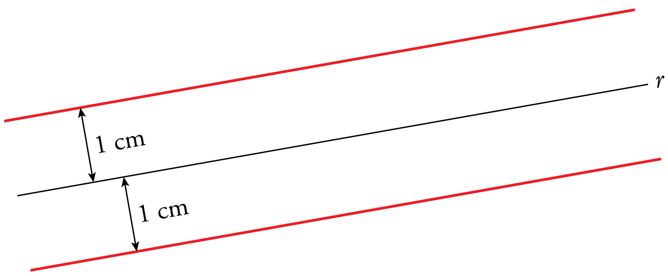
2. Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.



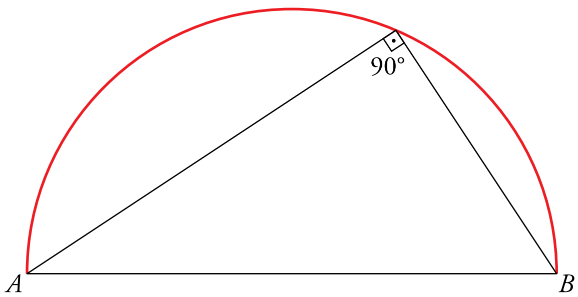
La recta t es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s.

A la recta t se la llama **paralela media** a r y s.

3. Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).



4. Dibuja una circunferencia de diámetro AB. Defínela como lugar geométrico (arco capaz de 90°).



La circunferencia de diámetro AB (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°. Se llama arco capaz de 90° para el segmento AB.

6 Las cónicas como lugares geométricos

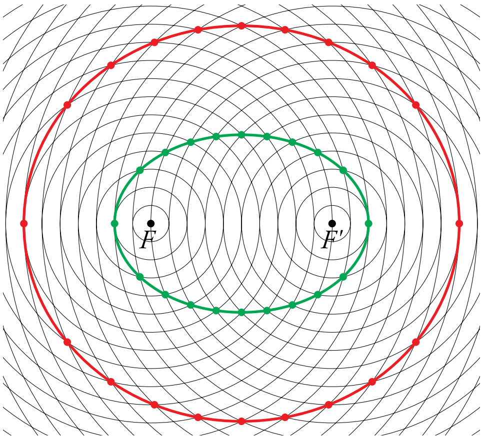
Página 193

1. **Toma una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:**

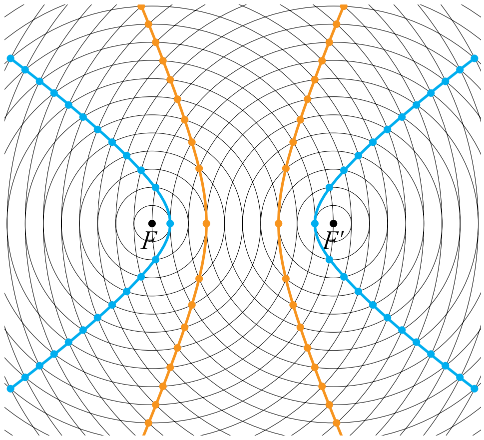
a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

a)



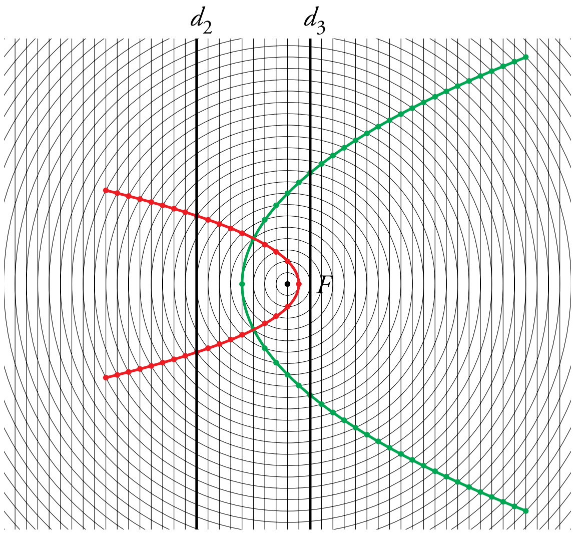
b)



2. **Toma una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:**

a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

b) Una parábola de foco F y directriz d_3.



7 Áreas de los polígonos

Página 194

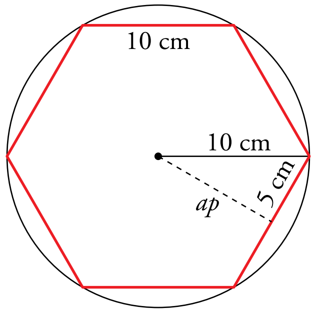
1. Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

Perímetro = p = 10 + 17 + 21 = 48 m; $s = \dfrac{48}{2} = 24$ m

$A = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ m}^2$

2. Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

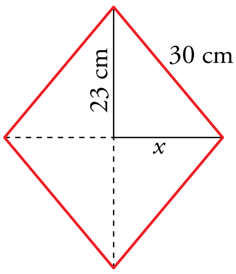


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66$ cm

$A = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$

3. Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.



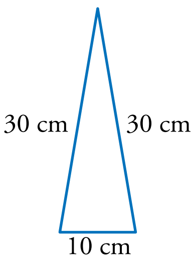
Lado = 3 dm = 30 cm

$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19,26$ cm

La otra diagonal mide 2 · 19,26 = 38,52 cm

$A = \dfrac{46 \cdot 38,52}{2} = 885,96 \text{ cm}^2$

4. Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.



Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm, el otro no podría medir 30 cm.

(10 + 10 = 20 < 30)

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = 30 \cdot 2 + 10 = 70$ cm

$s = 35$ cm

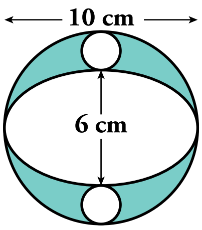
$A = \sqrt{35 \cdot (35-30)^2 \cdot (35-10)} \approx 147,9 \text{ cm}^2$

8 Áreas de figuras curvas

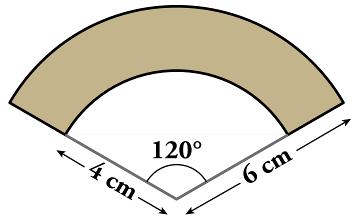
Página 195

1. Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

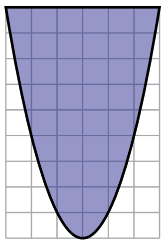
a)



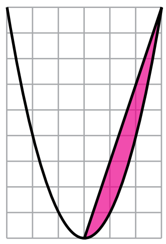
b)



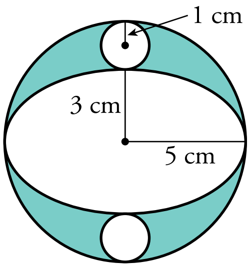
c)



d)



a)



$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 5^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78,54 - 2 \cdot 3,14 - 47,12 = 25,14 \text{ cm}^2$

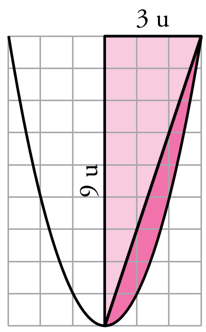
b) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} \approx 20,94 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ u}^2$

d) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ u}^2$

$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 36 \text{ u}^2$ (según el ejercicio anterior)

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{36}{2} - 13,5 = 4,5 \text{ u}^2$



Ejercicios y problemas

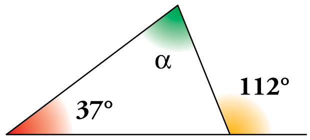
Página 198

Practica

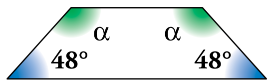
Ángulos

1. **Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:**

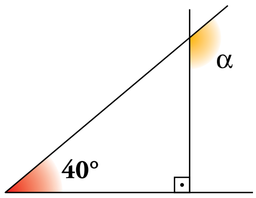
a)



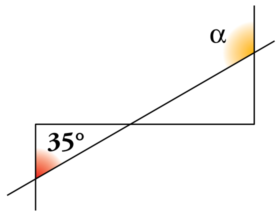
b)



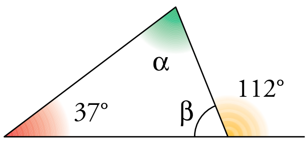
c)



d)



a)

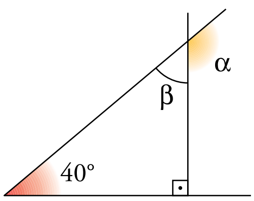


$\beta = 180° - 112° = 68°$

$\alpha = 180° - 37° - 68° = 75°$

b) $2\alpha = 360° - 48° \cdot 2 \rightarrow \alpha = 132°$

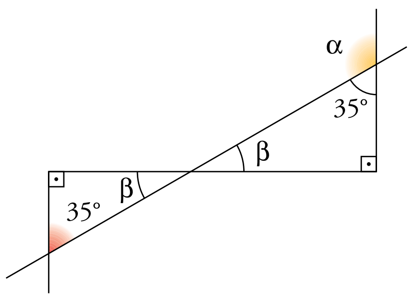
c)



$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$

$\alpha = 180° - 50° = 130°$

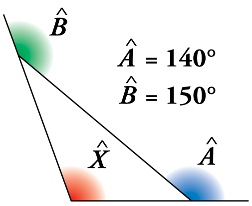
d)



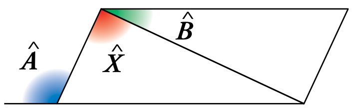
$\alpha = 180° - 35° = 145°$

2. **Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:**

a)

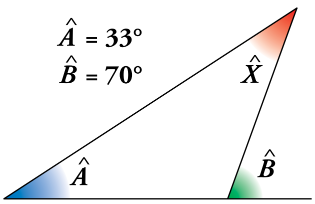


b)

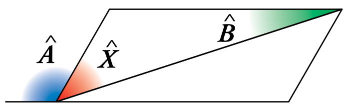


$\hat{A} = 115°$
$\hat{B} = 25°$

c)



d)

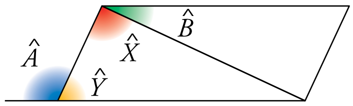


$\hat{A} = 120°$
$\hat{B} = 18°$

a) $\hat{A} = 140° \rightarrow 180° - 140° = 40°$; $\hat{B} = 150° \rightarrow 180° - 150° = 30°$;

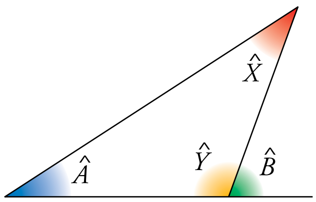
$\hat{X} = 180° - 40° - 30° = 110°$

b)



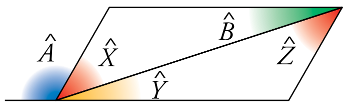
$\hat{Y} = 180° - 115° = 65°$; $\hat{Z} = 180° - 25° - 65° = 90°$; $\hat{X} = \hat{Z} = 90°$

c)



$\hat{Y} = 180° - 70° = 110°$; $\hat{X} = 180° - 110° - 33° = 37°$

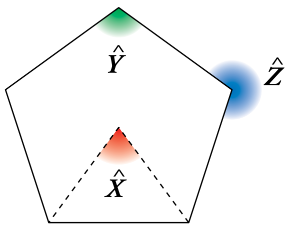
d)



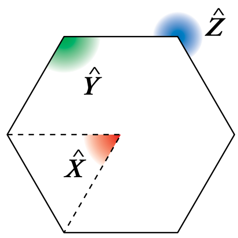
$\hat{X} + \hat{Y} = 180° - 120° = 60°$; $\hat{B} + \hat{Z} = 60° \rightarrow \hat{Z} = 60° - 18° = 42°$; $\hat{X} = \hat{Z} = 42°$

3. **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

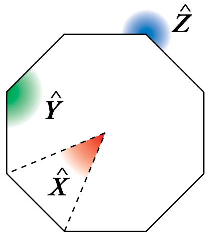
a)



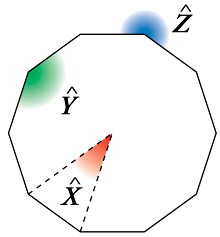
b)



c)

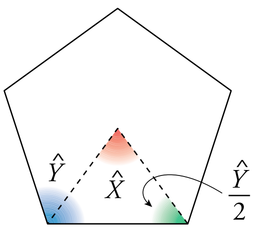


d)



a) $\hat{X}$ es un ángulo central del pentágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.



$$\frac{\widehat{Y}}{2} + \frac{\widehat{Y}}{2} + \hat{X} = 180°$$

$$\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 72° = 108°$$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 360° - 108° = 252°$

b) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$\hat{Y} = \dfrac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$

$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

c) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

$\hat{Y} = \dfrac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$

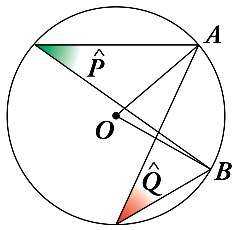
$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

d) $\hat{X}$ es un ángulo central del decágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{10} = 36°$.

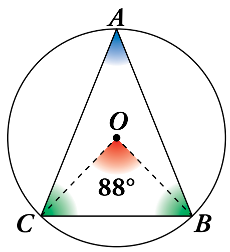
$\hat{Y} = \dfrac{180° \cdot (10-2)}{10} = 144°$; $\hat{Z} = 360° - 144° = 216°$

4. **Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\overset{\frown}{AOB} = 70°$.**



$\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

5. **El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\overset{\frown}{BOC} = 88°$.

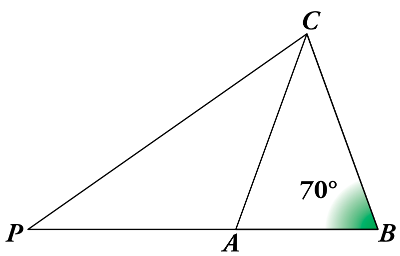
$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

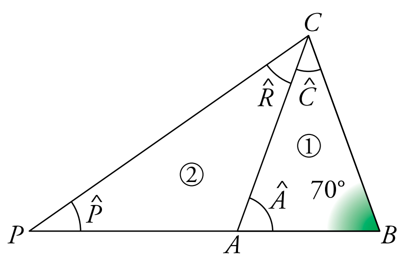
$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman $180°$ y $\hat{B} = \hat{C}$.

$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

6. **Sabiendo que $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{BC}$, $\hat{B} = 70°$, halla el ángulo $\overset{\frown}{PCB}$ en el siguiente triángulo:**





Si $\overline{AC} = \overline{BC}$, el triángulo ABC es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{A} = \hat{B} = 70°$. El otro ángulo mide $\hat{C} = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.

Si $\overline{PA} = \overline{AC}$, el triángulo ACP es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{P} = \hat{R}$. El otro ángulo mide $\hat{Q} = 180° - 70° = 110°$ y, por tanto, $\hat{R} = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$.

Por último, $\overset{\frown}{PCB} = \hat{C} + \hat{R} = 40° + 35° = 75°$.

Semejanza

7. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 1,2.

Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

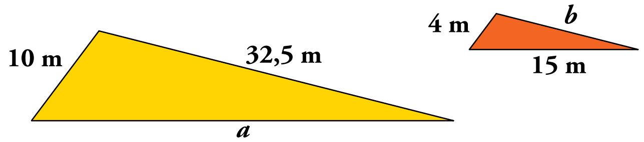
$\overline{AB} = 16$ cm **$\overline{BC} = 25$ cm** **$\overline{AC} = 39$ cm**

$\overline{A'B'} = 1,2 \cdot 16 = 19,2$ cm

$\overline{B'C'} = 1,2 \cdot 25 = 30$ cm

$\overline{A'C'} = 1,2 \cdot 39 = 46,8$ cm

8. Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32,5}{b}$$

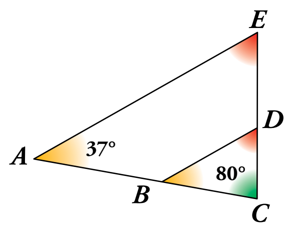
$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \rightarrow 4a = 150 \rightarrow a = 37,5 \text{ m}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{32,5}{b} \rightarrow 10b = 130 \rightarrow b = 13 \text{ m}$$

9. Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6,4$ cm, $\overline{AE} = 18$ cm:

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



Por semejanza de triángulos:

a) $\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6,4}{18} \approx 3,9$ cm

$\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{15}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot 6,4}{18} \approx 5,33$ cm

b) $\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

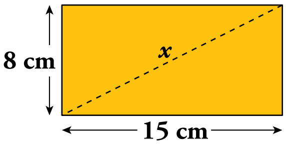
$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

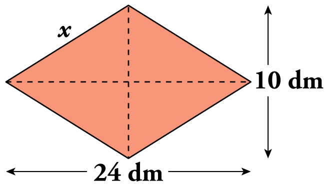
$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

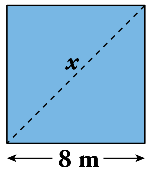
Página 199

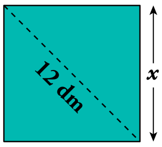
Teorema de Pitágoras

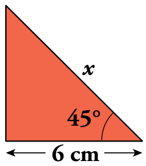
10. **Calcula el valor de x en cada caso:**

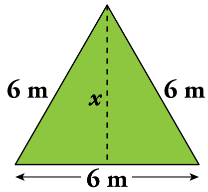
a)


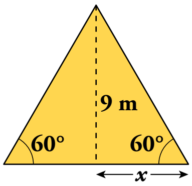
b)


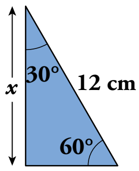
c)


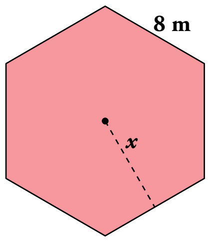
d)


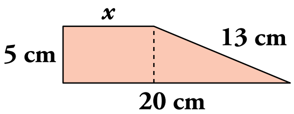
e)


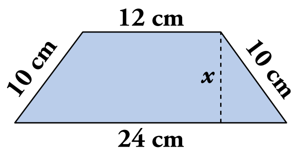
f)


g)


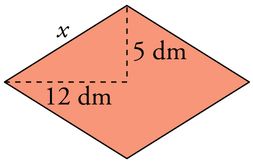
h)


i)


j)


k)


a) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm

b)


$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ dm

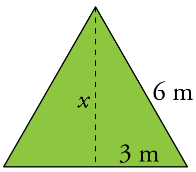
c) $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ m

d) $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow$

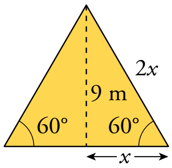
$\rightarrow x = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ dm

e) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro tendrá que medir 45° también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así:

$x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ cm

f)


$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

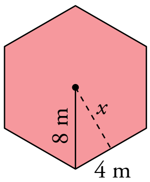
g) 

Como dos de sus ángulos miden 60°, el otro también medirá 60°. Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide x, el lado entero medirá $2x$.

$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow 3x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

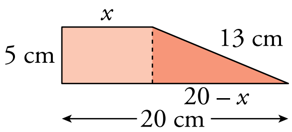
h) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni x, es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm

i) 

Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$ cm

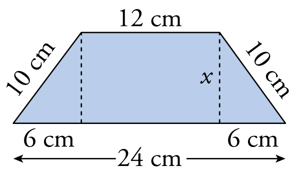
j) 

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 32$ cm, $x = 8$ cm

La solución $x = 32$ cm no tiene sentido, ya que $x < 20$. Por tanto, $x = 8$ cm.

k) 

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

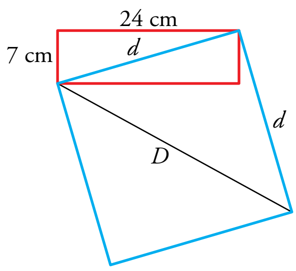
11. **La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro.**

$l \rightarrow$ lado de falta

$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35$ cm

Perímetro $= 2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94$ cm

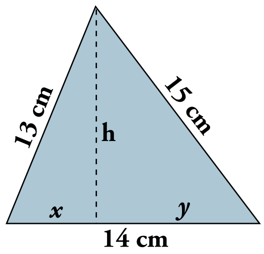
12. **La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.**



$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35{,}36$ cm

13. **Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h, *x* e *y*.**



$y = 14 - x$

$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \end{array}\right\}$ Restando, $x^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - 15^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 196 + 28x - x^2 = -56 \rightarrow x = \dfrac{-56 + 196}{28} = 5$

Por tanto, $x = 5$ cm, $h = \sqrt{169 - 25} = 12$ cm, $y = 14 - 5 = 9$ cm.

14. **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 11 m, 13 m, 20 m. **b) 20 m, 21 m, 29 m.**

c) 25 m, 29 m, 36 m. **d) 7 m, 24 m, 25 m.**

a) $11^2 + 13^2 = 290$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 11^2 + 13^2$, el triángulo es obtusángulo.

b) $20^2 + 21^2 = 841$; $29^2 = 841$

Como $29^2 = 20^2 + 21^2$, el triángulo es rectángulo.

c) $25^2 + 29^2 = 1\,466$; $36^2 = 1\,296$

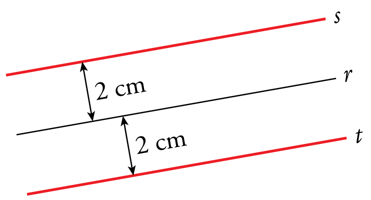
Como $36^2 < 25^2 + 29^2$, el triángulo es acutángulo.

d) $7^2 + 24^2 = 625$; $25^2 = 625$

Como $25^2 = 7^2 + 24^2$, el triángulo es rectángulo.

Lugares geométricos y cónicas

15. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta *r* es de 2 cm? Dibújalo.**

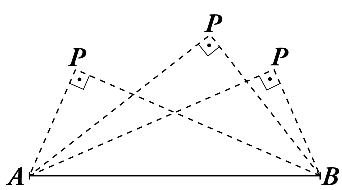


Las rectas *s* y *t* son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta *r* es de 2 cm.

Las rectas *s* y *t* son paralelas a *r*, cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de *r*.

16. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?**

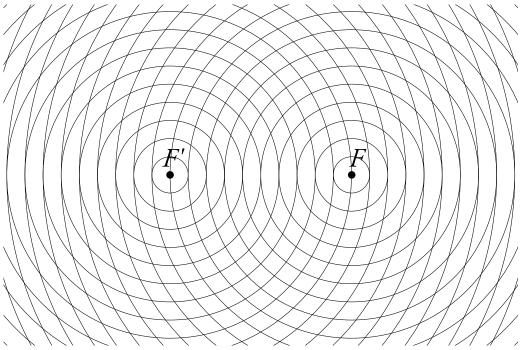
La circunferencia de centro el punto medio de $\overline{AB}$ (exceptuando los puntos *A* y *B*) es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto.

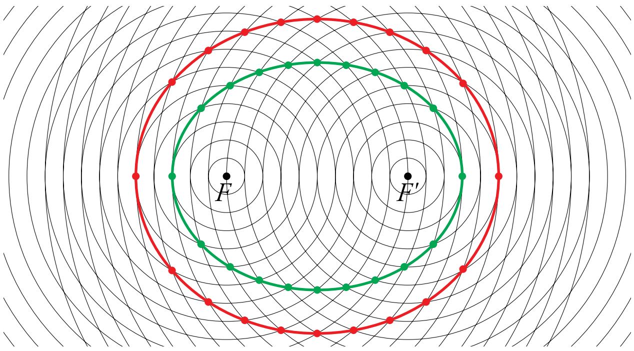


17. **Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.**

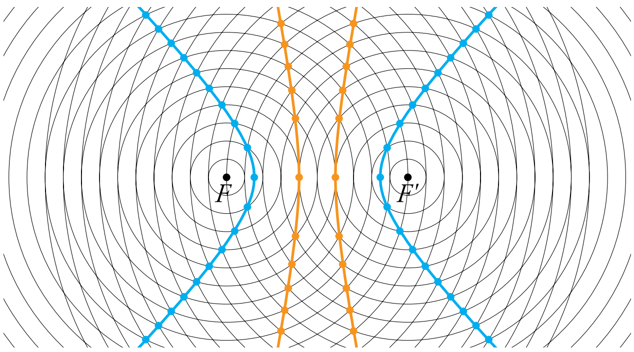
El circuncentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus vértices. El incentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

18. **Utiliza una trama como la siguiente para dibujar dos elipses de focos F y F' y constantes $d_1 = 16$ y $d_2 = 20$, (tomando como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).**

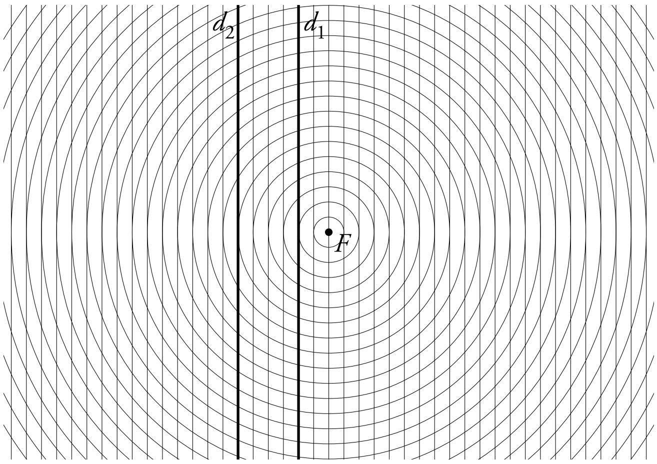


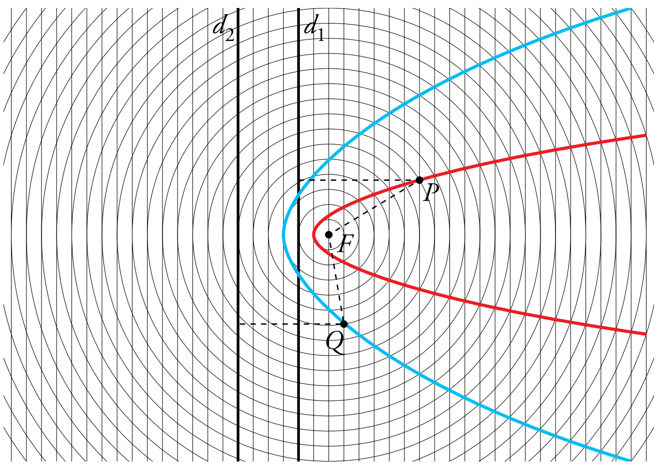


19. **En una trama como la del ejercicio anterior, dibuja dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d_1 = 2$ y $d_2 = 7$.**



20. **Utiliza esta trama para dibujar dos parábolas de foco F y de directrices d_1 y d_2.**





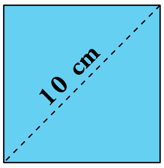
La parábola roja tiene como directriz d_1 y la azul tiene como directriz d_2.

Página 200

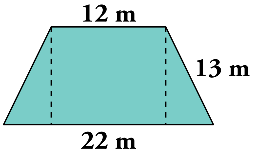
Áreas

21. **Halla el área de la parte coloreada:**

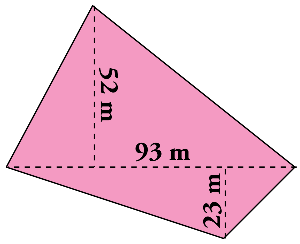
a)



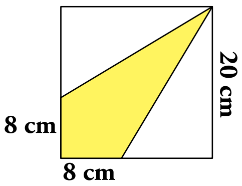
b)



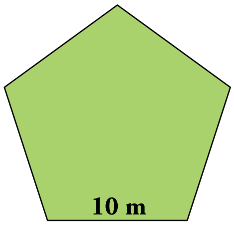
c)



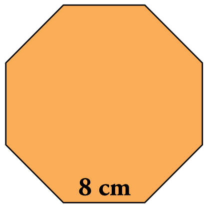
d)



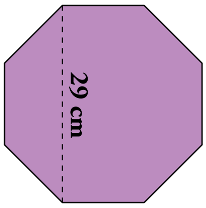
e)



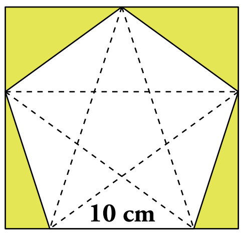
f)



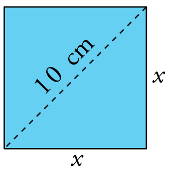
g)



h)



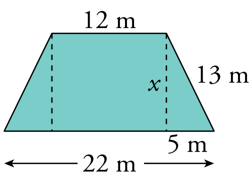
a)



$x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm

$A = 7{,}1^2 = 50 \text{ cm}^2$

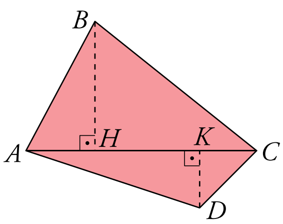
b)



$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

$A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 12 = 192 \text{ m}^2$

c)



$A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069{,}5 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5 \text{ m}^2$

d) $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160 \text{ cm}^2$

e) $a = 0{,}6882 \cdot 10 = 6{,}882$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado d), de la página 196).

Por tanto, el área del pentágono es $A = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}882}{2} = 172{,}05$ cm^2.

f) $a = 1{,}2071 \cdot 8 = 9{,}6568$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado e), de la página 197).

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 9{,}6568}{2} \approx 309{,}02$ cm^2.

g) Imaginemos que el octógono está inscrito en un cuadrado de 29 cm de lado, y llamaremos x a la medida del lado del octógono. Utilizando el resultado del ejercicio resuelto 2 de la página 197, $x = \dfrac{29}{\sqrt{2} + 2} \approx 8{,}49$ cm.

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, $a = 1{,}2071 \cdot 8{,}49 \approx 10{,}2483$ cm.

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8{,}49 \cdot 10{,}2483}{2} \approx 348{,}03$ cm^2.

h) El pentágono es el mismo que el del apartado e), su área es 172,05 cm^2. Vamos a calcular el área del cuadrado exterior y las restaremos.

La diagonal del pentágono regular es igual a Φl. Por tanto, $d = \dfrac{(1 + \sqrt{5}) \cdot 10}{2} \approx 16{,}18$ cm.

Elegimos el triángulo isósceles que tiene como base la del pentágono y como lados iguales dos de las diagonales del pentágono, y calculamos su altura: $h = \sqrt{16{,}18^2 - 5^2} \approx 15{,}39$ cm.

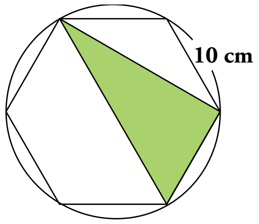
Esta altura coincide con el lado del cuadrado, cuya área será:

$A_{\text{CUADRADO}} = 15{,}39^2 = 236{,}85$ cm^2

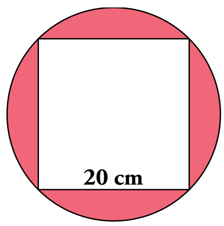
Por tanto, el área de la parte coloreada es $A = 236{,}85 - 172{,}05 = 64{,}8$ cm^2.

22. **Halla las áreas de las siguientes figuras coloreadas:**

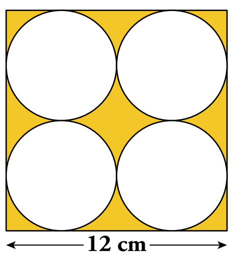
a)



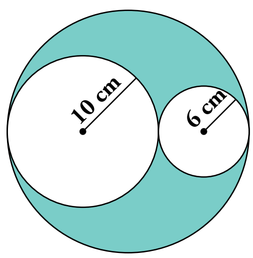
b)



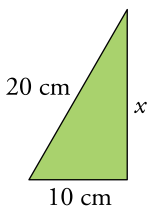
c)



d)



a) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:



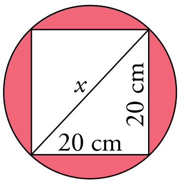
hipotenusa $= 2 \cdot 10 = 20$ cm

un cateto $= 10$ cm

$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}32$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{10 \cdot 17{,}32}{2} = 86{,}6$ cm^2

b)



$x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28,28$ cm

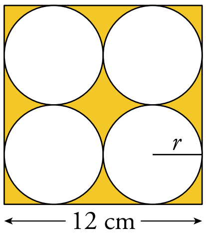
radio $= \dfrac{x}{2} = 14,14$ cm

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14,14^2 \approx 628,13 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 628,13 - 400 = 228,13 \text{ cm}^2$

c)



$r = \dfrac{12}{4} = 3$ cm

$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28,27 = 30,92 \text{ cm}^2$

d) El diámetro del círculo grande mide $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$ cm.

Su radio medirá $\dfrac{32}{2} = 16$ cm.

$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804,25 \text{ cm}^2$

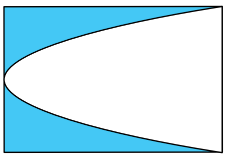
$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314,16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113,1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 804,25 - 314,16 - 113,1 \approx 377 \text{ cm}^2$

23. **Halla el área de cada una de las siguientes figuras coloreadas:**

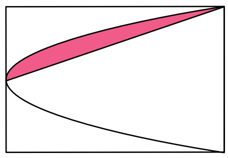
a)



12 cm

18 cm

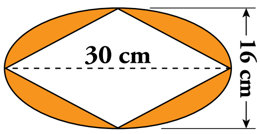
b)



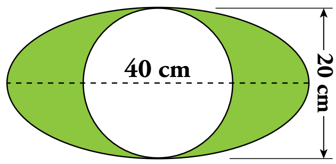
12 cm

18 cm

c)



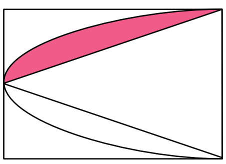
d)



a) Área del segmento de parábola: $A = \dfrac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

Área de la zona coloreada $= 18 \cdot 12 - 144 = 72 \text{ cm}^2$

b) Área de la zona coloreada $= \dfrac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$



12 cm

18 cm

$= \dfrac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18 \text{ cm}^2$

c) Área de la elipse = $\pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi$ cm$^2 \approx 377$ cm^2

Área del rombo = $\dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240$ cm^2

Área total = $120\pi - 240 = 136{,}9$ cm^2

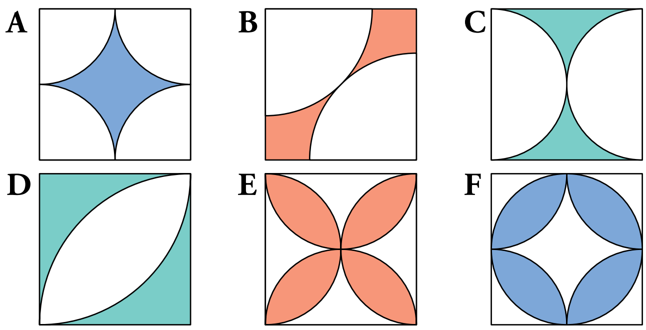
d) Calculamos el área de la elipse: $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 628{,}32$ cm^2

Calculamos el área del círculo: $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16$ cm^2

Obtenemos el área de la figura coloreada restando las áreas anteriores:

$A = 628{,}32 - 314{,}16 = 368{,}16$ cm^2

24. **Estos cuadrados tienen 1 m de lado. Calcula (en cm^2) el área de la parte coloreada:**



$A_{\text{CUADRADO}} = 100^2 = 10\,000$ cm^2

Figura A

$A_{\text{1/4 DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{4}$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 4 \cdot \dfrac{7\,854}{4} = 2\,146$ cm^2

Figura B

Calculamos la diagonal del cuadrado, $d = \sqrt{100^2 + 100^2} \approx 141{,}42$ cm

El radio de las circunferencias es $\dfrac{141{,}42}{2} = 70{,}71$ cm.

$A_{\text{1/4 DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 70{,}71^2 \approx \dfrac{15\,707{,}66}{4}$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{15\,707{,}66}{4} = 2\,146{,}17$ cm^2

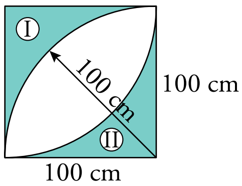
Figura C

El radio de las circunferencias es 50 cm.

$A_{\text{1/2 CÍRCULO}} = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{2}$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{7\,854}{2} = 2\,146$ cm^2

Figura D



$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4}\ \pi \cdot 100^2 \approx 7\,854 \text{ cm}^2$

$A_{\text{I}} = A_{\text{II}} = 10\,000 - 7\,854 \approx 2\,146 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 2\,146 = 4\,292 \text{ cm}^2$

Figura E

El área de la parte coloreada de la figura C es la mitad del área de las partes blancas de esta figura. Por tanto, $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot 2\,146 = 5\,708 \text{ cm}^2$

Figura F

La parte coloreada de la figura A es la parte blanca del centro de esta figura.

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 50^2 \approx 7\,854 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 7\,854 - 2\,146 = 5\,708 \text{ cm}^2$

25. Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

a) 90° **b) 120°** **c) 65°** **d) 140°**

a) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 90° \approx 176{,}71 \text{ cm}^2$

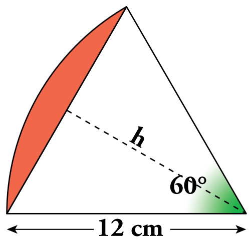
b) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 120° \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 65° \approx 127{,}63 \text{ cm}^2$

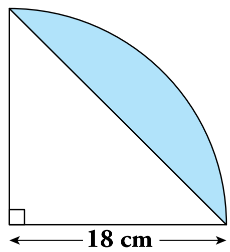
d) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 140° \approx 274{,}89 \text{ cm}^2$

26. Calcula el área de los siguientes segmentos circulares:

a)



b)



a) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60°}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$

Altura del triángulo equilátero: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 75{,}4 - 62{,}4 = 13 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254{,}5 - 162 = 92{,}5 \text{ cm}^2$

27. **Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.**

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

d) 48 m, 140 m y 148 m.

a) $51^2 + 68^2 = 7\,225 = 85^2$

$$A = \frac{51 \cdot 68}{2} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

$$A = \sqrt{102 \cdot 51 \cdot 34 \cdot 17} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

b) $110^2 + 264^2 = 81\,796 = 286^2$

$$A = \frac{110 \cdot 264}{2} = 14\,520 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{330 \cdot 220 \cdot 66 \cdot 44} = 14\,520 \text{ m}^2$$

c) $72^2 + 135^2 = 23\,409 = 153^2$

$$A = \frac{72 \cdot 135}{2} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

$$A = \sqrt{180 \cdot 108 \cdot 45 \cdot 27} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

d) $48^2 + 140^2 = 21\,904 = 148^2$

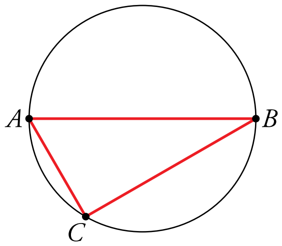
$$A = \frac{48 \cdot 140}{2} = 3\,360 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{168 \cdot 120 \cdot 28 \cdot 20} = 3\,360 \text{ m}^2$$

Página 201

Piensa y resuelve

28. **Dibuja un triángulo *ABC* inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices *A* y *B* sean extremos de un diámetro y el arco $\overset{\frown}{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\overset{\frown}{AC} = 60° \rightarrow \hat{B} = 30°$

$\overset{\frown}{AB} = 180° \rightarrow \hat{C} = 90°$

$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$

29. **Se llama triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área enteros ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área enteros). El nombre de triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.**

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de los que conocemos sus lados:

a) 13 cm, 14 cm, 15 cm (comprueba que es 84 cm²).

b) 5 m, 5 m, 6 m.

c) 13 dm, 20 dm, 21 dm.

d) 25 cm, 34 cm, 39 cm.

Fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s es la mitad de su perímetro.

a) $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ cm

$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ cm}^2$

b) $s = \dfrac{5+5+6}{2} = 8$ m

$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}^2$

c) $s = \dfrac{13+20+21}{2}$) 27 dm

$A = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126 \text{ dm}^2$

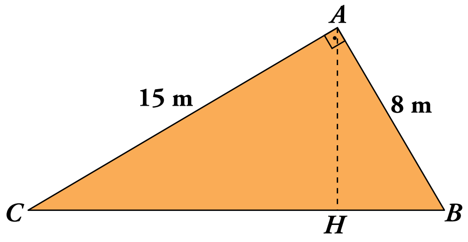
d) $s = \dfrac{25+34+39}{2} = 49$ cm

$A = \sqrt{49(49-25)(49-34)(49-39)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ cm}^2$

30. **El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, y AH es la altura sobre la hipotenusa.**

a) Demuestra que los triángulos ABH y AHC son semejantes.

b) Calcula las longitudes $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$.



a) Los triángulos ABC y ABH son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{B}$ en común y son rectángulos.

Los triángulos ABC y AHC son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{C}$ en común y son rectángulos.

Por tanto, los triángulos ABH y AHC también son semejantes.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

Por ser $\widehat{AHB}$ semejante a $\widehat{CAB}$:

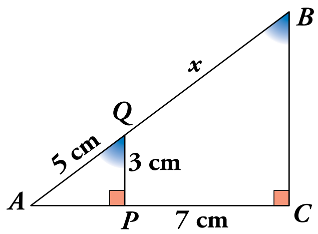
$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \to \overline{HB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}} = \frac{8^2}{17} = \frac{64}{17} \approx 3{,}76 \text{ cm}$$

Por ser $\widehat{AHC}$ semejante a $\widehat{BAC}$:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \to \overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{17} = \frac{225}{17} \approx 13{,}24 \text{ cm}$$

31. **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) Son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ en común y son los dos rectángulos. Como tienen dos ángulos iguales, el tercero también es igual.

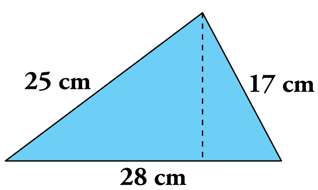
b) Calculamos $\overline{AP}$ por Pitágoras:

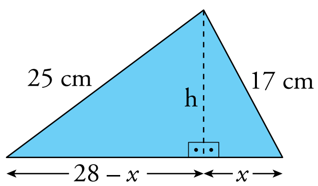
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \to \frac{7+4}{4} = \frac{5+x}{5} \to x = 8{,}75 \text{ cm}$$

32. **Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.**

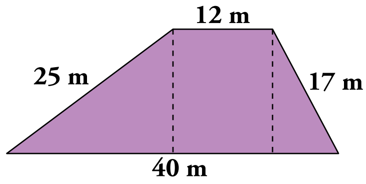


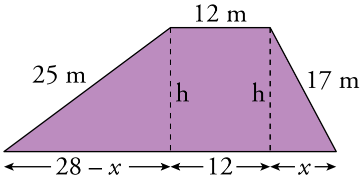


$$\left.\begin{aligned} h^2 + x^2 &= 17^2 \\ (28 - x)^2 + h^2 &= 25^2 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 8 \text{ cm} \\ h &= 15 \text{ cm} \end{aligned}\right\}$$

$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$

33. **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**





$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ m} \\ h = 15 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

34. **Halla el radio de un arco de 100,48 m de longitud y 72° de apertura ($\pi = 3{,}14$).**

Calculamos la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{360°} = \frac{100{,}48}{72°} \rightarrow l = 502{,}4 \text{ m}$$

Hallamos el radio: $2\pi r = 502{,}4$ m

Así, $r = \dfrac{502{,}4}{2\pi} = 79{,}96$ m

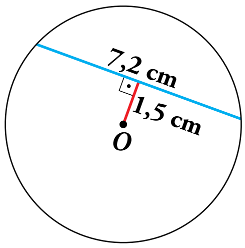
35. **Calcula la medida, en grados, de un arco que mide 31,4 cm correspondiente a una circunferencia de 471 cm de longitud ($\pi = 3{,}14$).**

$$l_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot r = 471 \rightarrow r = \frac{471}{2\pi} = 75 \text{ cm}$$

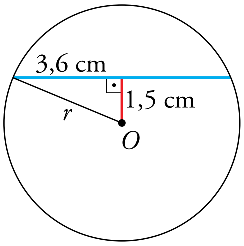
$$l_{\text{ARCO}} = \frac{2\pi \cdot 75}{360°} \cdot (\text{APERTURA}) = 3{,}14 \rightarrow \text{APERTURA} = 24°$$

36. **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

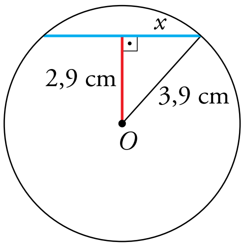


a)



$$r = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9 \text{ cm}$$

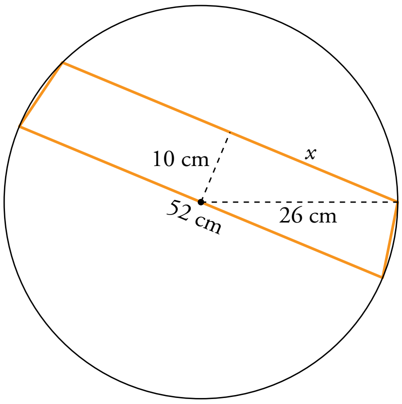
b)



$$x = \sqrt{3{,}9^2 - 2{,}9^2} = \sqrt{6{,}8} \approx 2{,}6 \text{ cm}$$

La longitud de la cuerda será $2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$ cm

37. **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$26^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow 676 = 100 + x^2 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$ cm

La base menor mide $24 \cdot 2 = 48$ cm

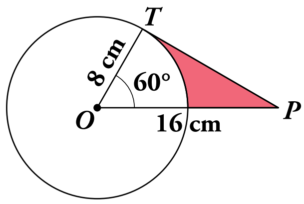
$$\text{Área} = \frac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$$

Solución: El área del cuadrilátero es de 500 cm^2.

38. **Calcula:**

a) La longitud de *PT*.

b) El área de la parte coloreada.



a) $\overline{PT} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} \approx 13,86$ cm

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360°} \cdot 60° \approx 33,51 \text{ cm}^2$

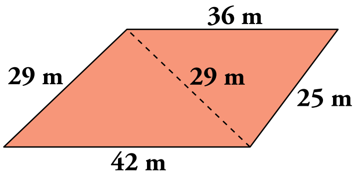
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{8 \cdot 13,86}{2} = 54,24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 54,24 - 33,51 = 20,73 \text{ cm}^2$

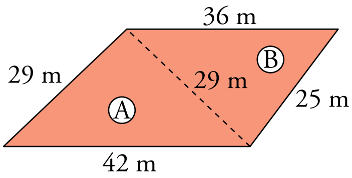
Página 202

Resuelve problemas

39. **Una finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**



Aplicamos la fórmula de Herón:



$$s_{Ⓐ} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

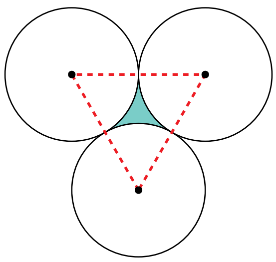
$$A_{Ⓐ} = \sqrt{50\,(50-29)^2\,(50-42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

$$s_{Ⓑ} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

$$A_{Ⓑ} = \sqrt{45\,(45-29)\,(45-36)\,(45-25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

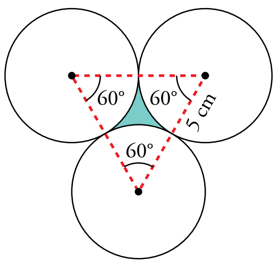
$$A_{\text{FINCA}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$$

40. **Calcula el área del recinto que tiene Sara para sembrar, es el que está entre los tres depósitos de agua cilíndricos de 5 m de radio que ha puesto su padre en el jardín.**



Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de 60°.

$$A_{\text{SECTOR } 60°} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 60° \approx 13{,}09 \text{ cm}^2$$

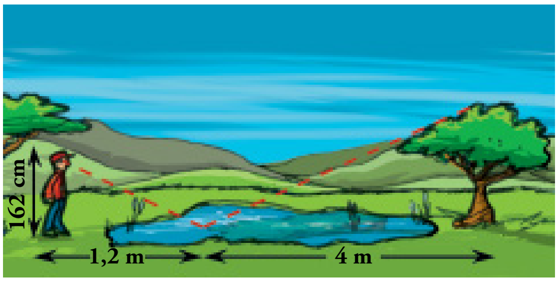


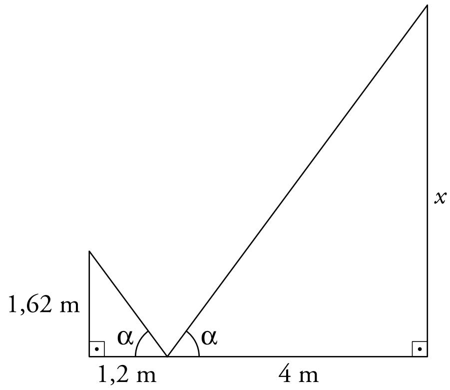
Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$$s = \frac{30}{2} = 15 \rightarrow A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43{,}3 - 3 \cdot 13{,}09 = 4{,}09 \text{ cm}^2$$

41. **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**

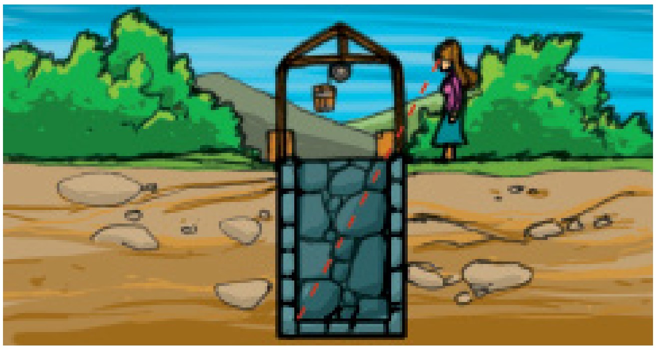


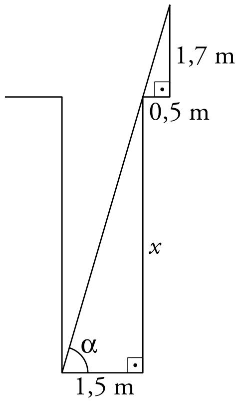


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{1,2} = \frac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4 \text{ m}$$

42. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**



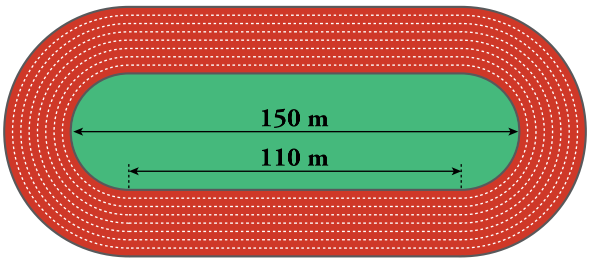


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1 \text{ m}$$

43. **Se quiere renovar con material sintético, que cuesta 15 €/m², el piso de una pista de atletismo como la que ves en la figura, compuesta por 8 calles de 1 m de anchura.**

¿A cuánto ascenderá el presupuesto para la compra del material?



$A_{\text{PISTA}} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot (110 \cdot 8) \approx 2\,011,33 \text{ m}^2$

PRESUPUESTO $= 2\,011,33 \cdot 15 \approx 30\,170$ €

44. **¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero cuya sección es un triángulo equilátero de 6 cm de lado?**

El diámetro de la tubería coincidirá con el de la circunferencia inscrita en el triángulo. Esta circunferencia tiene por radio la apotema del triángulo y sabemos que la apotema de un triángulo equilátero es 1/3 de su altura.

$h = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}20$ cm

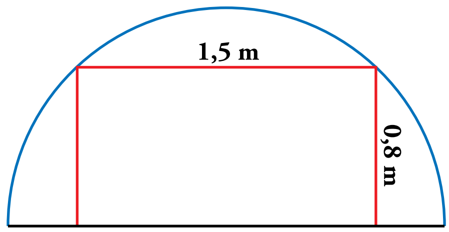
$ap = \frac{1}{3}5{,}20 \approx 1{,}73$ cm

$d = 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$ cm

El diámetro de la tubería es 3,46 cm.

45. **Se va a perforar un túnel semicircular por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alto.**

¿Qué diámetro, como mínimo, debe tener la sección del túnel?



Si dibujamos el círculo completo, tendremos un rectángulo de base 1,5 m y altura $2 \cdot 0{,}8 =$ $= 1{,}6$ m inscrito en él. La diagonal de este rectángulo coincide con el diámetro del círculo.

$d = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}6^2} \approx 2{,}19$ m

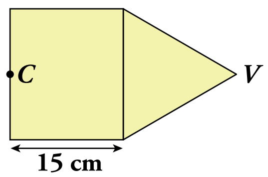
La sección del túnel debe tener, como mínimo, 2,19 m.

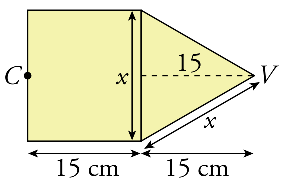
46. **Una antena de telecomunicaciones está sujeta por 4 tirantes de cable. El extremo superior de cada tirante se sujeta a la antena a una altura de 40 m. El extremo inferior está amarrado al suelo a una distancia de 30 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros de cable se han utilizado?**

Cada tirante forma con la antena y el suelo un triángulo rectángulo de catetos, 30 m y 40 m, por lo que la medida de cada uno será: $l = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ m.

Se han utilizado 200 m de cable.

47. **Calcula la superficie que ocupa, cerrado, el sobre que ves en la figura, sabiendo que la solapa es un triángulo equilátero y que si lo cierras, el vértice *V* coincide exactamente con el centro, *C*, del lado opuesto.**





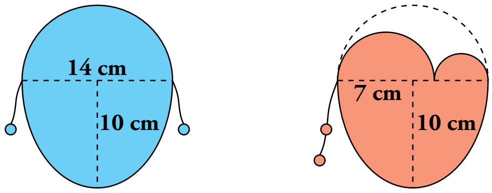
$15^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow 225 = \frac{3}{4}x^2 \rightarrow x = \sqrt{300} \approx 17{,}32$

$S_{\text{SOBRE CERRADO}} \approx 17{,}32 \cdot 15 = 259{,}8 \text{ cm}^2$

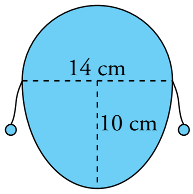
Página 203

Problemas "+"

48. **Halla los radios, x e y, de los dos semicírculos de la figura naranja para que su superficie total sea el 80 % de la superficie de la azul (con los dos circulitos de 1 cm de diámetro incluidos en las dos figuras).**



$A_{1^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



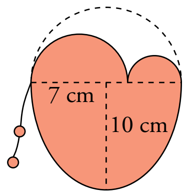
$$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 7}{2} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$$

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \frac{\pi \cdot 7^2}{2} \approx 76{,}97 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}79 \text{ cm}^2$

$A_{1^a \text{ FIGURA}} = 109{,}96 + 76{,}97 + 2 \cdot 0{,}79 = 188{,}51 \text{ cm}^2$

$A_{2^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



$$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2 \qquad A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} = \frac{\pi \cdot y^2}{2}$$

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \frac{\pi \cdot x^2}{2} \qquad A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = 0{,}79 \text{ cm}^2$$

$A_{2^a \text{ FIGURA}} = 0{,}8 \cdot 188{,}51 \approx 150{,}81 \text{ cm}^2$

Por tanto, sabemos que:

$$150{,}81 = 109{,}96 + \frac{\pi \cdot x^2}{2} + \frac{\pi \cdot y^2}{2} + 2 \cdot 0{,}79$$

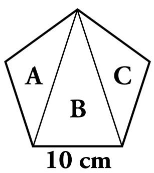
y además sabemos que:

$$2x + 2y = 14$$

Resolvemos el sistema y nos queda $x = 3$, $y = 4$ o $x = 4$, $y = 3$.

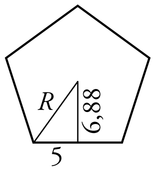
Solución: los radios de los dos semicírculos miden 3 cm y 4 cm.

49. **Calcula el área de cada uno de los tres triángulos en que se ha dividido un pentágono regular de 10 cm de lado por las dos diagonales que salen de un vértice.**



La apotema del pentágono es 0,688 · 10 = 6,88 cm.

Radio del pentágono, $R = \sqrt{5^2 + 6,88^2} \approx 8,5$ cm

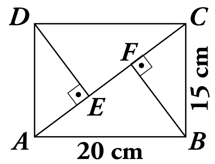


$$A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{B}} \approx \frac{10 \cdot (6,88 + 8,5)}{2} = 76,9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{A}} = A_{\text{C}} \approx \frac{172 - 76,9}{2} = 47,55 \text{ cm}^2$$

50. **Observando esta figura, halla:**



a) El área del triángulo *ABC*.

b) La longitud del segmento *BF* (altura sobre la hipotenusa del triángulo *ABC*).

c) La longitud del segmento *EF*.

Calculamos primero la diagonal *AC* del rectángulo: $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.

a) Aplicamos la fórmula de Herón: $s = \dfrac{20 + 15 + 25}{2} = 30$

$$A = \sqrt{30 \cdot (30 - 20) \cdot (30 - 15) \cdot (30 - 25)} = 150 \text{ cm}^2$$

b) Despejamos la medida de la altura, $\overline{BF}$, de la fórmula del área del triángulo *ABC*:

$$150 = \frac{25 \cdot \text{h}}{2} \rightarrow \text{h} = 12 \text{ cm}$$

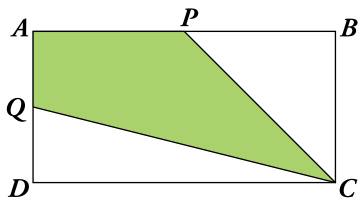
c) Los triángulos *ABC* y *ADC* son iguales, y también lo son sus alturas $\overline{BF}$ y $\overline{DE}$. Sabiendo esto vamos a calcular:

La base del triángulo *DEC* $\rightarrow$ $\overline{EC} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

La base del triángulo *BFC* $\rightarrow$ $\overline{FC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

Por último, $\overline{EF} = \overline{EC} - \overline{FC} = 16 - 9 = 7$ cm

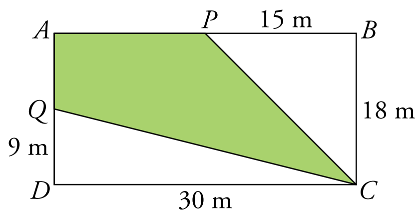
51. **El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.**



Halla el área de la parte coloreada. (*P* y *Q* son los puntos medios de los lados *AB* y *AD*, respectivamente).

Primero hallamos las medidas de la base y la altura del rectángulo. Llamamos x a la altura y $x + 12$ a la base, entonces:

$96 = 2x + 2(x + 12) \rightarrow x = 18$ m $\rightarrow$ La base mide 30 m, y la altura, 18 m.

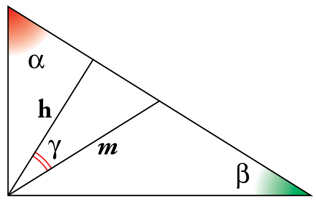


Para averiguar el área de la parte coloreada, calculamos el área de los triángulos rectángulos PBC y QDC y se las restamos al área del rectángulo:

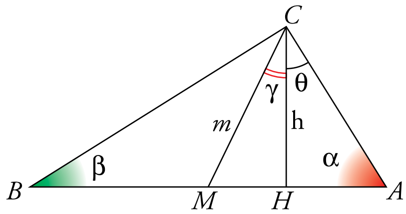
$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ m}^2; \; A_{PBC} = \frac{15 \cdot 18}{2} = 135 \text{ m}^2; \; A_{QDC} = \frac{9 \cdot 30}{2} = 135 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 540 - 2 \cdot 135 = 270 \text{ m}^2$$

52. **Calcula, en este triángulo rectángulo, el ángulo γ que forman la altura, h, y la mediana, *m*, en función de α y β.**



Girando el triángulo hasta hacer coincidir la base con la hipotenusa y añadiendo algunos nombres obtenemos el siguiente dibujo:



El primer resultado que debemos tener en cuenta es que la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la mitad de la hipotenusa; por tanto, los segmentos MC y MA son iguales, lo que supone que el triángulo AMC es isósceles y los ángulos $\gamma + \theta$ y α son iguales.

$$\gamma + \theta = \alpha$$

Por otro lado, en un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes entre sí; por tanto, los triángulos ACH y CBH son semejantes, lo que supone que los ángulos θ y β son iguales.

$$\theta = \beta$$

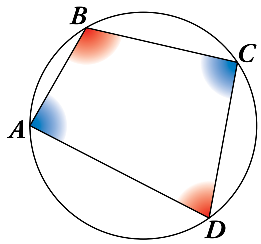
Con estos dos resultados obtenemos lo que nos piden: $\left.\begin{array}{l} \gamma + \theta = \alpha \\ \theta = \beta \end{array}\right\} \to \gamma + \beta = \alpha \to \gamma = \alpha - \beta$

El ángulo γ es la diferencia entre los ángulos α y β.

53. **El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:**

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}, \; \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

$$\hat{C} + \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$



Comprueba de igual forma que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

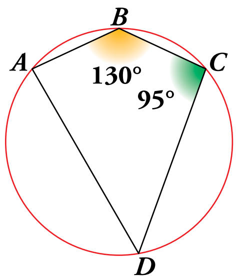
Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}, \; \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} \to \hat{B} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sumen 180°.

54. **Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$.**

(Ten en cuenta el problema anterior).



Teniendo en cuenta el problema anterior, sabemos que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ deben sumar 180°, luego $\hat{A} = 180° - 95° = 85°$.

Haciendo el mismo razonamiento para $\hat{B}$ y $\hat{D}$, $\hat{D} = 180° - 130° = 50°$.

Reflexiona sobre la teoría

55. **¿Qué puedes afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?**

Se puede asegurar que es un triángulo rectángulo, puesto que, el ángulo opuesto al diámetro va a ser siempre recto.

56. **Define como lugar geométrico una circunferencia de centro *O* y radio 5 cm.**

La circunferencia de centro O y radio 5 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es 5 cm: $\overline{OP} = 5$ cm.

57. **¿Cómo se llama el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento *AB* bajo un ángulo de 60°?**

El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento AB bajo un ángulo de 60° se llama arco capaz para AB de 60°.

58. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos es 26 cm es una elipse. Los dos puntos fijos se llaman focos.

59. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm es una hipérbola. Los dos puntos fijos se llaman focos.

60. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?**

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada es una parábola. El punto fijo se llama foco, y la recta, directriz.

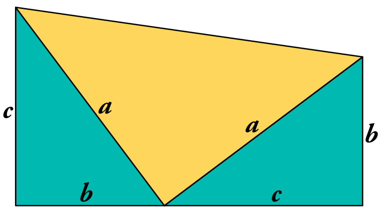
Página 204

Lee y comprende

Una curiosa demostración del teorema de Pitágoras

James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente de Estados Unidos, fue profesor de Lenguas Clásicas, militar y político y, además, aficionado a las matemáticas, como puedes comprobar con esta demostración que publicó en el *New England Journal of Education:*

Se toma un triángulo rectángulo cualquiera apoyado sobre un cateto (b). Se repite el mismo triángulo apoyado sobre el otro cateto (c) y se construye un trapecio, como indica la figura.



Área del trapecio $\rightarrow$ $A = \dfrac{b+c}{2} \cdot (b+c)$

Área del trapecio $\rightarrow$ $A = \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot a}{2}$

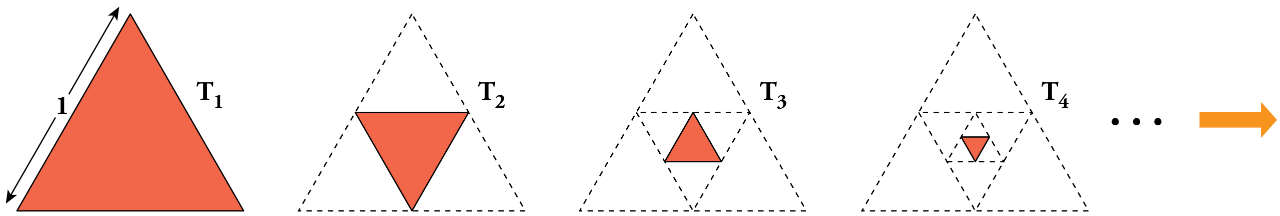
- **Igualando ambas expresiones del área del trapecio se obtiene, simplificando, la expresión del teorema de Pitágoras. Intenta hacerlo tú.**

$$\frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2cb + a^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 + 2cb = 2cb + a^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Generaliza

Observa la siguiente serie de triángulos equiláteros:



- **¿Cuál es la razón de semejanza entre dos triángulos consecutivos? ¿Y la razón de sus áreas?**

Completa la tabla, resolviendo los primeros casos particulares y, después, generalizando:

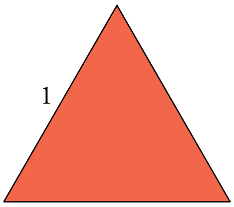
	T_1	T_2	T_3	T_4	…	T_{10}	…	T_n
LADO $\rightarrow l$	1	1/2	1/4	?	…	?	…	?
ÁREA $\rightarrow A$	$\sqrt{3}/4$	?	?	?	…	?	…	?

Para estudiar la sucesión de triángulos, usaremos la fórmula de Herón para calcular el área:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro y a, b y c los lados del triángulo. Así:

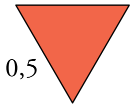
T_1:



$$l_1 = 1 \text{ cm}$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3} \text{ cm}^2$$

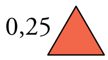
T_2:



$$l_2 = 0{,}5 \text{ cm}$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-0{,}5\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3} \text{ cm}^2$$

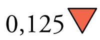
T_3:



$$l_3 = 0{,}25 \text{ cm}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}-0{,}25\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_4:



$$l_4 = 0{,}125 \text{ cm}$$

$$A_4 = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{3}{16}-0{,}125\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^3} \text{ cm}^2$$

Generalizando, tenemos que:

$$l_n = 2^{1-n} \text{ cm} \ \text{ y } \ A_n = \sqrt{3} \cdot 2^{-2n} \text{ cm}^2$$

	T_1	T_2	T_3	T_4	…	T_{10}	…	T_n
LADO → l	**1**	**1/2**	**1/4**	1/8	…	1/512	…	2^{1-n}
ÁREA → A	$\boldsymbol{\sqrt{3}/2^2}$	$\sqrt{3}/2^4$	$\sqrt{3}/2^6$	$\sqrt{3}/2^8$	…	$\sqrt{3}/2^{20}$	…	$\sqrt{3}/2^{2n}$

Página 205

Entrénate resolviendo problemas

- **Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 km. Sin embargo, una rebaja en el precio del gasóleo le supone un ahorro de 0,14 € por kilómetro, lo que le permite realizar un recorrido de 750 km con el mismo gasto.**

¿Cuál fue la cantidad presupuestada para carburante?

En 600 km ahora $0{,}14 \cdot 600 = 84$ €.

Ahora hace 750 km; es decir, $750 - 600 = 150$ km más.

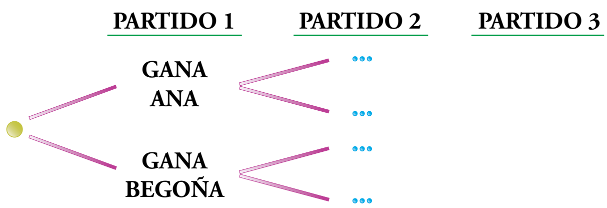
Con 84 € hace 150 km. Ahora, cada kilómetro le cuesta $84 : 150 = 0{,}56$ €.

La cantidad presupuestada es de $750 \cdot 0{,}56 = 420$ €.

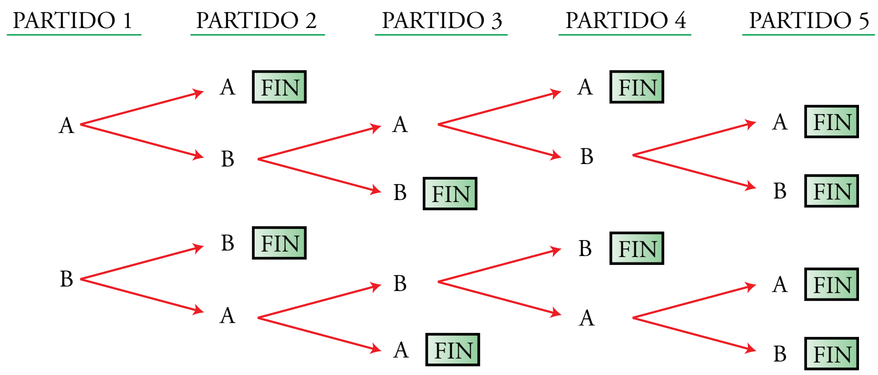
- **Ana y Begoña son las finalistas de un torneo de tenis. Gana el torneo quien venza en dos partidos consecutivos o en tres alternos.**

Averigua todas las posibilidades que pueden darse.

¿Cuántos partidos, como máximo, tendrán que disputar para acabar el torneo?



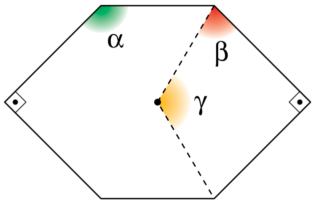
En el siguiente diagrama, A significa “gana Ana” y B significa “gana Begoña”.

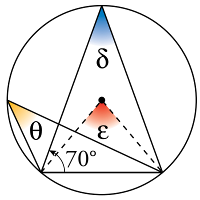


Tiene que disputar, como máximo, 5 partidos.

Autoevaluación

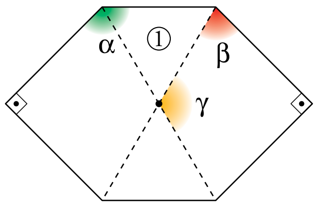
1. Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:





Primera figura

La suma de los ángulos de un hexágono suman 720°. Este que nos ocupa tiene dos ángulos rectos, y los otro cuatro, son iguales. Por tanto: $\alpha = \dfrac{720° - 2 \cdot 90°}{4} = 135°$.

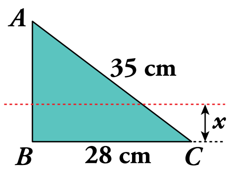


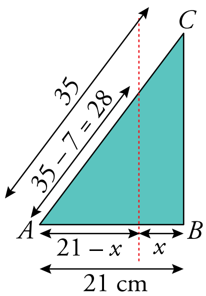
Además, observamos que el triángulo ① es equilátero y, por tanto, sus tres ángulos miden 60°. Con esto tenemos que $\gamma = 180° - 60° = 120°$ y $\beta = 135° - 60° = 75°$.

Segunda figura

Observamos que los tres ángulos pedidos abarcan el mismo arco y que el triángulo del que es ángulo δ, es isósceles. Así: $\delta = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$, $\theta = 40°$ y $\varepsilon = 2 \cdot 40° = 80°$

2. ¿A qué altura, *x*, hay que cortar el triángulo *ABC* para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?





Calculamos el lado desconocido, $\overline{AB} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$ cm.

Si giramos la figura, observamos dos triángulos en posición de Tales, son semejantes:

$$\frac{35}{21} = \frac{28}{21 - x} \rightarrow 735 - 35x = 588 \rightarrow x = \frac{588 - 735}{-35} = 4{,}2$$

Debemos cortar el triángulo a una altura de 4,2 cm.

3. Si vas en avión a 10 000 m de altura y ves un punto en el horizonte, ¿a qué distancia de ti se encuentra el punto? (Radio de la Tierra: 6 371 km).

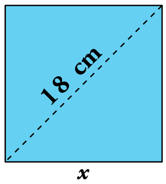
Llamamos x a la distancia pedida y transformamos todas las unidades de medida a kilómetros.

$$x = \sqrt{6\,731^2 - 10^2} \approx 6\,731$$

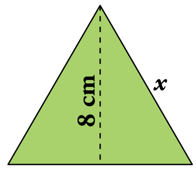
El punto estará a 6 731 km de distancia.

4. **Calcula el valor de x en cada caso:**

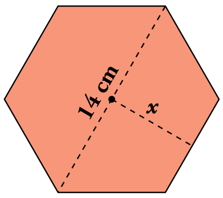
a)



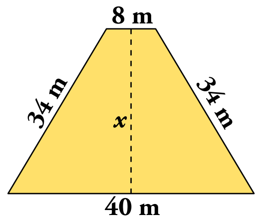
b)



c)



d)



Utilizamos los resultados del ejercicio resuelto 1 de la página 196.

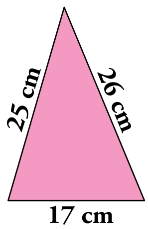
a) $l = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d \to x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 18 \approx 12,73$ cm

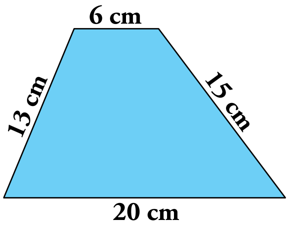
b) $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \to x = \frac{8 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 9,24$ cm

c) $ap = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \to x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \approx 6,06$ cm

d) $x = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ m

5. **Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:**





Triángulo

Utilizamos la fórmula de Herón y la del área del triángulo.

$$s = \frac{25 + 26 + 17}{2} = 34 \text{ cm}$$

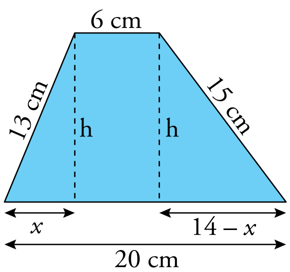
$$A = \sqrt{34 \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 17)} = 204 \text{ cm}^2$$

$$204 = \frac{17 \cdot h}{2} \to h = \frac{204 \cdot 2}{17} = 24 \text{ cm}$$

La altura del triángulo mide 24 cm

Trapecio

Observando la figura planteamos el siguiente sistema y lo resolvemos por igualación:



$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ h^2 = 13^2 - x^2 \end{array}\right\} \to 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2 \to x = 5$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

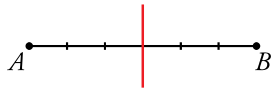
La altura del trapecio mide 12 cm.

6. Dibuja dos puntos, A y B, a 6 cm de distancia.

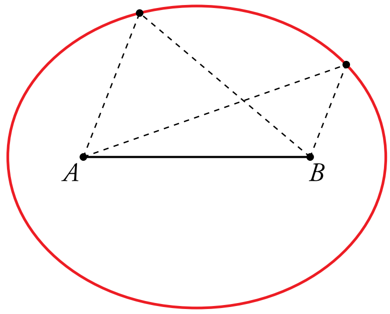
a) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B? Dibújalo.

b) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a A y B es 10 cm? Dibújalo aproximadamente.

a) Es la mediatriz del segmento.

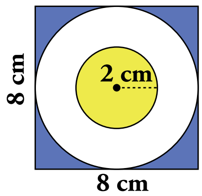


b) Es la elipse de focos A y B.

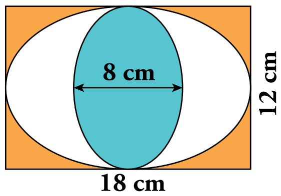


7. Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:

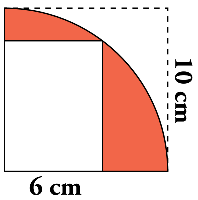
a)



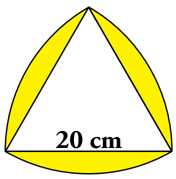
b)



c)



d)



a) $A = 8^2 - \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 64 - 12\pi \approx 26{,}30 \text{ cm}^2$

b) $A = 12 \cdot 18 - \pi \cdot 9 \cdot 6 + \pi \cdot 4 \cdot 6 = 216 - 30\pi \approx 121{,} 75 \text{ cm}^2$

c) Para hallar el área de la parte coloreada calculamos la del cuarto de círculo y le restamos la del rectángulo blanco. Observamos que tanto el radio de la circunferencia como la diagonal del rectángulo miden 10 cm.

$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$$

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm} \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78{,}54 - 48 = 30{,}54 \text{ cm}^2$$

d) El triángulo blanco es equilátero, por lo que todos sus ángulos miden 60°. Calculamos el área del sector ciruclar de 60° y el área del triángulo:

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 60° \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{360°} \approx 209{,}44 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{30 \cdot (30 - 20)^3} \approx 173{,}21 \text{ cm}^2$$

Restamos ambas áreas para obtener una de las partes amarillas de la figura:

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 3 \cdot (209{,}44 - 173{,}21) = 108{,}69 \text{ cm}^2$$

11 Cuerpos geométricos

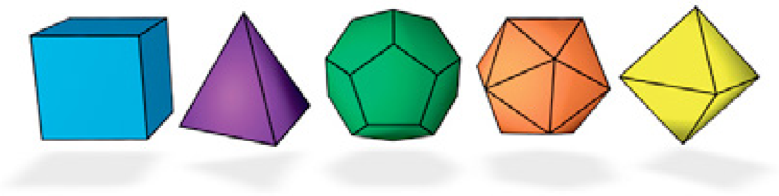
Platón (427 a.C.-347 a.C.)

Fue un filósofo ateniense que se interesó, sobre todo, por la filosofía moral, y consideraba la ciencia como una clase de conocimiento inferior. Le gustaban las matemáticas por sus abstracciones idealizadas y su separación de lo meramente material y, aunque no fueron su especialidad, impulsó su estudio hasta el punto de que, en la entrada de la Academia (especie de universidad ateniense que él fundó) había un letrero que decía “No entre aquí quien no sepa matemáticas”.

Atribuyó a los poliedros regulares, los *sólidos platónicos*, una estrecha relación con el universo: los cielos debían reflejar la perfección de la matemática abstracta en su forma más sencilla.

Platón ejerció una gran influencia en el pensamiento posterior.

Platón conversando con sus alumnos. Mosaico romano encontrado en Pompeya (Italia).



Sólidos platónicos.

Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.)

Fue ingeniero, matemático e inventor. A lo largo de su vida diseñó y construyó multitud de ingenios mecánicos. Y se valió de la experimentación para descubrir propiedades físicas o matemáticas que, después, se esmeraba en probar con rigor.

Gran calculista, dedujo las fórmulas para la obtención de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Y estudió los 13 cuerpos que llevan su nombre, los *sólidos arquimedianos*.

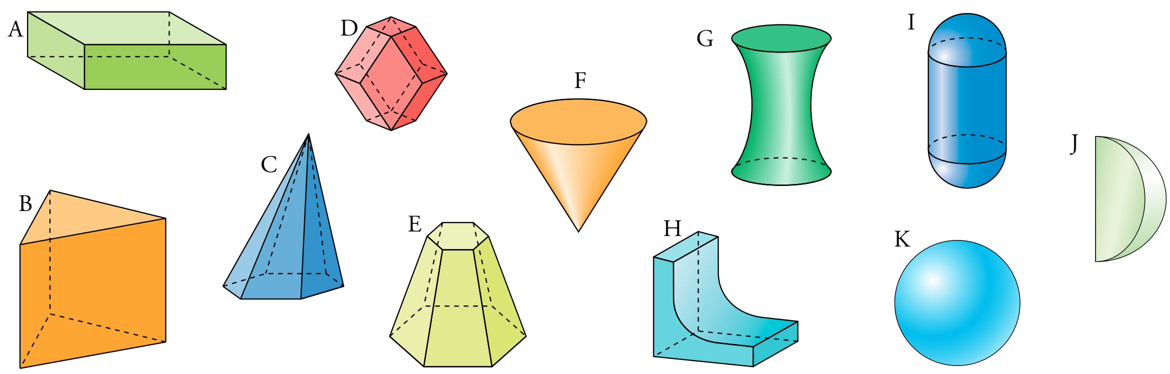
Aunque, posiblemente, su manera de enfocar las matemáticas habría horrorizado a Platón, Arquímedes fue el más grande matemático de la Antigüedad.

Sello italiano en honor a Arquímedes.

Sólidos arquimedianos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

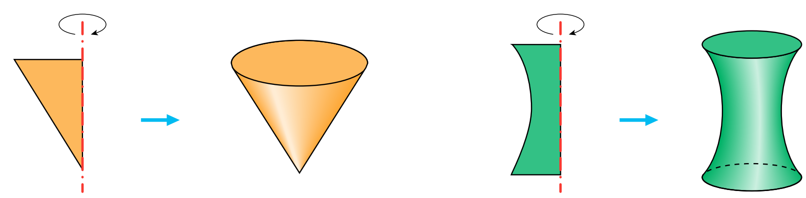
1 Poliedros y cuerpos de revolución



De los once cuerpos geométricos dibujados arriba, los cinco primeros (A, B, C, D, E) son **poliedros.** Se distinguen de los demás en que todas las caras son planas.

Poliedro es un cuerpo geométrico cerrado, limitado por caras planas que son polígonos.

Las figuras geométricas, F, G, I, K son **cuerpos de revolución** porque se pueden generar haciendo girar una figura plana alrededor de un eje. Observa cómo se generan F y G.



Se llama **cuerpo de revolución** al cuerpo geométrico que se genera haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.

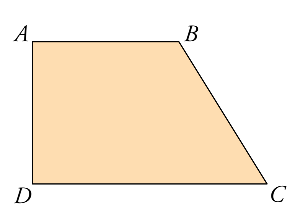
Los restantes cuerpos geométricos (H y J) no son poliedros (sus caras no son todas planas), ni cuerpos de revolución (no se pueden obtener haciendo girar algo alrededor de un eje).

Piensa y practica

1. Describe cada uno de los cinco poliedros de arriba diciendo cómo son sus caras (por ejemplo, el C tiene siete caras, seis de ellas triángulos y una hexágono), cuántas aristas y cuántos vértices tiene.

2. Dibuja cómo se obtienen los cuerpos I y K haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.

3.



Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar este trapecio alrededor de:

a) *AD* b) *AB* c) *CD*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

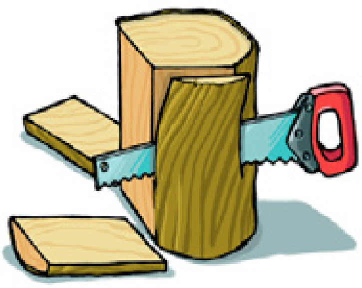
2 Prismas

Recuerda

Prisma regular: Un prisma recto cuya base es un polígono regular, se llama prisma regular. Por ejemplo, *prisma pentagonal regular*.

Etimología

Prisma: Viene del griego, significa *lo que ha sido serrado*, porque las caras laterales del prisma están como serradas.

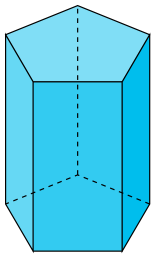


En la web

Prisma: definiciones y desarrollo.

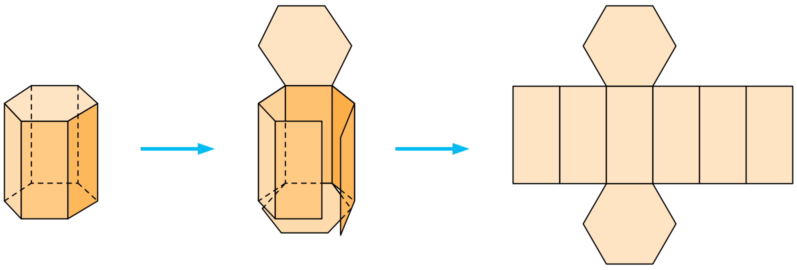
Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos (llamados **bases**) y varios paralelogramos (llamados **caras laterales**). La **altura** del prisma es la distancia entre las bases.

Si las caras laterales son perpendiculares a las bases, entonces son rectángulos. En tal caso, el cuerpo se llama **prisma recto.**



Desarrollo y área de un prisma recto

Si cortamos un prisma recto, lo abrimos y ponemos las caras sobre un plano, se obtiene su desarrollo plano.



El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo cuya base es el perímetro de la base del prisma y su altura es la altura del prisma. Por tanto:

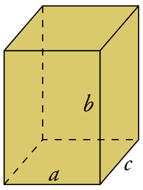
ÁREA LATERAL = Perímetro de la base · Altura

ÁREA TOTAL = Área lateral + 2 · Área de la base

Paralelepípedos. Ortoedros

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos. Sus caras laterales también son paralelogramos.

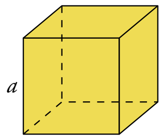
Un paralelepípedo cuyas caras son todas rectángulos se llama **ortoedro.** Un ortoedro queda determinado conociendo las longitudes de las tres aristas que concurren en un vértice. Se llaman las **dimensiones** del ortoedro.



El área de un ortoedro de dimensiones a, b y c es:

ORTOEDRO $A = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

Un **cubo** es un ortoedro en el que las tres dimensiones son iguales. Las seis caras del cubo son cuadrados iguales.

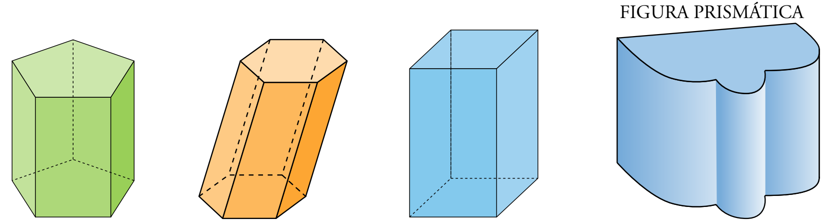


El área de un cubo de arista a es:

CUBO $A = 6a^2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

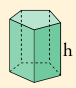
Volumen de un prisma



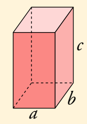
Las **figuras prismáticas** (los prismas entre ellas) tienen dos bases iguales y paralelas entre sí. Su altura es la distancia entre las bases. El volumen de todas ellas es:

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura}$$

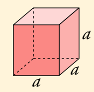
En concreto:



PRISMA $V = A_{base} \cdot h$



ORTOEDRO $V = a \cdot b \cdot c$

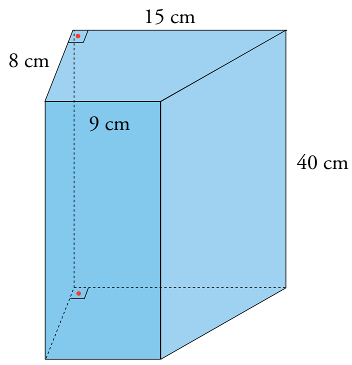


CUBO $V = a^3$

En la web

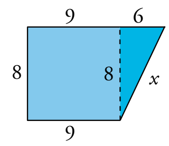
- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de prismas.
- Resuelve el problema "Recipientes 1".

Ejercicio resuelto



Hallar el área total y el volumen del prisma recto dibujado a la izquierda. Sus bases son trapecios rectángulos.

Hallamos el perímetro y el área de la base:



Calculamos la longitud del lado desconocido:

$$x = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

PERÍMETRO DE LA BASE: $P = 9 + 8 + 15 + 10 = 42$ cm

ÁREA LATERAL DEL PRISMA: $A_{LAT} = P \cdot h = 42 \cdot 40 = 1\,680 \text{ cm}^2$

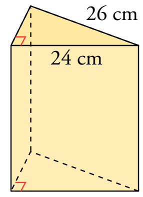
ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = \dfrac{9+15}{2} \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,680 + 2 \cdot 96 = 1\,872 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = A_{BASE} \cdot h = 96 \cdot 40 = 3\,840 \text{ cm}^3$

Piensa y practica

1.



La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 26 cm, y uno de sus catetos, 24 cm. La altura del prisma es 50 cm. Halla el área total y el volumen del prisma.

2. Halla el área total y el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.

3. Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 5 cm y 8 cm.

a) Dibújalo en tu cuaderno.

b) Dibuja su desarrollo. Escribe, al lado de cada arista, su longitud.

c) Halla su área.

d) Halla su volumen.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Pirámides

Etimología

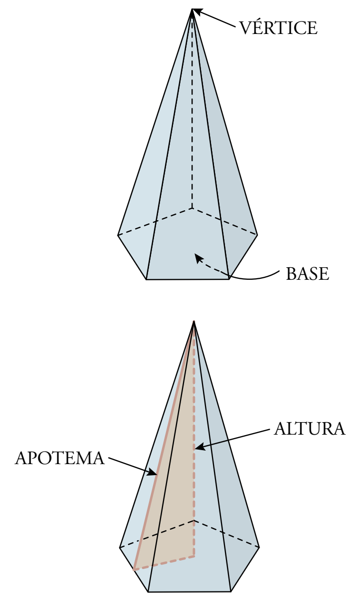
Pirámide: Viene de *pyros*, *fuego*, por ser piramidal la forma de la llama. Y también, por tener esta forma las piras (cosas apiladas para ser quemadas).

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y por **caras laterales,** triángulos con un vértice común (vértice de la pirámide). La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.

Una pirámide es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre su centro.

En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles idénticos. Las alturas de estos triángulos se llaman **apotemas** de la pirámide.

La apotema de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la apotema del polígono de la base.

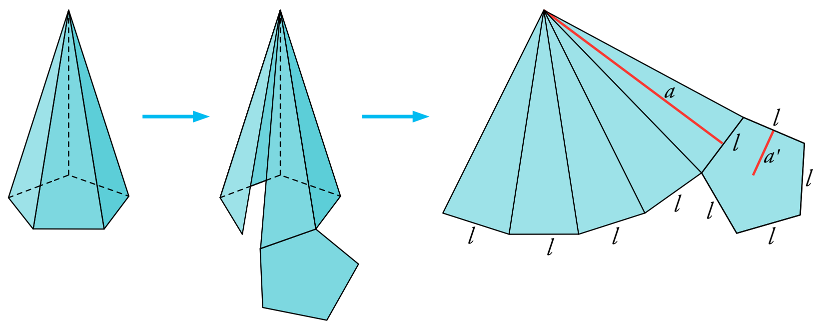


En la web

Pirámide: definiciones y desarrollo.

Desarrollo y área de una pirámide regular

Para ver el desarrollo de una pirámide regular, la cortamos a lo largo de algunas aristas, la abrimos y extendemos sus caras sobre el plano. De esta manera, obtenemos lo siguiente:



Como puedes observar, el área lateral de una pirámide regular no es más que la suma de las áreas de n triángulos iguales, donde n es el número de lados de la base. Por tanto:

ÁREA LATERAL:

$$A_{LAT} = n \cdot \frac{1}{2} l \cdot a = \frac{1}{2}(nl) \cdot a = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2}$$

ÁREA TOTAL:

$$A_{TOTAL} = A_{LAT} + A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} + \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot a'}{2}$$

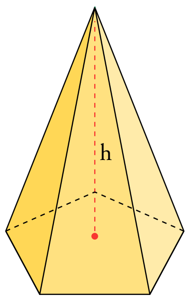
Recuerda

El área de un polígono regular es:

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

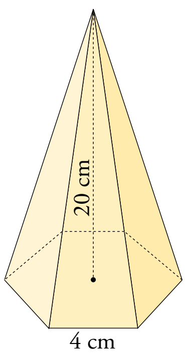
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Volumen de una pirámide



El volumen de una pirámide, regular o no, es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura, h.

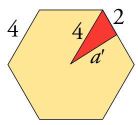
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h$$



Ejercicio resuelto

Hallar el área total y el volumen de una pirámide hexagonal regular en la cual la arista de la base mide 4 cm, y la altura, 20 cm.

CÁLCULO DE LA APOTEMA DE LA BASE



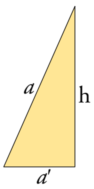
En un hexágono regular, el radio y el lado miden lo mismo. En este caso, 4 cm. El triángulo rojo es rectángulo. Por tanto:

$$a' = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ cm}$$

ÁREA DE LA BASE

$$A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro} \cdot a'}{2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ cm}^2$$

CÁLCULO DE LA APOTEMA DE LA PIRÁMIDE



El triángulo formado por h (altura), a' (apotema de la base) y a (apotema de la pirámide) es rectángulo. a es la hipotenusa. Por tanto:

$$a = \sqrt{h^2 + (a')^2} = \sqrt{20^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{400 + 12} = 20{,}30 \text{ cm}$$

ÁREA TOTAL DE LA PIRÁMIDE

$$A_{TOTAL} = A_{LAT} + A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} + A_{BASE} =$$

$$= \frac{4 \cdot 6 \cdot 20{,}30}{2} + 41{,}52 = 243{,}60 + 41{,}52 = 285{,}12 \text{ cm}^2$$

VOLUMEN

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 41{,}52 \cdot 20 = 276{,}8 \text{ cm}^3$$

En la web

- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de pirámides.
- Resuelve el problema “Recipientes 2”.

Piensa y practica

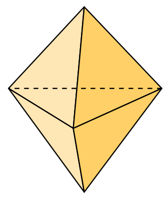
1. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 dm de lado. Su altura, 12 dm. Halla su área y su volumen.

2. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado es la base de una pirámide regular cuya altura es 15 cm. Halla su área y su volumen.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Poliedros regulares

Poliedro no regular

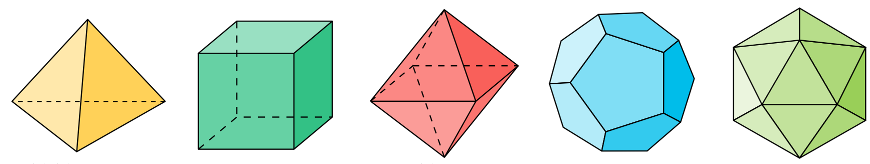


Aunque sus seis caras son triángulos equiláteros idénticos, este poliedro no es regular porque en unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro.

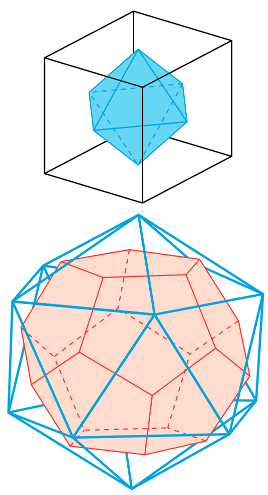
Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple las dos condiciones siguientes:

- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

Solo hay cinco poliedros regulares:



TETRAEDRO 4 caras, triángulos — CUBO o HEXAEDRO 6 caras, cuadrados — OCTAEDRO 8 caras, triángulos — DODECAEDRO 12 caras, pentágonos — ICOSAEDRO 20 caras, triángulos



Poliedros duales

Si unimos los centros de cada dos caras contiguas de un cubo, se forma un octaedro.

Si hiciéramos lo mismo con un octaedro, obtendríamos un cubo.

	Cubo	Octaedro
Caras	6	8
Vértices	8	6
Aristas	12	12

Por eso decimos que el octaedro y el cubo son *poliedros duales.*

Dos **poliedros duales** tienen el mismo número de aristas. Y el número de caras de cada uno de ellos coincide con el de vértices del otro.

Además del cubo y el octaedro, el dodecaedro es dual del icosaedro y el tetraedro es dual de sí mismo.

Piensa y practica

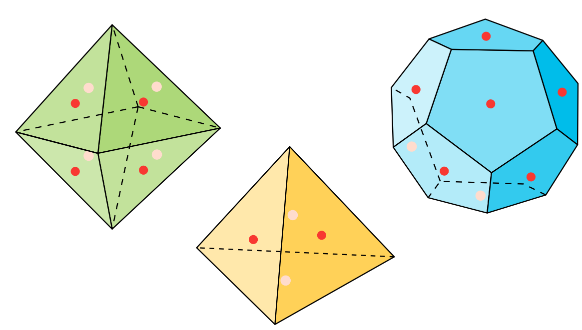
1. Haz una tabla en tu cuaderno en la que aparezcan el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C					
V					
A					

a) A partir de la tabla anterior, comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

b) Comprueba, también, que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

2. Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y en rosa, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.



En la web
- Desarrollo de los cinco poliedros regulares.
- Justificación de que solo hay cinco poliedros regulares.

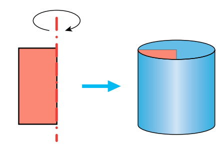
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Cilindros

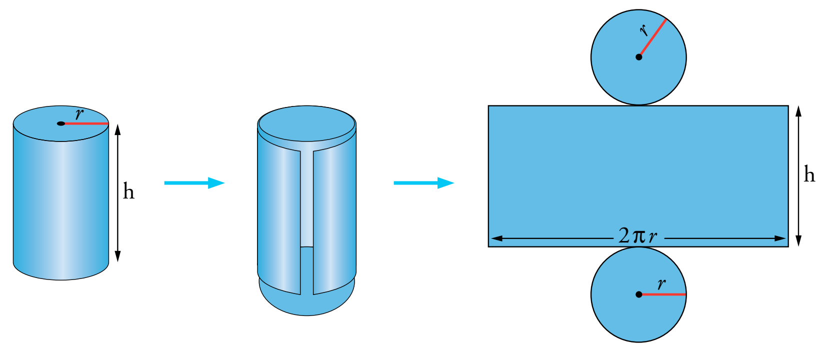
Etimología

Cilindro: Del griego *kulindo*, que significa *yo arrollo*, pues el cilindro tiene forma de rollo o cosa enrollada.

Un **cilindro recto** es un cuerpo de revolución generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.



Desarrollo y área de un cilindro recto



En el desarrollo del cilindro se aprecia que su superficie lateral es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro. Por tanto:

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = 2\pi r \cdot \mathrm{h}$

ÁREA TOTAL: A_{TOTAL} = Área lateral + Área de las dos bases = $2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2$

En la web

- Cilindro: Definiciones y desarrollo.
- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de cilindros.
- Resuelve el problema "Recipientes 3".

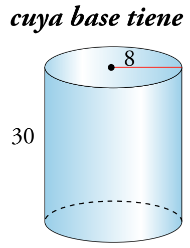
Volumen de un cilindro

El cilindro es una figura prismática. Por tanto, su volumen es:

$$V = A_{BASE} \cdot \mathrm{h} = \pi r^2 \mathrm{h}$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área total y el volumen de un cilindro recto de 30 cm de altura y cuya base tiene un radio de 8 cm.



$A_{LAT} = 2\pi r\mathrm{h} = 2\pi \cdot 8 \cdot 30 = 1\,507{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 201{,}06 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,910{,}08 \text{ cm}^2$

VOLUMEN $= \pi r^2\mathrm{h} = \pi \cdot 8^2 \cdot 30 = 6\,031{,}86 \text{ cm}^3$

Piensa y practica

1. Halla el área total y el volumen de un cilindro recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.

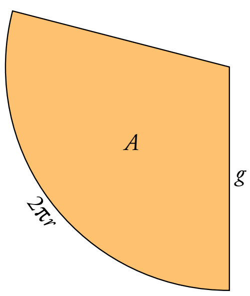
2. Un bote cilíndrico de 1/3 de litro tiene un diámetro de 6,4 cm. Halla su altura en milímetros, y la superficie de la lata con la que está construido.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Conos

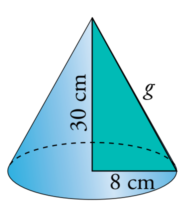
Etimología

Cono: Significa *piña*. Te extraña, ¿verdad? Sin embargo, te resultará menos raro si recuerdas que los pinos son *coníferas* (que tienen conos).

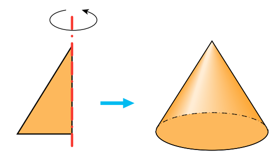


En la web

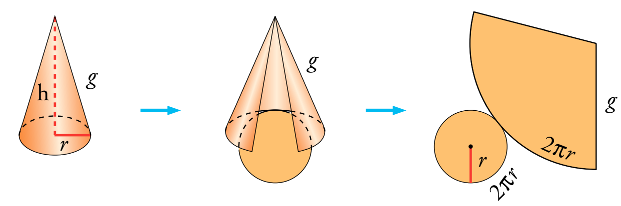
- Cono: definiciones y desarrollo.
- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de conos.



Un **cono recto** es un cuerpo de revolución generado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.



Desarrollo y área de un cono recto



El desarrollo lateral de un cono recto es un sector circular de radio g. ¿Qué porción de círculo tiene ese sector? Vamos a averiguarlo.

La circunferencia completa tiene una longitud $2\pi g$.

El sector tiene una longitud de $2\pi r$.

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{superficie del círculo}} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{superficie del sector}}$$

$$\frac{2\pi g}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{A} \quad \rightarrow \quad A = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$$

Por tanto:

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = \pi r g$ ÁREA TOTAL: $A_{TOTAL} = \pi r g + \pi r^2$

Volumen de un cono

El volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área y el volumen del cono de la izquierda.

Cálculo de g: $g = \sqrt{30^2 + 8^2} = 31{,}05$ cm

$A_{TOTAL} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 8 \cdot 31{,}05 + \pi \cdot 8^2 = 981{,}43$ cm^2

VOLUMEN $= \pi r^2 h/3 = \pi \cdot 8^2 \cdot 30/3 = 2\,010{,}62$ cm^3

Piensa y practica

1. Halla el área total y el volumen de un cono recto del que conocemos sus dimensiones: $r = 15$ cm y $h = 2$ dm.

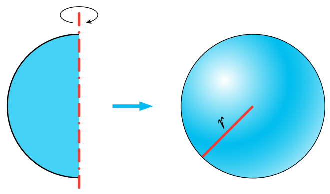
2. Halla el área total y el volumen de un cucurucho cónico de 36 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Esferas

Etimología

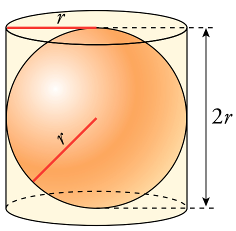
Esfera: Del griego *sfaira*, que significa *pelota*.



La **esfera** es una **figura de revolución,** porque se obtiene haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

Una esfera queda determinada por su **radio.**

Área de la esfera



El área de la superficie esférica de radio r es: $A = 4\pi r^2$

Quizá te ayude a recordarla lo siguiente: la superficie esférica coincide con la superficie lateral del cilindro que la contiene; es decir, un cilindro de radio r y altura $2r$. Por tanto, su área lateral es $2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

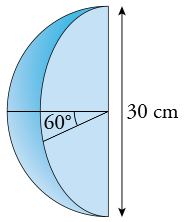
Volumen de la esfera

El volumen de una esfera de radio r es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Este volumen es los 2/3 del volumen del cilindro que la contiene.

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \rightarrow \frac{2}{3} V_{\text{CILINDRO}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ejercicio resuelto



Hallar el área total y el volumen de la figura representada a la izquierda (cuña esférica), en la que los dos planos que la delimitan forman un ángulo de 60°. (Se trata de un gajo que es una sexta parte de esfera).

El área es la sexta parte de la de una esfera de radio 15 cm, más dos semicírculos:

$$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi \cdot 15^2 = 2\,827{,}43 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 15^2 = 706{,}86 \text{ cm}^2$$

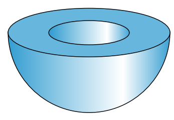
Calculamos el área y el volumen de la cuña esférica:

$$A_{\text{CUÑA}} = \frac{A_{\text{ESFERA}}}{6} + \frac{2A_{\text{CÍRCULO}}}{2} = \frac{2\,827{,}43}{6} + 706{,}86 = 1\,178{,}10 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{CUÑA}} = \frac{V_{\text{ESFERA}}}{6} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{15^3}{6} = 2\,356{,}19 \text{ cm}^3$$

Piensa y practica

1. Halla el área total y el volumen de un trozo de esfera que es una cuarta parte de esfera de 1 m de diámetro.

2. 

Radio exterior = 10 cm
Radio interior = 5 cm
Halla el área total y el volumen.

En la web Ampliación: Arquímedes y el volumen de la esfera.

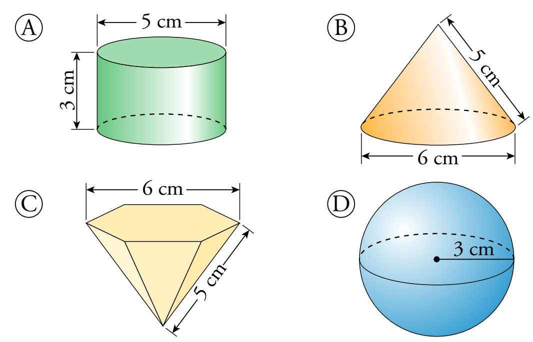
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

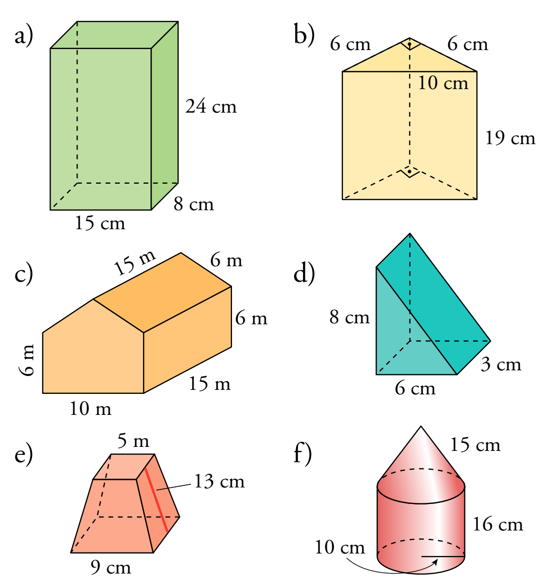
Practica

Desarrollos y áreas

1. Calcula la superficie total de cada cuerpo:



2. Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:



3. Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:

a) Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Octaedro regular de arista 18 cm.

c) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 28 cm y arista básica 16 cm.

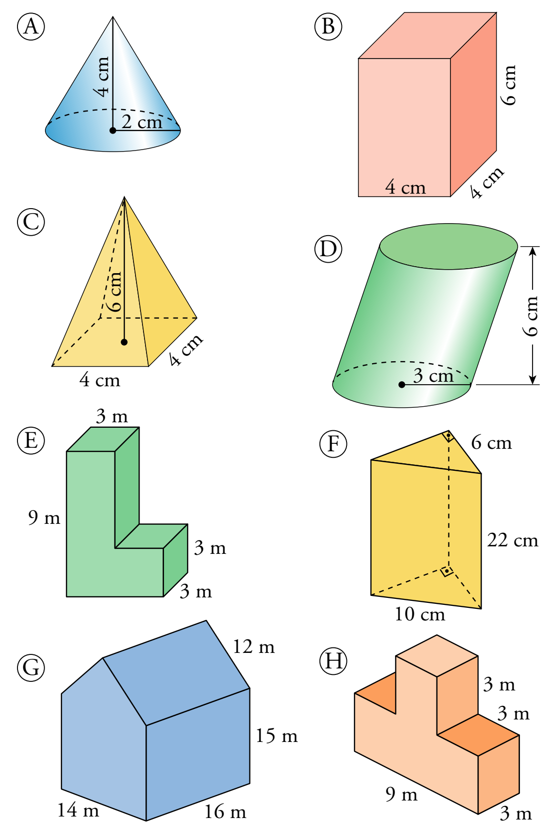
d) Pirámide de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.

e) Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

f) Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.

Volúmenes

4. Calcula el volumen de estos cuerpos:



5. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a) Octaedro regular de arista 8 cm.

b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.

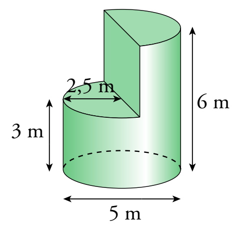
c) Semiesfera de radio 15 cm.

d) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

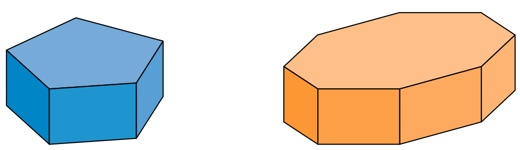
Ejercicios y problemas

6. Calcula el volumen de este cuerpo:

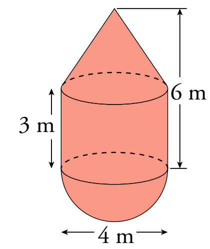


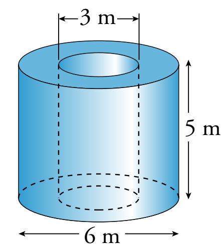
La parte de arriba es medio cilindro.

7. Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.



8. Calcula el volumen de estos cuerpos:





Autoevaluación

1. Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio de su longitud. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.

2. Calcula la superficie total de:

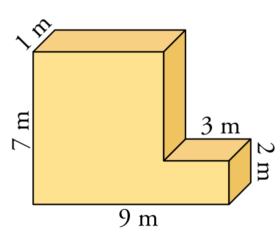
a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz mide 5 m.

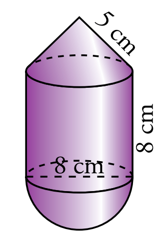
3. En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distintos lados del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm, respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

4. Calcula el volumen de estos cuerpos:

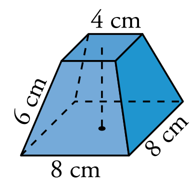
Ⓐ



Ⓑ



Ⓒ



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

12 Transformaciones geométricas

Arte árabe...

Cuando visitamos la Alhambra, quedamos fascinados por sus jardines, patios, fuentes, arcos, estancias... Y, sin duda, también nos llama poderosamente la atención la gran variedad de mosaicos que adornan paredes y techos.

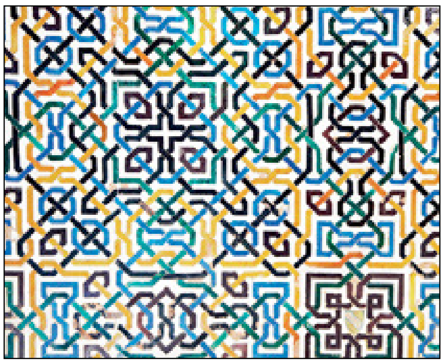
¿Por qué los árabes fueron tan aficionados a este tipo de ornamentos? La religión musulmana recomendaba no representar seres vivos: no solo personas, sino también animales o plantas. Por eso, los artesanos musulmanes de los siglos XIII y XIV se volcaron en la expresión de formas geométricas para decorar los palacios.

El Generalife, patio de La Acequia y pabellón norte. La Alhambra de Granada.

... y geometría

Sala de La Barca. La Alhambra de Granada.

Sin embargo, los mosaicos árabes son mucho más que hermosas filigranas. Los artistas que los diseñaron poseían una sólida formación geométrica, como quedó demostrado hace unas décadas, cuando se comprobó que con unos pocos elementos geométricos y algunas transformaciones se pueden diseñar diecisiete tipos de mosaicos. Exactamente, los que se encuentran en las paredes de la Alhambra.



Sala de Dos Hermanas. La Alhambra de Granada.

¿Cómo lo hacían?

Los conocimientos que utilizaban para el diseño de mosaicos eran, en algunos casos, muy sofisticados. Pero a la vez no dejan de sorprendernos las composiciones de enorme belleza que conseguían con manipulaciones sencillas de las figuras geométricas básicas.

Patio de los Arrayanes. La Alhambra de Granada.

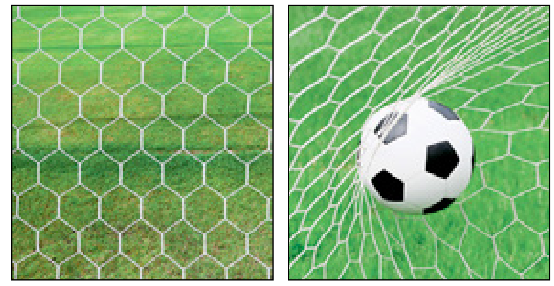
119

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Transformaciones geométricas. Movimientos

La proyección de las sombras de los camellos en una duna es una transformación geométrica de las figuras iniciales.

La red de la derecha, desde un punto de vista práctico, está deformada por el impacto del balón. Sin embargo, geométricamente, solo ha sufrido una *transformación*.



Una **transformación geométrica** hace corresponder a cada punto del plano otro punto del plano. Las figuras se transforman en otras figuras.

Ten en cuenta

$T(P) = P'$

P' es el **correspondiente** de P según la transformación T.

Si llamamos T a una cierta transformación, entonces se designa:

— Al transformado de un punto $P \to T(P) = P'$

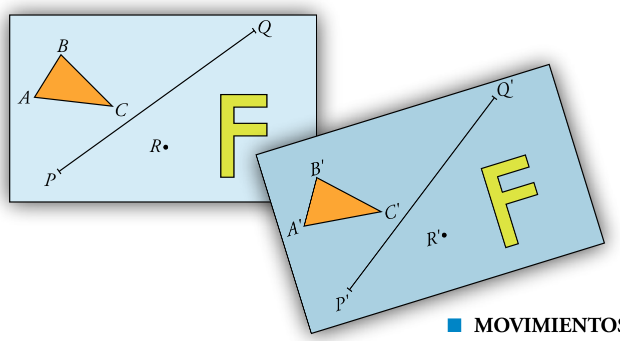
— A la figura transformada de $F \to T(F) = F'$

Si un punto se transforma en sí mismo, se dice que es un **punto doble** o **invariante:** A es doble si $T(A) = A$.

Análogamente, una **figura** F es **doble** si $T(F) = F$.

Movimientos en el plano

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras. Arrastramos la tarjeta sobre la mesa haciendo que ocupe otra posición.



Las figuras que hay en la tarjeta se han limitado a moverse. Mantienen su forma y su tamaño. Esta transformación se llama *movimiento*.

Un **movimiento** es una transformación del plano en la cual todas las figuras mantienen su forma y su tamaño.

En un movimiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene invariable.

MOVIMIENTOS DIRECTOS Y MOVIMIENTOS INVERSOS

Si miramos una serie de figuras y sus imágenes en un espejo, observamos que las figuras reflejadas tienen la misma forma y el mismo tamaño que las originales. La transformación producida por el espejo es, pues, un movimiento.

Sin embargo, las agujas del reloj reflejado giran en sentido contrario a las del original. Este movimiento que cambia el sentido de giro se llama *movimiento inverso*.

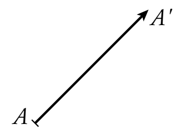
El movimiento descrito arriba mediante una tarjeta que se deslizaba mantiene el sentido de giro. Es un *movimiento directo*.

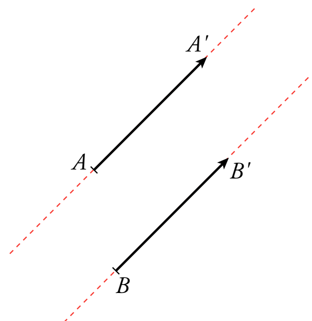
Movimientos directos son los que mantienen el sentido de giro. También se llaman **deslizamientos.**

Movimientos inversos son los que cambian el sentido de giro.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Traslaciones





Estas dos flechas son el mismo vector.

Vectores

Una flecha, $\overrightarrow{AA'}$ se llama **vector.** A es el **origen;** A', el **extremo.** La longitud del vector, $\overline{AA'}$, es su **módulo.**

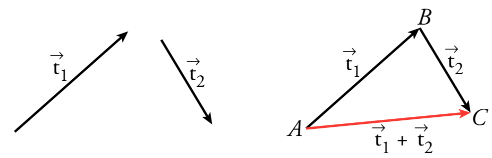
Dos vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son el mismo vector si tienen:

— El mismo módulo (es decir, si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$).

— La misma dirección (son paralelos o están sobre la misma recta).

— El mismo sentido (las puntas de las flechas van hacia el mismo lado).

Para **sumar dos vectores,** $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$, situamos el origen del segundo coincidiendo con el extremo del primero.

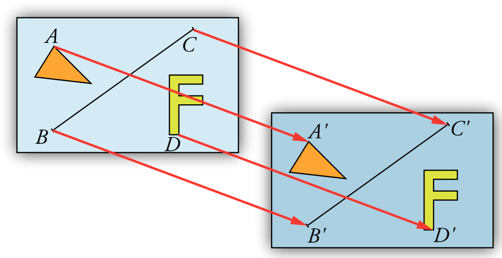


$\overrightarrow{AC}$ es el vector suma:

$\overrightarrow{AC} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$

Concepto de traslación

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras geométricas. Si deslizamos la tarjeta de modo que sus bordes se mantengan paralelos a sus posiciones iniciales, diremos que la hemos sometido a una *traslación*.



Si unimos cada punto con su homólogo mediante una flecha, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, …, todas ellas tienen la misma longitud y la misma dirección. Es decir, son el mismo vector.

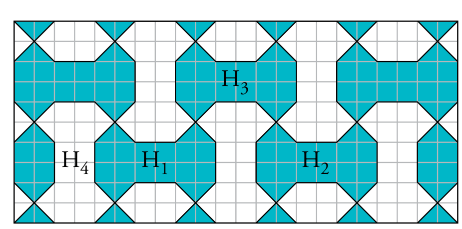
Dado un vector $\vec{t}$, se llama **traslación T,** según el vector $\vec{t}$, a una transformación que asocia a cada punto P otro punto $P' = \mathbf{T}(P)$ tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{t}$.

Piensa y practica

1. El mosaico de la derecha se llama "multihueso". $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ y $\mathbf{H_4}$ son "huesos". Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.

a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_2}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_2}$ en $\mathbf{H_3}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_3}$ en $\mathbf{H_1}$?

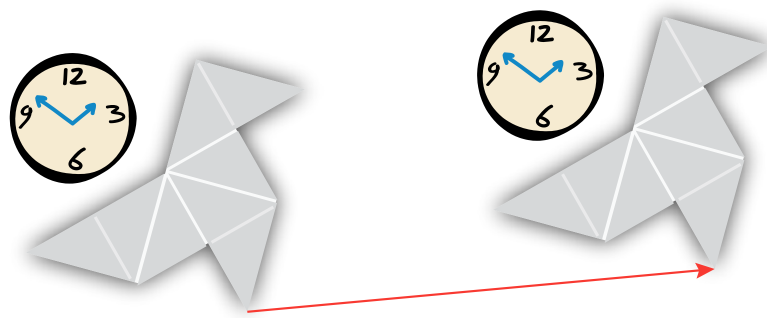


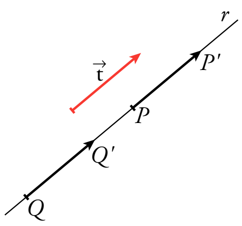
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Las traslaciones son movimientos directos

En la web
Iniciación: traslaciones.

Las traslaciones son, evidentemente, deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el giro de las agujas de un reloj.





Las rectas paralelas al vector traslación son invariantes.

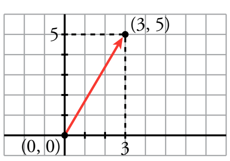
Elementos dobles (invariantes) en una traslación

En una traslación **no hay puntos dobles,** pues todos los puntos se desplazan.

Toda recta paralela al vector traslación es doble, pues cada punto, P, de la recta se transforma en otro punto, P', de la recta.

Piensa y practica

2. En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

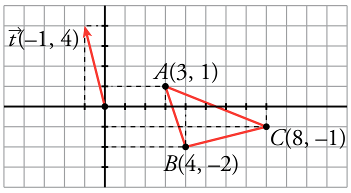


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

3. a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.

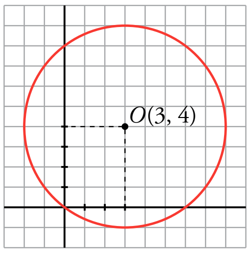


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

4. Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro $O(3, 4)$ y radio 5.



a) Comprueba que C pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación **T** de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathbf{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

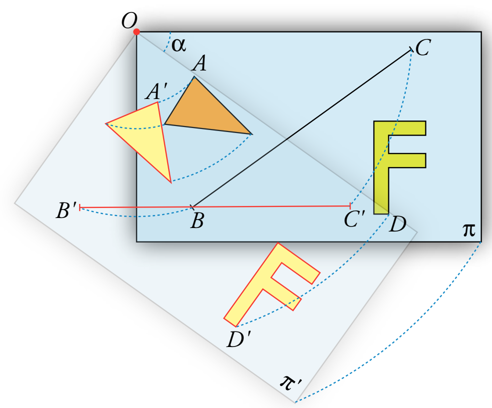
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué recta se transforma el eje X.

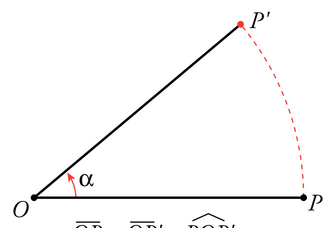
e) ¿En qué recta se transforma el eje Y?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Giros

El plano π, representado por una tarjeta, aparece girado sobre sí mismo un ángulo α alrededor del punto O (la esquina de la tarjeta). En el movimiento arrastra a todas las figuras situadas sobre él.





$\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\widehat{POP'} = \alpha$

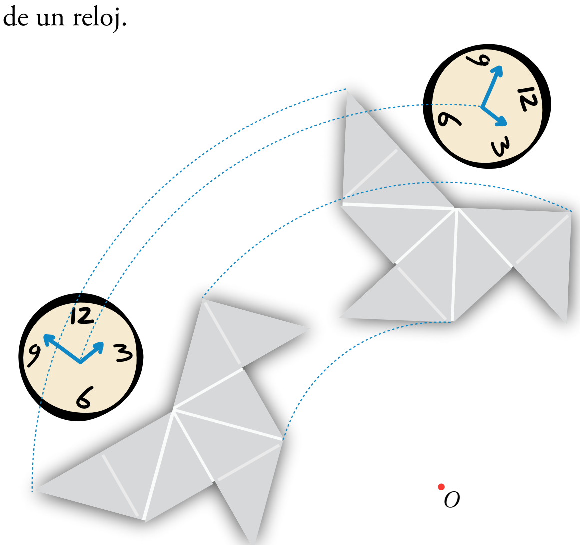
Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro O y ángulo α** a una transformación **G** que hace corresponder a cada punto P otro $P' = \mathbf{G}(P)$ de modo que:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} \quad \text{y} \quad \widehat{POP'} = \alpha$$

α debe ser un ángulo orientado. Consideramos sentido de giro positivo al contrario al movimiento de las agujas del reloj. El giro del ejemplo de más arriba es de ángulo negativo.

Los giros son movimientos directos

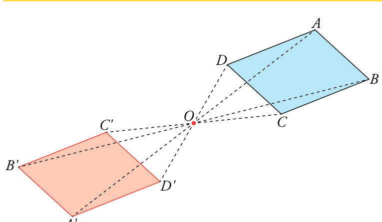
Es claro que los giros son deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el sentido de giro de las agujas de un reloj.



En la web

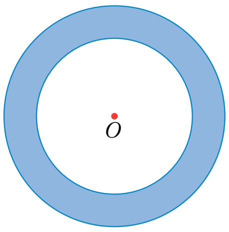
Iniciación: giros.

Simetría central



El giro de centro O y ángulo $180°$ transforma cada punto en su simétrico respecto al punto O. Por eso, a un giro de $180°$ se le llama **simetría central.**

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

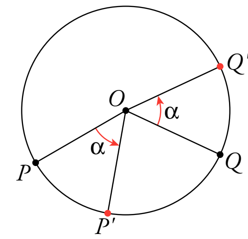


Una corona circular con el centro en el centro de giro es invariante.

Elementos dobles en un giro

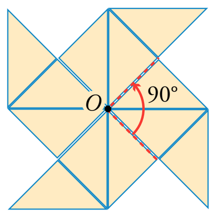
El centro de giro O es el único **punto doble.**

Las circunferencias de centro O son **figuras dobles.**



En la naturaleza es frecuente encontrar figuras con centros de giro de orden 5.

Figuras con centro de giro



Esta figura es invariante mediante tres giros distintos, todos ellos de centro O y de ángulos 90°, 180° y 270°.

Contando con la posición inicial, hay cuatro posiciones con las que la figura se mantiene idéntica.

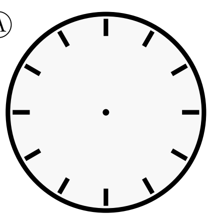
Se dice que O es un *centro de giro de orden 4*.

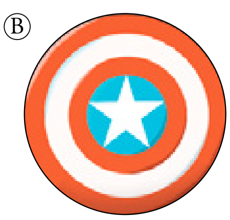
Se dice que una figura plana tiene un **centro de giro** $\boldsymbol{O}$ **de orden** $\boldsymbol{n}$ cuando al girarla alrededor de O coincide consigo misma n veces, contando con la posición inicial.

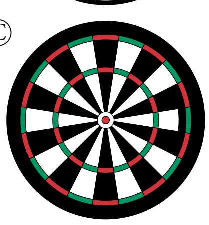
El cociente $360° : n$ es el menor ángulo por el cual se hace coincidir la figura consigo misma al girarla con centro en O.

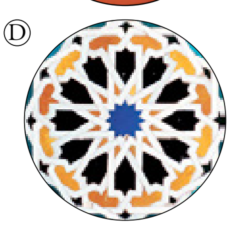
Piensa y practica

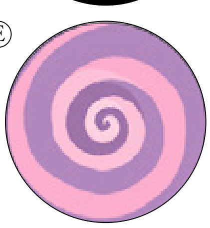
1. Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

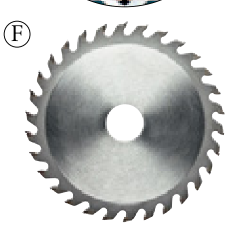
Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

Ⓕ 

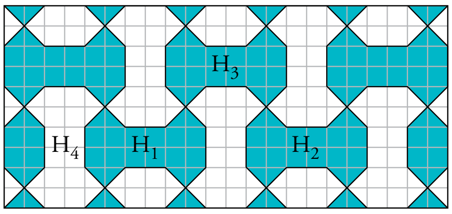
2. Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro **G** de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.

a) Transforma mediante **G** los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

3. Recuerda el mosaico "multihueso" que ya hemos visto en un ejercicio anterior.

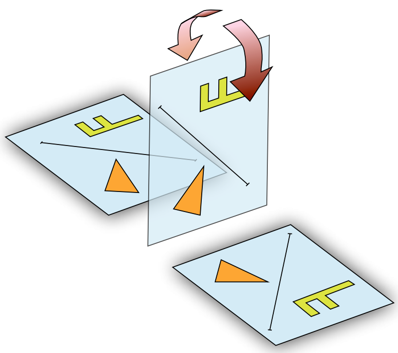


a) Describe un giro que transforme $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_4}$.

b) Describe un giro que transforme $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_3}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Simetrías axiales

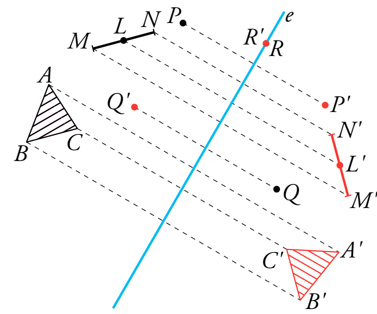


En los movimientos inversos, como las simetrías, hay que *sacar del plano* cada figura para llevarla a su posición final.

Dada una recta e, a cada punto, P, le hacemos corresponder otro punto, P', de modo que:

- El segmento PP' sea perpendicular a e.
- La distancia de P a e sea igual a la distancia de P' a e.

Es decir, e es la mediatriz del segmento PP'.

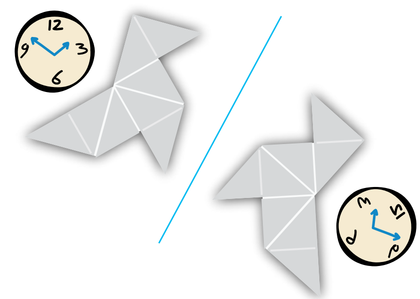


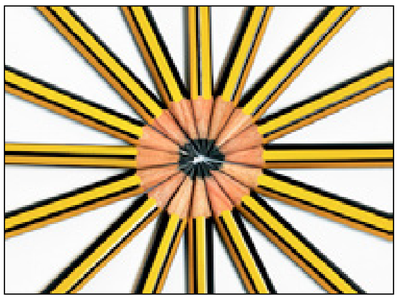
Dada una recta e, se llama **simetría de eje** e a una transformación, **S**, que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto $\mathbf{S}(P) = P'$ tal que el eje e es mediatriz del segmento PP'.

Las simetrías son movimientos inversos

En la web Iniciación: simetrías.

Las simetrías son **movimientos,** pues conservan la forma y el tamaño de las figuras. Pero son movimientos **inversos,** porque cambian el sentido de giro de las agujas de un reloj.





Elementos dobles en una simetría. Figuras simétricas

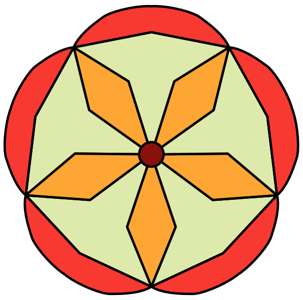
En una simetría de eje e, todos los **puntos** de e son **dobles.** Por tanto, e es una recta invariante.

También son invariantes las rectas perpendiculares a e.

Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una **figura simétrica** y al eje se le llama **eje de simetría** de la figura.

Piensa y practica

1. Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría.



2. Consideramos la simetría **S** de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante **S** de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

b) El eje X.

c) El eje Y.

d) La circunferencia C_1 de centro $(1, 4)$ y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro $(3, 3)$ y radio 5.

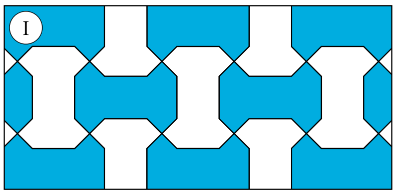
En la web Ampliación: ejes de simetría y centro de giro en las figuras planas.

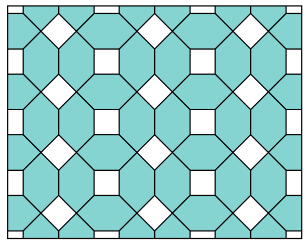
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

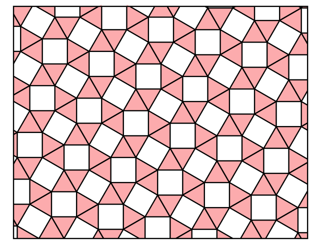
5 Mosaicos

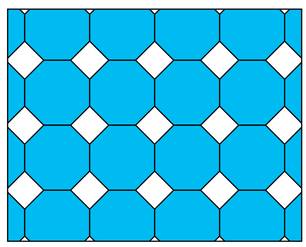
El *multihueso* que viste en una actividad anterior es **un mosaico:** una configuración geométrica con la que se puede llenar el plano.

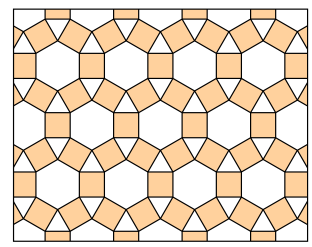
Hay mosaicos formados con una sola pieza y otros formados con dos o más piezas. Observa los siguientes:

I


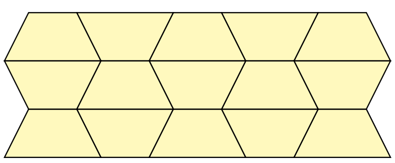
II


III


IV


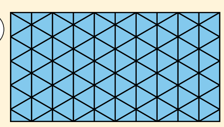
V


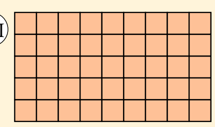
En la web
Ampliación: mosaicos.

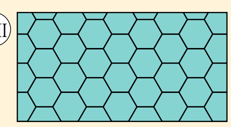


Este mosaico está formado por un único tipo de piezas. Pero no es regular porque los trapecios no son polígonos regulares.

Mosaicos regulares son los formados por un único tipo de **polígono regular.** Solo hay tres: con triángulos, con cuadrados y con hexágonos.

VI


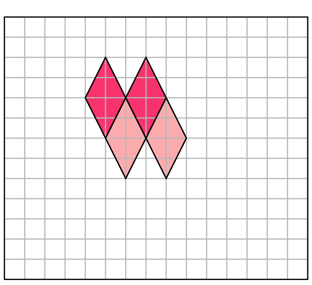
VII


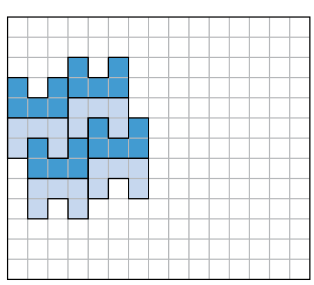
VIII


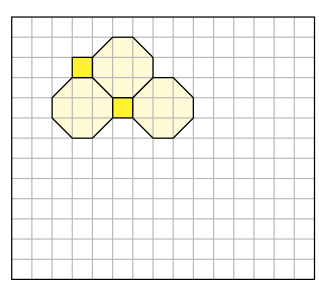
Mosaicos semirregulares son los formados por dos o más tipos de polígonos regulares. Por ejemplo, los mosaicos III, IV y V de arriba.

Piensa y practica

1. Completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

a)


b)


c)


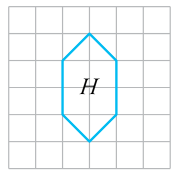
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Traslaciones

1. a) Representa en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación de vector $\vec{t}_1(3, 2)$.

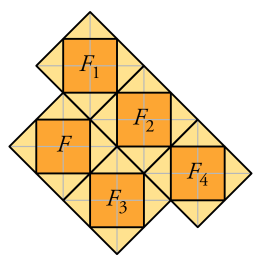


b) Dibuja la figura H_2, transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(2, -6)$.

c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

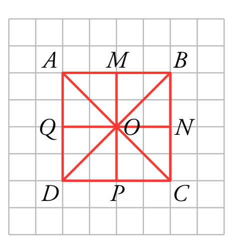
2. Hemos aplicado a la figura F cuatro traslaciones para obtener F_1, F_2, F_3 y F_4.



Determina los vectores $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ y $\vec{t}_4$ que nos permiten transformar F en cada una de las otras figuras, respectivamente.

Giros

3. Hacemos un giro de centro O que transforma M en N.

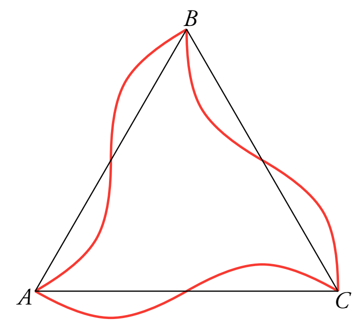


a) Indica en qué puntos se transforman los puntos O, A, B, N y P.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y por C?

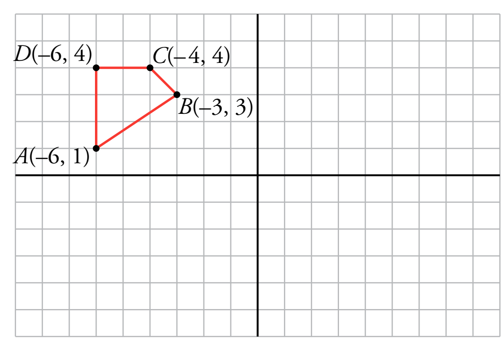
c) ¿Y el triángulo OPD?

4. Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro A y un ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.



Simetrías

5. Copia la siguiente figura en papel cuadriculado:



Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, transformado mediante:

a) La simetría de eje X.

b) La simetría de eje Y.

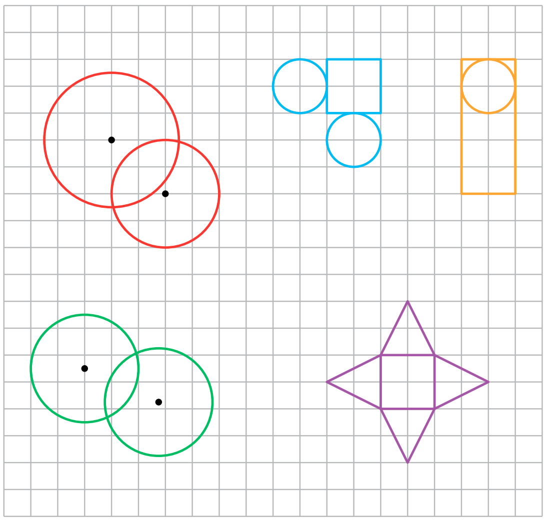
c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por $B(-3, 3)$ y $P(-6, 0)$.

d) Un punto del cuadrilátero es doble respecto de alguna de las simetrías anteriores. ¿Cuál es?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

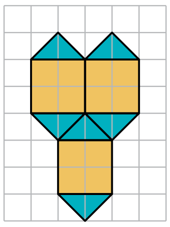
Ejercicios y problemas

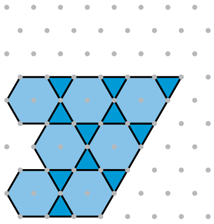
6. ¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras? Hazlo en tu cuaderno.



Mosaicos

7. a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:

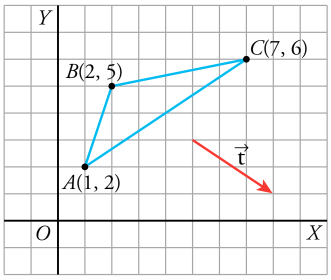




b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

Autoevaluación

1. Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

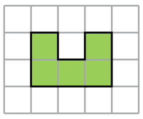
c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto $P(0, 4)$ es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje Y es una recta doble?

2. Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

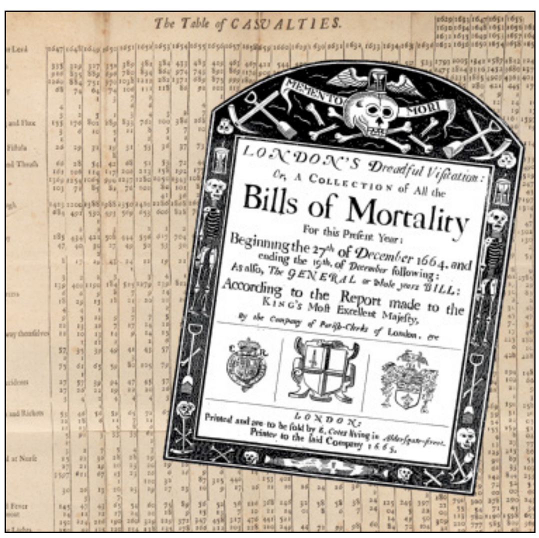
13 Tablas y gráficos estadísticos

Antecedentes históricos

En todas las épocas, los gobernantes han querido tener controladas sus posesiones, ya fueran bienes o personas. Existen testimonios escritos de que, ya hacia el año 3000 a. C., los babilonios y los egipcios disponían de inventarios sobre cosechas, rentas, censos de población…

Algo parecido ocurrió en otros pueblos de la Antigüedad: Israel (1300 a. C.), China (2200 a. C.), Grecia y Roma (500 a. C.), y Europa desde la Edad Media.

Panorámica de los "Guerreros de terracota", conjunto de más de 8 000 figuras de soldados y caballos descubiertos cerca de Xi'an (China).



Un primer paso…

Hasta el siglo XVI, la estadística consistió en la recogida de datos relevantes y en su exposición ordenada y clara.

A mediados del siglo XVII, **John Graunt,** un comerciante londinense, realizó en sus horas libres un laborioso y profundo estudio sobre los nacimientos y las defunciones en Londres a lo largo de los años anteriores. En este estudio analizaba cómo influían en ellos las causas naturales, sociales y políticas. Puede considerarse el primer trabajo estadístico serio sobre la población.

Portada de uno de los anuarios en los que John Graunt se basó para hacer su estudio sobre una de las páginas originales de dicho trabajo.

¿De dónde viene el nombre?

La utilización de la palabra *estadística* para designar la obtención, el estudio y la interpretación de grandes masas de datos, parece que se dio por primera vez, en el siglo XVIII, en Alemania. El nombre viene del interés que este estudio tiene para los *asuntos de Estado*.

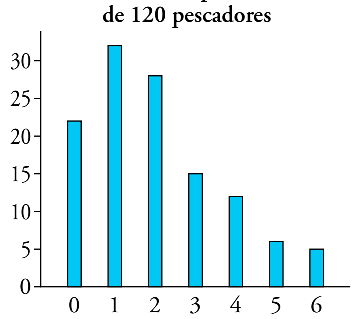
Puerta de Brandeburgo, Berlín (Alemania).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

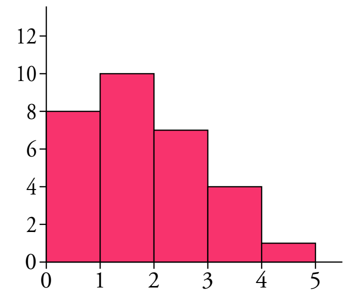
1 Población y muestra

Observa las siguientes distribuciones:

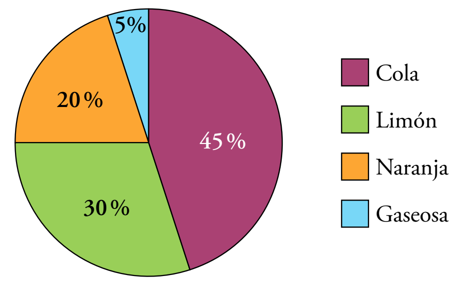
N.º de capturas de 120 pescadores



Peso de las mochilas de 30 alumnos



Bebida escogida por 40 amigos en una fiesta de cumpleaños



Cada una de ellas se refiere a un colectivo:

- 120 *pescadores* de un pantano.
- 30 *alumnos* de una clase.
- 40 *amigos* en un cumpleaños.

El colectivo objeto de un estudio estadístico se llama *población*.

A veces, el conjunto que interesa es demasiado numeroso para poder analizar cada uno de sus elementos; entonces se extrae una *muestra*. Por ejemplo, es posible que los 120 pescadores sean una muestra de la población formada por todas las personas que están pescando en el pantano.

De modo que un colectivo es población o muestra según nos interese por sí mismo o sea un medio para inferir información sobre un colectivo más extenso.

Población es el conjunto de todos los elementos que son objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto, extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Ejemplo

Un inspector de sanidad investiga algunos restaurantes de una ciudad escogidos al azar. El conjunto de todos los restaurantes que hay en la ciudad es la *población;* los restaurantes seleccionados para ser investigados forman la *muestra,* y cada restaurante es un *individuo*.

Piensa y practica

1. Indica la población, la muestra y los individuos en cada uno de los siguientes ejemplos:

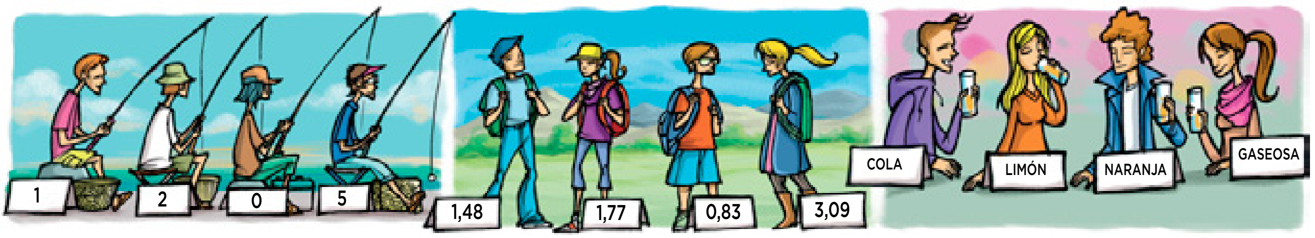
a) Se seleccionan 50 edificios de una ciudad para hacer un estudio sobre el número de plantas, la altura y la utilización de los locales bajos (para viviendas, oficinas, tiendas, bares…).

b) Se analizan 100 libros de una biblioteca: número de páginas, ubicación en la estantería y contenido (como novela, ensayo, manual…).

c) Se han encuestado a 23 de los alumnos que van al centro en bici sobre el número de desarrollos de la bicicleta, el peso y la marca.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Variables estadísticas



NÚMERO DE PECES CAPTURADOS · PESO DE LA MOCHILA · BEBIDA ELEGIDA

El *número de peces*, el *peso de las mochilas* y el *tipo de bebida* son las variables que hemos estudiado en las distribuciones anteriores.

Las dos primeras **variables** son **cuantitativas,** ya que sus valores se expresan con números (cantidades).

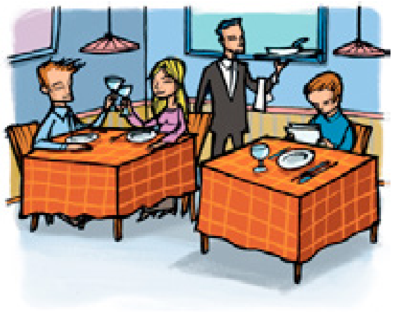
La tercera **variable** es **cualitativa,** porque el tipo de bebida que escogen los amigos no se puede describir con un número, sino mediante una cualidad.

Una **variable cuantitativa** es **discreta** cuando solo admite valores aislados (el número de peces cogidos puede ser 1 o 2, pero no un número intermedio).

Una **variable cuantitativa** es **continua** cuando entre cada dos valores pueden darse todos los intermedios (una mochila puede pesar 1,245 kg, aunque habitualmente se redondea y se expresa mediante un número con una sola cifra decimal).

TIPOS DE VARIABLES ESTADÍSTICAS

- **Cuantitativa:** Numérica.
  - **Discreta:** Solo puede tomar valores aislados.
  - **Continua:** Podría tomar todos los valores de un intervalo.
- **Cualitativa:** No numérica.



Ejemplo

En el ejemplo de la página anterior, supongamos que en cada restaurante se anota lo siguiente:

— Número de personas que trabajan en él (1, 2, 3…): cuantitativa discreta.

— Superficie (187,5 m^2): cuantitativa continua.

— Tipo de comida (marisco): cualitativa.

Piensa y practica

1. Indica si cada una de estas variables es cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa:

a) En los cines de un pueblo se anota el tipo de película que proyectan (comedia, acción…), cuánto dura la película y el número de espectadores.

b) En los mercados de una ciudad se observa la superficie, el número de puertas de acceso y el tipo de mercado (alimentación, ropa, complementos…).

c) Nos hemos fijado en algunas características de los teléfonos móviles que tienen los alumnos de un centro escolar: la marca, el número de compañías que lo ofertan y el precio.

d) Un científico estudia, en los volcanes del Pacífico, la altura, el número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años y el tipo de volcán (hawaiano, estromboliano, vulcaniano, peleano).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 El proceso que se sigue en estadística

La información estadística que recibimos llega mediante gráficas o tablas muy bien construidas, con las que resulta muy sencillo entender la información que se nos da. Sin embargo, esas tablas y gráficas son el resultado de un largo proceso. Veamos sus principales pasos.

1.° ¿Qué queremos estudiar? ¿Para qué?

Por ejemplo: Supongamos que un centro de Secundaria desea saber los *destinos favoritos* para el viaje de fin de curso. Con dicha información, la dirección busca los mejores precios y decide si se pueden ofertar dos o más destinos.

2.° Selección de las variables que se van a analizar

Si a cada estudiante se le pregunta por su *destino favorito,* sin más, es muy probable que se obtengan una enorme cantidad de respuestas distintas, difíciles de organizar. Además, habrá alumnos que digan su destino favorito sin reparar en los gastos del viaje, distancia, duración, etcétera.

Para evitar esta disparidad de respuestas, la encuesta debe ser muy clara, con las posibles alternativas señaladas. Es decir, *debe ser evidente cuál es la variable y cuáles son sus posibles valores*.

Por ejemplo: ¿A cuáles de estos lugares prefieres ir en tu viaje de fin de curso?

a) París b) Roma c) Marrakech d) Berlín e) Londres

3.° Recolección de datos

Se efectúan las medidas o se realizan las encuestas. En el caso del viaje de fin de curso, se pregunta a cada uno de los alumnos y se anota la respuesta.

4.° Organización y exposición de datos

Se realizan los recuentos, se ordenan los datos en tablas, se elaboran las gráficas adecuadas y, en algunos casos, se calculan los parámetros que convengan. A estas tareas nos dedicaremos a lo largo de la presente unidad y de la siguiente.

Piensa y practica

1. Se quiere realizar una encuesta para estudiar las aficiones musicales. Para cada una de las preguntas siguientes, di justificadamente si te parecen o no razonables:

a) ¿Cuáles son tus grupos musicales preferidos?

b) De los siguientes estilos musicales, señala aquellos que has escuchado más este mes:

- Rock
- Pop
- Rap
- Elect.
- Hip-Hop
- Reggae
- Salsa
- Punk
- Metal
- Grunge
- Jazz
- Clásico

c) ¿Oyes la radio? Si es así, ¿qué cadena?

d) ¿Cuáles de estas cadenas de radio escuchas más de 2 horas a la semana?

- Cadena 100
- Los 40 principales
- Rock FM
- Kiss FM
- Radio Clásica
- Europa FM
- EDM
- M80 Radio
- Radio 3
- Cadena Dial

e) ¿Cuál es el último concierto al que has ido?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Confección de una tabla de frecuencias

Una vez recogidos los datos, hay que **tabularlos;** es decir, hay que confeccionar una tabla para organizarlos: la **tabla de frecuencias.**

Confección de una tabla con datos aislados

Si la variable toma pocos valores, se procede como en el siguiente ejemplo sobre el número de problemas que ha resuelto correctamente cada uno de los 20 estudiantes en un examen. La variable, x_i, toma los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

N.º DE PROBLEMAS RESUELTOS			
2	0	3	4
1	3	3	5
1	1	2	4
0	3	3	1
2	1	4	3

RECUENTO	
0	𝍷𝍷
1	𝍸
2	𝍷𝍷𝍷
3	𝍸𝍷
4	𝍷𝍷𝍷
5	𝍷

TABLA DE FRECUENCIAS	
x_i	f_i
0	2
1	5
2	3
3	6
4	3
5	1

Confección de una tabla con datos agrupados en intervalos

Si la variable es continua o bien, siendo discreta, toma muchos valores distintos, conviene agruparlos en intervalos. En nuestro ejemplo, las 30 mejores marcas de altura de este año en cierta región, agrupamos los datos en intervalos con decimales para que no haya dudas del intervalo al que pertenece cada uno.

MEJORES RESULTADOS DE SALTOS DE ALTURA				
195	198	201	187	192
181	197	198	203	195
185	187	192	196	188
199	193	189	185	204
198	201	184	189	202
187	194	200	198	193

RECUENTO	
Entre 180,5 y 184,5	𝍷𝍷
Entre 184,5 y 188,5	𝍸𝍷
Entre 188,5 y 192,5	𝍷𝍷𝍷𝍷
Entre 192,5 y 196,5	𝍸𝍷
Entre 196,5 y 200,5	𝍸𝍷𝍷
Entre 200,5 y 204,5	𝍸

TABLA DE FRECUENCIAS	
INTERVALO	f_i
180,5-184,5	2
184,5-188,5	6
188,5-192,5	4
192,5-196,5	6
196,5-200,5	7
200,5-204,5	5

Notación

En las tablas de frecuencias se suele designar:

$x_i \rightarrow$ valores de la variable

$f_i \rightarrow$ frecuencia de cada valor

Recuento

Para hacer el recuento, se leen los resultados uno a uno y se traza una marca donde corresponda (se suele ir tachando con un lápiz los datos contabilizados para no volver a contarlos). Si las marcas se agrupan de cinco en cinco, se cuentan mejor. (La quinta sirve para cerrar el manojo).

Marcas de clase

A veces conviene dar un valor que represente a los de todos los individuos de un intervalo. Se denomina **marca de clase.** Para hallar la marca de clase de cada intervalo, tomamos el valor medio de los extremos.

Por ejemplo, la marca de clase del intervalo 180,5-184,5 es:

$$\frac{180{,}5 + 184{,}5}{2} = 182{,}5$$

Piensa y practica

1. El profesor ha apuntado las faltas de asistencia que ha tenido cada uno de sus alumnos a lo largo del trimestre:

2, 3, 0, 1, 1	2, 2, 4, 3, 1	3, 0, 2, 0, 1
2, 2, 1, 2, 1	0, 3, 4, 2, 1	3, 5, 1, 1, 2

a) Confecciona una tabla de frecuencias.

b) Si el profesor hubiera apuntado el número de ejercicios bien resueltos de cada alumno a lo largo del año, ¿la tabla de frecuencias debería ser con datos aislados o agrupados en intervalos?

2. Se ha tomado el tiempo en los 100 m lisos a los miembros de un club de atletismo. Estos son los resultados:

11,62	12,03	12,15	11,54	10,95
11,56	11,08	11,38	12,08	11,73
12,11	11,52	11,72	11,23	11,66
10,87	11,32	11,58	12,01	11,06

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

10,805 - 11,075 - 11,345 - 11,615 - 11,885 - 12,155

En la web Confecciona tablas de frecuencias.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

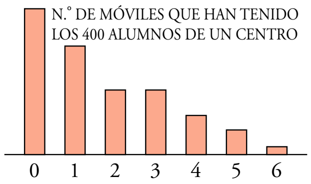
5 Gráfico adecuado al tipo de información

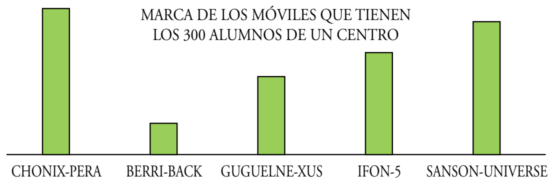
En los medios de comunicación, en informes de las empresas y en otras muchas disciplinas encontramos espléndidas representaciones de gráficos estadísticos que nos permiten, con un solo golpe de vista, entender lo que nos quieren transmitir y asimilar la información que se nos da.

Veamos cómo utilizar de manera correcta los tipos de gráficos más frecuentes.

Diagrama de barras

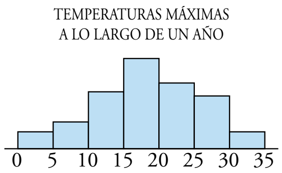
El **diagrama de barras** se utiliza para distribuciones de **variables cuantitativas discretas.** Por eso, las barras son estrechas y se sitúan sobre los valores puntuales de la variable. También se usa para representar distribuciones de **variables cualitativas.**

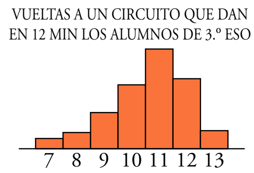


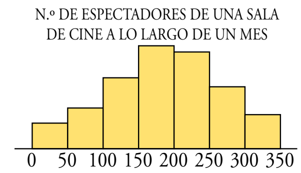


Histograma de frecuencias

El **histograma** se utiliza para distribuciones de **varible continua.** Por eso se usan rectángulos cuyas bases son de la longitud de los intervalos.





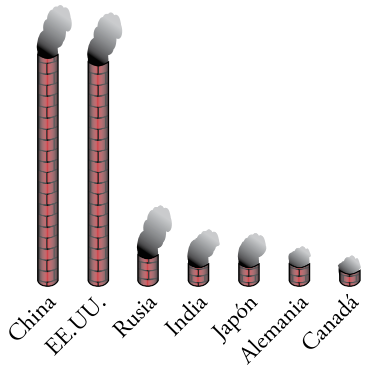


Aunque los datos no vengan dados por intervalos (como en el caso de las vueltas a la pista de atletismo), cuando se trata de una variable continua (8 vueltas significa que aún no ha dado 9) es razonable usar el histograma y no el diagrama de barras.

El número de espectadores es una variable cuantitativa discreta, pero al tomar muchos valores distintos, se utilizan intervalos y, por tanto, histogramas.

Otro tipo de gráficos

Hay infinidad de tipos de gráficos estadísticos. En la primera página vimos algunos de ellos. Observa este otro, al que llamamos **pictograma,** sobre los países que más CO_2 emiten a la atmósfera.



Los pictogramas están destinados al gran público porque son muy llamativos e intuitivos, aunque poco precisos.

Piensa y practica

1. Representa mediante el gráfico adecuado.

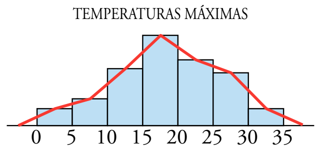
a) Temperaturas máximas medidas cada 15 días a lo largo de un año en una localidad.

TEMPERATURA (°C)	N.° DE DÍAS
5-10	2
10-15	4
15-20	12
20-25	5
25-30	3

b) Número de asignaturas suspensas que tienen los alumnos de una clase.

N.° DE ASIGNATURAS SUSPENSAS	N.° DE ALUMNOS
0	12
1	9
2	3
3	2
4	1
5 o más	3

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



Polígono de frecuencias

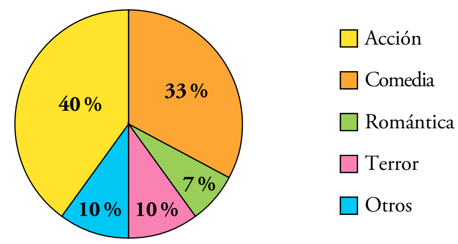
El **polígono de frecuencias** se utiliza en los mismos casos que el histograma. Se construye uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos y prolongando, al principio y al final, hasta llegar al eje.

Su sentido es suavizar los escalones que se producen en el histograma.

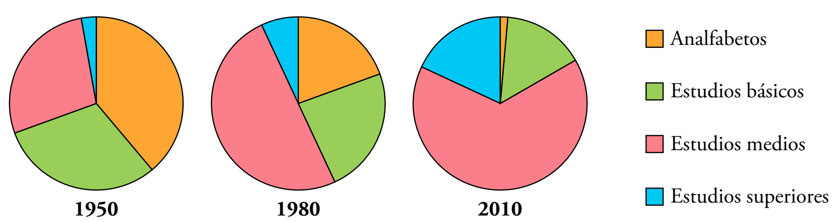
Diagrama de sectores

En un **diagrama de sectores,** el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Se puede utilizar para todo tipo de variables, pero se usa muy frecuentemente para las variables cualitativas. Por ejemplo, en el siguiente diagrama vemos las preferencias cinematográficas de cierta población en España por porcentajes:

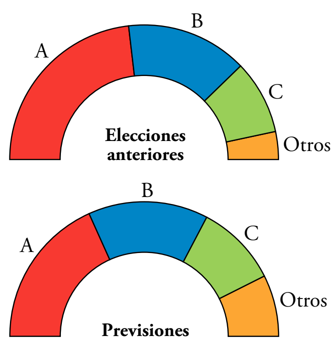


Este tipo de diagrama es especialmente adecuado para representar, en varios pasos, una evolución a lo largo del tiempo. Por ejemplo, podemos observar la evolución, desde 1950 hasta 2010, del nivel de estudios de la población de una cierta región: observamos cómo a lo largo del tiempo ha ido disminuyendo el número de analfabetos y de personas con estudios básicos, y cómo ha aumentado considerablemente la población con estudios medios y superiores.



Resultados de las elecciones

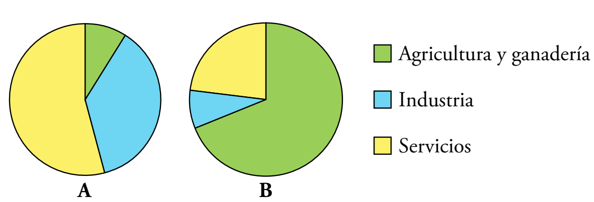
Al final de la jornada electoral es muy común ver los resultados expuestos de la siguiente forma:



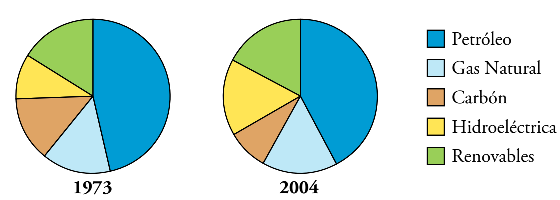
Piensa y practica

2. Los diagramas de sectores se utilizan a menudo para comparar la misma distribución en distintos países o regiones.

Observa los sectores que muestran cómo se divide la población trabajadora de dos países: Austria y Mauritania. ¿A cuál pertenece cada uno? Explica por qué.



3. Observa la evolución del consumo mundial de energías primarias por fuentes energéticas:



a) Explica qué energías han aumentado su consumo y cuáles han disminuido.

b) Busca en Internet el diagrama correspondiente al año actual.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Población y muestra. Variables

1. Indica, para cada caso propuesto:

— Cuál es la población y cuáles, los individuos.

— Cuál es la variable y qué tipo de variable es.

a) El peso de los recién nacidos en la Comunidad Valenciana a lo largo del año pasado.

b) Cantidad de lluvia recogida en un cierto observatorio meteorológico en cada año del presente siglo.

c) Número de mascotas en los hogares españoles.

d) Partido político al que cada elector tiene intención de votar en las próximas elecciones en una cierta comunidad autónoma.

e) Tipos de coches (marca y modelo) que tiene cada vecino de mi urbanización.

f) Número de tarjetas amarillas mostradas en cada partido de fútbol de 1.ª división la temporada pasada.

2. Se quieren realizar los siguientes estudios:

I. El sexo (niño o niña) de cada bebé nacido en un hospital a lo largo de un año.

II. Qué periódico lee cada habitantes de una ciudad.

III. Alturas y pesos de los estudiantes de la clase.

IV. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

V. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

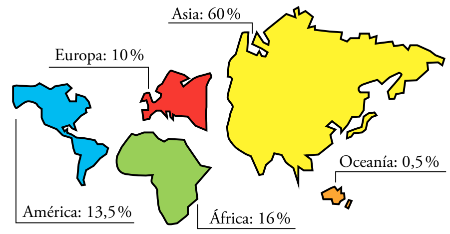
a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población y cuáles, los individuos.

b) Indica en cada uno cuál es la variable que se estudia y de qué tipo es.

c) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

Interpretación de tablas y gráficos

3. El siguiente gráfico indica el porcentaje de población mundial que habita en cada uno de los continentes. Si sabemos que África tiene 1 111 millones de personas, ¿qué población tiene cada uno de los demás continentes?



a) Completa la tabla.

b) Si hubo 145 personas que respondieron “nunca”, ¿a cuántas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Los encuestados, ¿son población o muestra?

4. Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad:

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	
NO CONTESTA	0,4

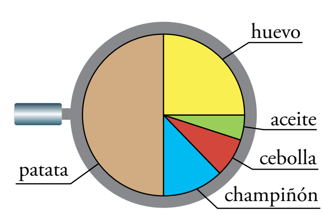
a) Completa la tabla.

b) Si hubo 145 personas que respondieron “nunca”, ¿a cuántas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Los encuestados, ¿son población o muestra?

5. Suponemos que hacemos una tortilla de patatas con las proporciones que muestra este diagrama:



a) Los porcentajes de los ingredientes son 50 %, 25 %, 12 %, 8 % y 5 %. A la vista del gráfico, asigna cada uno al ingrediente correspondiente.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

b) Si la tortilla pesa 1 kg, ¿qué cantidad hay que echar de cada ingrediente?

c) En otra tortilla con las mismas proporciones hemos echado 40 g de aceite. ¿Cuánto pesará? ¿Qué cantidad de champiñones tendrá?

Elaboración de tablas y gráficas

6. Un profesor ha preguntado a sus alumnos que en cuántos de estos medios de transporte han viajado:

TREN, BARCO, AVIÓN, AUTOBÚS, HELICÓPTERO, MOTO

Estos son los resultados:

2 3 1 4 5   2 3 3 2 4   3 5 5 4 3

3 3 4 4 4   4 3 4 6 2   4 3 3 4 5

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras correspondiente.

7. Estos son los mejores tiempos en los 10 km de los miembros de un club de atletismo:

42:20 40:08 47:32 49:50 43:24 48:31 51:42

45:53 47:17 50:37 49:07 51:37 43:28 45:18

44:36 46:15 50:48 47:59 51:21 43:37 42:14

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los intervalos: 40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52

b) Traza el histograma correspondiente.

8. Se ha realizado un estudio sobre el tipo de utilidad que le dan al Smartphone los menores de 26 años. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:

UTILIDAD	PORCENTAJE
Juegos	47 %
Redes sociales	23 %
Deportes y entretenimientos	18 %
Noticias	12 %

Elabora el correspondiente diagrama de sectores.

Autoevaluación

1. Indica, para cada caso, cuáles son los individuos, cuál la población, cuál la variable y de qué tipo es:

a) Número de veces al año que ha usado su tarjeta sanitaria cada paciente.

b) Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud.

c) Tipo de especialista al que acuden los pacientes a un centro de salud.

2. Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

28 4 12 35 2   26 45 22 6 23

27 16 18 32 8   47 8 12 34 15

28 37 7 39 15   25 18 17 27 15

a) Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 1 - 9 - 17 - 25 - 33 - 41 - 49.

b) Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

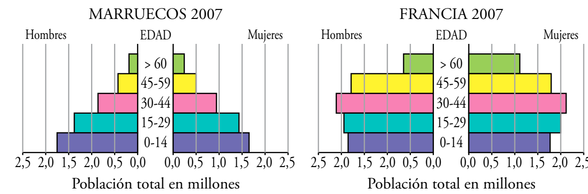
3. Número de días que han ido a la biblioteca del colegio los alumnos de un curso:

3 1 2 4 0   2 1 3 1 0   2 0 3 5 2

0 2 4 1 2   1 2 0 5 3   3 1 2 1 0

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

4. Observa estas pirámides de población:



Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) La proporción de ancianos/as en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de niños/as es mayor en Marruecos que en Francia.

137

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14 Parámetros estadísticos

¿Por qué los parámetros?

En sus albores, la estadística se preocupaba solo de recopilar y organizar datos. Pero cuando evolucionó hacia el análisis de los mismos, para descubrir relaciones, sacar conclusiones, estimar probabilidades, etc., surgió la necesidad de cuantificar numéricamente valores capaces de condensar información relativa al conjunto, y a esos valores se les denominó *parámetros estadísticos* (moda, mediana, media, varianza…).

¿Cómo evolucionan?

Con la ayuda de los parámetros se planifica el estudio estadístico, el análisis de datos, básico en la actualidad para cualquier tipo de investigación científica (en medicina, biología, sociología, psicología, economía, etc.). Su aplicación en estadística superior alcanza altos niveles de complejidad.

Un alumno aplicado

George Dantzig (1914-2005) fue un matemático y estadístico estadounidense cuya vida estuvo llena de grandes éxitos científicos.

Con 25 años siguió un curso de doctorado dirigido por el eminente estadístico Neyman, en la Universidad de Berkeley. Cierto día, Dantzig llegó tarde a clase y vio en la pizarra los enunciados de dos problemas, que tomó como "deberes". Los copió y, ya en su casa, se esmeró en resolverlos. Le costó mucho, pues eran sumamente difíciles ("Vaya, hoy el profesor se ha pasado", pensaría Dantzig). Tras muchas horas de trabajo, los resolvió y entregó los resultados al profesor. Varios días después, Neyman se presentó en la casa de su alumno para comunicarle que lo que había resuelto con éxito eran dos grandes e importantes problemas que, hasta entonces, nadie había conseguido resolver.

Bolsa de Madrid.

Universidad de Berkeley (EE.UU.), donde George Dantzig estudió su doctorado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Dos tipos de parámetros estadísticos

Empezaremos considerando solo dos tipos de parámetros estadísticos: los de *centralización* y los de *dispersión*.

- Los **parámetros de centralización** nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos.
- Los **parámetros de dispersión** nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

Parámetros de centralización

Media

Si llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a los valores que toma una distribución estadística, la **media,** o promedio, se designa por $\bar{x}$ y se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{Abreviadamente: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Por ejemplo, estos son los resultados del número de pruebas físicas superadas por los 10 integrantes de un equipo deportivo: 1, 0, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 4, 4

Calculamos la media:

$$\bar{x} = \frac{1+0+3+4+5+2+3+4+4+4}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Mediana

Si ordenamos los datos de menor a mayor, la **mediana,** *Me*, es el valor que está en medio: es decir, tiene tantos individuos por debajo como por encima. Si el número de datos fuera par, a la mediana se le asigna el valor medio de los dos términos centrales.

En el ejemplo anterior, para hallar la mediana ordenamos los datos:

0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

Los datos centrales son 3 y 4, por tanto, la mediana es 3,5.

Moda

La **moda,** *Mo*, es el valor que tiene mayor frecuencia.

La moda del ejemplo anterior es 4, ya que es el valor con mayor frecuencia.

Notación

El signo $\sum$ se utiliza para indicar sumas de varios sumandos.

$\sum x_i$ se lee: "suma de los x_i"

Distribuciones con más de una moda

Una distribución puede tener más de una moda. Una con dos modas se denomina *bimodal*; una con tres, *trimodal*…

Piensa y practica

1. Calcula la media, la mediana y la moda de cada una de estas distribuciones estadísticas:

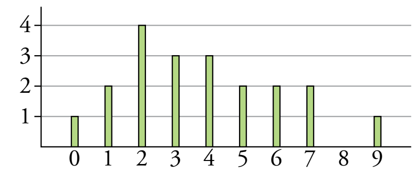
a) 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 11, 12, 17

b) 10, 12, 6, 9, 10, 8, 9, 10, 14, 2

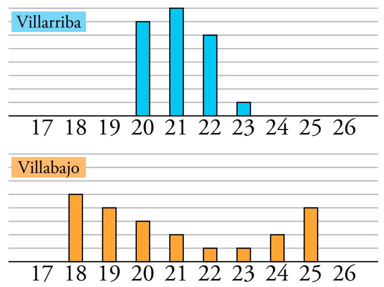
c) 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 3, 7

d) 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1

2. Halla los parámetros de centralización de esta distribución dada por su diagrama de barras:



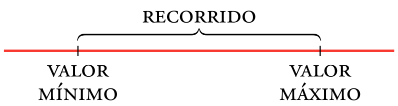
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



Parámetros de dispersión

Las gráficas del margen corresponden a las edades de los jugadores de los equipos de fútbol de dos pueblos rivales. En ambas, la edad media es, aproximadamente, 21 años. Observa que, aun teniendo la misma media, estas distribuciones son muy distintas. Necesitamos otros parámetros que señalen esas diferencias.

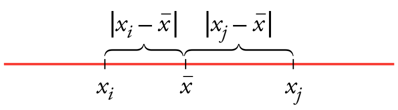
Para medir cómo de dispersa es una distribución, la idea clave es medir el grado de separación de los datos a la media.



■ RECORRIDO O RANGO

Es la diferencia entre el dato mayor y el menor. Es decir, es la longitud del tramo dentro del cual están los datos.

En el ejemplo del número de pruebas superadas, el recorrido es 5 – 0 = 5.



■ DESVIACIÓN MEDIA

Es el promedio de las distancias de los datos a la media:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

En el ejemplo de la página anterior, cuya media era 3, la desviación media es:

$$DM = \frac{|1-3| + |0-3| + \ldots + |4-3|}{10} = \frac{12}{10} = 1{,}2$$

■ VARIANZA

Es el promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Esta fórmula es equivalente a la siguiente:

$$\text{Varianza} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

La varianza de la distribución del ejemplo es:

$$\text{Varianza} = \frac{1^2 + 0^2 + \ldots + 4^2}{10} - 3^2 = \frac{112}{10} - 9 = 11{,}2 - 9 = 2{,}2$$

■ DESVIACIÓN TÍPICA, σ

Es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$

La desviación típica de nuestro ejemplo es $\sigma = \sqrt{2{,}2} = 1{,}48$.

A partir de ahora prestaremos especial atención a la media $(\bar{x})$ y a la desviación típica (σ). La información que da cada uno complementa a la del otro.

¿Por qué la desviación típica?

La varianza tiene un grave inconveniente. Imagina que estamos tratando con una distribución de estaturas dadas en cm. La media vendría dada en cm, pero la varianza vendría en cm^2 (es decir, una superficie en lugar de una longitud). Por eso, extraemos su raíz cuadrada, obteniendo la desviación típica que, en nuestro ejemplo, sí sería una longitud dada en cm.

Piensa y practica

3. Halla los parámetros de dispersión de las distribuciones del ejercicio 1 de la página anterior.

4. Halla de dos formas distintas la varianza de esta distribución: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Cálculo de $\bar{x}$ y σ en tablas de frecuencias

Cuando los datos estadísticos vienen dados mediante tablas de frecuencias, los cálculos pueden disponerse para que los parámetros se obtengan con gran comodidad.

x_i	f_i
4	1
5	10
6	14
7	5
8	2
9	1

■ Cálculo de $\bar{x}$

Veámoslo con un ejemplo: la tabla de frecuencias de la derecha corresponde a las notas obtenidas por los 33 alumnos de una clase en el último examen.

Para calcular la media de las notas, tendríamos que sumar:

$$4 + \underbrace{(5 + 5 + \ldots + 5)}_{10\text{ veces}} + \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{14\text{ veces}} + \underbrace{(7 + 7 + \ldots + 7)}_{5\text{ veces}} + 8 + 8 + 9$$

y dividir el resultado por $1 + 10 + 14 + 5 + 2 + 1 = 33$.

Sin embargo, la suma de arriba se obtiene más eficazmente así:

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1$$

Es decir, cada valor de la variable se multiplica por la frecuencia asociada y se suman todos los resultados.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
4	1	4
5	10	50
6	14	84
7	5	35
8	2	16
9	1	9
	33	198
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

Para facilitar estos cálculos, añadimos una nueva columna a la tabla, $f_i \cdot x_i$.

El total de individuos se obtiene sumando la columna f_i.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 33 \rightarrow \sum f_i = 33$$

La suma de todas las notas se halla sumando la columna $f_i \cdot x_i$.

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n = 198 \rightarrow \sum f_ix_i = 198$$

La media es: $\bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \dfrac{198}{33} = 6$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
x_1	f_1	f_1x_1
x_2	f_2	f_2x_2
…	…	…
x_n	f_n	f_nx_n
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

En una distribución dada por su tabla de frecuencias, para hallar la **media** se añade a la tabla la columna $f_i \cdot x_i$ y se procede así:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

donde $\sum f_ix_i = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ es la suma de todos los valores;
y $\sum f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es el número de individuos.

Piensa y practica

1. Calcula la media de las siguientes distribuciones:

a) NÚMERO DE HIJOS

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1

b) NÚMERO DE SUSPENSOS EN ESTA EVALUACIÓN

x_i	0	1	2	3	4
f_i	17	11	3	1	1

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

■ CÁLCULO DE σ

La **desviación típica** admite dos expresiones equivalentes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}}$$

donde $\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + f_n(x_n - \bar{x})^2$ es la suma de los cuadrados de las desviaciones a la media.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2}$$

donde $\Sigma f_i x_i^2 = f_1 x_1{}^2 + \ldots + f_n x_n{}^2$ es la suma de los cuadrados de todos los valores.

En la web

Ampliación: demostración de la equivalencia de las igualdades para la desviación típica.

Con las dos fórmulas se llega al mismo resultado. Sin embargo, es mucho más práctica la segunda de ellas. Veamos por qué:

Puesto que $f_i \cdot x_i^2$ es igual a $(f_i \cdot x_i) \cdot x_i$, añadiremos en la tabla de frecuencias la columna que se obtiene multiplicando los correspondientes elementos de las columnas x_i y $f_i \cdot x_i$. Con la tabla original, las dos nuevas columnas y las sumas totales, se calculan fácilmente la media y la desviación típica:

$(x_i) \cdot (f_i \cdot x_i)$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
4	1	4	16
5	10	50	250
6	14	84	504
7	5	35	245
8	2	16	128
9	1	9	81
	33	198	1 224
	Σf_i	$\Sigma f_i x_i$	$\Sigma f_i x_i^2$

- MEDIA:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{198}{33} = 6$$

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1224}{33} - 6^2} = 1{,}04$$

Tablas con datos agrupados en intervalos

En la web

HOJA DE CÁLCULO. Aplicación para confeccionar tablas de frecuencias, representar el gráfico correspondiente y calcular $\bar{x}$, σ y C.V.

Cuando tenemos los datos agrupados en intervalos (en lugar de valores puntuales), a cada intervalo se le asigna su valor central, su **marca de clase** (ver página 188). Se obtiene así una tabla de frecuencias como las anteriores y se procede de igual forma.

Piensa y practica

2. Dada la tabla de frecuencias con las dos columnas correspondientes $f_i \cdot x_i$ y $f_i \cdot x_i^2$, copia y completa la fila de los totales y halla la media y la desviación típica de esta distribución:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL			

3. Completa en tu cuaderno la tabla con las marcas de clase correspondientes y calcula la media y la desviación típica de la siguiente distribución:

PESOS	PERSONAS
50 a 58	6
58 a 66	12
66 a 74	21
74 a 82	16
82 a 90	5

➡

x_i	f_i
54	6
	12
	21
	16
	5

4. Halla las desviaciones típicas de las distribuciones de la actividad 1 de la página anterior.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Obtención de $\bar{x}$ y σ con calculadora

x_i	f_i
151	1
156	4
161	9
166	10
171	4
176	2

Estudiemos con un ejemplo (observa la tabla del margen) los pasos que hay que dar para introducir eficazmente unos datos en la calculadora y conseguir los correspondientes resultados.

PASOS QUE SE DEBEN DAR	EJEMPLO
① **Preparación**. Pon el aparato en disposición de realizar cálculos estadísticos: *MODO SD. Analiza en tu calculadora cómo se consigue este modo.	MODE* → SD
② **Borra** los datos que puedan haberse quedado acumulados de un trabajo anterior. (En algunas calculadoras, aunque se apaguen, estos datos no se borran).	INV AC
③ **Introduce** los datos. Cada dato se introduce poniéndolo en la pantalla y pulsando la tecla DATA. Si el dato está n veces, se pulsará n veces la tecla DATA; o bien se hará: dato ⊗ n DATA. Sigue hasta cargar todos los datos.	151 ⊗ 1 DATA → 151 156 ⊗ 4 DATA → 156 161 ⊗ 9 DATA → 161 166 ⊗ 10 DATA → 166 171 ⊗ 4 DATA → 171 176 ⊗ 2 DATA → 176
④ **Corrige**. Posibilidad de borrar. Si has introducido un dato erróneamente, puedes eliminarlo escribiéndolo en pantalla y pulsando INV DATA.	Dato erróneo: 181 ⊗ 6 DATA Bórralo: 181 ⊗ 6 INV DATA
⑤ **Resultados**. Pulsa las teclas:	
n → número de individuos → $n = \sum f_i$	n → 30
Σx → suma de todos los valores → $\sum x = \sum f_i x_i$	Σx → 4920
Σx^2 → suma de los cuadrados de los valores → $\sum x^2 = \sum f_i x_i^2$	Σx^2 → 807910
$\bar{x}$ → media	$\bar{x}$ → 164
σ_n → desviación típica	σ_n → 5.859465

Esta consulta la puedes hacer en cualquier momento del proceso. Después, si lo deseas, puedes seguir introduciendo datos.

Calculadora

Casi todas las calculadoras científicas están preparadas para el cálculo de los parámetros $\bar{x}$ y σ.

Las orientaciones que aquí se ofrecen son generales, ya que cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y unos procedimientos propios. Por tanto, **investiga en tu calculadora** y consulta su manual de instrucciones.

Ayuda

Si en el teclado de tu calculadora no aparecen explícitamente las teclas de resultados:

n, $\sum x$ y $\sum x^2$

búscalos mediante las secuencias

RCL 3, RCL 2, RCL 1

Piensa y practica

1. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE HIJOS de la actividad 1 de la página 198.

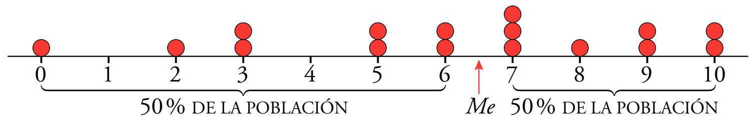
2. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE SUSPENSOS de la actividad 1 de la página 198.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Parámetros de posición: mediana y cuartiles

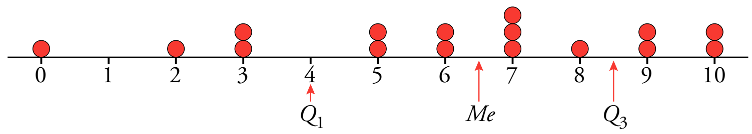
Se ha preguntado a un grupo de 16 personas por el número de veces que han salido a correr este mes. Estos son los resultados ordenados y su representación:

0, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10



Observa que a la derecha de la mediana, *Me*, está la mitad de la población. A su izquierda, la otra mitad. Es decir, la mediana parte en dos a la población.

¿Y si quisiéramos partir la población en cuatro partes con el mismo número de individuos? Habría que señalar otros dos puntos, los *cuartiles*, Q_1 y Q_3.



Primer cuartil, Q_1, es el valor de la variable que deja por debajo de él a un cuarto de la población, y por encima, tres cuartos. **Tercer cuartil, Q_3,** es el valor de la variable que deja por encima de él a un cuarto de la población y por debajo, tres cuartos. Se llaman Q_1 y Q_3 porque la mediana es el segundo cuartil, Q_2. La diferencia $Q_3 - Q_1$ se llama **recorrido intercuartílico.**

Mediana: posición y centralización

La mediana y los cuartiles son parámetros de **posición** porque cada uno de ellos indica un lugar (una *posición*) respecto a los demás valores de la distribución.

Entre los parámetros de posición, la mediana es el que ocupa el *lugar central*. Por eso es, también, un parámetro de **centralización.**

Ejercicio resuelto

En un cumpleaños se ha roto la piñata y cada uno de los diez amigos que esperaban han cogido tantos regalos como han podido. Esta es la lista ordenada del número de regalos que tiene cada uno.

2, 2, 3, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11

Calcular la mediana y los cuartiles.

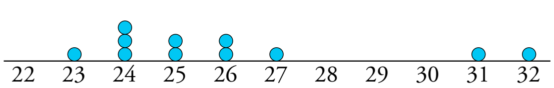
Como la distribución tiene 10 individuos, la cuarta parte es 10 : 4 = 2,5.

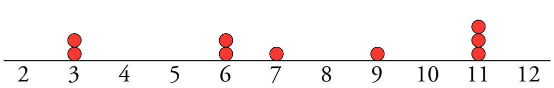
- Q_1 tiene que dejar a su izquierda "dos elementos y medio". Por tanto, el primer cuartil tiene que estar situado en el tercer elemento, ya que "medio individuo" queda a su izquierda y el "otro medio" a su derecha.

  Es decir, $Q_1 = 3$.
- *Me* debe dejar 5 individuos a su izquierda y otros 5 a su derecha. Por tanto, está entre el quinto (7) y el sexto (8); es decir, $Me = 7{,}5$.
- Q_3 debe dejar a su izquierda "siete elementos y medio" ($2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$). Mediante un razonamiento similar al que se ha seguido para Q_1, el tercer cuartil está en el octavo elemento; es decir, $Q_3 = 9$.

Piensa y practica

1. Calcula Q_1, *Me* y Q_3 y sitúalos en cada una de las siguientes distribuciones representadas:

a) 

b) 

2. En cada una de las distribuciones siguientes:

a) Calcula Q_1, *Me* y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa en ellos Q_1, *Me* y Q_3.

A: 0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 14, 17, 29, 35

C: 12, 13, 19, 25, 63, 85, 123, 132, 147

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Diagramas de caja y bigotes

Esta representación gráfica está estrechamente ligada a los parámetros de posición que hemos aprendido. Veamos con un ejemplo cómo se construye.

Ejemplo 1

El número de personas que componen cada una de las familias de un grupo de amigos viene dado en el margen.

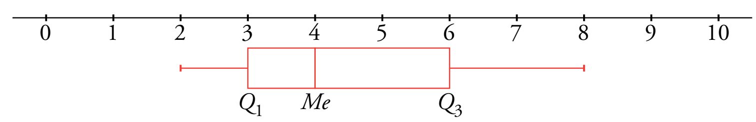
2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 6 6 6 6 6 7 7 8 8

Q_1 Me Q_3

Observamos que:

- El menor valor es 2 y el mayor es 8.
- $Q_1 = 3$; $Me = 4$ y $Q_3 = 6$.

Con estos resultados, dibujamos el diagrama:



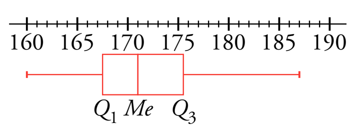
Observa

La longitud de la caja es $Q_3 - Q_1$, el recorrido intercuartílico.

Es decir, **la caja** describe el tramo que hay entre los dos cuartiles, señalando expresamente la mediana, y **los bigotes** se extienden a la totalidad de los datos.

Ejemplo 2

Representamos en el margen la distribución de las alturas de los socios de un club mediante un diagrama de caja y bigotes. A la vista del diagrama podemos decir:



- El más bajo mide 160 cm, y el más alto, 187 cm.
- Los cuartiles y la mediana son $Q_1 = 167{,}5$; $Me = 171$ y $Q_3 = 175{,}5$.
- Por tanto, un 25 % de los socios miden entre 160 cm y 167,5 cm; otro 25 %, entre 167,5 cm y 171 cm; otro 25 %, entre 171 cm y 175,5 cm, y el último 25 % (los más altos), entre 175,5 cm y 187 cm.

Ejercicio resuelto

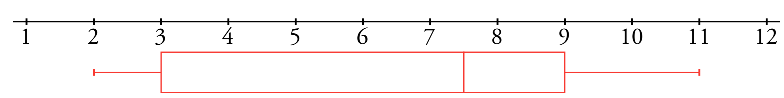
Representar en un diagrama de caja y bigotes cada una de las siguientes distribuciones:

a) 2, 2, 3, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11

b) 1, 1, 2, 3, 5, 5, 15, 27, 41, 43

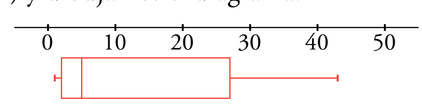
a) En la página anterior hemos obtenido: $Q_1 = 3$; $Me = 7{,}5$: $Q_3 = 9$.

Ponemos la escala y representamos el diagrama:



b) Obtenemos, primero, sus parámetros de posición: $Q_1 = 2$; $Me = 5$; $Q_3 = 27$.

Fijamos la escala (hay que tener en cuenta que los últimos datos tienen valores "muy grandes") y dibujamos el diagrama:



Piensa y practica

3. Representa con un diagrama de caja y bigotes cada distribución de la actividad 2 de la página anterior.

Utiliza los valores de Q_1, Me y Q_3 que hallaste en esa actividad.

4. Representa mediante un diagrama de caja y bigotes los siguientes puntos conseguidos en la diana:

7 6 6 8 5	5 7 9 6 8	4 7 5 8 6
7 5 6 6 7	5 6 6 5 8	6 7 5 9 3

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Parámetros de centralización y dispersión

1. Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación en cada caso:

a) 6, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 7, 6, 4, 6, 10, 6

b) 11, 12, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 14, 12

c) 165, 167, 172, 168, 164, 158, 160, 167, 159, 162

2. El número de calzado que llevan los alumnos y las alumnas de una clase son los siguientes:

42, 40, 43, 45, 43	44, 38, 39, 40, 43
41, 42, 38, 36, 38	45, 38, 39, 42, 40
40, 39, 37, 36, 41	46, 44, 37, 42, 39

a) Haz una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 35,5 - 38,5 - 40,5 - 42,5 - 44,5 - 46,5.

b) Halla la media, la desviación típica y el CV.

3. Una fábrica ha contado el número de vasos que se le rompen en cada cajón de camino a la tienda. Estos son los resultados:

N.° DE VASOS ROTOS	0	1	2	3	4	5	6
N.° DE CAJONES	51	23	11	8	4	2	1

a) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

4. La siguiente tabla muestra los lanzamientos de jabalina que se han realizado en la clasificación para los juegos olímpicos:

DISTANCIAS (m)	N.° DE LANZADORES
54 a 58	4
58 a 62	11
62 a 66	24
66 a 70	9
70 a 74	2

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

Parámetros de posición y diagramas de caja y bigotes

5. Calcula la mediana y los cuartiles de cada una de las siguientes distribuciones:

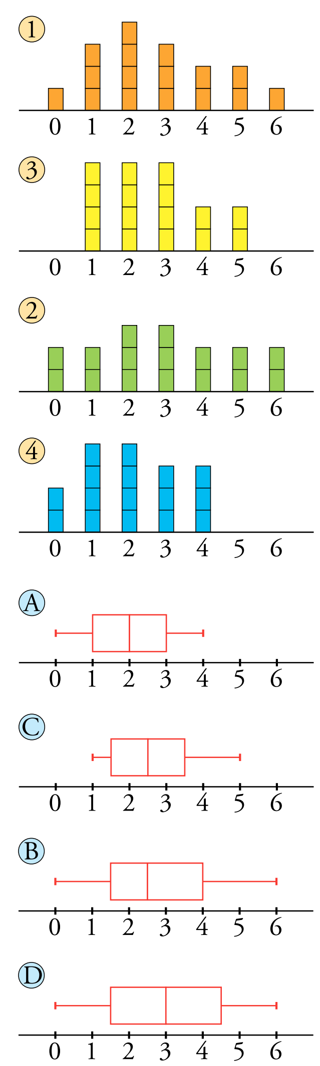
a) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 7, 8 10, 11

b) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 12, 14, 19, 22

c) 123, 125, 134, 140, 151, 173, 178, 186, 192, 198

6. Dibuja el diagrama de caja y bigotes de cada una de las distribuciones del ejercicio anterior.

7. Asocia cada gráfico de barras con su correspondiente diagrama de caja y bigotes:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

8. Esta tabla muestra la distribución del número de asignaturas suspendidas en una evaluación por los estudiantes de una clase:

N.º DE ASIG. SUSP.	0	1	2	3	4	5
N.º DE ESTUDIANTES	10	4	5	2	4	3

Representa esta distribución mediante un diagrama de caja y bigotes.

Puedes poner todos los números en fila para hallar los cuartiles, pero mejor es que, sin ponerlos, los imagines en fila y razones en consecuencia.

9. Conocemos el número de días al mes que ha llovido este año en una cierta región.

Los valores de los cuartiles son 6, 9 y 14. El mes que más llovió fue marzo con 21 días y sabemos que el rango de la distribución es 18.

Construye el diagrama de caja y bigotes.

¿Crees que es una región lluviosa?

Autoevaluación

1. De la siguiente distribución:

6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

halla:

- la media
- la mediana
- la desviación media
- la desviación típica
- el coeficiente de variación

2. Calcula $\bar{x}$ y σ de las siguientes distribuciones:

a) Número de días que han ido a la biblioteca los alumnos de un curso:

N.º DE DÍAS	FRECUENCIA
0	6
1	7
2	8
3	5
4	2
5	2

b) Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

TIEMPO (min)	FRECUENCIA
De 1 a 9	4
De 9 a 17	5
De 17 a 25	8
De 25 a 33	7
De 33 a 41	4
De 41 a 49	2

3. Las notas obtenidas por los 30 alumnos de una clase de 3.º ESO en un examen tipo test con 5 preguntas han sido:

3	3	2	4	5		4	1	3	3	2
3	2	4	4	3		1	2	0	5	3
2	0	3	5	3		3	5	2	1	4

a) Calcula la mediana y los cuartiles.

b) Dibuja el correspondiente diagrama de caja y bigotes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

15 Azar y probabilidad

Comienzo en los juegos de azar

Al principio, la teoría de la probabilidad estuvo estrechamente relacionada con los juegos y las apuestas.

Los primeros estudios matemáticos relativos a juegos de azar se deben a algebristas italianos del siglo XVI. Uno de ellos, **Cardano,** contumaz jugador, escribió el primer tratado medianamente organizado sobre este tema: *El libro de los juegos de azar*.

Jerónimo Cardano (1501-1576).

Pascal y Fermat

En 1654, el matemático francés **Blaise Pascal** realizó un viaje en compañía de su amigo el caballero De Meré, un jugador habitual. Este le propuso una serie de problemas de azar que interesaron vivamente al matemático. Unos días después, Pascal se los expuso a su amigo **Pierre Fermat,** también matemático, y ambos los resolvieron, aunque por caminos distintos.

La correspondencia que se estableció entre ellos intercambiando ideas y nuevos problemas dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

"Niños jugando a los dados" de Murillo.

Desarrollo como ciencia

A partir de entonces, otros matemáticos profundizaron en este nuevo campo. Los más destacados fueron el suizo **Jacob Bernoulli** (*Ars Conjectandi*, 1713) y el francés **Laplace** (*Teoría analítica de las probabilidades*, 1812).

A mediados del siglo XIX el naturalista austriaco, **Gregor Mendel,** aplicó la probabilidad en el estudio de la herencia.

148

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Sucesos aleatorios

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Se llaman, pues, **sucesos aleatorios.** Por ejemplo:

DEPENDEN DEL AZAR	NO DEPENDEN DEL AZAR
Nevará mañana.	Amanecerá mañana.
Ganará mi equipo de baloncesto.	Jugará mi equipo de baloncesto.
Al lanzar un dado, saldrá un cinco.	Al lanzar el dado, caerá.
Acertaré más de 11 en la quiniela.	Jugaré a la quiniela.

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.

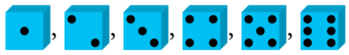
En latín, *alea* significa "dado" y también "suerte", "azar".

Experiencias aleatorias

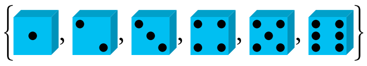
Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias,** es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la *experiencia aleatoria* consistente en *lanzar un dado y observar lo que sale.*

Lanzar un dado y observar el resultado obtenido es una **experiencia aleatoria** porque el resultado depende del azar.

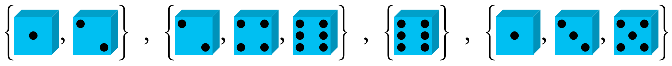
- **Caso.** Cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral.** El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral,** al que designamos por E.

  En el dado, el espacio muestral es: $E =$ 

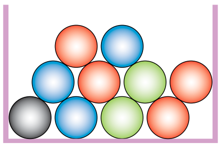
- **Sucesos.** Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos.** Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia aleatoria *lanzar un dado* son:



Piensa y practica

1. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

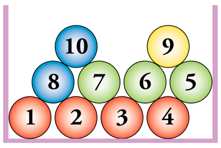
2. *Lanzamos una chincheta y observamos si cae con la punta hacia arriba o no.*

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

3. En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

4. En una bolsa hay 10 bolas, todas rojas.

Sacamos una bola y anotamos su color.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Probabilidad de un suceso

La **probabilidad** de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso S ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Ley fundamental del azar

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Cómo se mide la probabilidad de un suceso

- Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de la moneda visto, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos*.

  Por ejemplo, para asignar probabilidades a cada cara de un dado correcto, tenemos en cuenta que son 6 casos, todos con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de cada cara es 1/6.

- Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori*[(1)] desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar*.

  Por ejemplo, si un cierto jugador de baloncesto ha encestado 187 tiros libres y ha fallado 85 (su número de intentos ha sido 187 + 85 = 272), razonamos así:

  f_r[ACIERTO] = 187/272 = 0,6875. Por tanto, P[ACIERTO] ≈ 0,6875.

  f_r[FALLO] = 85/272 = 0,3125. Por tanto, P[FALLO] ≈ 0,3125.

(1) *a priori*: antes de empezar.

Piensa y practica

1. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 58? ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada una de las bolas?

2. En otra bolsa hay bolas de dos tamaños. Sacamos una, miramos si es grande, G, o chica, CH, y la devolvemos a la bolsa. Así observamos 84 bolas G y 36 bolas CH. ¿Qué valores asignarás a $P[G]$ y a $P[CH]$?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ley de Laplace para experiencias regulares

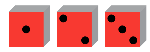
Ten en cuenta

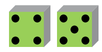
$P[\ ,\ ,\ ] =$

$= P[\ ] + P[\ ] + P[\ ] =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

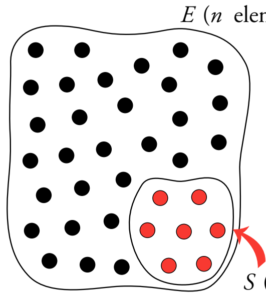
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

 de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\ ] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

 de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\ ] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\ ] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.



Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene n elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

S es un suceso que consta de k elementos.

Entonces, la probabilidad de S es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$ LEY DE LAPLACE

Problemas resueltos

ROJAS	40
VERDES	25
AZULES	15
NEGRAS	10

1. ***En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.***

$P[\ ] = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; $P[\ ] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; $P[\ ] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $P[\ ] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

2. ***En una baraja de 40 cartas, hallar la probabilidad de obtener REY.***

$P[\text{REY}] = \frac{\text{número de reyes}}{\text{número total de cartas}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

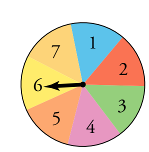
3. ***En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo, este sea defectuoso.***

$P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3\,586} = 0{,}0867$

Piensa y practica

1. En un campamento juvenil hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar al portavoz de ellos. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

2. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguno de los colores rojo, verde o azul?



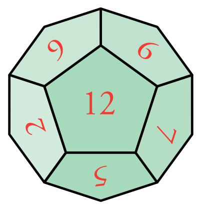
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" B = "Más de 4"

C = "Número par" D = "No múltiplo de 3"

2. Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos: A = "Menor que 4"

B = "Número impar" C = "Mayor que 5"

3. Escribimos cada una de las letras de la palabra juego en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.

b) Describe el suceso "obtener vocal".

c) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

4. Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos: A = "La primera fue cara".

B = "Ninguna fue cara".

5. Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados en el orden en que salen.

a) Describe el espacio muestral (hay 8 casos).

b) Describe los sucesos siguientes:

A = "Obtener dos veces cara"

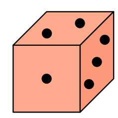
B = "Obtener dos veces cruz"

C = "No obtener ninguna cruz"

Cálculo de probabilidades

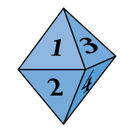
6. Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:

a)



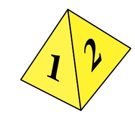
(Cubo numerado del 1 al 6)

b)



(Octaedro numerado del 1 al 8)

c)



(Tetraedro numerado del 1 al 4)

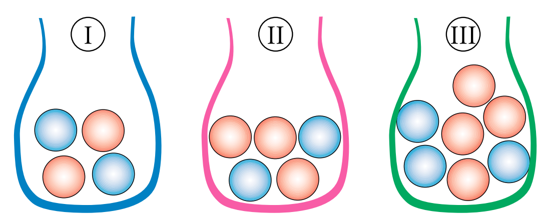
7. En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra.

Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea azul. b) No sea negra.

c) Sea roja o verde. d) No sea amarilla ni negra.

8. Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:



9. Lanzamos un dado correcto. Hallas las probabilidades de que el resultado sea:

a) Múltiplo de 3. b) Múltiplo de 2.

c) Mayor que 1. d) Menor que 5.

e) Menor que 1. f) Potencia de base 2.

10. Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

a) La carta sea de BASTOS.

b) La carta NO sea ni AS ni FIGURA.

c) La carta sea un número menor que 6.

d) La carta sea de OROS O FIGURA.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

11. En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:

N.º ERRATAS	N.º PÁGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Al elegir una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?

c) ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

12. De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que…

a) … sea roja? b) … no sea negra?

13. Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

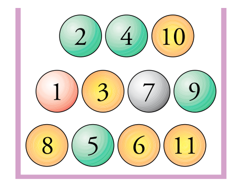
a) Sea un CINCO.

b) No sea un CABALLO.

c) Sea de OROS o de COPAS.

d) No sea de ESPADAS.

14. De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color.



Halla las probabilidades de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

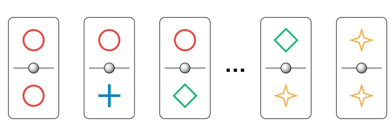
c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.

Autoevaluación

1. Describe un dominó con los símbolos ○ + ◇ ✧.

Las piezas serían como estas:



Dibuja en tu cuaderno todas. Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".

2. Dejamos caer 1 000 chinchetas. Caen 649 así y el resto así.

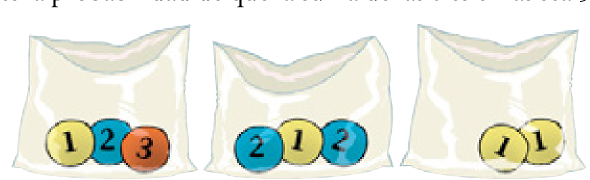
Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos y . Estima las probabilidades de ambos casos.

3. En un equipo de natación hay 3 niñas americanas, 5 europeas, 2 asiáticas y 2 africanas.

Si elegimos una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiática? ¿Y la de que no sea europea?

4. Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea mayor que la de Ana?

5. De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Página 207

Resuelve

1. Busca información sobre los sólidos arquimedianos:

a) ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados forman la superficie de un rombicuboctaedro?

b) Escribe el nombre de otros tres sólidos arquimedianos.

a) La superficie de un rombicuboctaedro está formada por 8 triángulos y 18 cuadrados.

b) Cuboctaedro, icosidodecaedro, rombicosidodecaedro.

2. Calcula, al estilo de Arquímedes, la fórmula del volumen de una esfera, teniendo en cuenta las siguientes ayudas:

- **La suma de los volúmenes de varias pirámides con la misma altura es:**

$$A = \frac{1}{3}\ (\text{SUMA DE LAS SUPERFICIES DE LAS BASES}) \cdot \textbf{Altura}$$

- **El volumen de la esfera se calcula aplicando la fórmula anterior a la suma de todas las finísimas pirámides, de vértice O y altura r, en que se puede descomponer la esfera.**
- **El área de la superficie esférica es $4\pi r^2$.**

La suma de la superficie de las bases de las pirámides coincide con la superficie esférica, $4\pi r^2$.

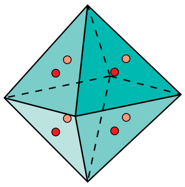
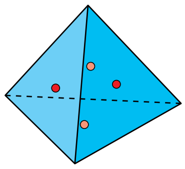
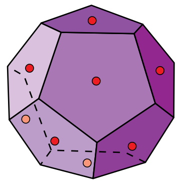
La altura de cada pirámide es muy próxima al radio de la esfera, r.

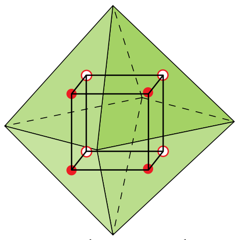
$$V = \frac{1}{3}\ (\text{Suma de las superficies de las bases}) \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3}(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

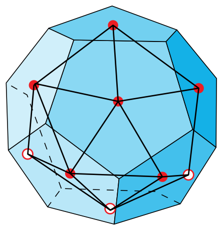
1 Poliedros regulares y semirregulares

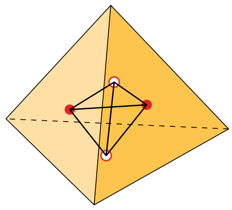
Página 208

1. **Hemos señalado en rojo los centros de las caras “frontales” de estos poliedros, y en color más claro, los centros de algunas caras “ocultas”. Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**


octaedro – cubo


dodecaedro – icosaedro


tetraedro – tetraedro

Página 209

2. Haz una tabla con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS					
VÉRTICES					
ARISTAS					

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler.

b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS	4	6	8	12	20
VÉRTICES	4	8	6	20	12
ARISTAS	6	12	12	30	30

a) Tetraedro $\rightarrow$ $4 + 4 - 6 = 2$

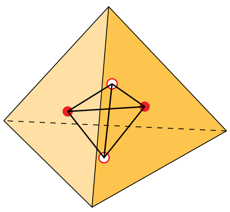
Cubo $\rightarrow$ $6 + 8 - 12 = 2$

Octaedro $\rightarrow$ $8 + 6 - 12 = 2$

Dodecaedro $\rightarrow$ $12 + 20 - 30 = 2$

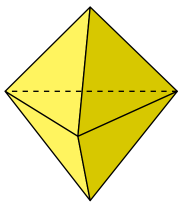
Icosaedro $\rightarrow$ $20 + 12 - 30 = 2$

b) Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un dodecaedro, se forma un icosaedro. Si hiciéramos lo mismo con un icosaedro, obtendríamos un dodecaedro. Además, el número de caras del dodecaedro coincide con el número de vértices del icosaedro, y viceversa. Ambos tienen el mismo número de aristas. Por tanto, son poliedros duales.

c) 

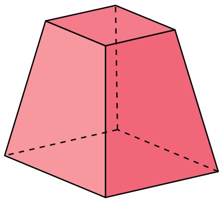
Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un tetraedro, se forma otro tetraedro. Además, el número de caras y de vértices en un tetraedro son iguales. El tetraedro es dual de sí mismo.

3. Hemos visto que esta figura no es un poliedro regular. ¿Es semirregular?



Esta figura no es un poliedro semirregular porque en todos los vértices no concurren los mismos polígonos.

4. **Esta pirámide truncada cuyas bases son cuadrados, ¿es un poliedro semirregular? ¿Por qué?**



No es un poliedro semirregular porque sus aristas no son todas iguales.

5. **Explica por qué las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales.**

Las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales porque son como poliedros regulares, solo se diferencian en que los primeros no tienen todas las caras iguales.

2 Truncando poliedros

Página 210

1. Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas adyacentes, los restantes poliedros regulares.

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

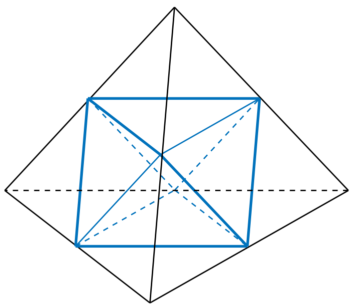
b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido.

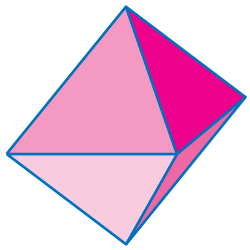
¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se le llama cuboctaedro?

c) ¿Qué figura resulta de truncar un icosaedro? Compárala con el resultado de truncar un dodecaedro que has visto antes y explica por qué es un poliedro semirregular (recuerda, se llama icosidodecaedro).

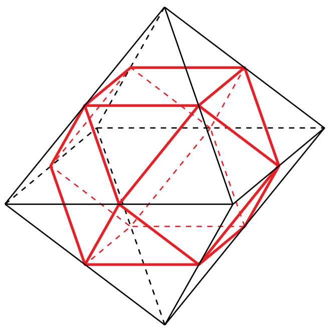
d) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en el epígrafe anterior.

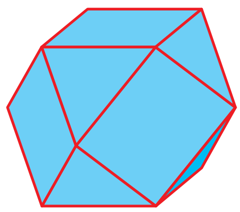
a) La figura que se obtiene es un octaedro.





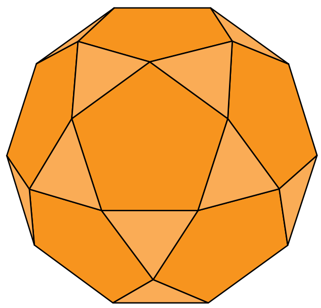
b) La figura que se obtiene es un cuboctaedro.





c) Al truncar un icosaedro se obtiene un icosidodecaedro, que se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos (es un poliedro semirregular).

Al truncar un dodecaedro también se obtiene un icosidodecaedro.



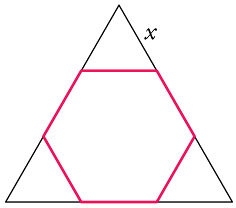
d) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

2. Explica por qué al truncar los poliedros regulares, excepto el tetraedro, se obtienen siempre poliedros semirregulares.

Obtenemos poliedros semirregulares porque al truncar siguiendo el patrón que se indica en la teoría, las caras que aparecen son dos tipos de polígonos regulares y en todos los vértices concurren el mismo número de caras.

Página 211

3. ¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?



$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.

4. Describe el tetraedro truncado.

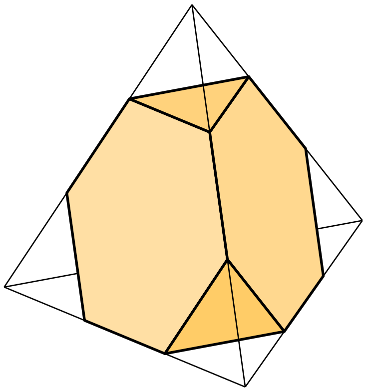
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices?

¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

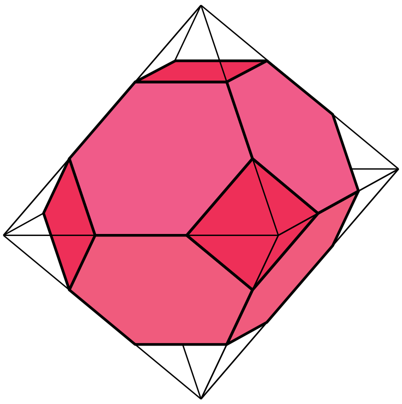


Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

5. Describe el octaedro truncado.



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del octaedro original.

6. Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

Tiene 90 aristas.

7. Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.

Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

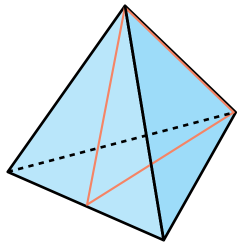
Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del icosaedro original.

3 Planos de simetría de una figura

Página 212

1. ¿Qué condiciones debe cumplir un plano para ser plano de simetría del tetraedro?

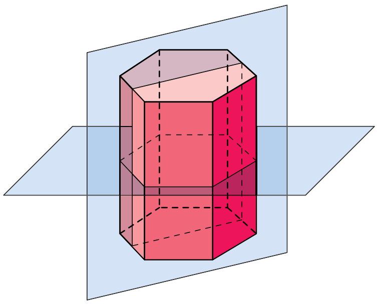
¿Cuántos planos de simetría tiene el tetraedro?



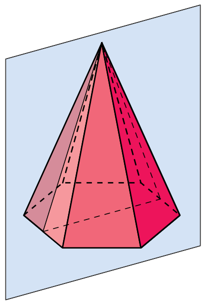
Para que un plano sea plano de simetría del tetraedro tiene que contener una arista y ser perpendicular a dos caras.

El tetraedro tiene 6 planos de simetría, uno por cada arista.

2. Dibuja un prisma hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene? ¿Y cuántos tiene una pirámide hexagonal regular?



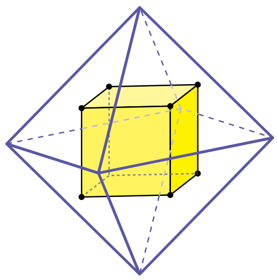
El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.



La pirámide hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

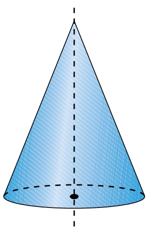
3. Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).

Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.

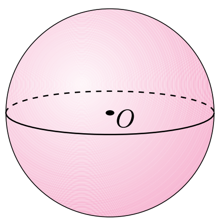


Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.

4. ¿Qué planos de simetría tiene un cono? ¿Y una esfera?



Cualquier plano que contiene al eje del cono es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.

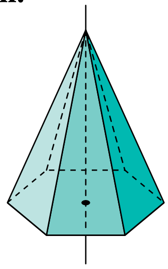


Cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de simetría de esta. Hay, pues, infinitos.

4 Ejes de giro de una figura

Página 213

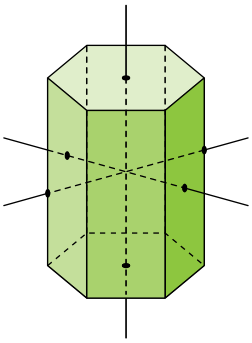
1. ¿Qué ejes de giro tiene una pirámide hexagonal regular? ¿De qué órdenes son? ¿Y un prisma hexagonal regular? (No pases por alto algunos de orden 2).



PIRÁMIDE HEXAGONAL

Hay solo un eje de giro de orden 6.

Pasa por el centro de la base y el vértice de la pirámide.

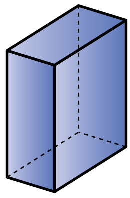


PRISMA HEXAGONAL

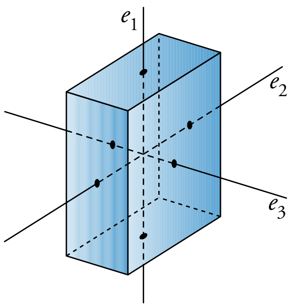
Hay un eje de giro de orden 6, el que pasa por el centro de las dos bases.

Hay 6 ejes de giro de orden 2: todos ellos son paralelos a las bases. 3 de ellos pasan por el punto medio de las dos caras latelares opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.

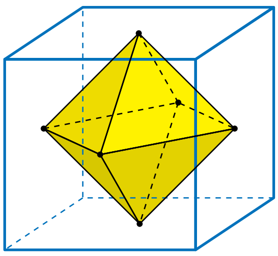
2. ¿Qué ejes de giro tiene un ortoedro con las tres dimensiones distintas? ¿De qué órdenes son?



Hay tres ejes de giro de orden 2, e_1, e_2 y e_3.



3. Estudia los ejes de giro del octaedro. Puedes basarte en los del cubo.



Todos los ejes de giro del cubo son también ejes de giro del octaedro inscrito en él. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de ejes de giro y de los mismos órdenes. Es decir:

- Tres ejes de giro de orden cuatro, que pasan por dos vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, que pasan por los centros de dos caras opuestas.

Al comparar estos ejes de giro con los del cubo, se puede observar la dualidad (caras $\leftrightarrow$ vértices, aristas $\leftrightarrow$ aristas):

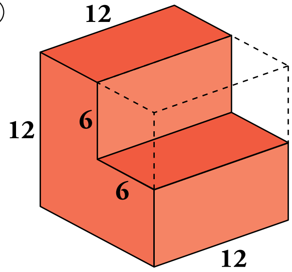
- Los ejes que en el cubo pasan por los centros de caras opuestas, en el octaedro pasan por vértices opuestos.
- Los ejes que en el cubo pasan por aristas opuestas, en el octaedro pasan por aristas opuestas.
- Los ejes que en el cubo pasan por dos vértices opuestos del cubo, en el octaedro pasan por los centros de caras opuestas.

5 Superficie de los cuerpos geométricos

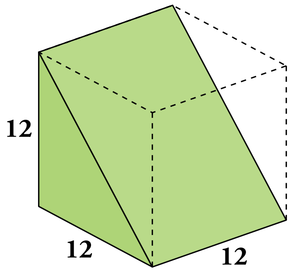
Página 217

1. Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:

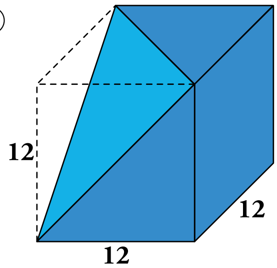
Ⓐ



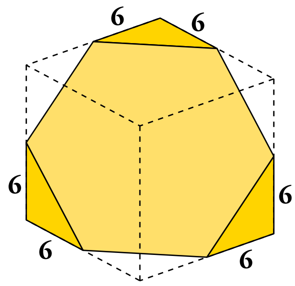
Ⓑ



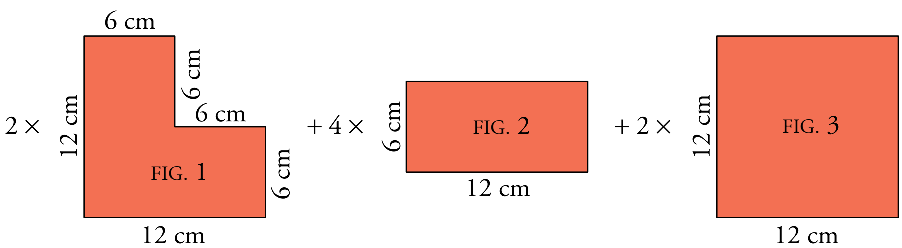
Ⓒ



Ⓓ



Ⓐ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



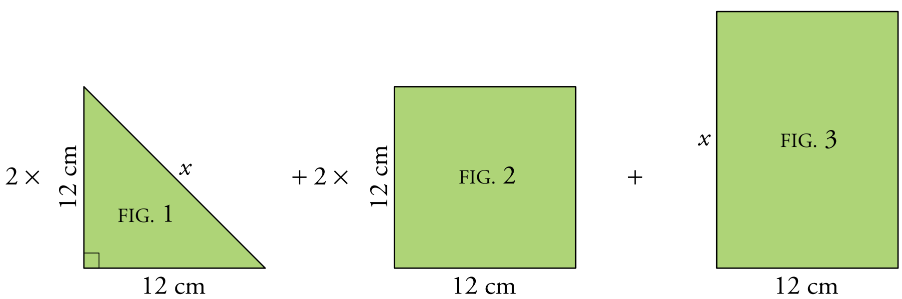
$A_{\text{FIG. 1}} = 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 108 + 4 \cdot 72 + 2 \cdot 144 = 792 \text{ cm}^2$

Ⓑ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16{,}97 \text{ cm}$

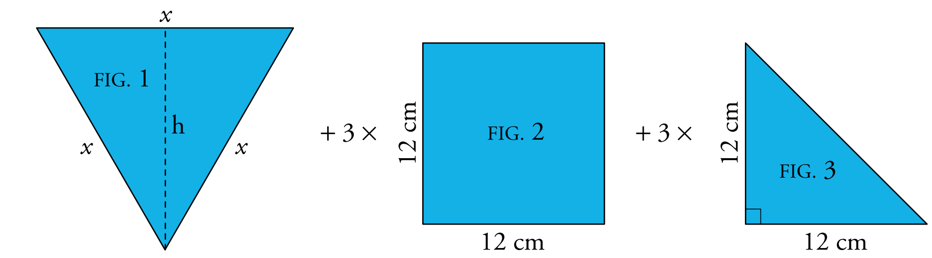
$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 16{,}97 = 203{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 72 + 2 \cdot 144 + 203{,}64 = 635{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓒ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:

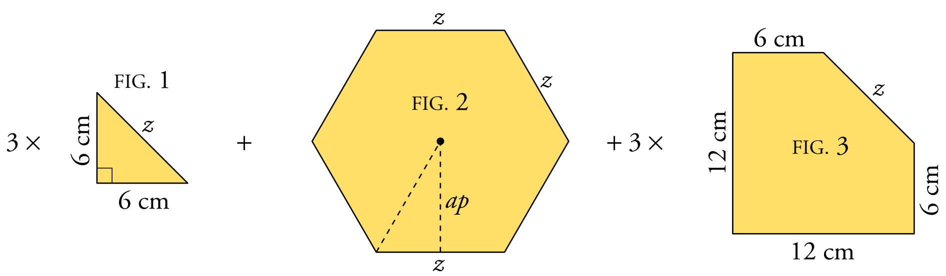


$x \approx 16{,}97$ cm (ver Ⓑ); $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}70$ cm

$A_{\text{FIG. 1}} = \frac{16{,}97 \cdot 14{,}70}{2} \approx 124{,}73 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 72 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{TOTAL}} = 124{,}73 + 3 \cdot 144 + 3 \cdot 72 = 772{,}73 \text{ cm}^2$

Ⓓ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$ cm

Apotema del hexágono regular: $ap = \sqrt{z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}35$ cm

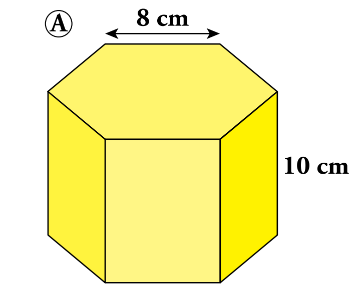
$A_{\text{FIG. 1}} = 18 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = \frac{6 \cdot 8{,}49 \cdot 7{,}35}{2} = 187{,}20 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 12 - A_{\text{FIG. 1}} = 144 - 7{,}35 = 136{,}65 \text{ cm}^2$

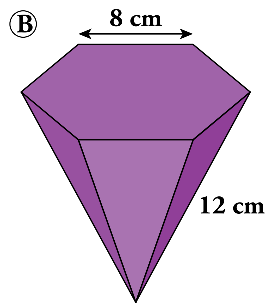
$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 7{,}35 + 187{,}20 + 3 \cdot 136{,}65 = 619{,}2 \text{ cm}^2$

2. Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.



ARISTA BASE → **8 cm**

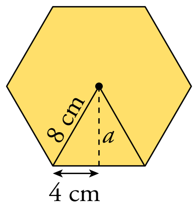
ALTURA PRISMA → **10 cm**



ARISTA BASE → **8 cm**

ARISTA LATERAL → **12 cm**

Ⓐ



$a = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 = 166{,}32 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$

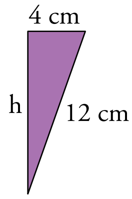
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 166{,}32 + 480 = 812{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A_{\text{BASE}} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

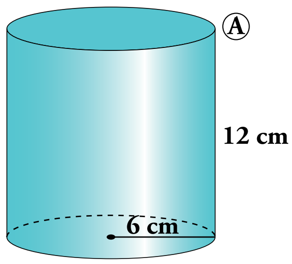
Apotema de la pirámide = $h = \sqrt{12^2 - 4^2} \approx 11{,}31$ cm

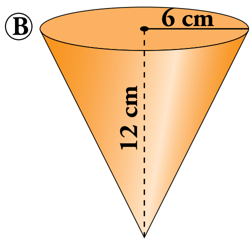
$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{8 \cdot 11{,}31 \cdot 6}{2} = 271{,}44 \text{ cm}^2$

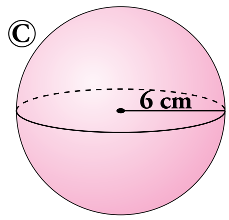
$A_{\text{TOTAL}} = 166{,}32 + 271{,}44 = 437{,}76 \text{ cm}^2$



3. Calcula el área de estos cuerpos:







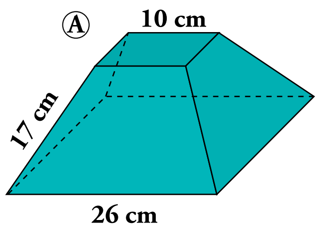
Ⓐ $A_{\text{TOTAL}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + 2\pi \cdot 6^2 \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

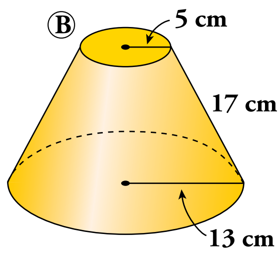
Ⓑ $g = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13{,}42$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 13{,}42 + \pi \cdot 6^2 \approx 366{,}06 \text{ cm}^2$

Ⓒ $A_{\text{TOTAL}} = 4\pi \cdot 6^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2$

4. Calcula el área de los siguientes cuerpos:





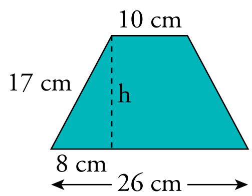
Ⓐ $A_{\text{BASE GRANDE}} = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE PEQUEÑA}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm

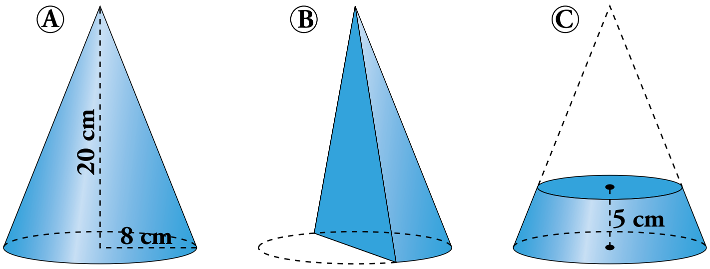
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{26 + 10}{2} \cdot 15 = 1\,080 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 676 + 100 + 1\,080 = 1\,856 \text{ cm}^2$



Ⓑ $A = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 5^2 + \pi(13 + 5) \cdot 17 = 530{,}93 + 78{,}54 + 961{,}33 = 1\,570{,}8 \text{ cm}^2$

5. Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.



Ⓐ $g = \sqrt{20^2 + 8^2} \approx 21{,}54$ cm

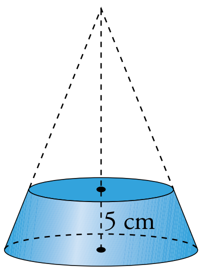
$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 21{,}54 + \pi \cdot 8^2 = 742{,}42 \text{ cm}^2$

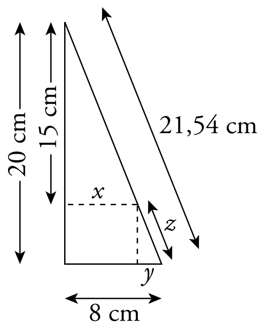
Ⓑ $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{2} \approx 100{,}53 \text{ cm}^2$; $A_{1/2 \text{ LATERAL}} = \dfrac{\pi \cdot 8 \cdot 21{,}54}{2} \approx 270{,}68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{16 \cdot 20}{2} = 160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 100{,}53 + 270{,}68 + 160 = 531{,}21 \text{ cm}^2$

Ⓒ





$\dfrac{20}{8} = \dfrac{15}{x} \rightarrow x = 6$ cm

$y = 8 - 6 = 2$ cm

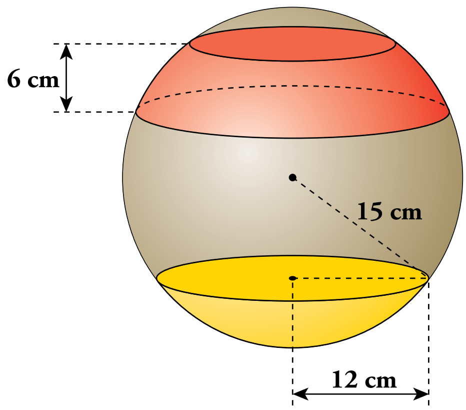
$z = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5{,}39$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (8 + 6) \cdot 5{,}39 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 6^2 \approx 551{,}22 \text{ cm}^2$

6. En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:

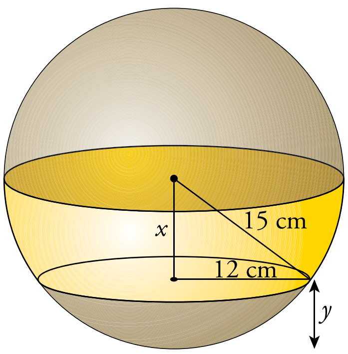
a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



a) $A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

b)



$x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

$y = 15 - 9 = 6$ cm

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

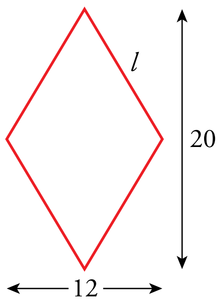
7. Halla el área de:

a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.



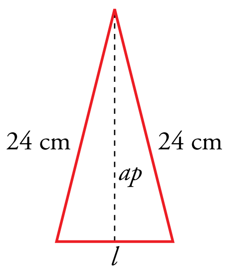
$l = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11{,}66$ cm

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$P_{\text{ROMBO}} = 46{,}65$ cm

a) $A_{\text{PRISMA}} = 2 \cdot A_{\text{ROMBO}} + P_{\text{ROMBO}} \cdot 24 = 1\,359{,}6 \text{ cm}^2$

b)



Cara lateral de la pirámide:

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{24^2 + 34} = 4{,}97$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot l \cdot ap/2 = 115{,}90 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PIRÁMIDE}} = 235{,}9 \text{ cm}^2$

c) 6 cuadrados $\rightarrow A_1 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$

8 triángulos $\rightarrow A_2 = 8 \cdot (10 \cdot 10\sqrt{3}/2) : 2 = 346{,}41 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 946{,}41 \text{ cm}^2$

d) 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Área de un pentágono de lado 10 cm:

$A_1 = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$

Área de un hexágono de lado 10 cm:

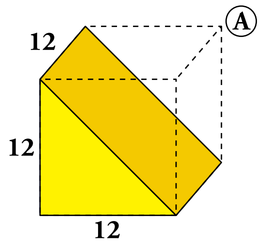
$A_2 = \dfrac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}80 \text{ cm}^2$

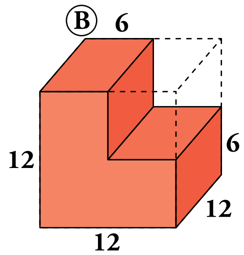
$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot A_1 + 20 \cdot A_2 = 7\,260 \text{ cm}^2$

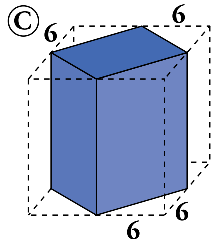
6 Volumen de los cuerpos geométricos

Página 219

1. Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:

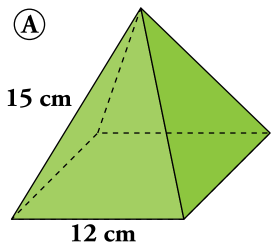


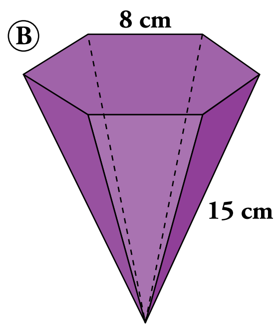




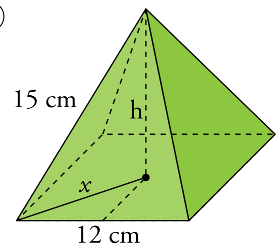
Ⓐ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$ Ⓑ $V = \dfrac{3}{4} \cdot 12^3 = 1\,296 \text{ cm}^3$ Ⓒ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$

2. Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:





Ⓐ

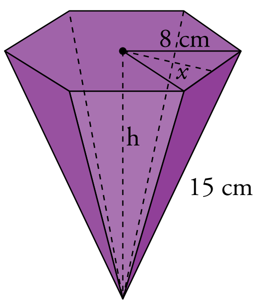


$x = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8,49 \text{ cm}$

$h = \sqrt{15^2 - 8,46^2} \approx 12,37 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12,37 \approx 593,76 \text{ cm}^3$

Ⓑ

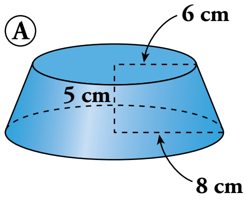


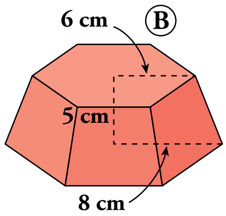
$h = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12,69 \text{ cm}$

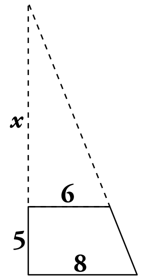
$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6,93 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{8 \cdot 6,93}{2} \cdot 6 \cdot 12,69 \approx 703,53 \text{ cm}^3$

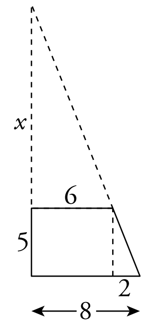
3. **Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.**







Ⓐ



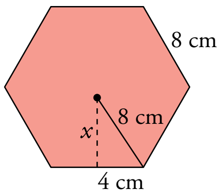
$$\frac{5}{2} = \frac{5+x}{8} \to x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}49 \text{ cm}^3$$

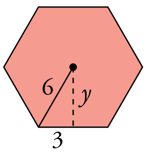
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1\,340{,}41 - 565{,}49 = 774{,}92 \text{ cm}^3$$

Ⓑ



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 1\,108{,}8 \text{ cm}^3$$

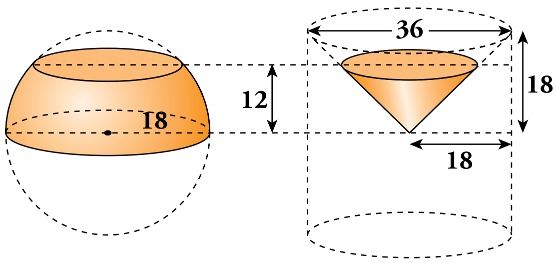


$$y = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

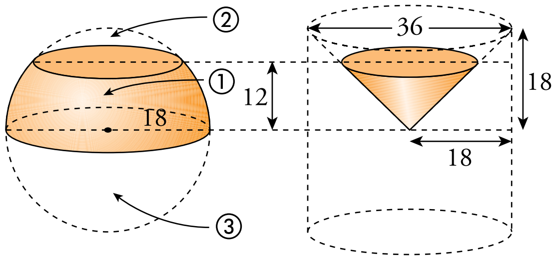
$$V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 1\,108{,}8 - 468 = 640{,}8 \text{ cm}^3$$

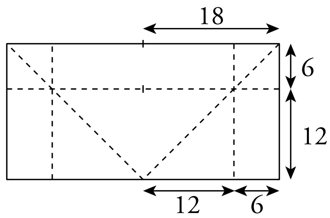
4. **Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.**



Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.



1) $V_{\text{PORCIÓN (1) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 12 = 3\,888\pi \text{ cm}^3$



$V_{\text{TRONCO (1) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 576\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (1) ESFERA}} = 3\,888\pi - 576\pi \approx 10\,404{,}95 \text{ cm}^3$

2) $V_{\text{PORCIÓN (2) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 = 1\,944\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 18^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,368\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) ESFERA}} = 1\,944\pi - 1\,368\pi \approx 1\,809{,}56 \text{ cm}^3$

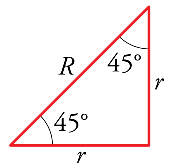
3) $V_{\text{PORCIÓN (3) ESFERA}} = \dfrac{\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3}{2} = 12\,214{,}51 \text{ cm}^3$

7 Coordenadas geográficas

Página 221

Hazlo tú

Halla, en kilómetros, la medida del paralelo 45°.



r = radio del paralelo 45°

$r^2 + r^2 = R^2 \rightarrow 2r^2 = 6\,366{,}2^2 \rightarrow r = 4\,501{,}58$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 4\,501{,}58 = 28\,284{,}26$ km

1. **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros.**

Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R = 40\,000\,000$ m = 40 000 km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1$ km^2

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

d) Área huso horario = $\frac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25$ km^2

2. **Un barco va de un punto A, situado en las costas de África a 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro punto B, con la misma latitud y 80° de longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

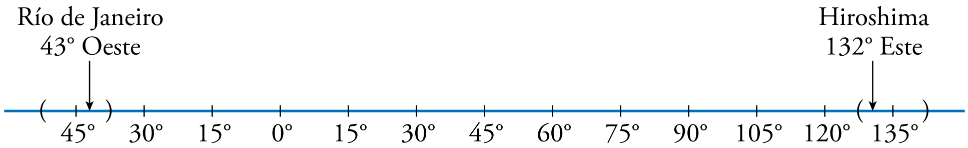
a) Entre A y B hay un arco de 80° – 10° = 70°

Como hemos visto en el problema resuelto de esta página, el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

Por tanto, la distancia de A a B es $\frac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\frac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km

3. En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es:

$132° = 15° \cdot 8 + 12$

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

$43° = 15° \cdot 2 + 13$

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

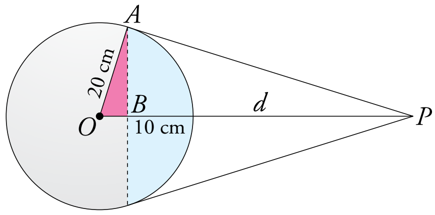
Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

Página 222

Hazlo tú

Calcula la distancia a la que tenemos que mirar una esfera de 40 cm de diámetro para ver la cuarta parte de su superficie.



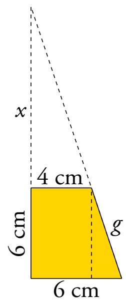
$\overline{AB} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300}$

$\dfrac{10}{\sqrt{300}} = \dfrac{\sqrt{300}}{d + 10} \rightarrow 10(d + 10) = 300 \rightarrow d = 20$

Tenemos que mirar a 20 cm de distancia.

Hazlo tú

Halla el área total y el volumen de un tronco de cono de 6 cm de altura cuyos radios miden 6 cm y 4 cm.



$\dfrac{x}{4} = \dfrac{x + 6}{6} \rightarrow 6x = 4x + 24 \rightarrow x = \dfrac{24}{2} = 12$

$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 477{,}52 \text{ cm}^3$

$g = \sqrt{6^2 + 2^2} \approx 6{,}32 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(6 + 4) \cdot 6{,}32 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 4^2 \approx 361{,}91 \text{ cm}^2$

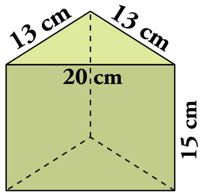
Ejercicios y problemas

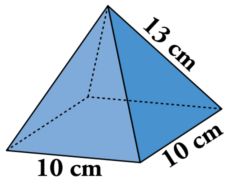
Página 223

Practica

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

1. **Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

a) 

b) 

a) Calculamos primero la altura de la base, h.

$h = \sqrt{13^2 - 10^2} \approx 8{,}31$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{20 \cdot 8{,}31}{2} = 166{,}2 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 13 \cdot 15 = 300 + 2 \cdot 195 = 690 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 166 + 690 = 856 \text{ cm}^2$$

$V = 8{,}31 \cdot 15 = 1\,246{,}5 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la apotema, m, y la altura, h, de la pirámide.

$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm; $h = \sqrt{12^2 - 5^2} \approx 10{,}91$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10{,}91 \approx 363{,}67 \text{ cm}^3$

2. **Calcula el área y el volumen de los cuerpos geométricos siguientes:**

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

c) Octaedro regular de 10 cm de arista.

d) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm de longitud.

e) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

f) Semiesfera de 10 cm de radio.

g) Esfera inscrita en un cilindro de 1 m de altura.

h) Casquete esférico de 7 cm de altura de una esfera de radio 12 cm.

a) Calculamos primero el lado del rombo, l.

$l = \sqrt{6^2 + 9^2} \approx 10{,}82$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 10{,}82 \cdot 20 = 865{,}6 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 216 + 865{,}6 = 1\,081{,}6 \text{ cm}^2$$

$V = 108 \cdot 20 = 2\,160$ cm^3

b) Calculamos primero la apotema de la base, x, y la de la pirámide, m.

$x = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2$ cm; $m = \sqrt{18^2 - 6^2} \approx 17$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 17}{2} = 306 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 93{,}6 + 306 = 399{,}6 \text{ cm}^2$$

Calculamos la altura de la pirámide y el volumen:

$$h = \sqrt{17^2 - 5{,}2^2} \approx 16{,}19 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 93{,}6 \cdot 16{,}19 = 505{,}128 \text{ cm}^3$$

c) Calculamos la altura de las caras, m, y el área:

$$m = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66 \text{ cm} \rightarrow A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del octaedro calcularemos el volumen de una pirámide de base cuadrada y lo multiplicaremos por dos.

$$h = \sqrt{8{,}66^2 - 5^2} \approx 7{,}1 \text{ cm} \rightarrow V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7{,}1 \approx 236{,}7 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot 236{,}7 = 473{,}4$ cm^3

d) Calculamos primero el radio de la base, r.

$$r = \frac{44}{2\pi} \approx 7 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2\pi \cdot 7^2 \approx 307{,}88 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 44 \cdot 27 = 1\,188 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 307{,}88 + 1\,188 = 1\,495 \text{ cm}^2$$

$V = 153{,}94 \cdot 27 = 4\,156{,}38$ cm^3

e) Calculamos primero la altura del cono, h.

$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 9^2 \approx 254{,}47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 424{,}12 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 254{,}47 + 424{,}12 = 678{,}59 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 254{,}47 \cdot 12 = 1\,017{,}88 \text{ cm}^3$$

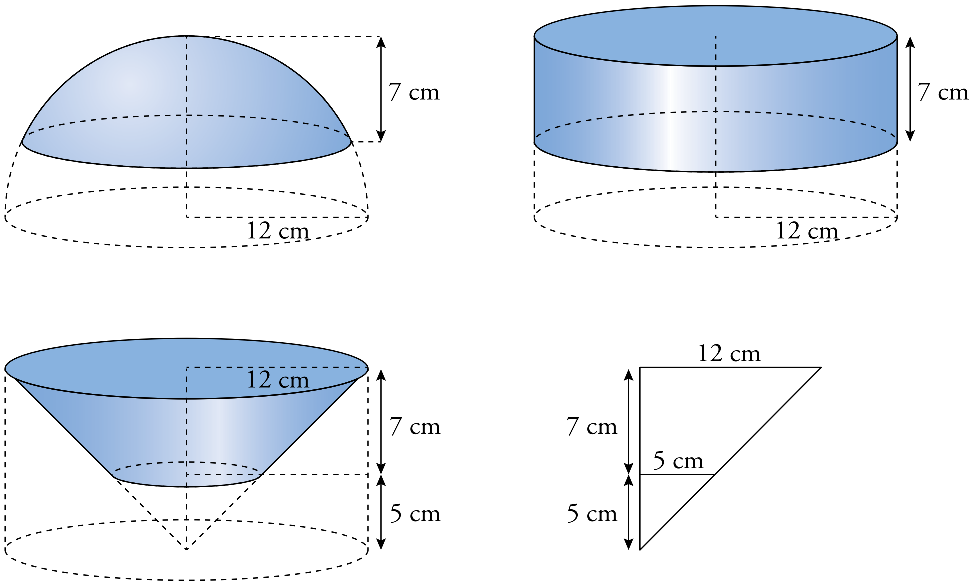
f) $A = \dfrac{4\pi \cdot 10^2}{2} \approx 628{,}32$ cm^2

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3}{2} \approx 2\,094{,}4 \text{ cm}^3$$

g) $A = 4\pi \cdot 50^2 \approx 31\,415{,}93 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 50^3 \approx 523\,598{,}78 \text{ cm}^3$

h) $A = 2\pi \cdot 12 \cdot 7 \approx 527{,}79 \text{ cm}^2$

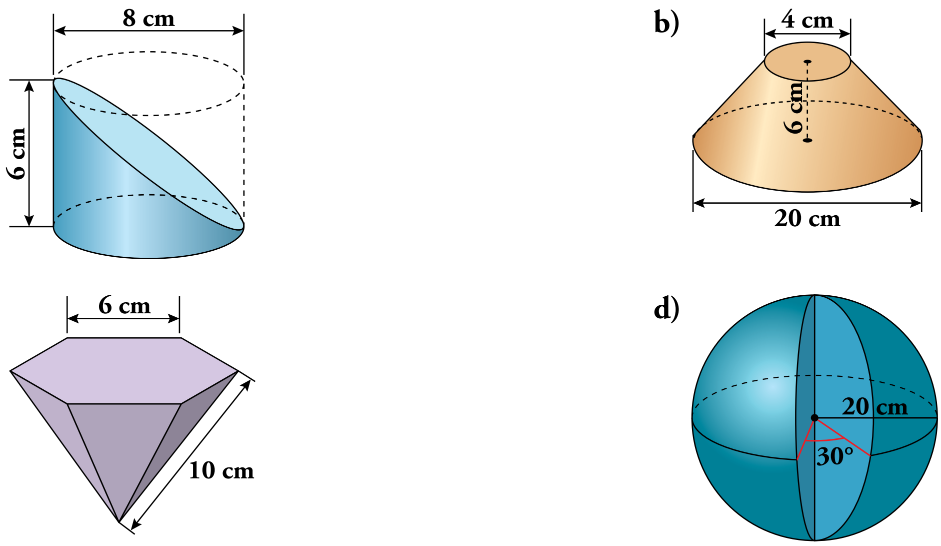


$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 12^2 \cdot 7 \approx 3\,166{,}73 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 \approx 1\,678{,}66 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE}} = 3\,166{,}73 - 1\,678{,}66 = 1\,488{,}07 \text{ cm}^3$

3. **Halla el área y el volumen de estos cuerpos geométricos:**



a) Primero calculamos el radio de la base inclinada, *r*.

$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} \rightarrow r = 5 \text{ cm}$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 5^2 \approx 128{,}81 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{2\pi \cdot 4 \cdot 6}{2} = 75{,}4 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 128{,}81 + 75{,}4 = 204{,}21 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{2} = 150{,}8 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la generatriz, g.

$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASES}} &= \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 2^2 \approx 326,73 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= \frac{2\pi \cdot 10 + 2\pi \cdot 2}{2} \cdot 10 \approx 376,99 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 326,73 + 376,99 = 703,72 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de cono restaremos el volumen del cono grande del volumen del cono pequeño. Para ello debemos conocer la altura del cono pequeño, x.

$$\frac{x}{2} = \frac{6 + x}{10} \to 10x = 12 + 2x \to x = 1,5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 7,5 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 1,5 = \frac{1}{3}\pi \cdot 726 \approx 760,27 \text{ cm}^3$$

c) Calculamos la apotema de la base, ap, la apotema de la pirámide, m, y la altura de la pirámide, h.

$ap = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2$ cm

$m = \sqrt{10^2 - 3^2} \approx 9,54$ cm

$h = \sqrt{9,54^2 - 5,2^2} \approx 8$ cm

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASE}} &= \frac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= 6 \cdot \frac{6 \cdot 9,54}{2} = 171,72 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 93,6 + 171,72 = 265,32 \text{ cm}^2$$

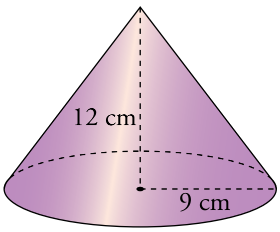
$$V = \frac{1}{3} \cdot 93,6 \cdot 8 = 249,6 \text{ cm}^3$$

d) Debemos observar que la porción de esfera que estamos eliminando es $\frac{30°}{360°} = \frac{1}{12}$ de la esfera completa, y que al calcular el área debemos añadir dos semicírculos de radio 20 cm.

$$A = \frac{11}{12} \cdot 4\pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 20^2 \approx 4\,607,67 + 1\,256,64 = 5\,864,31 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 20^3 \approx 30\,717,79 \text{ cm}^3$$

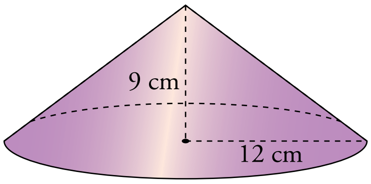
4. **Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área y el volumen de cada uno de ellos.**



$g = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASE}} &= \pi \cdot 9^2 \approx 254,47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= \pi \cdot 9 \cdot 15 \approx 424,12 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 254,47 + 424,12 = 678,59 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 254,57 \cdot 12 \approx 1\,017,88 \text{ cm}^3$$



$g = 15$ cm

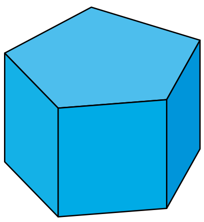
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 12^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 12 \cdot 15 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 452{,}39 + 565{,}49 = 1\,017{,}88 \text{ cm}^2$$

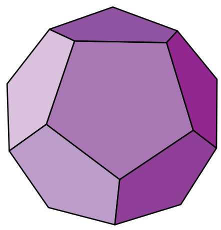
$$V = \frac{1}{3} \cdot 452{,}39 \cdot 9 \approx 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$$

5. **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.





Recuerda que la apotema de un pentágono regular de lado l mide 0,6882 l.

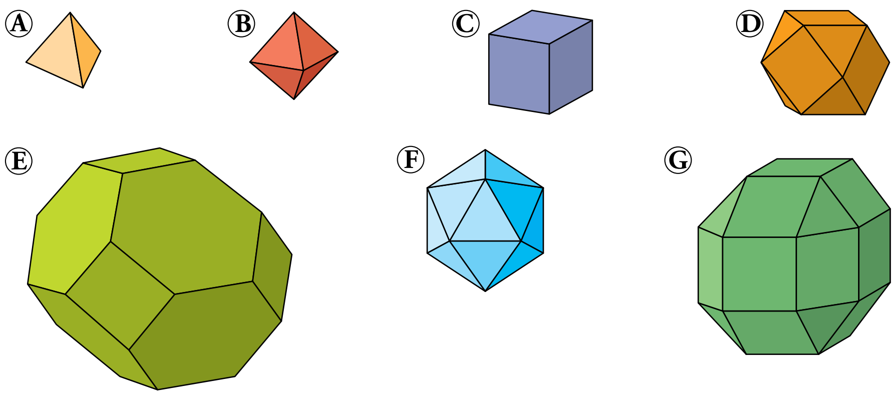
a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

$S_{\text{BASE}} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $S_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

$S_{\text{TOTAL}} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

b) $S_{\text{TOTAL}} = S_{\text{PENTÁGONO}} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

6. **Calcula el área total de los siguientes poliedros regulares y semirregulares de 8 cm de arista:**



Sabemos que la suma de las áreas de las figuras A y F es igual al triple del área de la figura B. Decimos, entonces que:

A + F = 3B

Comprueba cuáles de estas afirmaciones son ciertas:

a) 2C + D = G $\qquad$ **b) B + 3C = G** $\qquad$ **c) B + C = D** $\qquad$ **d) 2F + B + C = E**

Para las figuras A y B, primero calculamos la altura de los triángulos de las caras, h.

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

Figura A $\rightarrow$ $A_A = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 4 \cdot 27{,}72 = 110{,}88 \text{ cm}^2$

Figura B $\rightarrow$ $A_B = 8 \cdot 27{,}72 = 221{,}76 \text{ cm}^2$

Figura C $\rightarrow$ $A_C = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$

Figura D $\rightarrow$ $A_D = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 384 + 221{,}76 = 605{,}76 \text{ cm}^2$

Figura E $\rightarrow$ $ap_{\text{HEXÁGONO}} = h = 6{,}93$ cm

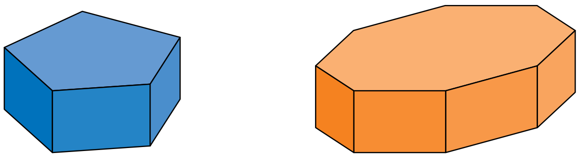
$$A_E = 8 \cdot \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} + 6 \cdot 8^2 = 1\,330{,}56 + 384 = 1\,714{,}56 \text{ cm}^2$$

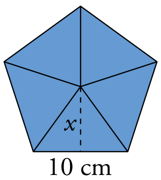
Figura F $\rightarrow$ $A_F = 20 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 554{,}4 \text{ cm}^2$

Figura G $\rightarrow$ $A_G = 18 \cdot 8^2 + 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 1\,373{,}76 \text{ cm}^2$

Todas las afirmaciones son ciertas.

7. **Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.**





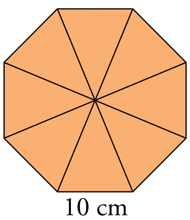
$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \rightarrow x = 8{,}66$ cm

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 8{,}66}{2} = 216{,}5 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 216{,}5 + 400 = 833 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 216{,}5 \cdot 8 = 1\,732 \text{ cm}^3$



En este caso el apotema de este prisma es el mismo que el anterior.

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 8 \cdot 10 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^2$

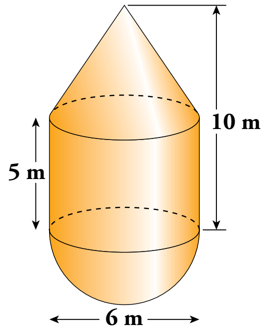
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 346{,}4 + 640 = 1\,332{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 346{,}4 \cdot 8 = 2\,771{,}2 \text{ cm}^3$

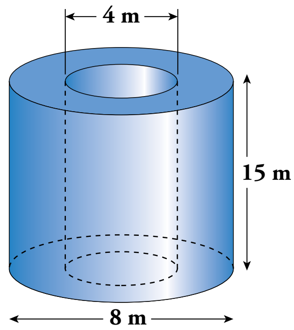
Página 224

8. **Calcula las áreas y los volúmenes de los siguientes cuerpos geométricos:**

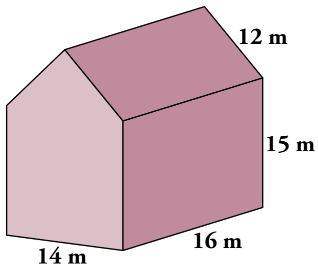
a)



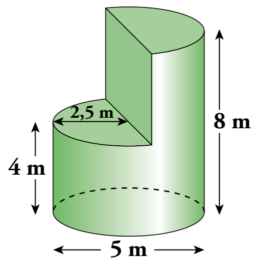
b)



c)



d)



a) Descomponemos el cuerpo en un cono, un cilindro y una semiesfera. Calculamos primero la generatriz del cono, g.

$$g = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}$$

$$A = \pi r g + 2\pi r h + \frac{4\pi r^2}{2} = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + \frac{4\pi 3^2}{2} \approx 205{,}74 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{1}{3}\pi 3^2 5 + \pi 3^2 5 + \frac{\frac{4}{3}\pi 3^3}{2} \approx 207{,}35 \text{ cm}^3$$

b) Descomponemos el cuerpo en dos cilindros, uno dentro de otro.

$$A = 2(\pi R^2 - \pi r^2) + 2\pi R h + 2\pi r h = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi h(R + r) =$$

$$= 2\pi(4^2 - 2^2) + 2\pi 15(4 + 2) \approx 640{,}88 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi 15(4^2 - 2^2) \approx 565{,}49 \text{ cm}^3$$

c) Descoponemos el cuerpo en un prisma y una pirámide triangular. Calculamos primero la altura de la base de la pirámide, h.

$$h = \sqrt{12^2 - 7^2} \approx 9{,}75 \text{ cm}$$

$$A = 14 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 15 + 2 \cdot 16 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} = 1\,644{,}5 \text{ cm}^2$$

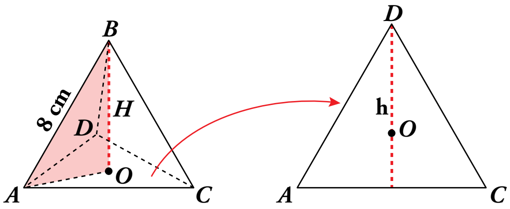
$$V = 14 \cdot 16 \cdot 15 + \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} \cdot 16 = 4\,452 \text{ cm}^3$$

d) La figura resulta de quitarle al cilindro de radio 2,5 cm y altura 8 cm un cuarto del mismo.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2\pi \cdot 2{,}5^2 \approx 39{,}27 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \approx 31{,}78 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 39{,}27 + 31{,}78 = 71{,}05 \text{ cm}^2$$

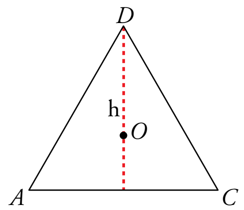
$$V = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 8 \approx 117{,}81 \text{ cm}^3$$

9. **Halla el área y el volumen de este tetraedro regular:**



Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$, donde h es la altura de una cara.

Calculamos lo que mide la altura h:



$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93$ cm

$A_{BASE} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$

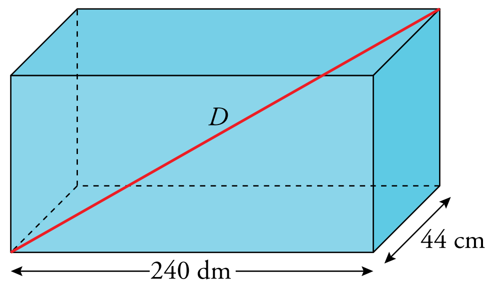
$A_{TOTAL} = 4 \cdot A_{BASE} = 110{,}88 \text{ cm}^2$

Calculamos lo que mide la altura H del tetraedro:

$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$

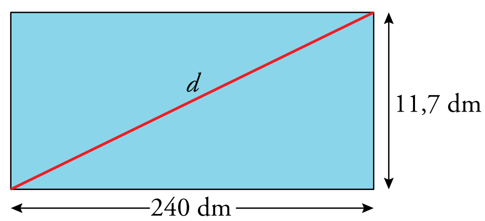
10. **La base de un ortoedro tiene dimensiones 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



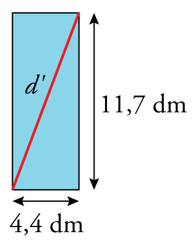
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{BASE} \cdot h \rightarrow 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \rightarrow h = 11{,}7$ dm



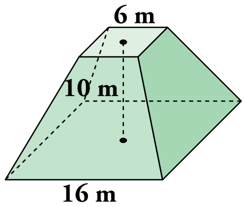
$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \rightarrow d = 26{,}7$ dm



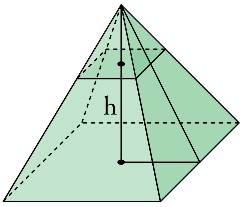
$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow d' = 12{,}5$ dm

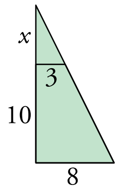
$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow D = 27{,}06$ dm

11. **Calcula el volumen del siguiente tronco de pirámide de bases cuadradas:**



Calculamos las alturas de las pirámides que forman el tronco:





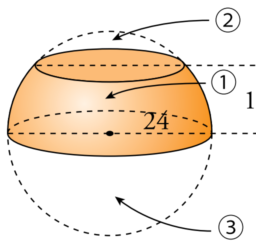
$$\frac{x}{3} = \frac{10 + x}{8}$$

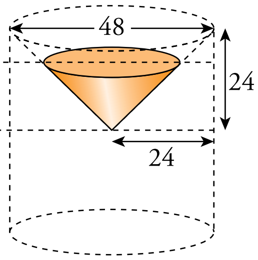
$$8x = 30 + 3x$$

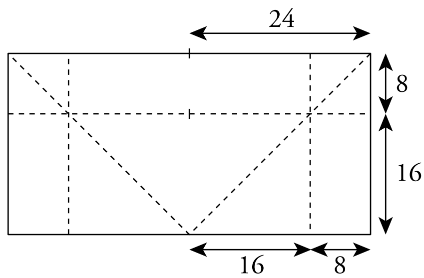
$$x = 6 \rightarrow \text{h} = 16$$

$$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 1\,293{,}3 \text{ m}^3$$

12. **Cortamos una esfera de 24 cm de radio por dos planos paralelos: uno que pase por el centro y otro a 16 cm de este. Halla las superficies y los volúmenes de las tres porciones obtenidas.**







1) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 16 \approx 2\,412{,}74 \text{ cm}^2$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 16 = 9\,216\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 1\,365{,}33\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 9\,216\pi - 1\,365{,}33\pi \approx 24\,663{,}61 \text{ cm}^3$$

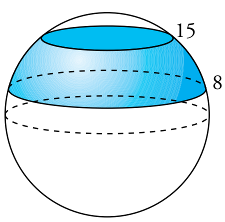
2) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 8 \approx 1\,206{,}37 \text{ cm}^2$

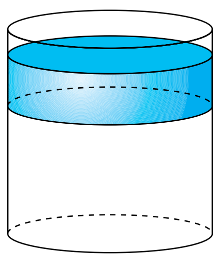
$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 8 = 4\,608\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 24^2 \cdot 24 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 3\,242{,}67\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

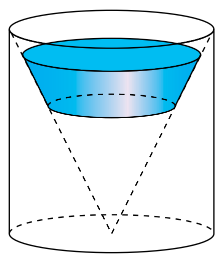
$$\rightarrow V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 4\,608\pi - 3\,242{,}67\pi \approx 4\,289{,}31 \text{ cm}^3$$

3) $A = \dfrac{4\pi \cdot 24^2}{2} \approx 3\,619{,}11 \text{ cm}^2$; $V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 24^3}{2} \approx 28\,952{,}92 \text{ cm}^3$

13. **Se corta una esfera de 50 cm de diámetro por dos planos paralelos a 8 cm y 15 cm del centro, respectivamente. Halla el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.**







$$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 50^2(15 - 8) = 17\,500\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 15 - \frac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 8 = 5\,833{,}33\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} =$$

$$= 17\,500\pi - 5\,833{,}33\pi = 11\,666{,}67\pi \text{ cm}^3 \approx 36\,651{,}9 \text{ cm}^3$$

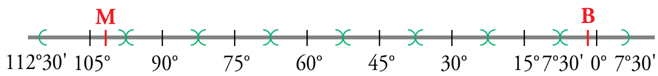
Coordenadas geográficas

14. **Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?**

En el huso 3° E son tres horas más, es decir, las 11 a.m.

En el huso 5° O son cinco horas menos, es decir, las 3 a.m.

15. **Sabemos que en Bilbao (longitud 3° O) son las 9 de la mañana. Utilizando el siguiente esquema, indica qué hora será en Monterrey (longitud 100° O).**



En Monterrey serán las 2 de la mañana.

16. **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?**

5 + 1 = 6 horas menos en Nueva York que en Roma.

11 p.m. + 8 = 19 $\rightarrow$ 7 a.m. hora de Roma.

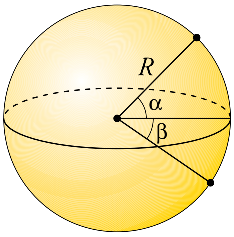
19 – 6 = 13 p.m. = 1 a.m. es la hora de llegada a Nueva York.

17. **Si en La Habana (82° O) son las 8 p.m., asigna su hora a cada ciudad en tu cuaderno:**

Maputo (Mozambique)	**2 p.m.**
Natal (Brasil)	**3 a.m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p.m.**
Temuco (Chile)	**0 a.m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a.m.**
Dakar (Senegal)	**11 p.m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a.m.**
Melbourne (Australia)	**7 a.m.**

Maputo (32° E) $\rightarrow$ 3 a.m.	Natal $\rightarrow$ 11 p.m.
Astaná (71° E) $\rightarrow$ 6 a.m.	Temuco (73° O) $\rightarrow$ 8 p.m.
Honolulú (158° O) $\rightarrow$ 2 p.m.	Dakar (16° O) $\rightarrow$ 0 a.m.
Katmandú (85° E) $\rightarrow$ 7 a.m.	Melbourne (144° E) $\rightarrow$ 11 a.m.

18. **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \, 25'$

$\beta = 22° \, 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \, 25' + 22° \, 35' = 60°$

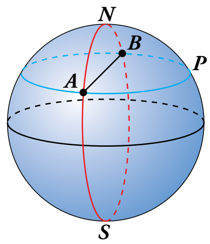
$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

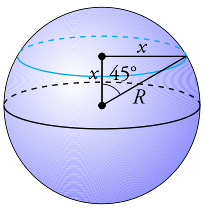
19. **La "milla marina" es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una milla marina.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

$$\text{Milla marina} \rightarrow \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85 \text{ km}$$

20. **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**





Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504{,}27 \text{ km}$$

21. **Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston?**

Utilizando el ejercicio resuelto de la página 221, sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente.

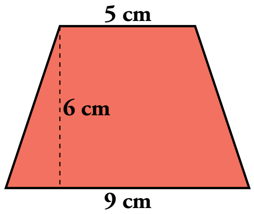
Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de 90° – 30° = 60°; por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 60° \approx 5\,724{,}33$ km.

Entre Alejandría y Houston hay un arco de 95° – 30° = 65°, por lo que la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 65° \approx 6\,201{,}36$ km.

Página 225

Piensa y resuelve

22. **Calcula el área y el volumen del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en sus puntos medios.**



Calculamos primero la generatriz del tronco de cono, g.

$g = \sqrt{6^2 + 2^2} \approx 6{,}32$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 2{,}5^2 \approx 83{,}25 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot (4{,}5 + 2{,}5) \cdot 6{,}32 \approx 138{,}98 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 83{,}25 + 138{,}98 = 222{,}23 \text{ cm}^2$$

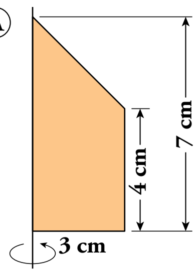
Hallamos el volumen del tronco de cono restando los volúmenes del cono grande y del cono pequeño. Hallamos antes la altura del cono pequeño.

$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{x+6}{4{,}5} \rightarrow 4{,}5x = 2{,}5x + 15 \rightarrow x = 7{,}5 \text{ cm}$$

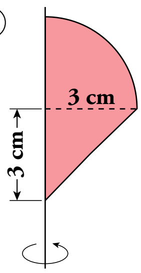
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot (6 + 7{,}5) - \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 7{,}5 \approx 237{,}19 \text{ cm}^3$$

23. **Calcula el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**

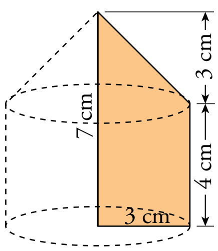
Ⓐ



Ⓑ



Ⓐ

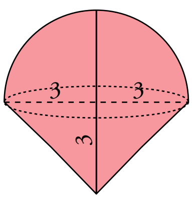


Ⓐ $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 36\pi + 9\pi = 45\pi = 141{,}37 \text{ cm}^3$

Ⓑ

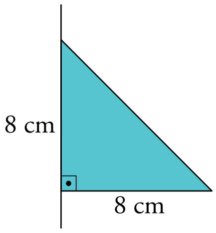


Ⓑ $V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 18\pi + 9\pi = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

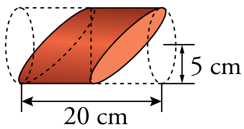
24. **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, gira alrededor de la hipotenusa. Calcula el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**



Se forma un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$$

25. **Cortamos un salchichón con un cuchillo como ves en la figura. Halla la superficie y el volumen del trozo que queda.**



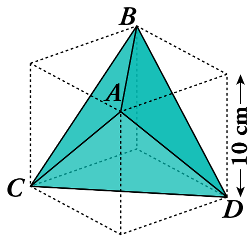
Observamos que hemos dejado la mitad del salchichón. Calculamos primero el radio del círculo que obtenemos al cortar.

$d = \sqrt{10^2 + 10^2} \approx 14{,}14$ cm $\rightarrow$ $r = 7{,}07$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \pi \cdot 7{,}07^2 \approx 314{,}06 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 20 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 314{,}06 + 314{,}16 = 628{,}22 \text{ cm}^2$$

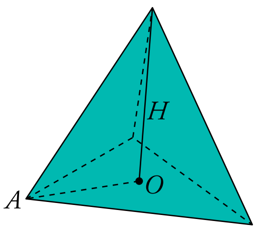
$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \approx 785{,}4 \text{ cm}^3$$

26. **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**



Calculamos el lado del tetraedro:

$$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow l = 14{,}14 \text{ cm}$$



Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$$h^2 = 14{,}14^2 - 7{,}07^2 \rightarrow h = 12{,}24 \text{ cm}$$

$$H^2 = 14{,}14^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12{,}24\right)^2 = 133{,}29 \rightarrow H = 11{,}54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14{,}14 \cdot 12{,}24 = 86{,}54 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 86{,}54 = 346{,}15 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 86{,}54 \cdot 11{,}54 = 332{,}89 \text{ cm}^3$$

27. **Averigua si cabe:**

a) Un tetraedro regular de arista 4 u, dentro de un cubo de arista 4 u.

b) Un cubo de arista 12 u, dentro de una esfera de diámetro 20 u.

c) Un cubo de arista 10 u, dentro de un cono de 15 u de altura y radio de la base $15\sqrt{2}$ u.

d) Una esfera de radio 4 u, dentro de un octaedro regular de arista 10 u.

e) Un cilindro de 10 u de altura y 790 u^3 de volumen, dentro de un cubo de 10 u de arista.

a) Sí cabe. El mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo tiene como arista la diagonal del cubo, que mide 5,65 u.

$\text{Arista}_{\text{TETRAEDRO}} = \text{diagonal}_{\text{CUBO}} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ u

b) La diagonal del cubo mide $12\sqrt{3} = 20{,}78$ u. Por tanto, el cubo no cabe dentro de la esfera.

c) Sí cabe, porque la sección del cono, a 10 u de altura, tiene de radio $5\sqrt{2}$ u, que es igual a la mitad de la diagonal de la cara superior del cubo.

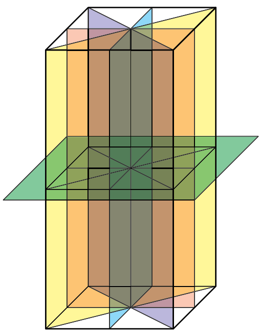
d) La distancia del centro del octaedro a cada cara es de 4,08 u, mayor que el radio de la esfera. Por tanto, sí cabe.

e) Calculamos el radio del cilindro utilizando su volumen: $790 = \pi \cdot r^2 \cdot 10 \to r = \sqrt{\dfrac{790}{10\pi}} \approx 5$ u.

Por lo tanto el cilindro quedaría encajado dentro del cubo.

28. **¿Cuáles son los planos de simetría de un ortoedro de base cuadrada? ¿Y los ejes de giro? ¿De qué orden es cada uno de ellos?**

Contesta a las mismas preguntas en el caso de un cubo.



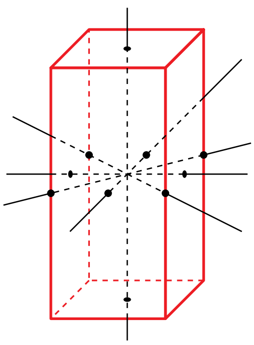
- Son 5 planos de simetría:

  Dos pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

  Dos pasan por los vértices opuestos de las bases.

  (Estos cuatro planos corresponden a los ejes de simetría del cuadrado).

  Uno pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



- Tiene 5 ejes de giro:

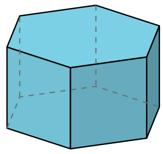
  Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las bases por su punto medio.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

El cubo tiene 9 planos de simetría, tres ejes de orden 4, cuatro de orden 3 y seis de orden 2. Se pueden encontrar gráficos en los epígrafes 3 y 4 de la unidad.

29. **Dibuja en tu cuaderno el poliedro dual del siguiente prisma hexagonal regular:**

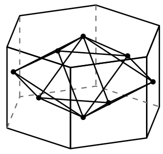


a) ¿Son el prisma o su dual poliedros semirregulares?

b) Indica los planos de simetría de cada uno.

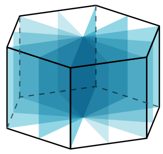
c) Indica los ejes de giro de cada poliedro (el prisma y su dual) y di de qué orden es cada uno.

a) El prisma sí es semirregular pero su dual no lo es, ya que no concurren el mismo número de caras en todos sus vértices.



b) El prisma tiene siete planos de simetría: seis planos, uno por cada eje de simetría de sus bases y otro plano paralelo a las dos bases y a la misma distancia de cada una.

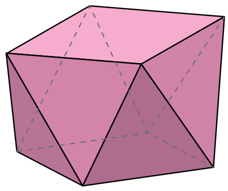
Su dual tiene los mismos.



c) El prisma tiene trece ejes de giro: uno de orden 6 que pasa por el centro de las dos bases; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por el punto medio de dos caras laterales opuestas; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por las aristas opuestas; y otros seis más de orden 2 que pasan por los vértices opuestos de las caras laterales.

Su dual tiene los mismos.

30. **Dibuja en tu cuaderno este antiprisma cuadrado:**



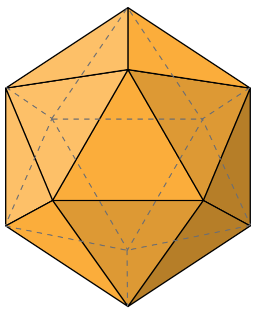
a) ¿Cuántos planos de simetría tiene?

b) Indica sus ejes de giro. ¿De qué orden son?

a) Cuatro planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

b) Un eje de giro de orden 4 que pasa por el centro de las dos bases.

31. **Sabemos que un icosaedro regular tiene varios planos de simetría. Por ejemplo, si te fijas en dos de sus caras opuestas, los tres planos que pasan por sus tres alturas serían planos de simetría del icosaedro.**



a) ¿También pasan planos de simetría por sus aristas opuestas? ¿Cuántos hay?

b) ¿Cuántos planos de simetría tiene en total?

c) Sabemos que el eje de giro que pasa por dos vértices opuestos del icosaedro tiene orden 5. ¿Qué orden tienen los que pasan por los centros de dos aristas opuestas? ¿Y los que pasan por los centros de dos caras opuestas?

a) Sí, son 15 planos.

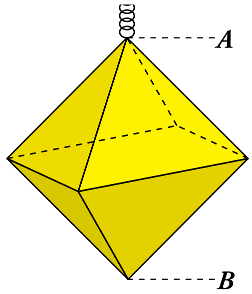
b) Tiene 15 planos de simetría, ya que los que nombra el enunciado y los del apartado a) son los mismos.

c) Los ejes de giro que pasan por los centros de dos aristas opuestas tienen orden 2, y los otros, orden 3.

Página 226

Resuelve problemas

32. **Cortando y soldando una varilla de 3 m de longitud, se ha construido la estructura de un farol con forma de octaedro regular. ¿Cuál es la altura *AB* del farol?**

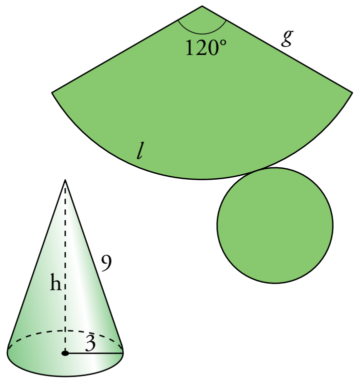


El octaedro tiene 12 aristas iguales. Cada una de ellas mide 300 : 12 = 25 cm.

La altura del octaedro coincide con la diagonal de un cuadrado de 25 cm de lado:

$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + 25^2} \approx 35{,}36$ cm

33. **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el volumen del cuerpo que se forma.**



- Generatriz del cono:

$$\frac{\pi g^2}{84{,}78} = \frac{360}{120} \rightarrow g^2 = \frac{3 \cdot 84{,}78}{\pi} \rightarrow g \approx 9 \text{ cm}$$

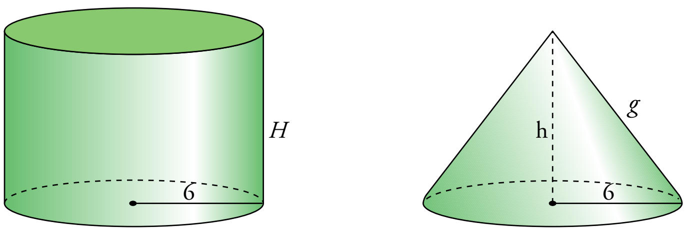
- Radio de la base: $2\pi r = l$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 9}{l} = \frac{360}{120} \rightarrow 18\pi = 3l \rightarrow l = 6\pi \text{ cm}$$

$2\pi r = 6\pi \rightarrow r = 3$ cm

- Área base $= \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$
- Altura del cono: $h^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \rightarrow h \approx 8{,}49$ cm
- Volumen cono $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3}28{,}27 \cdot 8{,}49 \approx 80 \text{ cm}^3$

34. **Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?**



- Área total del cilindro $= 2\pi \cdot 6h + 2\pi \cdot 6^2$

$84\pi H = 96\pi \rightarrow H = 1{,}14$ cm

- Volumen del cilindro $= \pi \cdot 6^2 \cdot 1{,}14 = 128{,}93 \text{ cm}^3$
- Área total del cono $= \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6g \rightarrow 36\pi + 6\pi g = 96\pi \rightarrow 6\pi g = 60\pi \rightarrow g = 10$ cm
- Altura del cono: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow h = 8$ cm
- Volumen del cono $= \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \approx 301{,}59 \text{ cm}^3$

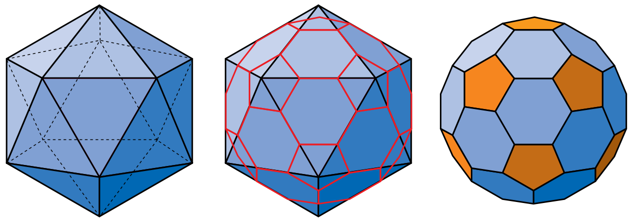
Tiene mayor volumen el cono.

35. **Truncando un icosaedro regular de 30 cm de arista se obtiene este poliedro semirregular (troncoicosaedro):**

a) ¿Cuántos vértices y caras tiene el icosaedro?

b) ¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos forman la superficie del poliedro obtenido tras el truncamiento?

c) Calcula la superficie de este último.



a) El icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.

b) 20 hexágonos y 12 pentágonos.

c) Las aristas del poliedro truncado miden 10 cm.

Apotema de una cara hexagonal = 8,66 cm

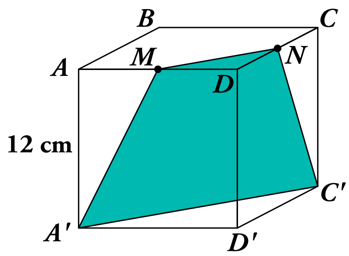
Apotema de una cara pentagonal = 6,88 cm

Superficie de una cara hexagonal = $\frac{10 \cdot 6 \cdot 8,66}{2} \approx 259,8 \text{ cm}^2$

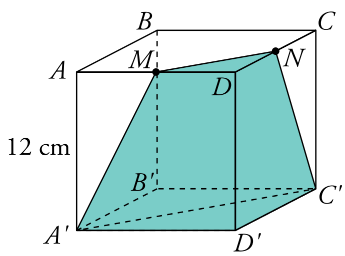
Superficie de una cara pentagonal = $\frac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

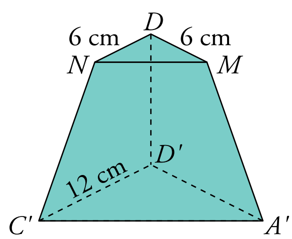
Superficie del poliedro = $20 \cdot 259,8 + 12 \cdot 172 = 7\,260 \text{ cm}^2$

36. **Cortamos un cubo por un plano que pasa por los puntos $MNC'A'$ (M y N son los puntos medios de las aristas AD y DC, respectivamente).**



Calcula el área total y el volumen del menor de los poliedros que se forman.

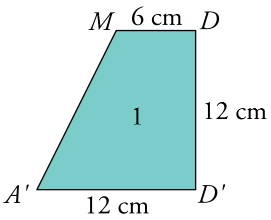




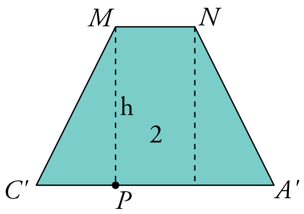
- Triángulo MDN: $A = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

- Triángulo $A'D'C'$: $A = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$

Caras laterales: trapecios.



$$A_1 = \frac{(12+6)\cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$



$$\overline{MN}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \rightarrow \overline{MN} = \sqrt{72} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'}^2 = 12^2 + 12^2 = 288 \rightarrow \overline{A'C'} = \sqrt{288} \approx 16{,}97 \text{ cm}$$

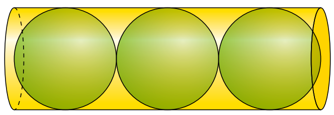
$$\overline{A'P} = \frac{16{,}97 - 8{,}49}{2} = 4{,}24 \text{ cm}$$

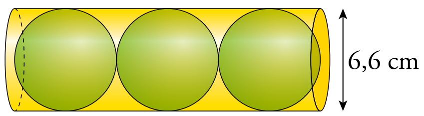
$$\overline{MA'}^2 = 12^2 + 6^2 = 180 \rightarrow \overline{MA'} = 13{,}42 \text{ cm}$$

$h^2 = 13{,}42^2 - 4{,}24^2 \rightarrow h \approx 12{,}73$ cm $\qquad$ $\text{Área}_2 = \dfrac{(8{,}49 + 16{,}97)\cdot 12{,}73}{2} \approx 162{,}05 \text{ cm}^2$

Área total del poliedro $= 18 + 72 + 2 \cdot 108 + 162{,}1 = 468{,}1$ cm^2

37. **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**





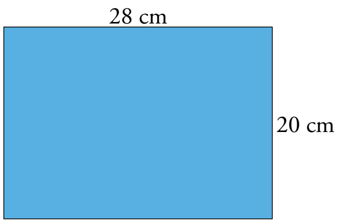
Altura del cilindro $= 6{,}6 \cdot 3 = 19{,}8$ cm

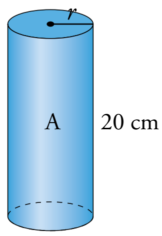
$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 \approx 677{,}4 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERAS}} = 3\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3\right) = 451{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PARTE VACÍA}} = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$$

38. **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**



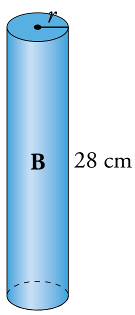


A • Radio: $2\pi r = 28 \rightarrow r = \dfrac{14}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{14}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = 1\,247{,}77 \text{ cm}^3$

B • Radio: $2\pi r = 20 \rightarrow r = \dfrac{10}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 28 = 891{,}27 \text{ cm}^3$



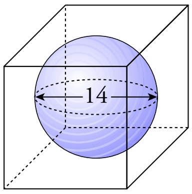
Se consigue mayor volumen soldando por los lados de 20 cm.

39. **Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

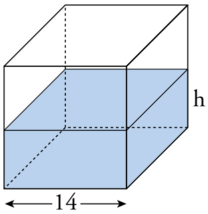
a)



$V_{\text{CUBO}} = 14^3 = 2\,744 \text{ cm}^3$

$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 7^3 \approx 1\,436{,}76 \text{ cm}^3$

b)

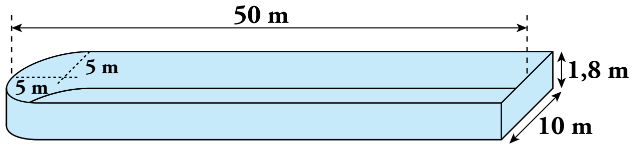


$V_{\text{AGUA NO DERRAMABA}} = 2\,744 - 1\,436{,}76 = 1\,307{,}24 \text{ cm}^3$

Altura que alcanza el agua:

$1\,307{,}24 = 14^2 \cdot \text{h} \;\rightarrow\; \text{h} = 6{,}67 \text{ cm}$

40. **Una finca se abastece de agua desde el pilón que ves en la figura, y que ahora está lleno. Para regar, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 25 litros por segundo. ¿Se podrá mantener el riego durante diez horas sin reponer sus existencias?**

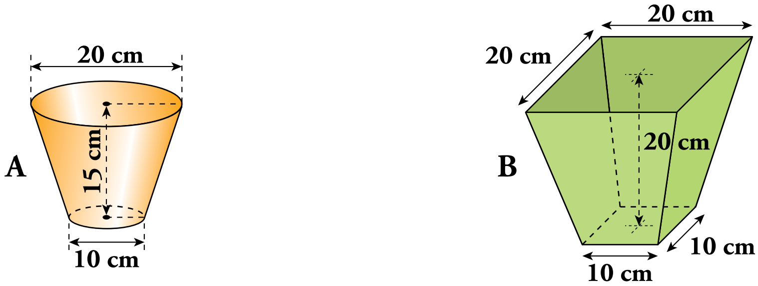


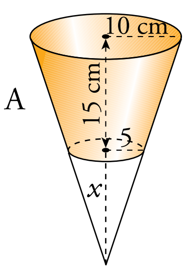
Capacidad del pilón $= 10 \cdot 1{,}8 \cdot 45 + \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1{,}8}{2} \approx 880{,}69 \text{ m}^3 = 880\,690$ litros

Gasto en diez horas $= 25 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 900\,000$ litros

El gasto en diez horas es superior a la capacidad del pilón. Por tanto, no se puede regar durante diez horas sin reponer las existencias de agua.

41. **En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 1,50 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? Redondea a las décimas de euro.**



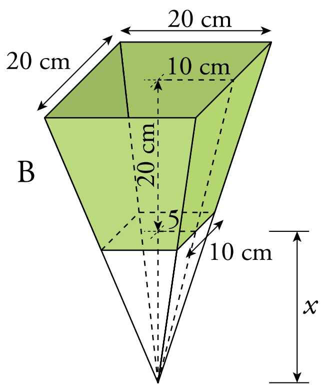


$\dfrac{10}{5} = \dfrac{15 + x}{x} \;\rightarrow\; 10x = 75 + 5x \;\rightarrow\; x = 15 \text{ cm}$

$V_{\text{CONO GRANDE}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3\,141{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 \approx 392{,}7 \text{ cm}^3$

$V_A = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} \approx 2\,748{,}9 \text{ cm}^3$



$$\frac{10}{5} = \frac{20 + x}{x} \rightarrow 10x = 100 + 5x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3}20^2 \cdot 40 \approx 5\,333{,}33 \text{ cm}^3$$

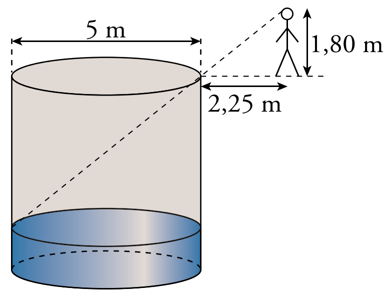
$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{1}{3}10^2 \cdot 20 \approx 666{,}67 \text{ cm}^3$$

$$V_B = V_{\text{P. GRANDE}} - V_{\text{P. PEQUEÑA}} \approx 4\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

Precio del recipiente B $= \dfrac{4\,666{,}67 \cdot 1{,}5}{2\,748{,}9} \approx 2{,}546$

El recipiente B se venderá a 2,50 euros.

42. **Paco tiene un pozo cilíndrico de 5 m de diámetro y 100 m³ de capacidad. Pero no está lleno; de hecho, si se aleja más de 2,25 m del borde, ya no ve el agua. Halla la profundidad del agua, si Paco tiene los ojos a 1,80 m de altura.**



Si h es la profundidad del pozo:

$$V_{\text{POZO}} = 100 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot h \rightarrow h = 5{,}10 \text{ m}$$

Si x es la profundidad del agua:

$$\frac{1{,}80}{2{,}25} = \frac{5{,}10 - x}{5} \rightarrow x = 1{,}10 \text{ m}$$

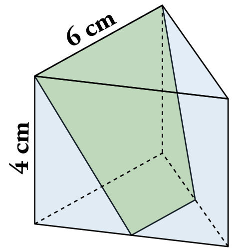
Página 227

Problemas "+"

43. **Cortamos un prisma triangular regular por un plano que pasa por el punto medio de dos aristas y por otra arista opuesta.**

Halla el volumen y la superficie total de cada una de las porciones.

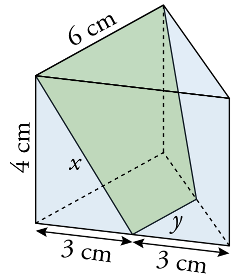
Observa que uno de los dos trozos es un tronco de pirámide.



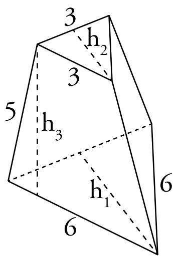
Lo primero que hacemos es hallar las longitudes de los cortes del plano.

$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$y = 3$ cm



Comenzamos calculando el área del tronco de pirámide, y para ello necesitamos averiguar algunas longitudes, como las alturas de las bases grande, h_1, y pequeña, h_2, y de las caras laterales, h_3.



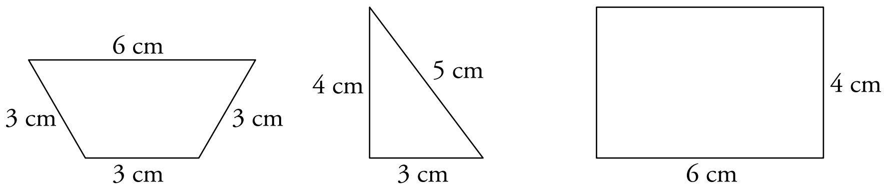
$$h_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

$$h_2 = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} \approx 2{,}6 \text{ cm}$$

$$h_3 = \sqrt{5^2 - 1{,}5^2} \approx 4{,}8 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} + \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 19{,}5 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 3 \cdot \dfrac{6+3}{2} \cdot 4{,}8 = 64{,}8 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 19{,}5 + 64{,}8 = 84{,}3 \text{ cm}^2$$

Calculamos ahora el área de la otra parte de la figura, veamos cómo son sus caras:

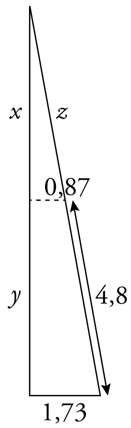


$$A_1 = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} - \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 11{,}7 \text{ cm}^2; \; A_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2; \; A_3 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{TOTAL}} = 11{,}7 + 2 \cdot 6 + 24 = 47{,}7$ cm^2

Para calcular el volumen del tronco de pirámide restamos al volumen de la pirámide grande la de la pirámide pequeña, y para eso tenemos que calcular sus alturas.

Resolvemos los siguientes triángulos semejantes que se forman entre las apotemas de las bases, las alturas de las caras laterales y las alturas de las pirámides. Recordamos que la longitud de la apotema de un triángulo equilátero es un tercio de la medida de su altura.



$\dfrac{z}{0,87} = \dfrac{z+4,8}{1,73} \rightarrow 1{,}73z = 0{,}87z + 4{,}18 \rightarrow z \approx 4{,}86$ cm

$x = \sqrt{4,86^2 - 0,87^2} = 4{,}78$ cm

Observando que las medidas del triángulo pequeño son la mitad que las del grande, tenemos que $y = 4{,}78$ cm también.

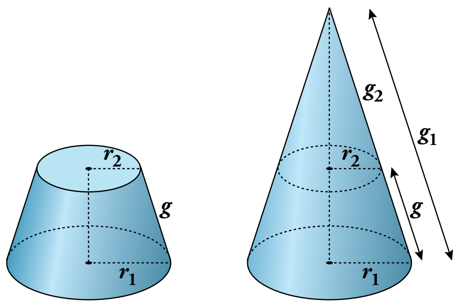
$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot (2 \cdot 4{,}78) - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} \cdot 4{,}78 = 43{,}5 \text{ cm}^3$$

Para calcular el volumen del otro trozo restaremos los volúmenes del cuerpo completo y el tronco de pirámide.

$$V_{\text{PRISMA}} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot 4 = 62{,}4 \text{ cm}^3 \rightarrow V = 62{,}4 - 43{,}5 = 18{,}8 \text{ cm}^3$$

44. **Obtención del área lateral de un tronco de cono:**

a)

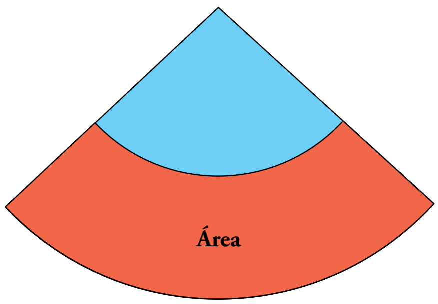


$g = g_1 - g_2$

$\dfrac{r_1}{g_1} = \dfrac{r_2}{g_2}$

Explica qué son r_1, g_1, r_2, g_2 y g. Justifica las dos igualdades anteriores.

b)



Recordando que el área lateral de un cono es $\pi r g$, justifica que el área buscada (en rojo) es $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2$.

c) Observa la siguiente cadena de igualdades:

$$A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 = \pi\,(r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{*}{=} \pi\,(r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) =$$
$$= \pi\,[r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] = \pi\,[r_1 g + r_2 g] = \pi\,(r_1 + r_2)\,g$$

Repite la cadena de igualdades justificando cada paso. En la igualdad *, observa que $r_1 g_2 = r_2 g_1$. Explica por qué.

a) En la figura observamos que r_1 y g_1 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono grande; r_2 y g_2 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono pequeño; y g es la generatriz del tronco de cono.

También vemos que g_1 es igual a la suma de g y g_2, y de aquí obtenemos la primera igualdad.

Además, en la figura de la derecha aparecen dos triángulos rectángulos en posición de Tales, que justifican la segunda igualdad.

b) El área de la zona roja es el resultado de restar el área lateral del cono grande $(r_1$ y $g_1)$ menos el área lateral del cono pequeño $(r_2$ y $g_2)$. Así, la igualdad queda justificada.

c) $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 \overset{(1)}{=} \pi\,(r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{(2)}{=} \pi\,(r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) \overset{(3)}{=}$

$\overset{(3)}{=} \pi\,[r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] \overset{(4)}{=} \pi\,[r_1 g + r_2 g] \overset{(5)}{=} \pi\,(r_1 + r_2)\,g$

(1). Sacamos factor común π.

(2). Sumamos y restamos la misma cantidad, por lo que la igualdad no varía.

$$\frac{r_1}{g_1} = \frac{r_2}{g_2} \to r_1 g_2 = r_2 g_1$$

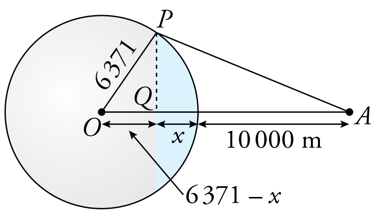
(3). Sacamos factor común r_1 y r_2.

(4). Utilizamos la igualdad $g = g_1 - g_2$ para sustituir los paréntesis por g.

(5). Sacamos factor común g.

45. Si un avión vuela a 10 000 m de altura, ¿qué porción de superficie terrestre puede ver un pasajero?

El radio de la Tierra es de unos 6371 km.



Observando el gráfico podemos deducir la longitud de PQ y que los triángulos POQ y PQA son semejantes. Por tanto:

$$\overline{PQ} = \sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}}{6\,371 - x} = \frac{10 + x}{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}} \to$$

$$\to 6\,371^2 - (6\,371 - x)^2 = (6\,371 - x) \cdot (10 + x) \to$$

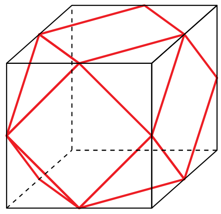
$$\to 6\,371^2 - 6\,371^2 + 2 \cdot 6\,371x - x^2 = 6\,371 \cdot 10 + 6\,371x - 10x - x^2 \to$$

$$\to 6\,371x + 10x = 63\,710 \to x \approx 10 \text{ km}$$

Si el diámetro de la Tierra es 12 742 km, esta distancia será $\dfrac{10}{12\,472} \approx \dfrac{1}{1\,247}$

Reflexiona sobre la teoría

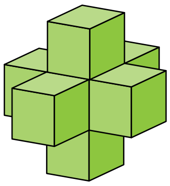
46. Recuerda todos los planos de simetría y los ejes de giro de un cubo. ¿Qué planos de simetría tiene el cuboctaedro (poliedro que resulta de truncar el cubo)? Estudia, también, sus ejes de giro.



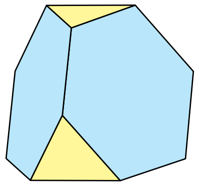
El cuboctaedro tiene los mismos planos de simetría y los mismos ejes de giro que el cubo.

47. Explica por qué cada uno de los siguientes poliedros no es regular. ¿Son semirregulares? Comprueba si se verifica el teorema de Euler en cada uno:

a)



b)



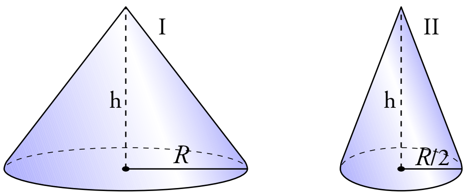
a) El poliedro no es semirregular y, por tanto, tampoco regular, ya que no en todos los vértices concurre el mismo número de caras.

Tiene 30 caras, 32 vértices y 60 aristas, por lo que sí cumple el teorema de Euler, $30 + 32 - 60 = 2$.

b) El poliedro no es regular porque todas sus caras no son iguales, pero sí es semirregular.

Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas; sí cumple el teorema de Euler, $8 + 12 - 18 = 2$.

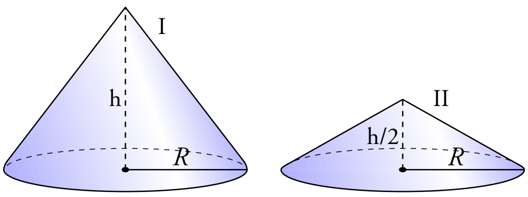
48. Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad? ¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{4}$$

El volumen se reduce a una cuarta parte.



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

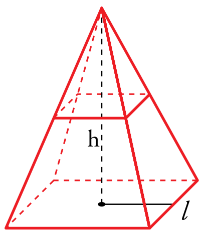
$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{2}$$

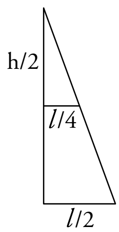
Sí, el volumen se reduce a la mitad.

49. Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes de la pirámide grande y la pequeña?

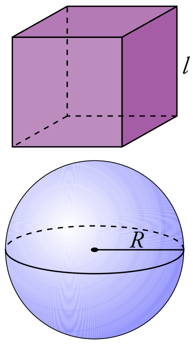
El lado de la nueva base es la mitad de la arista básica de la pirámide.

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} l^2 h \\[2ex] V' = V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l^2 \cdot h}{8} \end{array}\right\} \frac{V}{V'} = \frac{1}{8}$$





50. **Un cubo y una esfera tienen la misma área. ¿Cuál tiene mayor volumen? Comprueba tu respuesta dando un valor cualquiera al radio de la esfera.**



Radio de la esfera: 10 cm

$4\pi R^2 = 6l^2 \rightarrow 4\pi \cdot 10^2 = 6l^2$

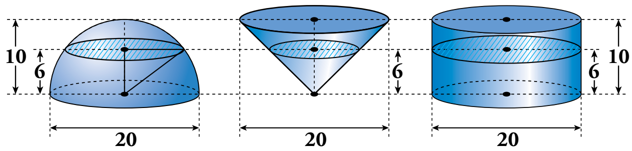
$l^2 = \dfrac{400\pi}{6} \rightarrow l = 14{,}47$ cm

Volumen cubo $= 14{,}47^3 = 3\,031{,}01$ cm^3

Volumen esfera $= \dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,188{,}79$ cm^3

Tiene mayor volumen la esfera.

51. **Observa en la figura la semiesfera, el cono invertido y el cilindro, todos del mismo diámetro (20 cm) y altura (10 cm), que se han cortado por un plano horizontal a 6 cm de altura:**



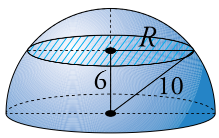
a) Calcula la superficie de las secciones obtenidas.

b) Comprueba que la sección obtenida en el cilindro equivale a la suma de las otras dos.

c) Comprueba que esa misma relación se cumple para cualquier altura del plano, h.

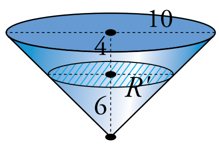
d) Comprueba que esa relación se cumple para cualquier radio, *r*, y cualquiera que sea la altura, h, a la que se corta el plano.

a)



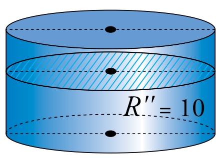
$R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi \cdot 8^2 \approx 201{,}06$ cm^2



$\dfrac{10}{10} = \dfrac{R'}{6} \rightarrow R' = 6$ cm

$S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10$ cm^2



$S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16$ cm^2

b) $S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = 64\pi + 36\pi = 100\pi = S_{\text{S. CILINDRO}}$

c) Para un h cualquiera: $R = \sqrt{10^2 - \text{h}^2}$; $R' = \text{h}$; $R'' = 10$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(10^2 - \text{h}^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot \text{h}^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 10^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

d) Para r y h cualesquiera:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(r^2 - \text{h}^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot \text{h}^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi r^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi r^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

Página 229

Entrénate resolviendo problemas

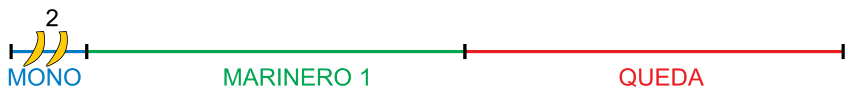
- **Al naufragar su barco, dos marineros y su mono llegan a una isla desierta. Como no tienen nada que comer, recogen plátanos y se van a dormir.**

  Por la noche, un marinero se despierta, da dos plátanos al mono y se come la mitad de los restantes. Después, se despierta el otro marinero, que también da dos plátanos al mono, hace tres partes con los que quedan y se come dos de esas partes.

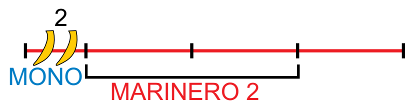
  Por la mañana, se reparten, entre los tres, los plátanos que quedan.

  En ningún momento ha sido necesario partir ningún plátano. ¿Cuál es el número mínimo de plátanos que podrían haber recogido? ¿Cuántos plátanos se ha comido cada uno?

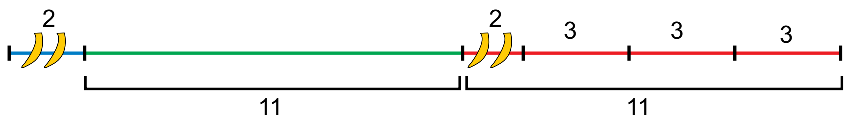
  Se levanta el marinero 1:



  Se levanta el marinero 2:



  El número de plátanos que queda tiene que ser múltiplo de 3, ya que se los reparten entre los dos marineros y el mono. El más pequeño de esos múltiplos es 3. Ahora, vamos rellenando con números los gráficos hacia atrás:



  El número mínimo de plátanos es 11 + 11 + 2 = 24.

  El marinero que se despierta en primer lugar se ha comido 12 plátanos; el otro marinero, 7, y el mono, 5.

- **Tienes estas cinco monedas:**

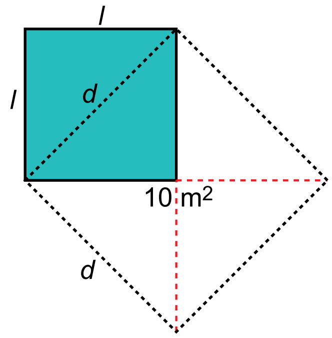
  ¿Cuántas cantidades distintas de dinero podrías formar?

  La menor cantidad de dinero que se puede formar con estas monedas es 10 céntimos, y la mayor, 190 céntimos (10 cts + 10 cts + 20 cts + 50 cts + 1 €).

  Se pueden formar todos los múltiplos de 10 entre esas cantidades:

10 céntimos → moneda de 10 cts	20 céntimos → moneda de 20 cts
30 céntimos → 20 + 10	40 céntimos → 20 + 10 + 10
50 céntimos → moneda de 50 cts	60 céntimos → 50 + 10
70 céntimos → 50 + 20	80 céntimos → 50 + 20 + 10
90 céntimos → 50 + 20 + 10 + 10	100 céntimos → 1 €

- **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal coincide con el lado de otro cuadrado de 10 m² de superficie.**



- El área del cuadrado de lado d es $A_1 = d^2 = 10$ m².
- El área del cuadrado de lado l es la mitad del área del cuadrado de lado d. Por tanto: $A_2 = l^2 = 10 : 2 = 5$ m².

El área del cuadrado de lado l es de 5 m².

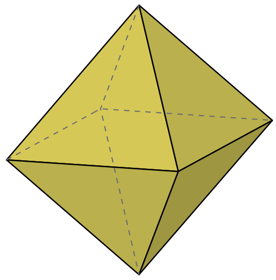
Autoevaluación

1. Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio de su longitud. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.

Se obtiene un cuerpo geométrico formado por 6 cuadrados, uno por cada vértice del octaedro y 8 hexágonos regulares, uno por cada cara del octaedro. En cada uno de sus vértices concurren un cuadrado y dos hexágonos.

El octaedro así truncado es un poliedro semirregular porque está compuesto por caras que son polígonos regulares de dos tipos, cuadrados y hexágonos, y en cada vértice concurren los mismos tipos de polígonos.

2. Describe los planos de simetría del octaedro regular. Di también cuáles son los ejes de giro y de qué orden es cada uno.



Planos de simetría. Tiene, en total, 9.

- De las 12 aristas del octaedro, cada cuatro están contenidas en un mismo plano.

  Cada uno de estos planos es un plano de simetría. De estos, hay 3.

- Cada par de aristas paralelas forman un plano. El plano perpendicular a cada uno de estos es un plano de simetría. De estos, hay 6.

Ejes de giro. Tiene, en total, 13.

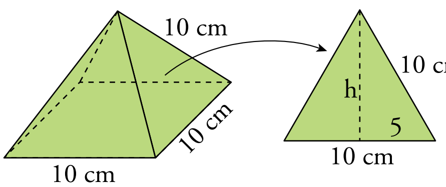
- Tres ejes de giro de orden cuatro, las rectas que unen vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, las rectas que unen los baricentros de caras opuestas.

3. Calcula la superficie total de:

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz mide 5 m.

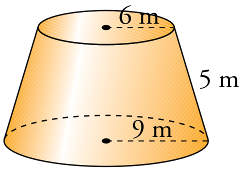
a)



$h = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66$ cm

$S_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^2 + 4\left(\dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2}\right) \approx 273{,}21 \text{ cm}^2$

b)



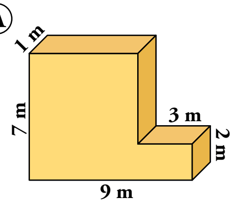
$S_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi(6 + 9) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 9^2 = 192\pi \approx 603{,}19 \text{ m}^2$

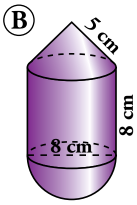
4. En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distintos lados del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm, respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

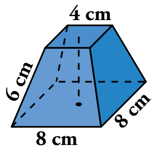
La altura de la zona esférica es $h = 5$ cm.

$S_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 80\pi \approx 251{,}33 \text{ cm}^2$

5. Calcula el volumen de estos cuerpos:

Ⓐ


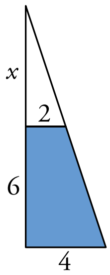
Ⓑ


Ⓒ


Ⓐ $V = 7 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

Ⓑ Altura del cono: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$

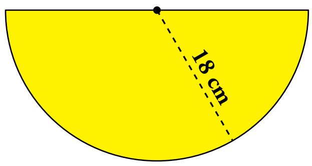
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 50{,}27 + 402{,}12 + 134{,}04 = 586{,}43 \text{ cm}^3$$

Ⓒ


$$\frac{4}{6 + x} = \frac{2}{x} \;\rightarrow\; 2x = 12 \;\rightarrow\; x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}8^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 224 \text{ cm}^3$$

6. Con este sector circular se construye un cono. Halla el radio de su base, su altura y su volumen.



La longitud de la semicircunferencia es $L = \dfrac{2\pi \cdot 18}{2} \approx 56{,}55$ cm, y coincide con la de la circunferencia de la base del cono. Por tanto:

Su radio es $56{,}55 = 2\pi r \;\rightarrow\; r = 9$ cm.

La altura es $h = \sqrt{18^2 - 9^2} \approx 15{,}69$ cm.

El volumen es $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 15{,}69 \approx 1\,330{,}87 \text{ cm}^3$

7. Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas? (Radio de la Tierra: 6 371 km)

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \;\rightarrow\; x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

8. Las coordenadas geográficas de San Petersburgo son 60° N 30° E, y de Oslo, 60° N y 11° E. Halla la longitud del arco del paralelo que va de la una a la otra.

Utilizando lo visto en el ejercicio resuelto de la página 221, el paralelo 60° mide, aproximadamente, 20 015 km.

Entre ambas ciudades hay un arco de 30° – 11° = 19°. Por tanto, la distancia entre ellos es $\dfrac{20\,015}{360°} \cdot 19° \approx 1\,056{,}35$ km.

Página 231

Resuelve

1. En el triángulo de la figura A, ¿qué ángulo gira cada una de las piezas recortadas para dar lugar a la pieza con forma de "pajarita"?

Cada una de las piezas recortadas gira 180°.

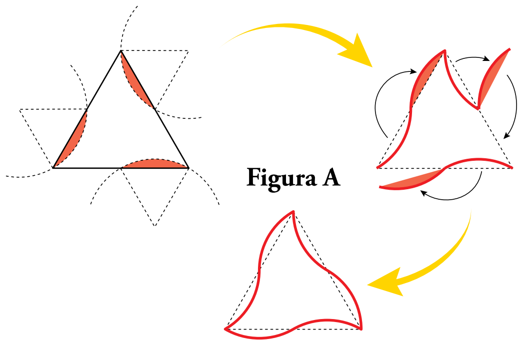


Figura A

2. Describe los movimientos que se mencionan arriba, para la transparencia que calca la figura B.

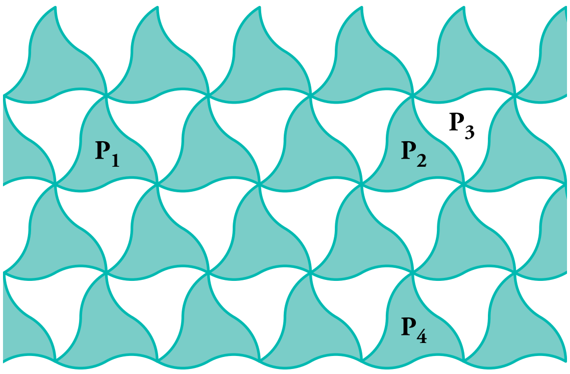
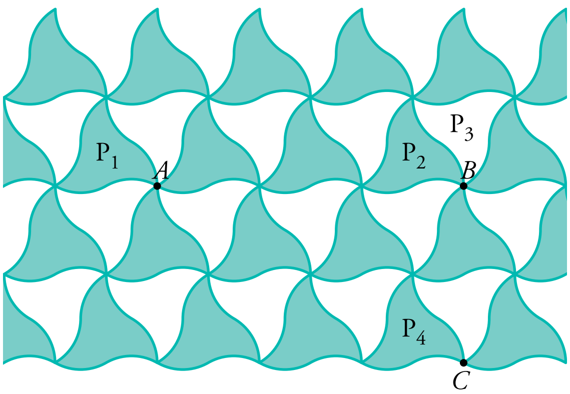


Figura B

Para que P_1 se superponga sobre P_2 hay que mover el papel a la derecha la distancia AB.

Para que P_2 se superponga sobre P_3 hay que girar 60°, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de B.

Para que P_3 se superponga sobre P_4 hay que mover el papel hacia abajo la distancia BC y girar 60°, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor de C.



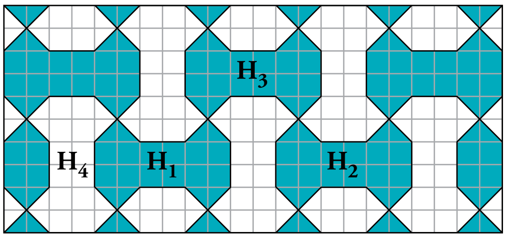
3. Supón que la figura B se expande indefinidamente en todas direcciones. ¿En qué punto clavarías un alfiler para que, al girar la transparencia, desaparezca el color blanco?

Pondríamos el alfiler en cualquiera de los vértices de cualquier pajarita.

3 Estudio de las traslaciones

Página 234

1. **El mosaico de abajo se llama "multihueso". H_1, H_2, H_3 y H_4 son "huesos". Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

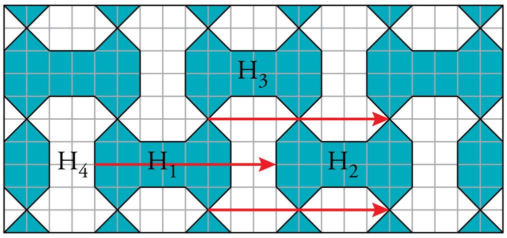


a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

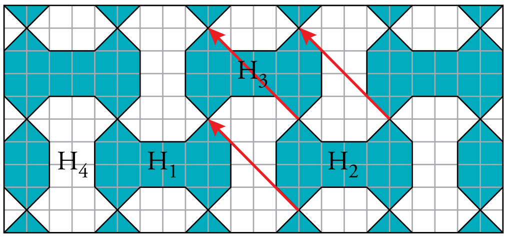
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

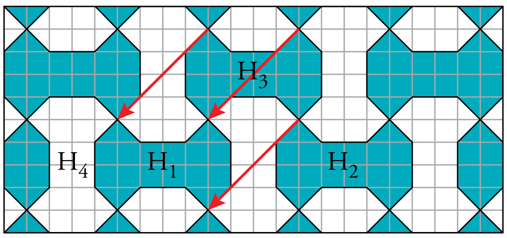
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

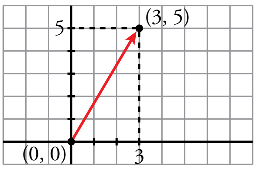


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 235

2. **En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).**

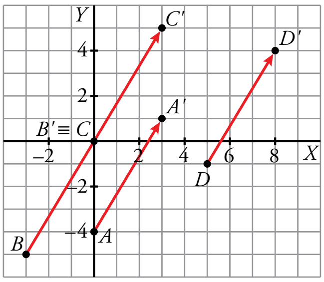


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

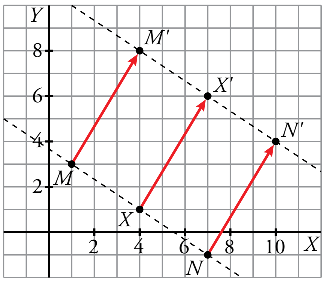
a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

a) Trasladamos cada punto por el vector $\vec{t} = (3,5)$.

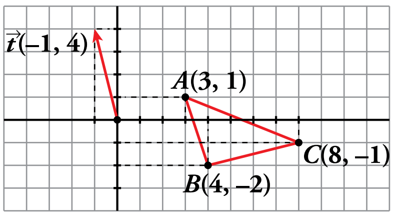


b)



3. **a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.**

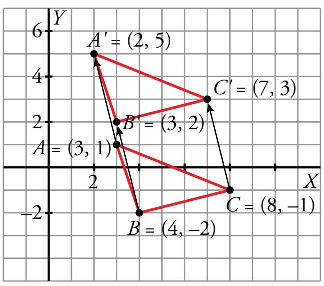
Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

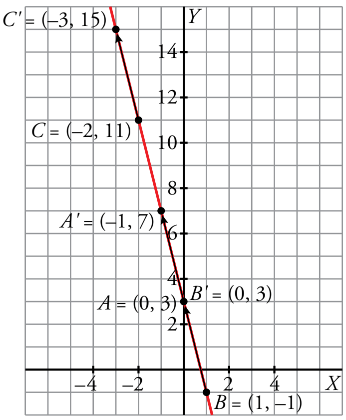


b) Comprueba que la recta r: $y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

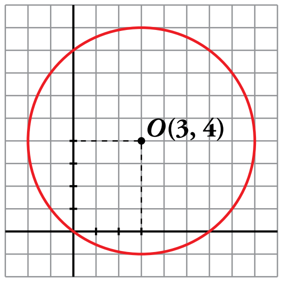
Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

a) Los dos triángulos son iguales.



b) 

4. **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia *C* de centro *O*(3, 4) y radio 5.**



a) Comprueba que *C* pasa por *P*(0, 0), *Q*(6, 8) y *R*(3, –1).

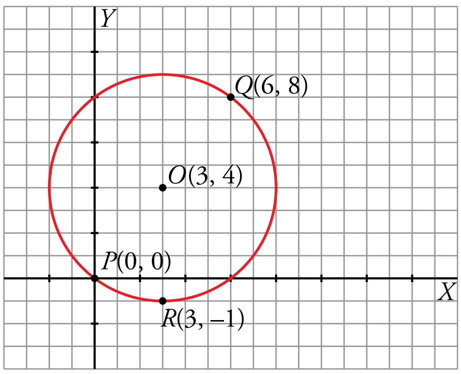
b) Traslada los puntos *O*, *P*, *Q* y *R* mediante la traslación T de vector $\vec{t}$(6, –2).

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es *O'* = T(*O*) y radio 5 pasa por *P'*, *Q'* y *R'*.

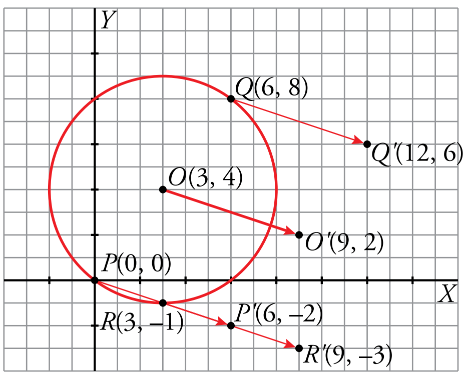
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué recta se transforma el eje *X*.

e) ¿En qué recta se transforma el eje *Y*?

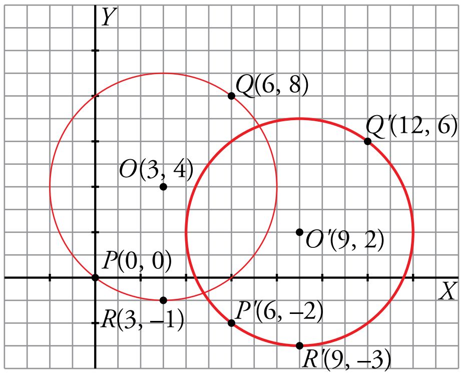
a) La circunferencia pasa por *P*, *Q* y *R*.



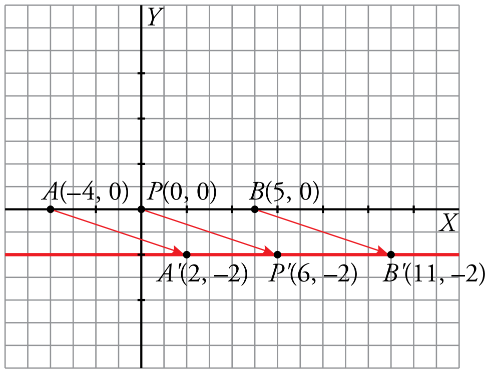
b) Los puntos trasladados son *P'*, *Q'* y *R'*.



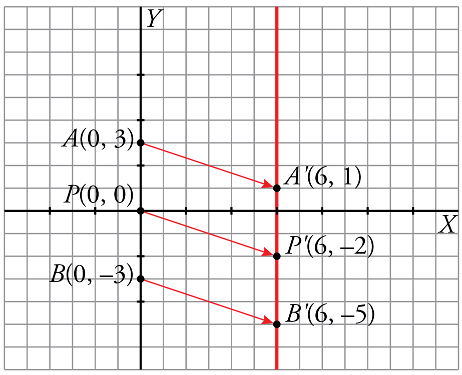
c) Al trasladar O, encontramos el centro $O'(9, 2)$. La circunferencia pasa por los trasladados de P, Q y R.



d) La recta obtenida al trasladar el eje X es $y = -2$:



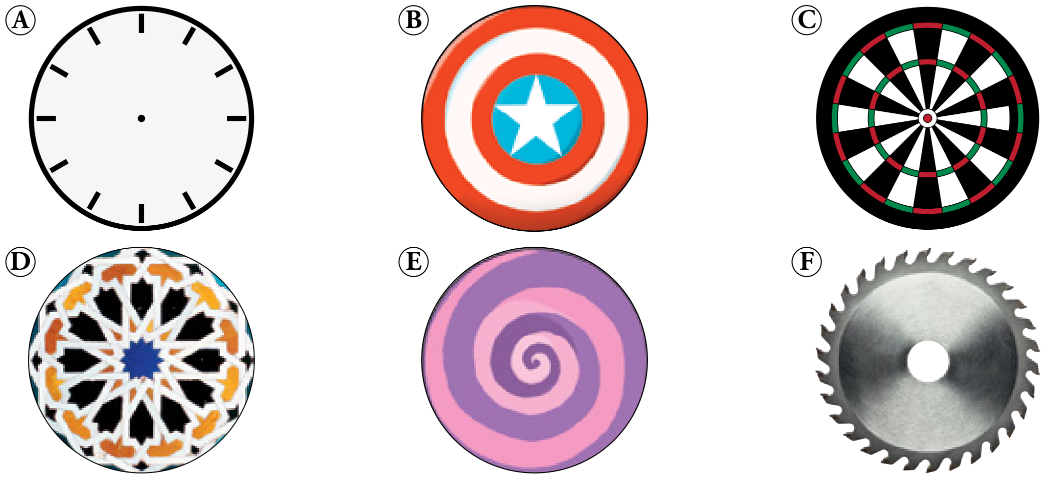
e) La recta obtenida al trasladar el eje Y es $x = 6$.



4 Estudio de los giros

Página 237

1. Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.



Todas estas figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n veces, contando con la posición inicial.

A tiene orden $n = 12 \to 360° : 12 = 30°$

B tiene orden $n = 5 \to 360° : 5 = 72°$

C tiene orden $n = 10 \to 360° : 10 = 36°$

D tiene orden $n = 12 \to 360° : 12 = 30°$

E tiene orden $n = 1 \to 360° : 1 = 360°$

F tiene orden $n = 30 \to 360° : 30 = 12°$

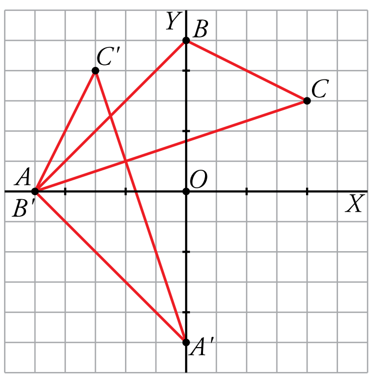
2. Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

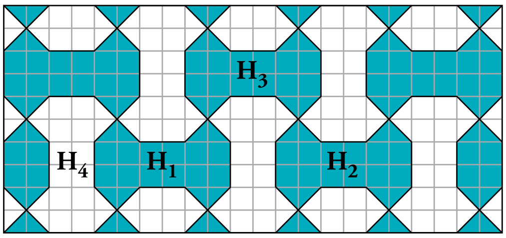
a)



b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

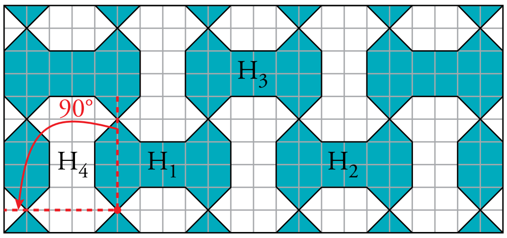
3. **Recuerda el mosaico “multihueso” que ya hemos visto en un ejercicio anterior.**



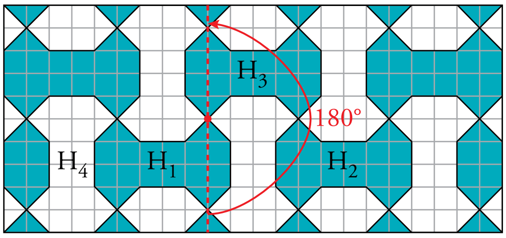
a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.

a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:



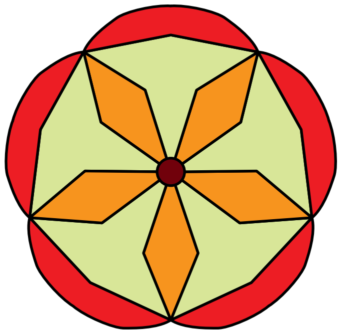
b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:

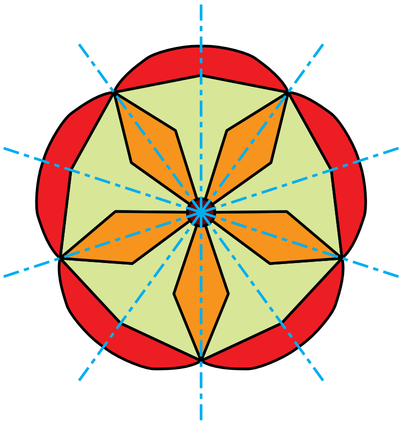


5 Simetrías axiales

Página 238

1. Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría.





2. Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

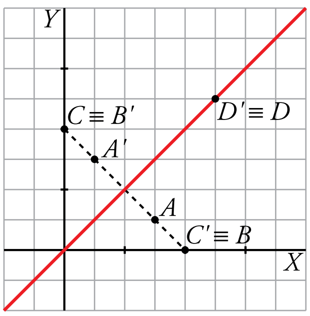
b) El eje X.

c) El eje Y.

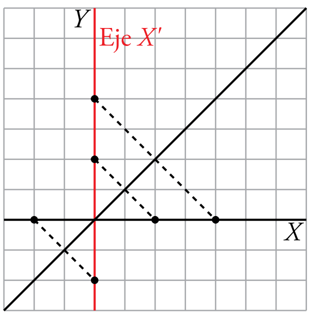
d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

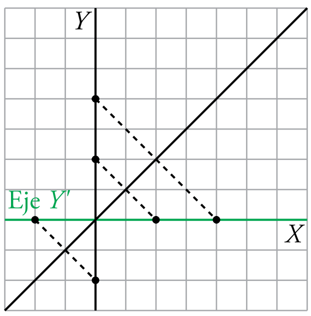
a)



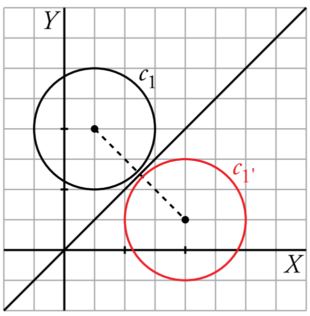
b)



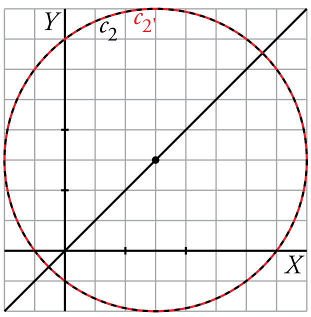
c)



d)



e)



6 Composición de movimientos

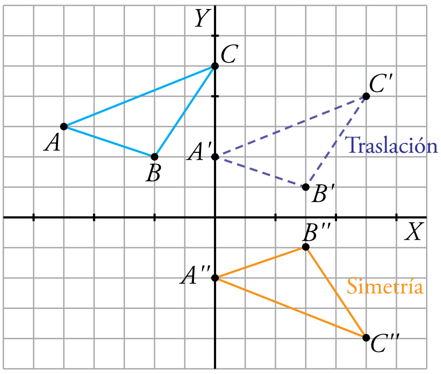
Página 239

1. **Dibuja, en papel cuadriculado, el triángulo Δ de vértices $A(-5, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 5)$. Considera la traslación T de vector $\vec{t}(5, -1)$ y la simetría S de eje el eje X ($y = 0$).**

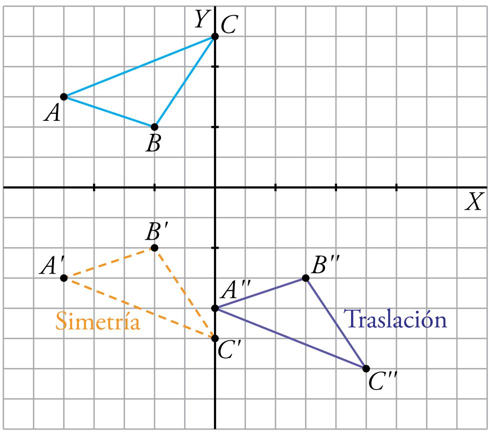
a) Transforma Δ mediante T compuesto con S.

b) Transforma Δ mediante S compuesto con T.

a)



b)

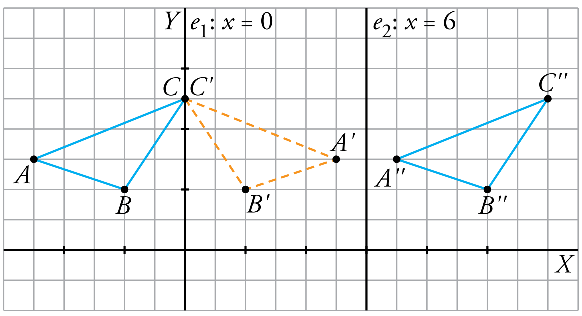


2. **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

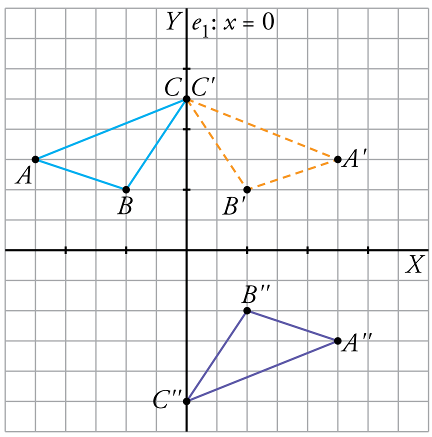
a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio anterior mediante S_1 compuesta con S_2.

b) Transforma Δ mediante S_1 compuesta con S, siendo S la del ejercicio anterior.

a)



b)

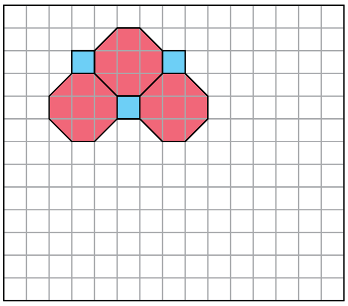


7 Mosaicos, cenefas y rosetones

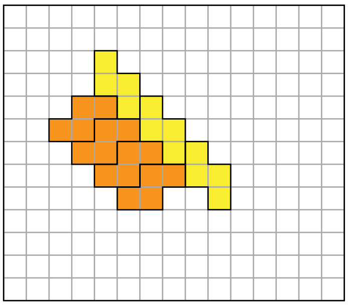
Página 240

1. Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

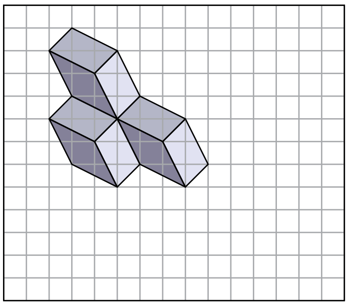
a)



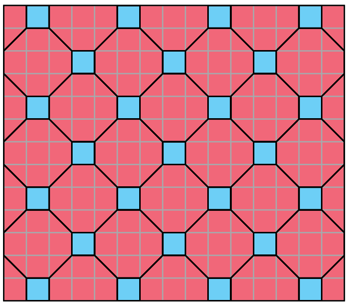
b)



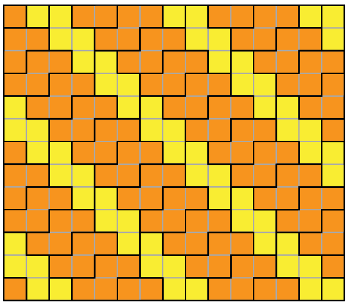
c)



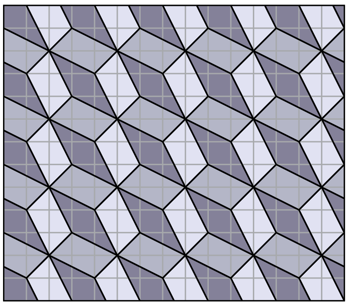
a)



b)



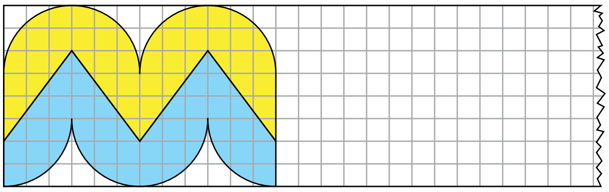
c)



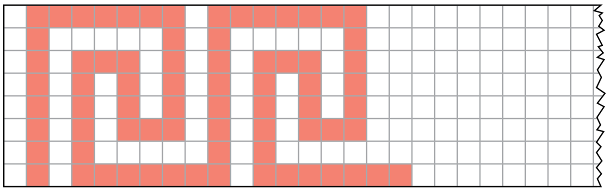
Página 241

2. Copia y completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

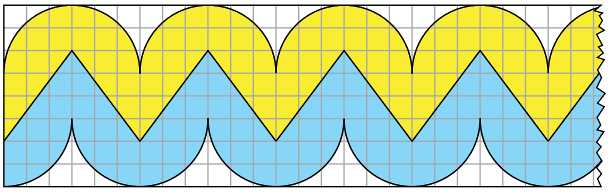
A



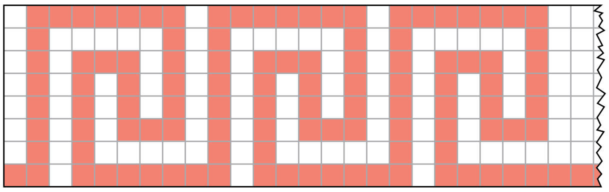
B



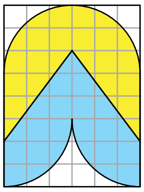
A



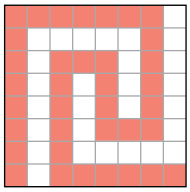
B



A Motivo mínimo:

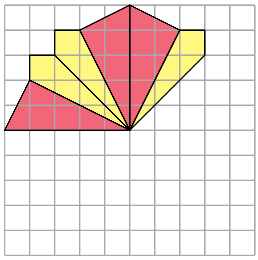


B Motivo mínimo:

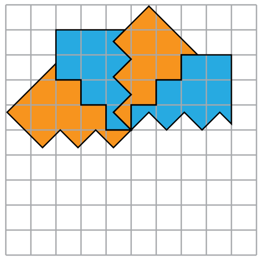


3. **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas:**

A



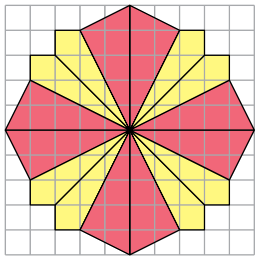
B



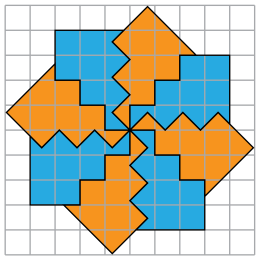
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

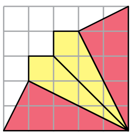
A



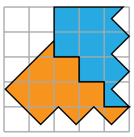
B



A. Este rosetón es de orden 4. El motivo mínimo es el siguiente:



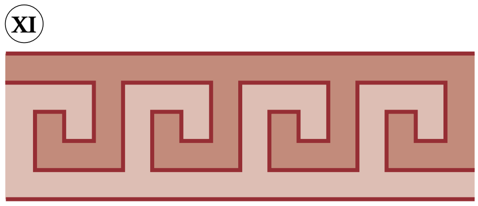
B. Este rosetón es de orden 8. El motivo mínimo es el siguiente:



Página 242

Hazlo tú

Encuentra movimientos que dejen invariante la cenefa (XI) de la página anterior.

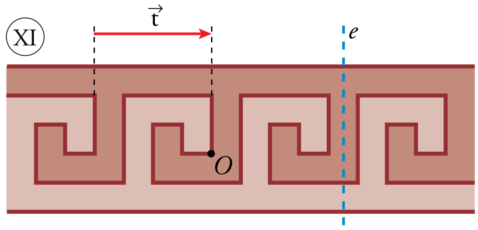


a) Con color.

b) Sin color.

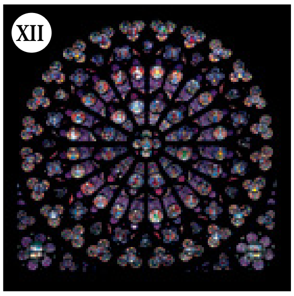
a) Dejan invariante la cenefa, respetando los colores, la traslación de vector $\vec{t}$ y la simetría de eje e.

b) Si no tenemos en cuenta el color, también deja invariante la cenefa el giro de centro O y ángulo 180°.



Hazlo tú

¿Qué movimientos dejan invariante el rosetón (XIII) de la página anterior?



Llamamos O al centro del rosetón. Prescindiendo del color, el giro que deja invariante el rosetón es el de centro O y ángulo 90°. Por tanto, O es un centro de orden 4.

Otros giros de centro O y ángulos 180°, 270°, 360°… también dejan invariante la figura.

Si tenemos en cuenta los colores, el giro de centro O y ángulo 180° lo deja invariante.

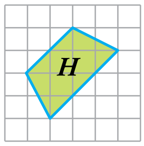
Ejercicios y problemas

Página 243

Practica

Traslaciones y giros

1. **a) Representa en papel cuadriculado la figura H y trasládala mediante el vector $\vec{t}_1(6, 1)$. Llamamos H_1 a la figura resultante.**

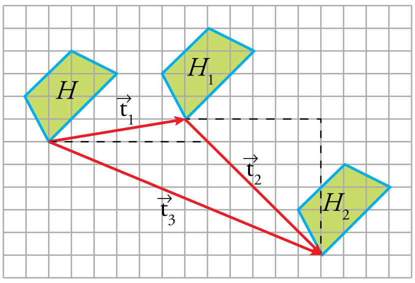


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(3, -4)$.

c) Indica el vector de traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para obtener H?

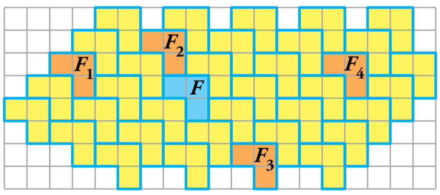
a) y b)



c) El vector es $\vec{t}_3 = (6, 1) + (3, -4) = (9, -3)$, respresentado en la imagen.

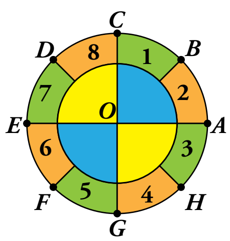
d) Es el vector $-\vec{t}_3 = (-9, 3)$.

2. **Halla los vectores $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ y $\vec{t}_4$ que nos permiten transformar F en cada una de las otras figuras.**



$\vec{t}_1 = (-5, 1)$; $\vec{t}_2 = (-1, 2)$; $\vec{t}_3 = (3, -3)$; $\vec{t}_4 = (7, 1)$

3. **Se ha realizado un giro de centro O que transforma A en D.**



a) Indica en qué puntos se transforman los puntos E, G y H.

b) ¿En qué se convierten los trapecios circulares 1, 3, 6 y 7?

c) ¿Ha cambiado la disposición de colores de la figura original?

d) Define el giro realizado (centro y ángulo) en el caso de que sea positivo y en el que sea negativo.

e) Si nos fijamos en los colores, ¿cuál es el menor ángulo de giro que hace que la figura se quede igual?

a) El punto E se transforma en el H; el punto G, en el B; y el H, en el C.

b) El trapecio circular 1 se convierte en el 6; el 3, en el 8; el 6, en el 3; y el 7 en el 4.

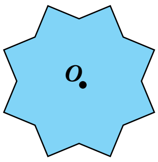
c) El color sí cambia.

d) Los giros realizados tienen centro O y ángulos 135° y –225°.

e) El menor ángulo de giro para que los colores de la figura no cambien es 90°.

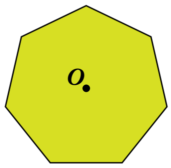
4. **Indica el menor ángulo que se debe girar alrededor de O cada una de estas figuras para mantenerse idénticas y halla el orden del centro de giro de O.**

a)



b)

c)



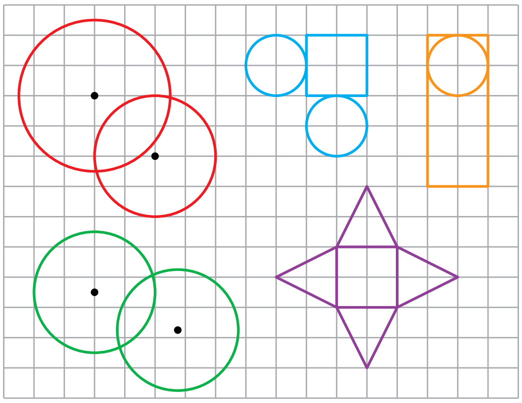
a) El menor ángulo es 45°. El centro es de orden 8.

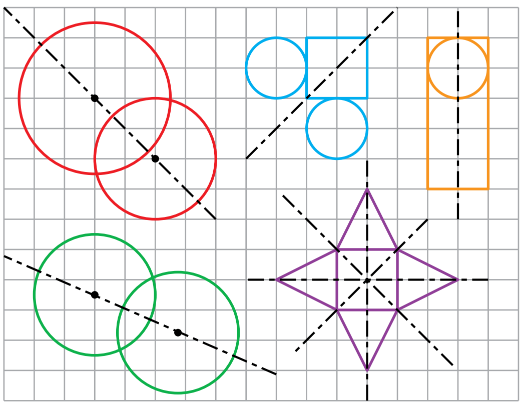
b) El menor ángulo es 72°. El centro es de orden 5.

c) El menor ángulo es de, aproximadamente, 51,43°. El centro es de orden 7.

Simetrías y mosaicos

5. **Copia en tu cuaderno y señala los ejes de simetría de estas figuras:**

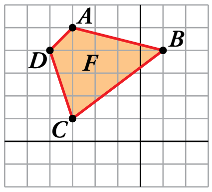




6. **Indica cuáles de las figuras de la actividad anterior tienen simetría central y señala su centro.**

Tienen simetría central las figuras d) y e). Sus centros están en el punto de corte de sus ejes de simetría, dibujados en el ejercicio anterior.

7. **Calcula las coordenadas de los vértices de la figura *F* transformada mediante:**



a) La simetría de eje *X*.

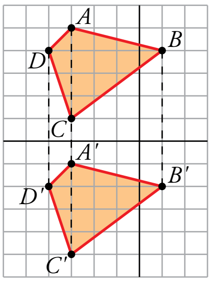
b) La simetría de eje *Y*.

c) La simetría central que tiene por centro el origen de coordenadas.

d) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por *C* y *B*.

e) La simetría central que tiene por centro el vértice *B*.

f) ¿Qué puntos o segmentos son invariantes con respecto a las simetrías de los apartados d) y e)?

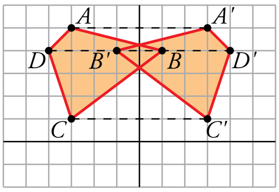
a) 

$A' = (-3, -5)$

$B' = (1, -4)$

$C' = (-3, -1)$

$D' = (-4, -4)$

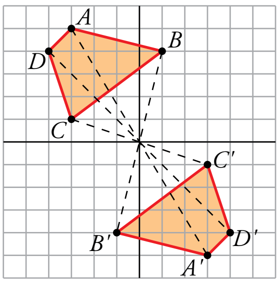
b) 

$A' = (3, 5)$

$B' = (-1, 4)$

$C' = (3, 1)$

$D' = (4, 4)$

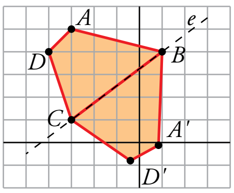
c) 

$A' = (3, -5)$

$B' = (-1, -4)$

$C' = (3, -1)$

$D' = (4, -4)$

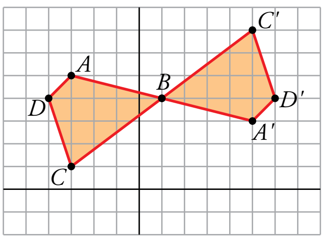
d) 

$A' = (0{,}84; -0{,}12)$

$B' = B = (1, 4)$

$C' = C = (-3, 1)$

$D' = (-0{,}4; -0{,}8)$

e) 

$A' = (5, 3)$

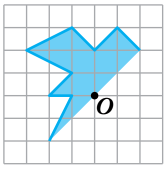
$B' = B = (1, 4)$

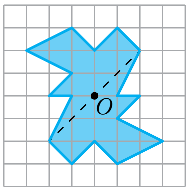
$C' = (5, 7)$

$D' = (6, 4)$

f) Con respecto a la simetría del apartado d), el segmento *BC* es invariante, y con respecto a la del apartado e), es invariante el punto *B*.

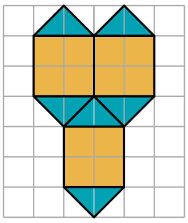
8. **Copia en tu cuaderno y completa la figura de la derecha para que el punto *O* sea el centro de una simetría central.**



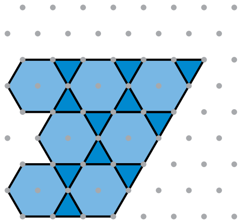


9. **a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:**

I

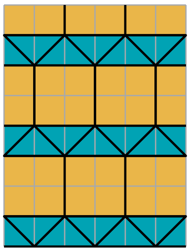


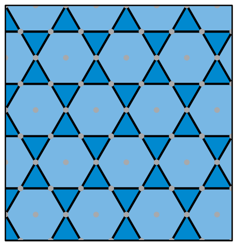
II



b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

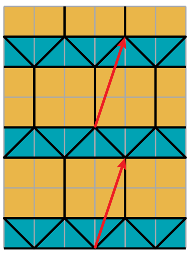
a)



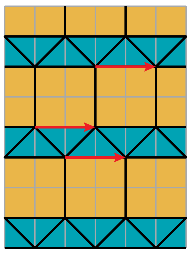


b) • En la primera figura podemos encontrar diferentes traslaciones y giros:

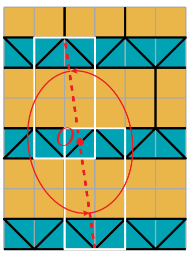
Traslación de vector $\vec{t} = (1, 3)$



Traslación de vector $\vec{t} = (2, 0)$

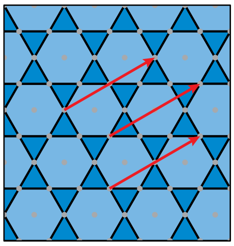


Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$

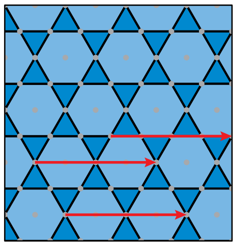


• En la segunda figura encontramos traslaciones y giros:

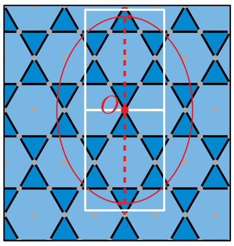
Traslación de vector $\vec{t} = (3, 2)$



Traslación de vector $\vec{t} = (4, 0)$



Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$

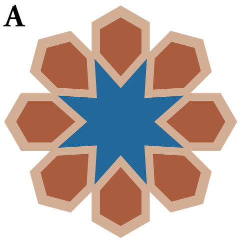


Página 244

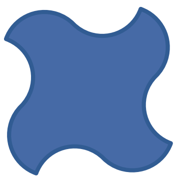
Resuelve problemas

10. **a) Indica dónde tienen el centro de giro cada una de las siguientes figuras:**

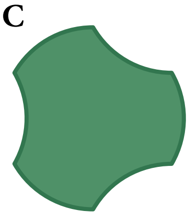
A



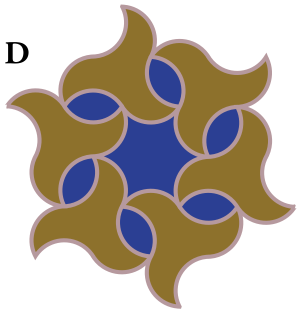
B



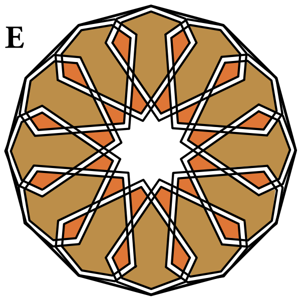
C



D



E



b) Halla el orden de cada uno de estos centros y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

c) ¿Cuáles tienen, además, centro de simetría?

a) El centro de cada figura es su centro de giro.

b) Todas tienen centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

Los órdenes de giro de cada una y sus ángulos mínimos de coincidencia son:

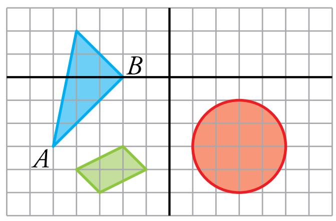
FIGURA	A	B	C	D	E
ORDEN DE GIRO	8	4	3	6	12
ÁNGULO MÍNIMO	45°	90°	120°	60°	30°

c) Todas las figuras tienen centro de simetría excepto la C.

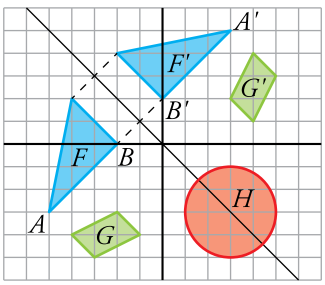
11. **a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$:**

b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?



a)



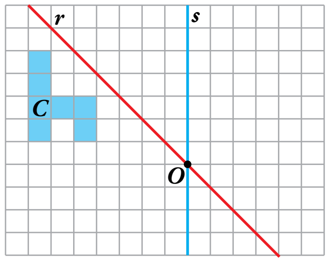
b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, ya que es perpendicular al eje de simetría. Su ecuación es $y = x + 2$.

c) Sí, es invariante el círculo.

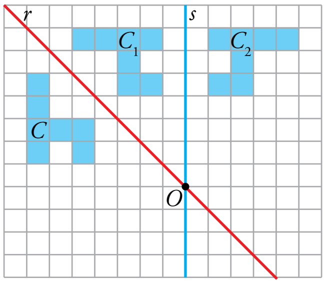
12. **a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.**

b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.



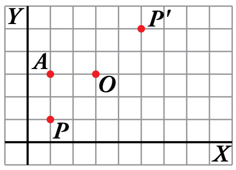
a) y b)



c) El giro equivalente a la composición de las dos simetrías es de centro O y ángulo –90°.

13. **Observa la cuadrícula.**

Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.



a) Identifica otros tres movimientos que transformen P en P'.

b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno?

a) Otros movimientos que convierten P en P' son:

– La simetría central de centro O (mismo movimiento que el giro descrito en el enunciado).

– El giro de centro O y ángulo –180°.

– La traslación de vector $\vec{t} = (4, 4)$.

– La simetría axial de eje la recta que pasa por O y es perpendicular a PP'.

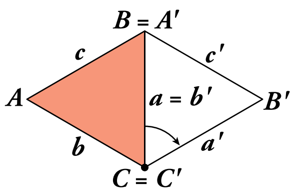
b) En la simetría central y los giros, $A' = (5, 3)$.

En la traslación, $A' = (5, 7)$.

En la simetría axial, $A' = (3, 5)$.

14. **Determina cada uno de los tres movimientos que transforma Δ en Δ' y designa en cada caso los vértices y los lados de Δ' teniendo en cuenta de qué vértices de Δ provienen. Por ejemplo:**

Un giro de centro C y ángulo –60° transforma:

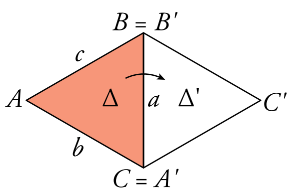


$\boldsymbol{A \to B = A'}$

$\boldsymbol{B \to B'}$

$\boldsymbol{C \to C = C'}$

Movimiento 1: giro de centro B y ángulo 60°.



$A \to A' = C$

$B \to B = B'$

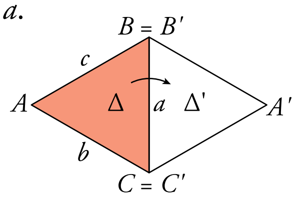
$C \to C'$

Movimiento 2: simetría axial de eje la recta que contiene al lado a.

$A \to A'$

$B \to B = B'$

$C \to C = C'$

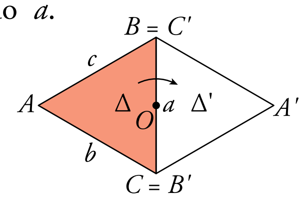


Movimiento 3: simetría central de centro el punto medio del lado a.

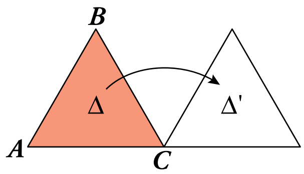
$A \to A'$

$B \to C = B'$

$C \to B = C'$



15. **Encuentra una traslación, un giro y una simetría que transformen Δ en Δ'. Nombra, en cada caso, los vértices de Δ'.**

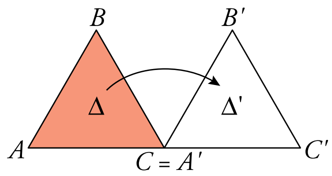


- Traslación de vector $\vec{t} = AC$.

  $A \to C = A'$

  $B \to B'$

  $C \to C'$

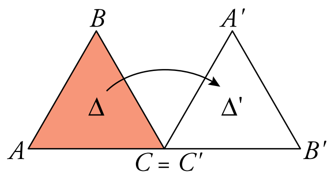


- Giro de centro C y ángulo –120°.

  $A \to A'$

  $B \to B'$

  $C \to C = C'$

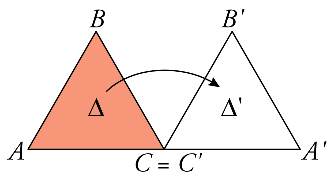


- Simetría de eje la recta que pasa por C y es perpendicular a AC.

  $A \to A'$

  $B \to B'$

  $C \to C = C'$

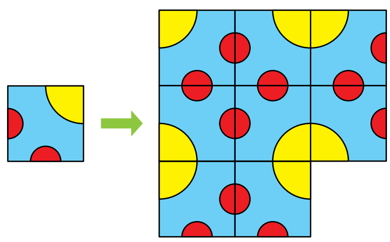


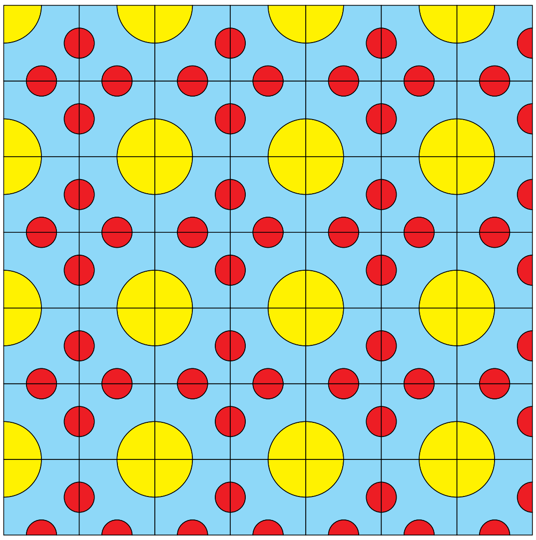
16. **Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:**

a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.

c) ¿Qué proporción de cada color (superficie) habrá en la pared? Radio del círculo grande: 10 cm; radio del círculo pequeño: 4 cm.



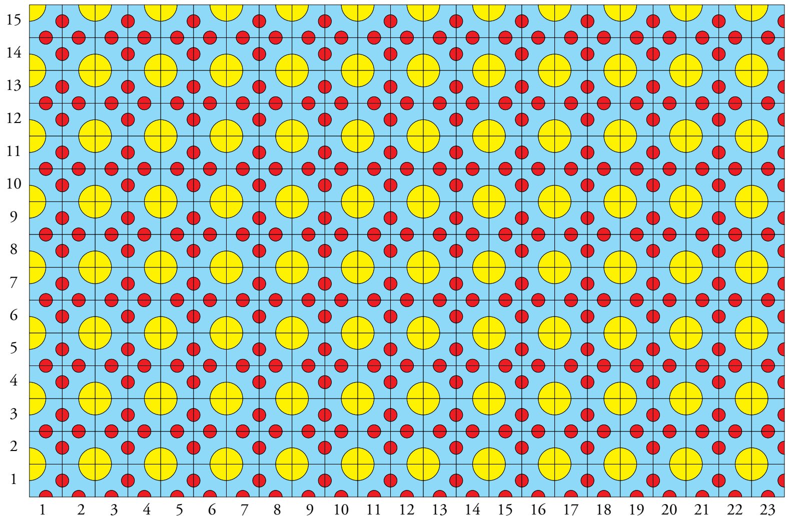
a) 

b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan "medios", es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, 11 · 7 = 77 círculos grandes.

Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

4.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

…

Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá 11 · 22 + 12 · 7 = 242 + 84 = 326 círculos pequeños completos.

c) La proporción de cada color en la pared es igual a la proporción de cada color en un solo azulejo, ya que todos son iguales.

El cuadrado tiene $20 \cdot 20 = 400$ cm^2 de superficie.

El color rojo está en las dos mitades del círculo pequeño; es decir, un círculo pequeño completo (con $\frac{20}{6}$ cm de radio).

Por tanto, el color rojo ocupa una superficie de $\pi \cdot \frac{20}{6} \approx 34,91$ cm^2.

El color amarillo ocupa un cuarto de círculo grande (con 10 cm de radio):

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 78,54$ cm^2

Con estos datos, ya podemos hallar las proporciones de los colores que hay en cada azulejo y, por tanto, en toda la pared:

ROJO: $\frac{34,91}{400} \approx 0,0872 = 8,72\,\%$

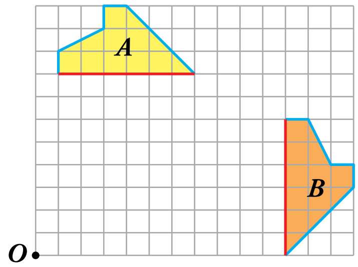
AMARILLO: $\frac{78,54}{400} \approx 0,1963 = 19,63\,\%$

AZUL: $100 - (8,72 + 19,63) = 71,65\,\%$

Página 245

Problemas "+"

17. **Las figuras *A* y *B* son iguales (compruébalo).**



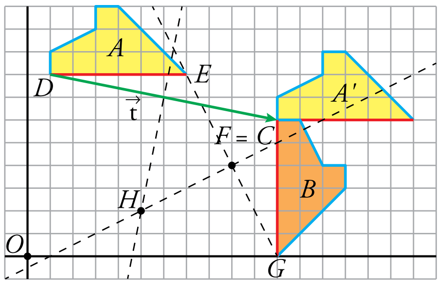
a) Lleva la figura *A* hasta la *B* mediante una traslación seguida de un giro.

b) ¿Cómo encontrarías el centro de un único giro mediante el cual se transformara directamente *A* en *B*?

Busca el giro que transforma la base de A (segmento rojo) en la de B.

c) Describe las transformaciones anteriores utilizando unos ejes de coordenadas con centro en *O*.

a) Trasladamos la figura *A* hasta *A'* mediante el vector $\vec{t}\,(10, -2)$, después giramos *A'* centrando en *C* con un ángulo de –90°.

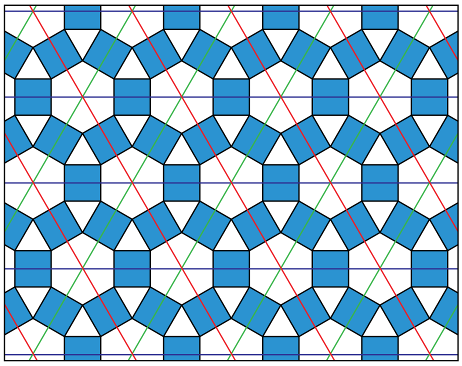


b) Trazamos el segmento *DF* y su mediatriz y el segmento *EG* y su mediatriz. El punto donde se cortan ambas mediatrices, *H*, será el centro del único giro, de ángulo –90°, que convierte la figura *A* en la *B*.

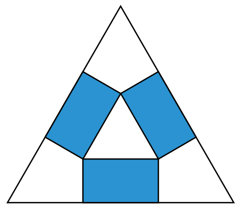
c) La traslación es de vector $\vec{t} = (10, -2)$. El giro es de centro $C = (11, 6)$. El último giro tiene centro en el punto $H = (5, 2)$.

18. **Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza "no se notan" salvo que los hayamos pintado expresamente.**

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:



descubrimos la pieza de aquí abajo como candidata a "motivo mínimo".

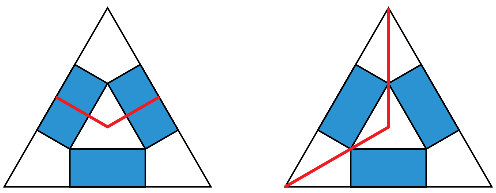


a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.

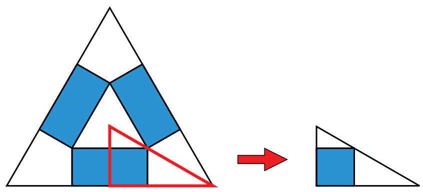
b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?

c) Descubre otro "motivo mínimo" trazando ejes de simetría perpendiculares.

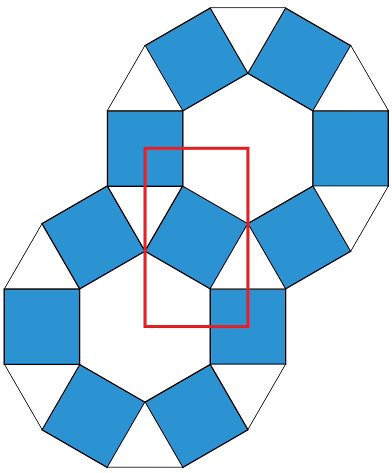
a)



b)



c)



Reflexiona sobre la teoría

19. **Si consideramos una transformación que *deja todo como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad (I).**

a) Define un giro que sea equivalente a la identidad.

b) ¿Cuántos giros de esta amplitud son equivalentes a una identidad?

a) Un giro de 360° y cualquier centro es equivalente a una identidad.

b) Tantos como queramos, siempre que sean completos: $2 \cdot 360° = 720°$, $3 \cdot 360 = 1\,080°$ …

20. **Se dice que una transformación T' es inversa de otra T cuando compuesta con ella da lugar a la identidad (es decir, si aplicamos T y después T', todo queda como estaba). Encuentra la transformación inversa en cada uno de los siguientes casos:**

a) Una traslación de vector $\vec{t}(-5, 2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -45°$.

c) Una simetría de eje la recta $y = x$.

a) Una traslación de vector $\vec{t}(5, -2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 45°$.

c) Es inversa de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

21. **La composición de movimientos no cumple la propiedad conmutativa, es decir, que, en general, el orden en el que se aplican dos movimientos influye en el resultado final. Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa. Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:**

a) Composición de dos traslaciones.

b) Composición de dos giros del mismo centro.

c) Composición de dos simetrías axiales.

d) Composición de una traslación y un giro.

a) Sí, es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.

b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.

c) No es conmutativa.

d) No es conmutativa.

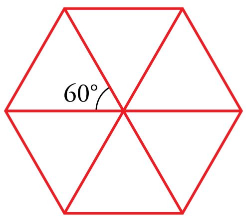
22. **Se dice que una transformación es idempotente (o involutiva) si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba). Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.**

Por ejemplo:

Un giro de centro cualquiera y ángulo 180°, ya que al componerlo dos veces es equivalente a la identidad.

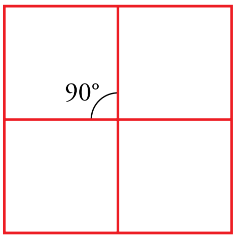
23. **Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico. Y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.**

- Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



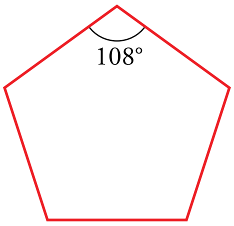
$60° \cdot 6 = 360°$

- Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$90° \cdot 4 = 360°$

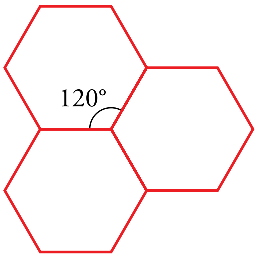
- No podemos encajar los pentágonos regulares:



$180° \cdot 3 = 324°$ → Con tres pentágonos no llega a 360°.

$180° \cdot 4 = 432°$ → Con cuatro pentágonos pasamos de 360°.

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$120° \cdot 3 = 360°$

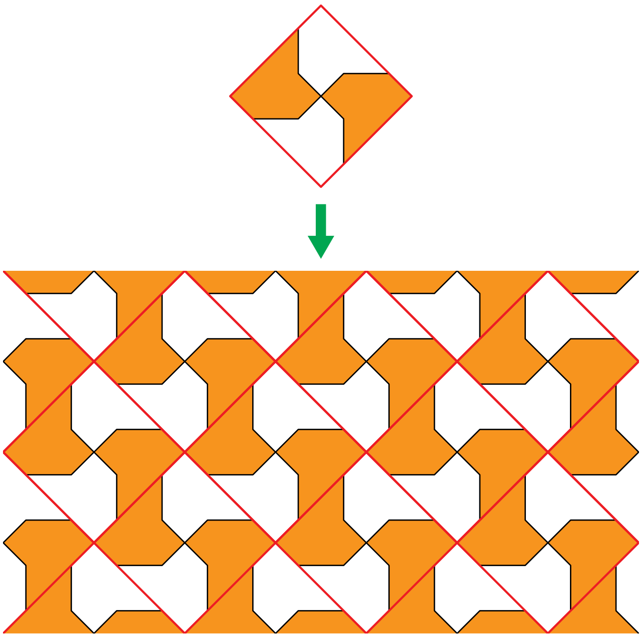
- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayor de 360°; luego no se pueden encajar en el plano.

Página 246

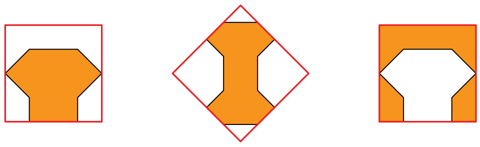
Investiga

Fabricación actual

La industria actual copia los diseños de los mosaicos nazaríes pero en vez de construirlos pieza a pieza, que sería mucho más costosos en dinero y tiempo, los consigue mediante baldosas cuadradas e iguales, con cuya composición se obtiene el dibujo deseado. Observa las ilustraciones de abajo:



- **¿Sabrías decir cuáles de estas baldosas sirven para reproducir el "multihueso"?**



Todas las baldosas sirven para reproducir el mosaico multihueso.

Página 247

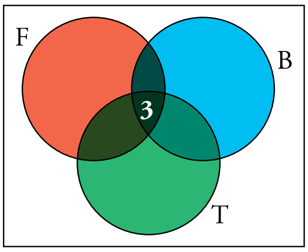
Entrénate resolviendo problemas

- **Una encuesta realizada entre los 30 alumnos y alumnas de una clase arroja los siguientes datos:**

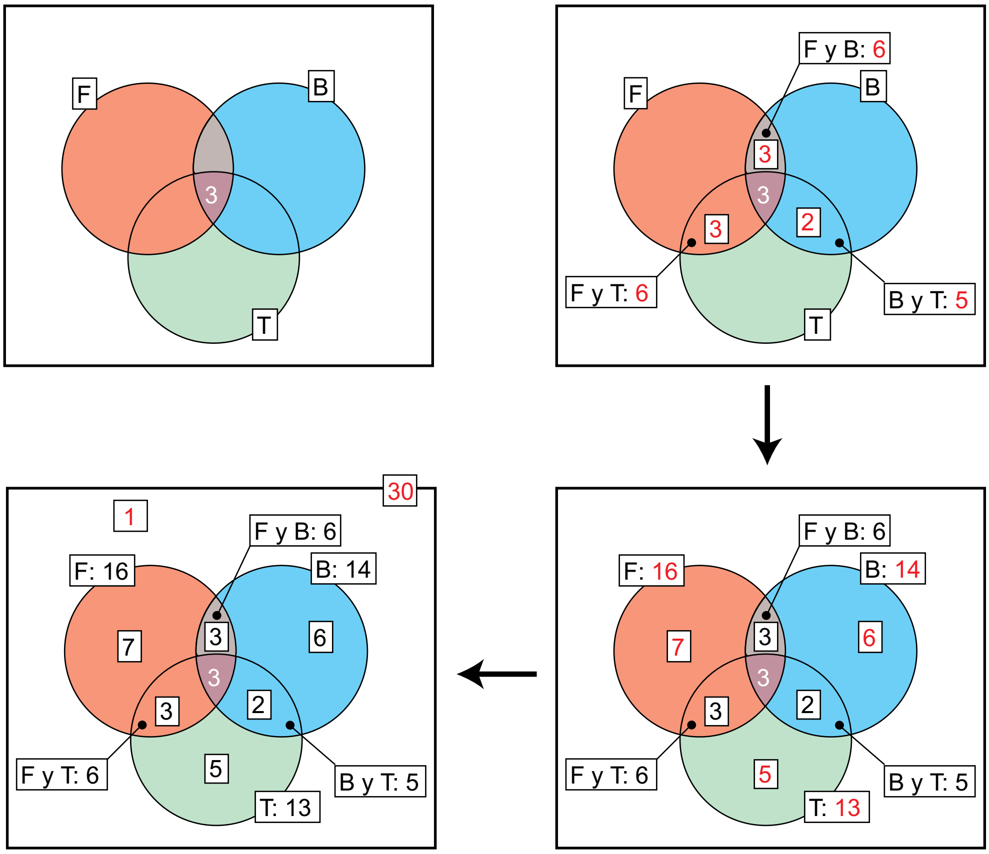
  — 16 practican fútbol; 14, baloncesto, y 13, tenis.

  — 6 practican fútbol y baloncesto, 6 practican fútbol y tenis y 5 practican baloncesto y tenis.

  — 3 practican los tres deportes.



¿Cuántos de esos 30 chicos y chicas no practican ni fútbol, ni baloncesto ni tenis?



Siguiendo paso a paso los diagramas, está claro que el número de chicos y chicas que practica uno o dos o los tres deportes es: 3 + (3 + 3 + 2) + (7 + 6 + 5) = 29.

Como son 30 en total, solo uno de ellos no practica ningún deporte.

- **a) Tienes cuatro pesas de 1 kg, 2 kg, 4 kg y 8 kg y una báscula de dos platillos. Comprueba que con ellas puedes realizar cualquier pesada de un número entero de kilos entre 1 kg y 15 kg.**

  b) Si añades una pesa de 16 kg, ¿hasta qué pesada puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 21 kg? ¿Y para pesar 29 kg?

  c) ¿Qué pesas más deberías tener para poder pesar, al menos, 120 kg? Con esas pesas, ¿cuál es la mayor pesada que puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 113 kg?

a) Marcamos en esta tabla las pesas que se pueden poner en uno de los platillos para conseguir las distintas pesadas, desde 1 kg hasta 15 kg.

PESO	1 kg	2 kg	4 kg	8 kg
1 kg	×			
2 kg		×		
3 kg	×	×		
4 kg			×	
5 kg	×		×	
6 kg		×	×	
7 kg	×	×	×	
8 kg				×
9 kg	×			×
10 kg		×		×
11 kg	×	×		×
12 kg			×	×
13 kg	×		×	×
14 kg		×	×	×
15 kg	×	×	×	×

b) Añadiendo una pesa de 16 kg se pueden pesar desde 1 kg hasta 15 + 16 = 31 kg.

Para pesar 21 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 4 y 1 kilos:

16 + 4 + 1 = 21.

Para pesar 29 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 8, 4 y 1 kilos:

16 + 8 + 4 + 1 = 29.

c) Después de 16, la siguiente potencia de 2 es 32, y como 31 + 32 = 63, no llegamos a los 120.

La siguiente potencia de 2 es 64, y como 63 + 64 = 127, con esta ya se consigue llegar a los 120.

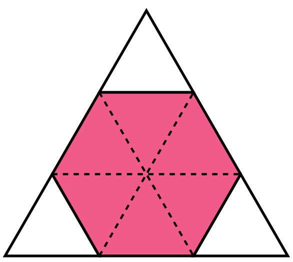
Habría que añadir, por tanto, las pesas de 32 kg y de 64 kg.

Tenemos, pues, las pesas 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64, con las que podríamos pesar hasta 127 kg.

Para pesar 113 kg, habría que poner: 113 = 64 + 32 + 16 + 1

$$\boxed{\begin{matrix}96\\ \text{(faltan 17)}\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}112\\ \text{(falta 1)}\end{matrix}}$$

- **Cortando las esquinas de un triángulo equilátero se puede obtener un hexágono regular. ¿Cuál será el área de ese hexágono si la del triángulo original era de 90 m²?**

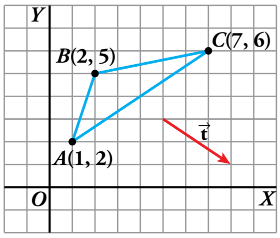


El hexágono ocupa $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ del área del triángulo.

Por tanto, su área es $A = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60 \text{ m}^2$.

Autoevaluación

1. **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del *ABC* mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje *X*.

c) La simetría de eje *Y*.

d) El giro de centro *O* y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto *P*(0, 4) es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje *Y* es una recta doble?

a) *A*'(4, 0); *B*'(5, 3); *C*'(10, 4)

b) *A*'(1, –2); *B*'(2, –5); *C*'(7, –6)

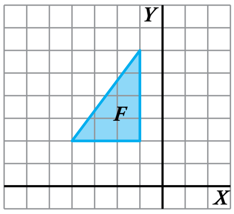
c) *A*'(–1, 2); *B*'(–2, 5); *C*'(–7, 6)

d) *A*'(2, –1); *B*'(5, –2); *C*'(6, –7)

e) En la simetría de eje *Y* el punto *P*(0, 4) es doble.

f) En las simetrías de eje *X* y de eje *Y*, el eje *Y* es doble.

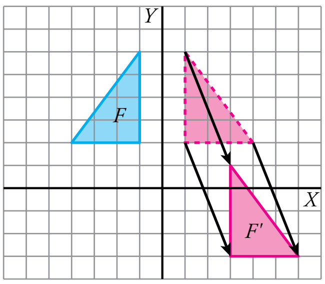
2. **Llamamos S a la simetría de eje *Y*, y T, a la traslación de vector $\vec{t}$(2, –5).**



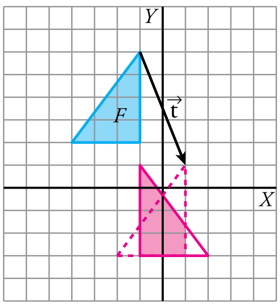
a) Obtén la transformada de la figura *F* mediante la composición de S con T.

b) Obtén la transformada de *F* mediante la composición de T con S.

a)

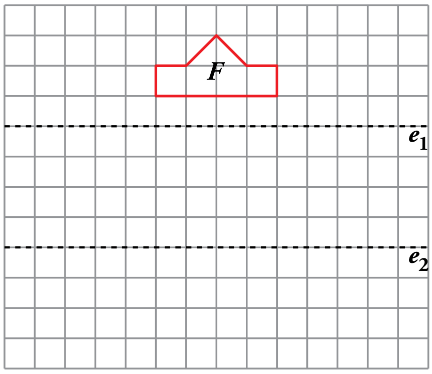


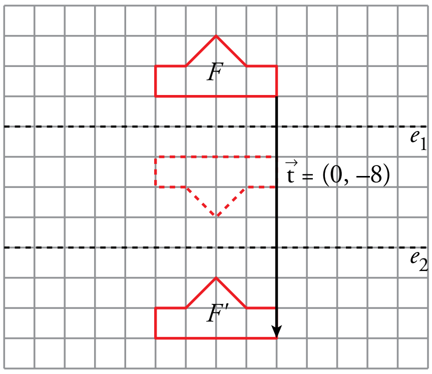
b) La figura coloreada es el resultado de la composición de movimientos.



3. **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la fugura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

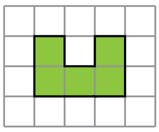
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?





Con una traslación de vector $\vec{t}\,(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4. **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Respuesta abierta.

Página 251

Resuelve

1. ¿Qué aportaba el estudio de John Graunt sobre la población de Londres, llegando más allá de la pura recopilación de datos?

El estudio analizaba cómo influían en los nacimientos y defunciones las causas naturales, sociales y políticas.

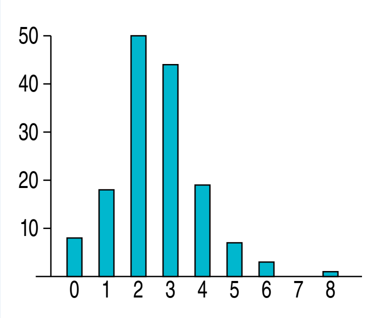
2. Fíjate en el estudio relativo al NÚMERO DE HIJOS DE 150 FAMILIAS que aparece abajo.

NÚMERO DE HIJOS EN 150 FAMILIAS

TABLA DE FRECUENCIAS

N.º DE HIJOS	CANTIDAD DE FAMILIAS
0	8
1	18
2	50
3	44
4	19
5	7
6	3
7	0
8	1

DIAGRAMA DE BARRAS



a) En la tabla, ¿qué significa el 44 que está a la derecha del 3?

b) Sin hacer el cálculo, ¿cuánto suman los nueve números de la columna derecha de la tabla?

c) ¿Por qué las barras del diagrama están separadas unas de otras?

a) El 44 significa que hay 44 familias que tienen 3 hijos.

b) Deben sumar 150, ya que el estudio se hace sobre 150 familias.

c) Las barras están separadas unas de otras porque el *número de hijos* es una variable discreta.

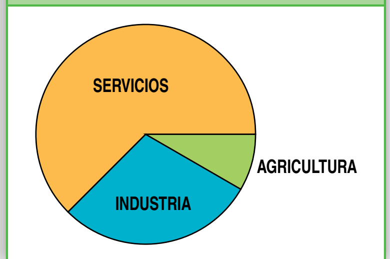
3. Observa la información sobre el REPARTO, SEGÚN EL TIPO DE TRABAJO, DE 600 000 TRABAJADORES que aparece en la ilustración.

REPARTO, SEGÚN EL TIPO DE TRABAJO, DE 600 000 TRABAJADORES

TABLA DE FRECUENCIAS

SECTOR DE PRODUCCIÓN	N.º DE TRABAJADORES
Agricultura	50 000
Industria	175 000
Servicios	375 000

DIAGRAMA DE SECTORES



a) ¿Sobre cuántos trabajadores se han recopilado datos?

b) ¿Qué color del diagrama corresponde a cada sector?

c) Calcula el porcentaje de trabajadores que corresponde a cada sector y comprueba que los sectores están razonablemente construidos.

a) Se han recopilado datos sobre 600 000 trabajadores.

b) Amarillo → Servicios Azul → Industria Verde → Agricultura

c) Agricultura: $\dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 8{,}33\,\% \rightarrow \dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 360° = 30°$

Industria: $\dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 29{,}17\,\% \rightarrow \dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 360° = 105°$

Servicios: $\dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 62{,}5\,\% \rightarrow \dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 360° = 225°$

4. Describe alguna aplicación concreta de la estadística en la investigación científica (por ejemplo, en medicina).

Respuesta abierta.

La estadística, que es el estudio de la incertidumbre, es esencial para la ciencia y para la investigación médica en particular. Sirve para planear estudios apropiados y analizar e interpretar los resultados. Permite saber cuándo se tiene suficiente precisión al estimar las diferencias entre tratamientos y poder hacer una recomendación fiable. Sin estadística sería muy difícil hacer ningún progreso en investigación médica.

1 Población y muestra

Página 252

1. Indica la población, la muestra y los individuos en cada uno de los siguientes ejemplos:

a) Se seleccionan 50 edificios de una ciudad para hacer un estudio sobre el número de plantas, la altura y la utilización de los locales bajos (para viviendas, oficinas, tiendas, bares…).

b) Se analizan 100 libros de una biblioteca: número de páginas, ubicación en la estantería y contenido (como novela, ensayo, manual…).

c) Se han encuestado a 23 de los alumnos que van al centro en bici sobre el número de desarrollos de la bicicleta, el peso y la marca.

a) Población: edificios de la ciudad.

Muestra: 50 edificios.

Individuos: cada uno de los edificios.

b) Población: libros de la biblioteca.

Muestra: 100 libros de la biblioteca.

Individuos: cada uno de los libros.

c) Población: estudiantes de un instituto.

Muestra: 23 alumnos del centro que van en bici.

Individuos: cada uno de los estudiantes.

2 Variables estadísticas

Página 253

1. Indica si cada una de estas variables es cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa:

a) En los cines de un pueblo se anota el tipo de película que proyectan (comedia, acción…), cuánto dura la película y el número de espectadores.

b) En los mercados de una ciudad se observa la superficie, el número de puertas de acceso y el tipo de mercado (alimentación, ropa, complementos…).

c) Nos hemos fijado en algunas características de los teléfonos móviles que tienen los alumnos de un centro escolar: la marca, el número de compañías que lo ofertan y el precio.

d) Un científico estudia, en los volcanes del Pacífico, la altura, el número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años y el tipo de volcán (hawaiano, estromboliano, vulcaniano, peleano).

a) Tipo de película: cualitativa.

Duración de la película: cuantitativa continua.

Número de espectadores: cuantitativa discreta.

b) Superficie: cuantitativa continua.

Número de puertas de acceso: cuantitativa discreta.

Tipo de mercado: cualitativa.

c) Marca: cualitativa.

Número de compañías que lo ofertan: cuantitativa discreta.

Precio: cuantitativa continua.

d) Altura: cuantitativa continua.

Número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años: cuantitativa discreta.

Tipo de volcán: cualitativa.

3 El proceso que se sigue en estadística

Página 254

1. **Se quiere realizar una encuesta para estudiar las aficiones musicales. Para cada una de las preguntas siguientes, di justificadamente si te parecen o no razonables:**

a) ¿Cuáles son tus grupos musicales preferidos?

b) De los siguientes estilos musicales, señala aquellos que has escuchado más este mes:

- **Rock**
- **Pop**
- **Rap**
- **Elect.**
- **Hip-Hop**
- **Reggae**
- **Salsa**
- **Punk**
- **Metal**
- **Grunge**
- **Jazz**
- **Clásico**

c) ¿Oyes la radio? Si es así, ¿qué cadena?

d) ¿Cuáles de estas cadenas de radio escuchas más de 2 horas a la semana?

- **Cadena 100**
- **Los 40 principales**
- **Rock FM**
- **Kiss FM**
- **Radio Clásica**
- **Europa FM**
- **EDM**
- **M80 Radio**
- **Radio 3**
- **Cadena Dial**

e) ¿Cuál es el último concierto al que has ido?

a) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

b) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *el estilo musical* y cuáles son sus posibles valores.

c) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

d) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *la cadena musical que escuchas* y cuáles son sus posibles valores.

e) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

4 Confección de una tabla de frecuencias

Página 256

1. El profesor ha apuntado las faltas de asistencia que ha tenido cada uno de sus alumnos a lo largo del trimestre:

2, 3, 0, 1, 1	**2, 2, 4, 3, 1**	**3, 0, 2, 0, 1**
2, 2, 1, 2, 1	**0, 3, 4, 2, 1**	**3, 5, 1, 1, 2**

a) Confecciona una tabla de frecuencias.

b) Si el profesor hubiera apuntado el número de ejercicios bien resueltos de cada alumno a lo largo del año, ¿la tabla de frecuencias debería ser con datos aislados o agrupados en intervalos?

a)

FALTAS (x_i)	RECUENTO	f_i
0	||||	4
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ||||	9
3	~~||||~~	5
4	||	2
5	|	1

b) La tabla de frecuencias debería ser con datos agrupados en intervalos porque tomaría muchos valores distintos.

2. Se ha tomado el tiempo en los 100 m lisos a los miembros de un club de atletismo. Estos son los resultados:

11,62	**12,03**	**12,15**	**11,54**	**10,95**
11,56	**11,08**	**11,38**	**12,08**	**11,73**
12,11	**11,52**	**11,72**	**11,23**	**11,66**
10,87	**11,32**	**11,58**	**12,01**	**11,06**

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

10,805 - 11,075 - 11,345 - 11,615 - 11,885 - 12,155

INTERVALO	RECUENTO	f_i
10,805-11,075	|||	3
11,075-11,345	|||	3
11,345-11,615	~~||||~~	5
11,615-11,885	||||	4
11,885-12,155	~~||||~~	5

Página 257

3. Halla las frecuencias acumuladas de esta distribución y di qué significan $f_{acumulada}$ (3) y $f_{acumulada}$ (5).

N.° DE SUSPENSOS	0	1	2	3	4	5	6	7
FRECUENCIA	6	12	8	5	3	1	1	0

x_i	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
0	6	6
1	12	6 + 12 = 18
2	8	6 + 12 + 8 = 26
3	5	6 + 12 + 8 + 5 = 31
4	3	6 + 12 + 8 + 5 + 3 = 34
5	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 = 35
6	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 = 36
7	0	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 + 0 = 36

$f_{acumulada}$ (3) = 31. Significa que 31 estudiantes han tenido 3 suspensos o menos.

$f_{acumulada}$ (5) = 35. Significa que 35 estudiantes han tenido 5 suspensos o menos.

4. Esta tabla recoge los meses que cumplen años los 100 componentes de un grupo de montaña.

MES	E	F	M	Ab	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
FREC.	7	9	10	6	8	8	7	9	8	9	9	10

a) Halla las frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántas personas nacieron antes de junio? ¿Y después de agosto?

a)

MES (x_i)	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
E	7	7
F	9	16
M	10	26
Ab	6	32
My	8	40
Jn	8	48
Jl	7	55
Ag	9	64
S	8	72
O	9	81
N	9	90
D	10	100

b) Antes de junio nacieron 40 personas.

Después de agosto nacieron 100 – 64 = 36 personas.

5. La siguiente tabla muestra el deporte que prefieren practicar 40 estudiantes.

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	**10**
Balonvolea	**1**
Fútbol	**20**
Tenis	**5**
Ajedrez	**4**

a) Calcula las frecuencias relativas y porcentuales de esta distribución y explica por qué carece de sentido hallar las frecuencias acumuladas.

b) Que la frecuencia relativa de *Baloncesto* sea 10/40 quiere decir que uno de cada cuatro estudiantes juega al baloncesto. Explica con las mismas palabras las frecuencias relativas de *Fútbol* y *Tenis* y las frecuencias porcentuales de *Ajedrez* y *Baloncesto*.

a) Carece de sentido porque no es una variable cuantitativa y, siendo cualitativa, no tiene un orden ni puede estar ordenada.

Deporte (x_i)	f_i	$f_{relativa}$	%
Baloncesto	10	$\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	25 %
Balonvolea	1	$\frac{1}{40} = 0{,}025$	2,5 %
Fútbol	20	$\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	50 %
Tenis	5	$\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0{,}125$	12,5 %
Ajedrez	4	$\frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	10 %
	40	1	100 %

b) Que la frecuencia relativa de *Fútbol* sea 20/40 = 1/2 quiere decir que uno de cada dos estudiantes juega al fútbol.

Que la frecuencia relativa de *Tenis* sea 5/40 = 1/8 quiere decir que uno de cada ocho estudiantes juega al tenis.

Que la frecuencia porcentual de *Ajedrez* sea 10 % quiere decir que diez de cada cien estudiantes juega al ajedrez.

Que la frecuencia porcentual de *Baloncesto* sea 25 % quiere decir que veinticinco de cada cien estudiantes juega a baloncesto.

5 Gráfico adecuado al tipo de información

Página 258

1. Representa mediante el gráfico adecuado.

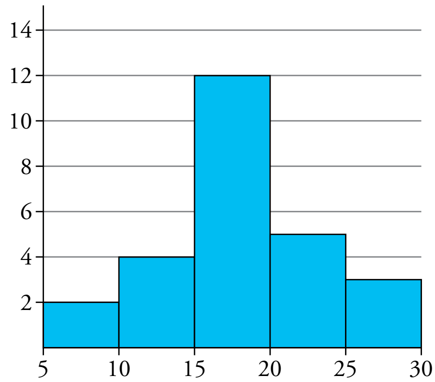
a) Temperaturas máximas medidas cada 15 días a lo largo de un año en una localidad.

TEMPERATURA (°C)	N.° DE DÍAS
5-10	2
10-15	4
15-20	12
20-25	5
25-30	3

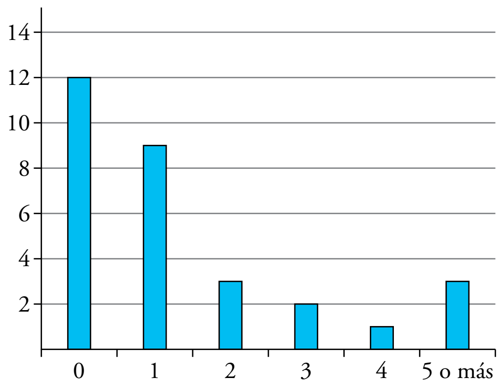
b) Número de asignaturas suspensas que tienen los alumnos de una clase.

N.° DE ASIGNATURAS SUSPENSAS	N.° DE ALUMNOS
0	12
1	9
2	3
3	2
4	1
5 o más	3

a) Mediante un histograma:



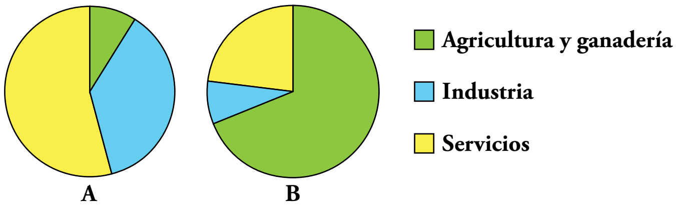
b) Mediante un diagrama de barras:



Página 259

2. Los diagramas de sectores se utilizan a menudo para comparar la misma distribución en distintos países o regiones.

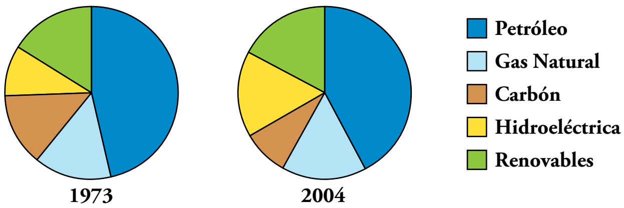
Observa los sectores que muestran cómo se divide la población trabajadora de dos países: Austria y Mauritania. ¿A cuál pertenece cada uno? Explica por qué.



A → Austria por ser mayor los sectores de servicios e industria y menor el de la agricultura y ganadería.

B → Mauritania, por que es mayor el sector de la agricultura y ganadería.

3. Observa la evolución del consumo mundial de energías primarias por fuentes energéticas:



a) Explica qué energías han aumentado su consumo y cuáles han disminuido.

b) Busca en Internet el diagrama correspondiente al año actual.

a) Del año 1973 al 2004 ha aumentado el consumo del gas natural y de energías hidroeléctricas y, ha disminuido el consumo de petróleo y de carbón.

Se mantiene el consumo de energías renovables.

b) El alumnado buscará el diagrama de sectores del año correspondiente.

Página 260

Hazlo tú

Construye la pirámide de población de tu comunidad autónoma buscando los datos en Internet.

Respuesta abierta.

Ejercicios y problemas

Página 261

Practica

Población y muestra. Variables

1. **Indica, para cada caso propuesto:**

— Cuál es la población y cuáles, los individuos.

— Cuál es la variable y qué tipo de variable es.

a) El peso de los recién nacidos en la Comunidad Valenciana a lo largo del año pasado.

b) Cantidad de lluvia recogida en un cierto observatorio meteorológico en cada año del presente siglo.

c) Número de mascotas en los hogares españoles.

d) Tipos de coches (marca y modelo) que tiene cada vecino de mi urbanización.

e) Número de tarjetas amarillas mostradas en cada partido de fútbol de 1.ª división esta temporada.

a) Población: los recién nacidos en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Individuos: cada bebe recién nacido en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Variable: peso.

Es una variable cuantitativa continua.

b) Población: los años del presente siglo.

Individuos: cada año del siglo.

Variable: cantidad de lluvia recogida.

Es una variable cuantitativa continua.

c) Población: hogares españoles.

Individuos: cada hogar español.

Variable: número de mascotas.

Es una variable cuantitativa discreta.

d) Población: vecinos de mi urbanización.

Individuos: cada vecino de mi urbanización.

Variable: tipo de coche.

Es una variable cualitativa.

e) Población: partidos de fútbol de 1ª división de la temporada pasada.

Individuos: cada partido de fútbol de la temporada.

Variable: número de tarjetas amarillas mostradas.

Es una variable cuantitativa discreta.

2. **Se quieren realizar los siguientes estudios:**

I. El sexo (niño o niña) de cada bebé nacido en un hospital a lo largo de un año.

II. Qué periódico lee cada habitante de una ciudad.

III. Las alturas y los pesos de todos los alumnos y las alumnas de la clase.

IV. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

V. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población y cuáles, los individuos.

b) Indica en cada uno cuál es la variable que se estudia y de qué tipo es.

c) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I. Población: los bebés nacidos en un hospital a lo largo de un año.

Individuos: cada uno de los bebés nacidos en el hospital ese año.

II. Población: los habitantes de una ciudad.

Individuos: cada uno de los habitantes de la ciudad.

III. Población: los alumnos y alumnas de la clase.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas de la clase.

IV. Población: las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

Individuos: cada una de las personas que han visto la obra en la ciudad.

V. Población: los alumnos y alumnas de un centro escolar.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas del centro escolar.

b) I. La variable es el sexo. Es una variable cualitativa.

II. La variable es el periódico. Es una variable cualitativa.

III. Las variables son la altura y el peso. Son variables cuantitativas continuas.

IV. La variable es la edad. Es una variable cuantitativa continua.

V. La variable es los estudios que se elegirán al terminar la ESO. Es una variable cualitativa.

c) Es necesario recurrir a una muestra en los casos II y IV porque pueden ser poblaciones muy numerosas e incluso difíciles de controlar.

En los demás casos no sería necesario ya que en el hospital se lleva un registro continuo y obligatorio de los nacimientos, y en la clase y el centro escolar no hay tantos alumnos y son fáciles de controlar y preguntar.

3. **Di cuáles de las siguientes muestras están "razonablemente" bien tomadas:**

a) En una frutería, para ver cómo están de duros los aguacates, tocamos cinco piezas.

b) Hablo con diez de mis amigos sobre política para saber quién ganará este año las elecciones.

c) Ojeamos diez páginas de un libro para ver si nos gustan sus ilustraciones.

d) Tomo café en cuatro bares de mi barrio para ver cuánto cuesta un café en España.

a) La muestra tiene pocas piezas.

b) Los individuos no están elegidos al azar.

c) Bien tomada.

d) Los individuos no están elegidos al azar.

Interpretación de tablas y gráficos

4. **Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad:**

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	
NO CONTESTA	0,4

a) Completa la tabla.

b) Si hubo 145 personas que respondieron "nunca", ¿a cuántas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Los encuestados, ¿son población o muestra?

a)

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	11,6
NO CONTESTA	0,4

b) 11,6 % de $P = 145$ 8 $P = \dfrac{145 \cdot 100}{11,6} = 1\,250$

En total se encuestaron a 1 250 personas.

c) 37,2 % de 1 250 = 465 personas dijeron todos los días.

29,2 % de 1 250 = 365 personas dijeron una vez a la semana.

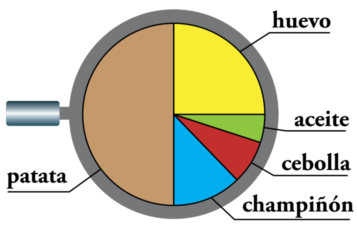
10,4 % de 1 250 = 130 personas dijeron una vez al mes.

11,2 % de 1 250 = 140 personas dijeron alguna vez al año.

0,4 % de 1 250 = 5 personas no contestaron.

d) Los encuestados son muestra.

5. **Suponemos que hacemos una tortilla de patatas con las proporciones que muestra este diagrama:**

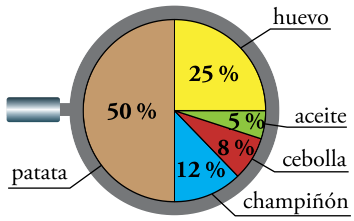


a) Los porcentajes de los ingredientes son 50 %, 25 %, 12 %, 8 % y 5 %. A la vista del gráfico, asigna cada uno al ingrediente correspondiente.

b) Si la tortilla pesa 1 kg, ¿qué cantidad hay que echar de cada ingrediente?

c) En otra tortilla con las mismas proporciones hemos echado 40 g de aceite. ¿Cuánto pesará? ¿Qué cantidad de champiñones tendrá?

a)



b) Si la tortilla pesa un kilo necesitamos 500 g de patatas, 250 g de huevos, 120 g de champiñones 80 g de cebolla y 50 g de aceite.

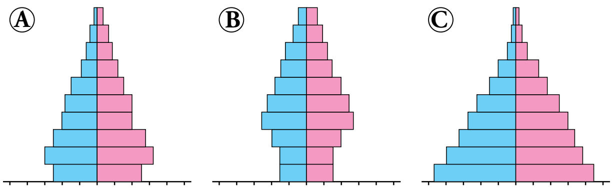
c) $\frac{40}{50} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 0{,}8$

La tortilla pesará 0,8 kg.

$\frac{0{,}8}{1} = \frac{x}{120} \rightarrow x = 0{,}8 \cdot 120 = 96$

Tendrá 96 g de champiñones.

6. Las siguientes pirámides de población muestran la distribución por edades y sexos de tres países:



Teniendo en cuenta los problemas resueltos de la página 260, asocia, justificadamente, una gráfica a cada uno de estos países:

I. País del tercer mundo.

II. País en vías de desarrollo.

III. País desarrollado con un sistema estable.

La pirámide *C* es la de un país del tercer mundo, ya que hay muchos nacimientos y muy pocas personas llegan a ser ancianas.

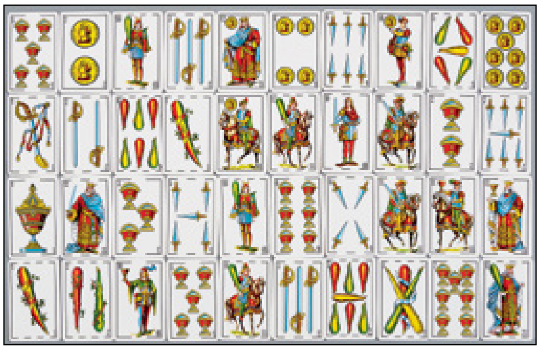
La pirámide *B* corresponde a un país desarrollado con un sistema estable. Su base es más estrecha debido al descendo de la natalidad y es en la que hay mayor esperanza de vida.

La pirámide *A* representa un país en vías de desarrollo. Tiene una forma intermedia entre las otras dos.

Página 262

Elaboración de tablas y gráficas

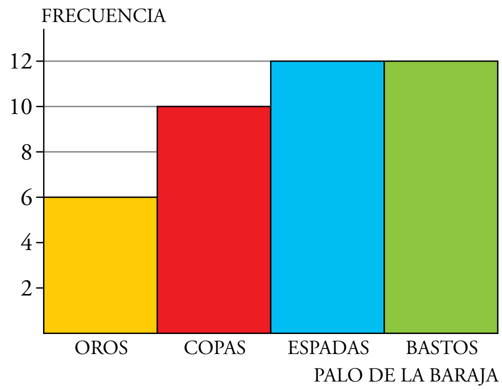
7. **Pilar extrae al azar una carta de una baraja defectuosa, la devuelve al mazo, barajea y vuelve a extraer una carta. Repite este proceso 40 veces. Estos son todas las cartas extraídas:**



a) Dibuja el diagrama de barras según el palo obtenido.

b) Mirando el diagrama, ¿de qué palo crees que faltan cartas?

a)



b) A la baraja le faltan cartas de oros.

8. **Estos son los mejores tiempos en los 10 km de los miembros de un club de atletismo:**

42:20	**40:08**	**47:32**	**49:50**	**43:24**	**48:31**	**51:42**
45:53	**47:17**	**50:37**	**49:07**	**51:37**	**43:28**	**45:18**
44:36	**46:15**	**50:48**	**47:59**	**51:21**	**43:37**	**42:14**

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes intervalos:

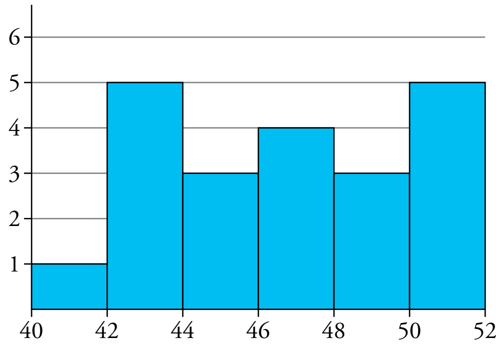
40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52

b) Traza el histograma correspondiente.

a)

INTERVALO	RECUENTO	f_i
40-42	|	1
42-44	~~||||~~	5
44-46	|||	3
46-48	||||	4
48-50	|||	3
50-52	~~||||~~	5

b)



9. **Se ha realizado un estudio sobre la utilidad que le dan al *Smartphone* los menores de 26 años y los de 26 a 50 años. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:**

UTILIDAD	MENORES DE 26	DE 26 A 50
Juegos	**47 %**	**13 %**
Redes sociales	**23 %**	**24 %**
Deportes y entretenimiento	**18 %**	**35 %**
Noticias	**12 %**	**28 %**

a) Elabora los correspondientes diagramas de sectores.

b) Describe los parecidos y las diferencias de ambos grupos.

c) Inventa una tabla para el grupo de mayores de 50 años.

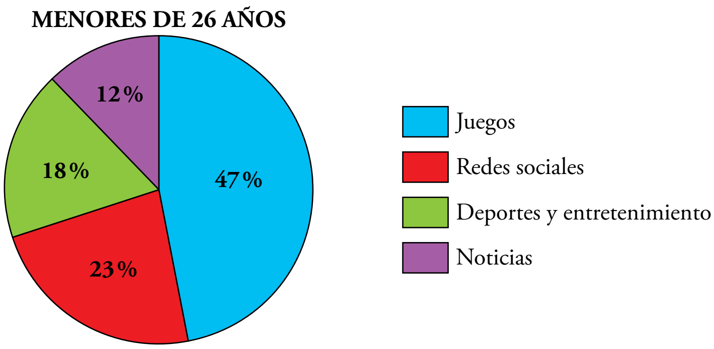
a) Menores de 26 años

Juegos $\rightarrow$ $\alpha = \dfrac{47 \cdot 360°}{100} = 47 \cdot 3{,}6 \approx 169°$

Redes sociales $\rightarrow$ $\alpha = 23 \cdot 3{,}6 \approx 83°$

Deporte y entretenimiento $\rightarrow$ $\alpha = 18 \cdot 3{,}6 \approx 65°$

Noticias $\rightarrow$ $\alpha = 12 \cdot 3{,}6 \approx 43°$



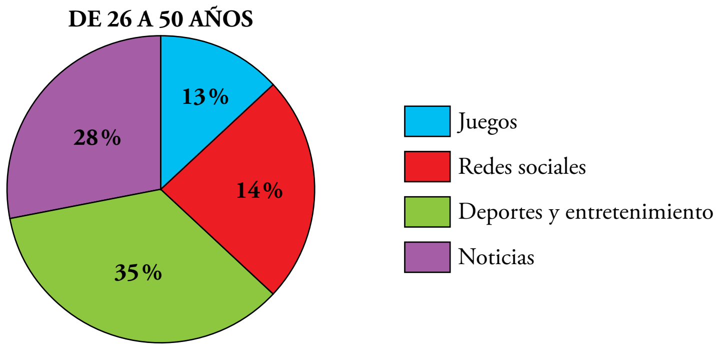
De 26 a 50 años

Juegos → $\alpha = 13 \cdot 3{,}6 \approx 47°$

Redes sociales → $\alpha = 24 \cdot 3{,}6 = 86°$

Deporte y entretenimiento → $\alpha = 35 \cdot 3{,}6 \approx 126°$

Noticias → $\alpha = 28 \cdot 3{,}6 \approx 101°$



b) El uso de redes sociales es muy parecido en ambas poblaciones. Los más jóvenes usan más el *Smartphone* para jugar, y los adultos, para consultar información.

c) Respuesta abierta.

Resuelve problemas

10. **Dibuja la pirámide de población de la India en el año 2012 cuyos datos vienen reflejados en esta tabla:**

GRUPO DE EDAD	N.° DE HOMBRES (MILLONES)	N.° DE MUJERES (MILLONES)
0-9	125	111
10-19	122	108
20-29	108	98
30-39	94	88
40-49	74	72
50-59	51	51
60-69	32	32
70-79	15	16
80-89	4	5
90-99	0,2	0,3

a) Fijándote en el aspecto de la pirámide, clasifícala con el mismo criterio que se hizo en el ejercicio 6.

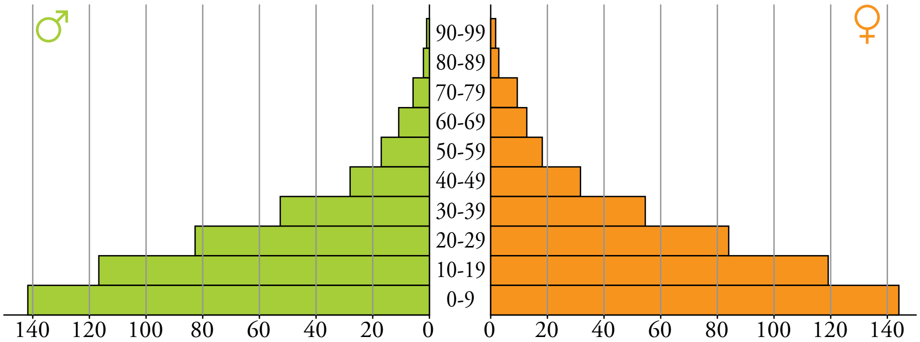
b) Construye otra pirámide de la misma población pero distribuyéndola en estos cuatro grupos de edades:

— NIÑOS: de 0 a 9 años

— JÓVENES: de 10 a 24 años

— ADULTOS: de 25 a 59 años

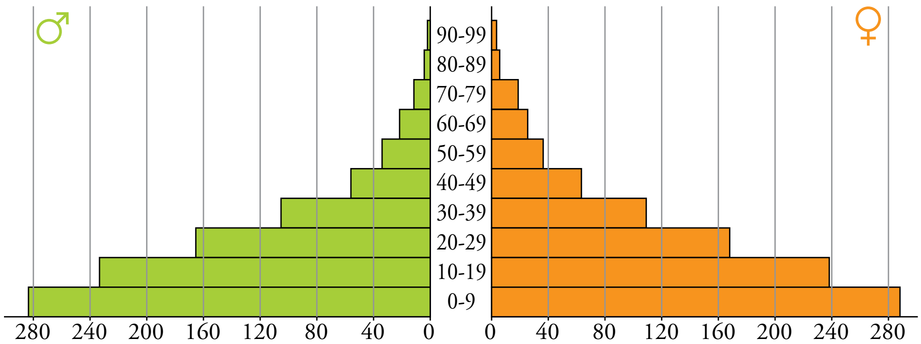
— MAYORES: de 60 en adelante



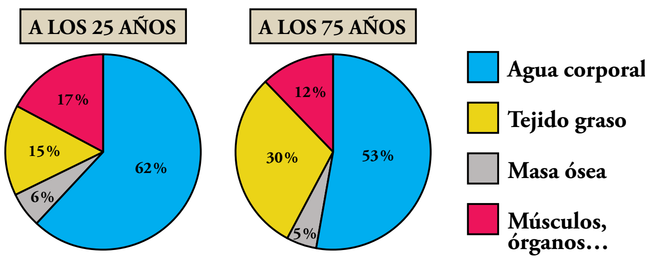
a) País del tercer mundo.

b)

	N.º DE HOMBRES (MILLONES)	N.º DE MUJERES (MILLONES)
0 - 9	125	111
10 - 24	176	157
25 - 59	273	260
MÁS DE 60	51,2	53,3



11. **En estos dos diagramas se muestra la composición del cuerpo humano en dos edades distintas:**



a) ¿Cómo varía el porcentaje de agua corporal, de masa ósea, de tejido graso y de músculos, órganos… en esos 50 años? Da el resultado en tanto por ciento de aumento o disminución.

b) Una persona de 25 años que pesa 80 kg, ¿qué cantidad de agua tiene en su organismo? ¿Y de tejido graso?

c) Responde a las preguntas del apartado anterior para una persona de 75 años con el mismo peso.

a) El agua corporal disminuye del 62 % al 53 %.

Coeficiente de variación: $\frac{53}{62} = 0{,}855 \rightarrow$ ha disminuido un 14,5 %

El tejido graso aumenta del 15 % al 30 %.

Coeficiente de variación: $\frac{30}{15} = 2 \rightarrow$ ha aumentado un 100 %

La masa ósea disminuye del 6 % al 5 %.

Coeficiente de variación: $\frac{5}{6} = 0{,}833 \rightarrow$ ha disminuido un 16,7 %

Los músculos, órganos… disminuye del 17 % al 12 %.

Coeficiente de variación: $\frac{12}{17} = 0{,}706 \rightarrow$ ha disminuido un 29,4 %

b) Cantidad de agua: 62 % de 80 = $\frac{62 \cdot 80}{100}$ = 49,6 kg = 49,6 *l* de agua

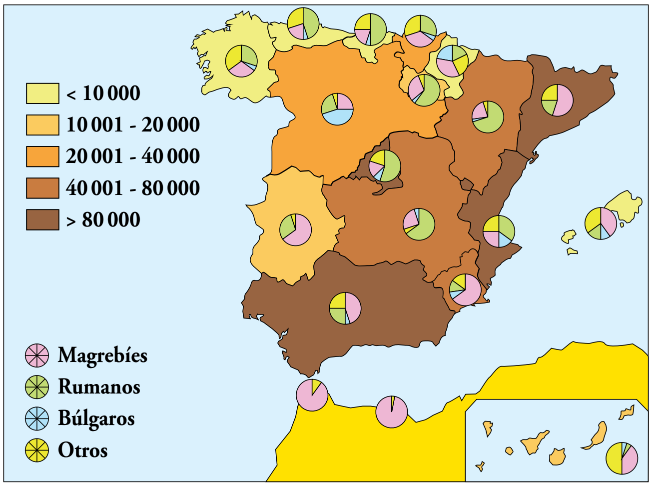
Cantidad de tejido graso: 15 % de 80 = $\frac{15 \cdot 80}{100}$ = 12 kg de tejido graso

Cantidad de agua: 53 % de 80 = $\frac{53 \cdot 80}{100}$ = 42,4 kg = 42,4 *l* de agua

Cantidad de tejido graso: 30 % de 80 = $\frac{30 \cdot 80}{100}$ = 24 kg de tejido graso

Página 263

12. **Concentración de inmigrantes por comunidades y cómo se distribuyen por nacionalidades:**



a) ¿En qué comunidades viven más inmigrantes? ¿Y menos?

b) ¿Qué comunidad tiene la tasa más alta de rumanos? ¿Y de magrebíes? ¿Y de búlgaros?

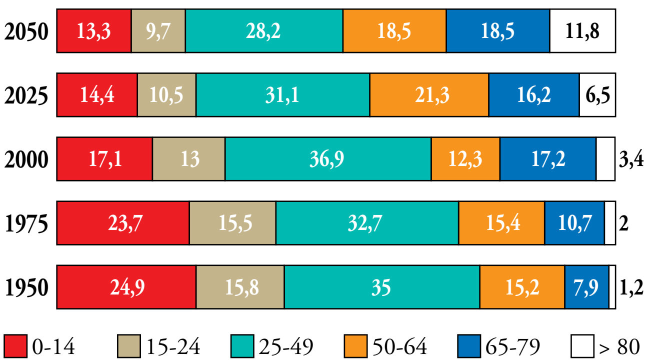
c) ¿En qué comunidad el número de rumanos es mayor, en Cantabria o en Cataluña?

a) Viven más inmigrantes en Cataluña, Comunidad Valenciana, Comunidad de Madrid y Andalucía. Las que menos inmigración tienen son Galicia, Cantabria, Asturias, Navarra e Islas Baleares.

b) La tasa más alta de rumanos se registra en Aragón, la de magrebíes, en Melilla, y la de búlgaros, en Castilla y León.

c) Es mucho mayor en Cantabria.

13. **El siguiente gráfico describe la evolución estimada de los grupos de población por edades (en porcentaje) en la UE para el periodo 1950-2050:**



a) ¿Qué grupo disminuirá más su porcentaje? ¿Cuál aumentará más?

b) Si se estima que habrá 1 000 millones de habitantes en 2050, ¿cuántos corresponden a cada grupo?

c) Sabiendo que en el año 2000 había unas 125 200 000 personas mayores de 50 años, ¿qué población tenía la UE dicho año?

d) ¿En qué porcentaje se estima que disminuyan los menores de 14 años? ¿En qué porcentaje se estima que aumenten los mayores de 80 años?

e) Describe la evolución de cada grupo.

a) Disminuirá más su porcentaje el grupo de edades entre 0 y 14. Hay dos grupos que serán los que más aumenten, el de 65 a 79 años y el de mayores de 80 años.

b) 0 - 14 → 133 000 000 | 15 - 24 → 97 000 000

25 - 49 → 282 000 000 | 50 - 64 → 185 000 000

65 - 79 → 185 000 000 | > 80 → 118 000 000

c) Los mayores de 50 años, en el 2000, corresponden a un 32,9 % (12,3 + 17,2 + 3,4). Por tanto:

$$100 \leftrightarrow 32{,}9$$

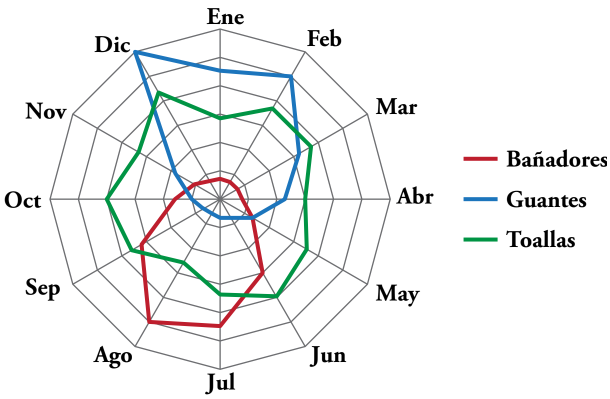
$$125\,200\,000 \leftrightarrow x$$

Despejando x de esta regla de tres, obtenemos que la población de toda la UE será de 4 119 080 personas.

d) Los menores de 14 años disminuirán en un 11,6 % (24,9 – 13,3). Los mayores de 80 años aumentarán en un 10,6 % (18,5 – 1,2).

e) Los grupos que van de 0 a 14 años y de 15 a 24 años disminuyen de forma más o menos gradual. El grupo que está entre 25 y 49 años va disminuyendo, aunque sufrió un repunte en 2000. Por el contrario, el que va de 50 a 64 años va aumentando, aunque se estima un descenso en 2025. La tónica general de los grupos que van de 65 a 80 años y el de los mayores de 80 es al alza, aunque el primero sufrió un pequeño descenso entre los años 1975 y 2000.

14. **Observa este gráfico relativo a las ventas de algunos artículos de un pequeño comercio:**



a) ¿En qué estación del año se han vendido más bañadores? ¿Y menos? ¿Por qué?

b) ¿Cuándo se han vendido más guantes? ¿Por qué?

c) Explica cómo se comporta la gráfica de las toallas.

d) Inventa un gráfico como este que muestre las ventas de paraguas y de sombrillas en una tienda.

a) En verano se han vendido más bañadores, y en invierno, menos. Son las épocas en las que más calor hace y menor calor hace, respectivamente.

b) Se han vendido más guantes entre diciembre y febrero. Es la época del año de más frío.

c) La venta de toallas se mantiene más o menos constante a lo largo de todo el año.

d) Respuesta abierta.

15. **Reparto de la población española, según el tamaño del municipio en que vivía, desde 1900 hasta 2020. Para este último año se ha hecho una estimación:**

MUNICIPIOS	1900	1930	1960	1990	2020
Hasta 5 000 hab.	51 %	40 %	29 %	16 %	10 %
De 5 001 a 20 000	28 %	29 %	25 %	20 %	16 %
De 20 001 a 100 000	12 %	16 %	18 %	22 %	27 %
Más de 100 000	9 %	15 %	28 %	42 %	47 %

Número de habitantes de España, en millones, desde 1900 hasta la estimación hecha para el 2020:

1900	1930	1960	1990	2020
18,6	23,6	30,4	38,8	45,6

a) Calcula el número de personas que vivían en los municipios más pequeños desde 1900 hasta 2020. En estos municipios, la población ha ido decreciendo pero, ¿lo hace de forma constante o cada vez decrece menos? Determina cómo evoluciona cada una de las clasificaciones de municipios.

b) Calcula cuántos españoles vivían en los municipios más grandes desde 1900 y di cuál fue la evolución.

c) Haz los diagramas de sectores que muestren la distribución de la población en cada uno de los años que figuran en la tabla.

d) Estima a partir de qué año la mitad de la población vivía en municipios de más de 20 000 habitantes.

a) En municipios de hasta 5 000 habitantes vivían:

En 1900 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}51 = 9{,}486$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}40 = 9{,}44$ millones de habitantes

En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}29 = 8{,}816$ millones de habitantes

En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}16 = 6{,}208$ millones de habitantes

En 2020 $\rightarrow$ $45{,}6 \cdot 0{,}10 = 4{,}56$ millones de habitantes

La población en estos municipios ha ido decreciendo; primero, de forma regular, y bastante menos en el último periodo.

La población en los municipios de 5 001 a 20 000 habitantes crece un punto de 1900 a 1930 y después no deja de disminuir de forma constante.

La población en los municipios de 20 001 a 100 000 habitantes crece en todos los periodos, aunque algo menos de 1930 a 1960.

La población en los municipios de más de 100 000 habitantes siempre crece, aunque lo hace la mitad entre 1900 y 1930 y entre 1990 y 2020 que en los otros dos periodos.

b) En municipios de más de 100 000 habitantes vivían:

En 1900 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}09 = 1{,}674$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}15 = 3{,}54$ millones de habitantes

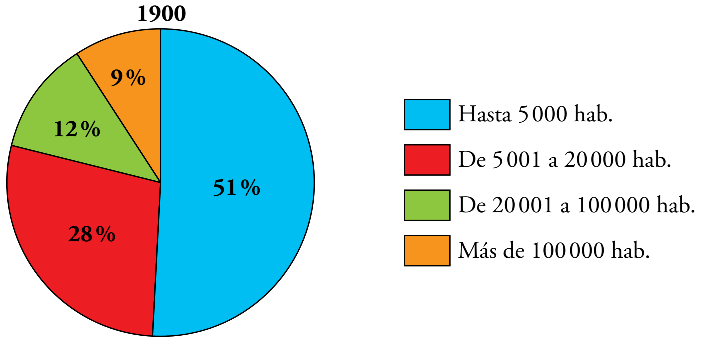
En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}28 = 8{,}512$ millones de habitantes

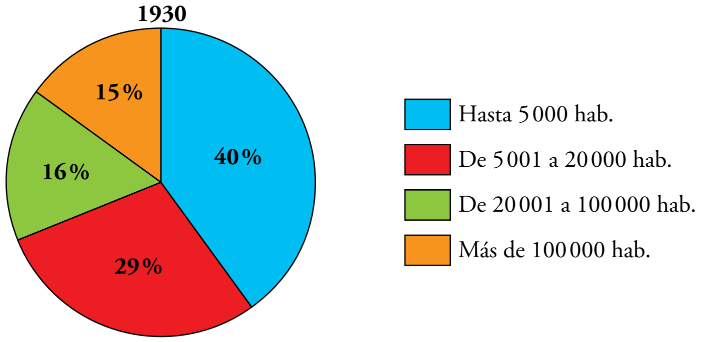
En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}42 = 16{,}296$ millones de habitantes

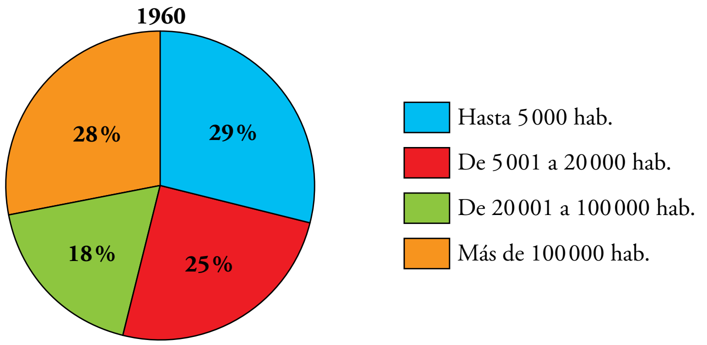
En 2020 $\rightarrow$ $45{,}6 \cdot 0{,}47 = 21{,}432$ millones de habitantes

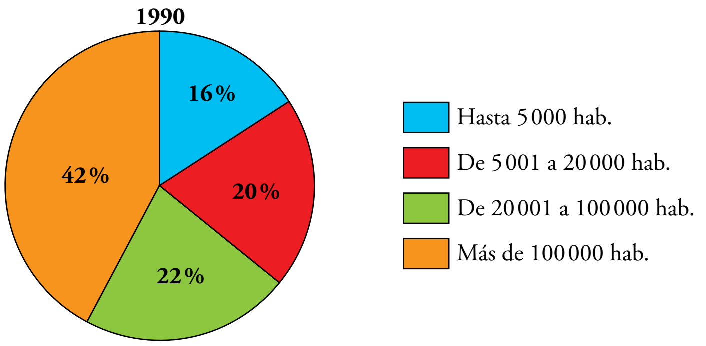
La población en los municipios de más de 100 000 habitantes siempre crece, aunque lo hace la mitad entre 1900 y 1930 y entre 1990 y 2020 que en los otros dos periodos.

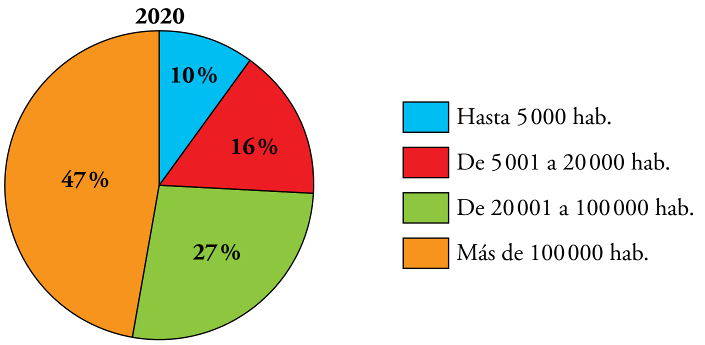
c)











d) La mitad de la población vivía en municipios de más de 20 000 habitantes desde 1990.

Página 264

Observa, analiza y decide

La influencia del lugar donde se muestrea

Estas gráficas corresponden a un estudio sobre gustos musicales, realizado a cuatro muestras de población tomadas en distintos ambientes.

MUESTRA:	MUESTRA:	MUESTRA:	MUESTRA:
A la salida de una discoteca.	En la puerta del conservatorio musical.	En una fiesta en la casa de Colombia.	En el parque junto a la pista de los monopatines.

- **Teniendo en cuenta el grupo al que pertenece cada muestra, ¿podrías decir el tipo de música que representa cada color?**

  Azul → Pop-Rock

  Verde → Clásica

  Amarillo → Salsa

  Morado → Rap

  Rojo → Jazz (por eliminación)

Investiga

Organiza los datos

Un padre negociador hace un pacto con su hijo:

Después del próximo examen de Matemáticas, deberá sumar, por un lado, las notas de todos los compañeros y compañeras que le hayan superado y, por otro, todas las que queden por debajo de la suya, y entonces:

— Si las bajas superan a las altas en 50 o más puntos, le regalará una moto.

— Si las altas superan a las bajas en 20 o más puntos, se quedará en casa estudiando todos los domingos durante un mes.

— En el resto de los casos, quedan en paz.

Las notas de sus compañeros y compañeras han sido:

5 - 5 - 4 - 9 - 8 - 6 - 3 - 6 - 3 - 7 - 4 - 5 - 6 - 6

7 - 7 - 4 - 7 - 5 - 2 - 6 - 5 - 5 - 8 - 3 - 9 - 10 - 5

- **¿Te parece un trato ventajoso para el chico?**

  ¿Qué ocurre si su nota es un 5? ¿Y si saca un 6? ¿Qué nota necesita sacar para conseguir la moto?

Para hacer un análisis detallado, organizamos los datos en la siguiente tabla:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	SUMA ASCENDENTE	SUMA DESCENDENTE
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	1	2	2	160
3	3	9	11	158
4	3	12	23	149
5	7	35	58	137
6	5	3	88	102
7	4	28	116	72
8	2	16	132	44
9	2	18	150	28
10	1	10	160	10

Con esta información vemos que:

	SUMA DE NOTAS INFERIORES	SUMA DE NOTAS SUPERIORES	DIFERENCIA	RESULTADO PARA EL HIJO
Si saca un 5	23	102	–79	MALO
Si saca un 6	58	72	–14	NEUTRO
Si saca un 7	88	44	+44	NEUTRO
Si saca un 8	116	28	+88	BUENO

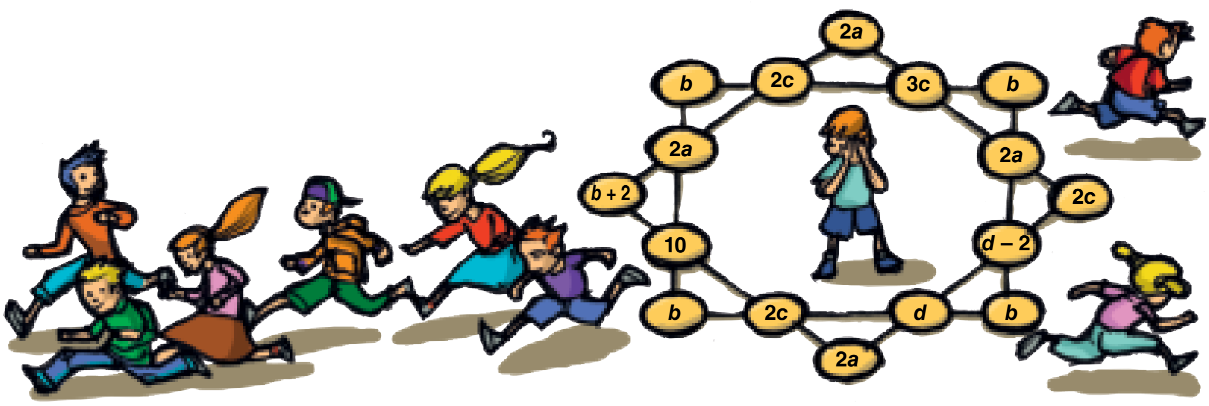
Por tanto:

- Para conseguir la moto, debe obtener, al menos, un 8.
- Para no quedarse en casa con los amigos, debe obtener, al menos, un 6.

Utiliza tu ingenio

- **Las ocho filas de cuatro números suman lo mismo.**

  ¿Cuál es el valor de *a*, *b*, *c* y *d*?



— Igualando los lados derecho e izquierdo del rectángulo:

$2b + 2a + 10 = 2b + 2a + d - 2 \;\rightarrow\; d = 12$

— Igualando los lados superior e inferior del rectángulo:

$2b + 5c = 2b + 2c + d \rightarrow c = 4$

— Igualando el lado inferior derecho del rombo y el izquierdo del rectángulo:

$2a + 2d - 2 + 2c = 2a + 2b + 10 \rightarrow b = 10$

— Del lado inferior del rectángulo obtenemos el valor de una línea:

Valor de línea $\rightarrow 2b + 2c + d = 40$

— Igualando el lado izquierdo del rectángulo a 40:

$2b + 2a + 10 = 40 \rightarrow a = 5$

Solución: $a = 5$, $b = 10$, $c = 4$, $d = 12$

Página 265

Entrénate resolviendo problemas

- **Un repartidor lleva en su camión siete cajas de refrescos llenas, siete medio llenas y siete vacías. Si desea repartir su mercancía en tres supermercados dejando en cada uno el mismo número de refrescos y el mismo número de cajas, ¿cómo debe hacer el reparto?**

  Supón que tiene mucha prisa y no quiere andar cambiando botellas de unas cajas a otras. ¿Cómo se las arreglará?

  Una caja llena más una caja vacía equivalen a dos cajas medio llenas.

  Por tanto, el repartidor tiene lo quivalente a $3 \cdot 7 = 21$ cajas medio llenas. En cada supermercado debería dejar lo equivalente a 7 cajas medio llenas.

  Si en cada uno de los dos primeros supermercados deja:

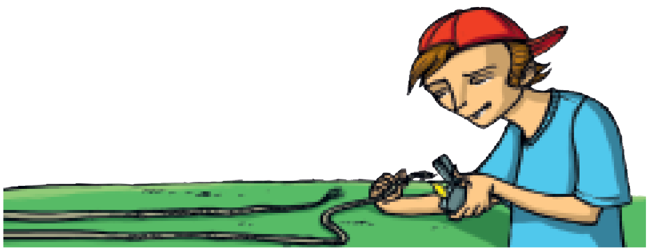
  $\boxed{\text{3 cajas llenas}}$ $\boxed{\text{3 cajas vacías}}$ $\boxed{\text{1 caja medio llena}}$

  que son como 7 medio llenas, lo que queda, seguro que sirve para el tercero:

  $\boxed{7 - 6 = 1 \text{ caja llena}}$ $\boxed{7 - 6 = 1 \text{ caja vacía}}$ $\boxed{7 - 2 = 5 \text{ cajas medio llenas}}$

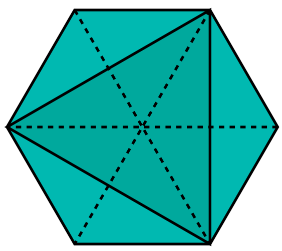
  que también equivalen a 7 cajas medio llenas.

- **Tienes dos mechas. Cada una de ellas tarda en consumirse 10 minutos. Pero la velocidad con que se consumen es irregular (es decir, en la mitad del tiempo no tiene por qué gastarse la mitad de la longitud de la mecha). ¿Serías capaz de medir con ellas un cuarto de hora? ¿Cómo?**



  Si una mecha se prende simultáneamente por los dos extremos, se consume en 5 minutos. Por tanto, podemos prender una de las mechas por un único extremo y se consumirá en 10 minutos, y cuando esta acabe prenderemos la otra por los dos extremos simultáneamente y cuando se consuma por completo habrán pasado 5 minutos más, lo que hace el total de 15 minutos que buscábamos.

- **Tres de los vértices de un hexágono regular coinciden con los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm^2 de superficie. ¿Cuál es la superficie del hexágono?**



  El área del triángulo es la mitad de l área del hexágono.

  Por tanto:

  Área del hexágono $= 20 \cdot 2 = 40$ cm^2

Autoevaluación

1. Indica, para cada caso, cuáles son los individuos, cuál la población, cuál la variable y de qué tipo es:

a) Número de veces al año que ha usado su tarjeta sanitaria cada paciente.

b) Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud.

c) Tipo de especialista al que acuden los pacientes a un centro de salud.

a) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes.

Variable: número de veces al año que han pasado su tarjeta.

Tipo de variable: cuantitativa discreta.

b) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de la consulta.

Variable: tiempo de espera en la consulta.

Tipo de variable: cuantitativa continua.

c) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de un centro de salud.

Variable: tipo de especialista.

Tipo de variable: cualitativa.

2. Para estudiar el "número de almendras que hay en cada tableta de chocolate" de una cierta producción se analiza una de cada 200 producidas un cierto día. Las tabletas analizadas, ¿son población o muestra?

Las tabletas analizadas son una muestra, ya que no se analizan todas, solo una de cada 200. Si se analizara toda la población, posiblemente se estropearían todas las tabletas.

3. Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

28	**4**	**12**	**35**	**2**	**26**	**45**	**22**	**6**	**23**
27	**16**	**18**	**32**	**8**	**47**	**8**	**12**	**34**	**15**
28	**37**	**7**	**39**	**15**	**25**	**18**	**17**	**27**	**15**

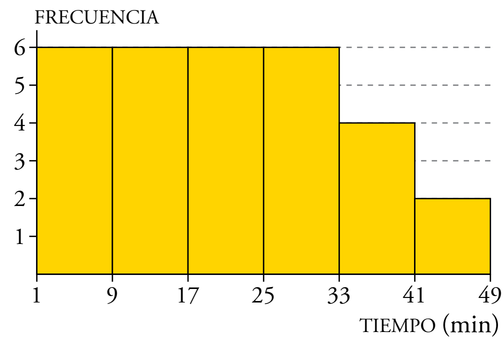
a) Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 1 - 9 - 17 - 25 - 33 - 41 - 49.

b) Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

a)

INTERVALO	f_i
1 - 9	6
9 - 17	6
17 - 25	6
25 - 33	6
33 - 41	4
41 - 49	2

b)



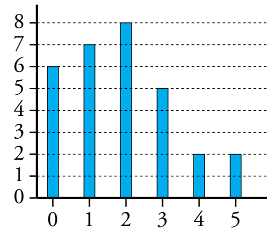
4. Número de días que han ido a la biblioteca del colegio los alumnos de un curso:

3 1 2 4 0 **2 1 3 1 0** **2 0 3 5 2**

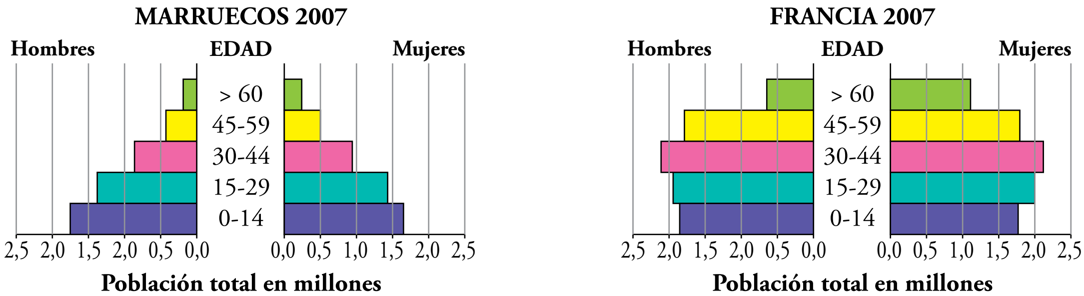
0 2 4 1 2 **1 2 0 5 3** **3 1 2 1 0**

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

x_i	0	1	2	3	4	5	
f_i	6	7	8	5	2	2	30



5. Observa estas pirámides de población:



Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) La proporción de ancianos/as en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de niños/as es mayor en Marruecos que en Francia.

a) Verdadero. Se observa que el número de nacimientos es muy similar en ambos países y sin embargo el de personas mayores de 60 (barras verdes) es mucho mayor en Francia.

b) Verdadero. Las barras verdes de la derecha de cada pirámide, correspondientes a las mujeres, son más largas que las de la izquierda, hombres.

c) Falso. Las barras moradas de ambos países son aproximadamente iguales.

Página 267

Resuelve

1. En el caso de los autobuses azul y rojo:

- **¿Quién viaja en el autobús rojo, los equipos de atletismo, o los familiares?**

  Por la edad podemos deducir que van los familiares.

- **¿Qué equipo es más numeroso, el de juveniles o el de cadetes? (Nota: busca las edades que abarcan esas dos categorías).**

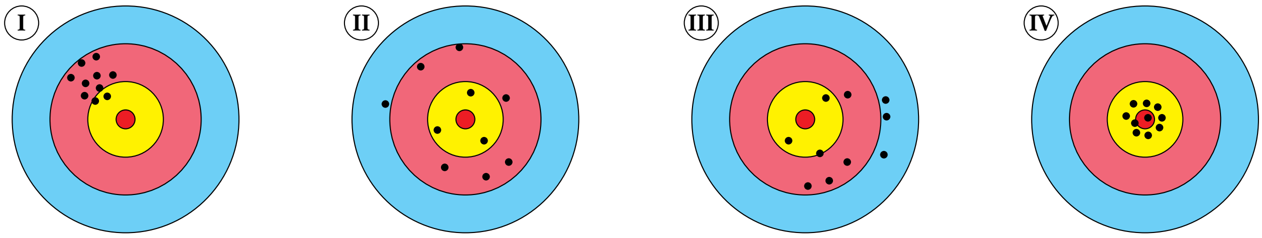
  El de cadetes.

- **Separando a los viajeros por edades, ¿cuál es el grupo más numeroso en el autobús azul?**

  El de cadetes.

2. En el caso del tiro al blanco, imaginamos que los tiradores apuntan siempre al centro de la diana. Responde:

a) ¿Cuál es la diana de cada uno de los cuatro tiradores?



b) Los buenos tiradores, ¿tienen resultados más o menos dispersos que los malos?

c) ¿Dónde habrían dado, aproximadamente, los disparos de Benito y Carla si hubieran intercambiado sus escopetas?

a) La diana I es la de Benito, la II es la de Carla, la III es Daniel y la IV de Ana.

b) Los buenos tiradores tienen resultados menos dispersos que los malos.

c) Los de Benito habrían dado en el centro y los de Carla se hubiesen desplazado hacia la izquierda y hacia arriba.

1 Dos tipos de parámetros estadísticos

Página 268

1. Calcula la media, la mediana y la moda de cada una de estas distribuciones estadísticas:

a) 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 11, 12, 17 **b) 10, 12, 6, 9, 10, 8, 9, 10, 14, 2**

c) 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 3, 7 **d) 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1**

a) $\bar{x} = \dfrac{4+5+6+6+6+6+7+11+12+17}{10} = \dfrac{80}{10} = 8$

$Me = \dfrac{6+6}{2} = 6$ $Mo = 6$

b) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 6, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 14

$\bar{x} = \dfrac{2+6+8+9+9+10+10+10+12+14}{10} = \dfrac{90}{10} = 9$

$Me = \dfrac{9+10}{2} = 9,5$ $Mo = 10$

c) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7

$\bar{x} = \dfrac{2+3+3+3+3+4+5+6+6+6+6+7}{12} = \dfrac{54}{12} = 4,5$

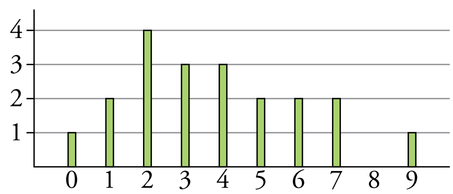
$Me = \dfrac{4+5}{2} = 4,5$ $Mo = 3$ y 6

d) Ordenamos los datos de menor a mayor: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

$\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+4+3+2+1}{9} = \dfrac{25}{9} \approx 2,78$

$Me = 3$ $Mo = 1, 2, 3$ y 4

2. Halla los parámetros de centralización de esta distribución dada por su diagrama de barras:



$\bar{x} = \dfrac{0+2\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6+2\cdot 7+9}{20} = \dfrac{76}{20} = 3,8$

Son 20 valores así que la mediana estará entre los que ocupen las posiciones 10 y 11.

$Me = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$

$Mo = 2$

Página 269

3. Halla los parámetros de dispersión de las distribuciones del ejercicio 1 de la página anterior.

a) Recorrido o rango = 17 – 4 = 13

$$DM = \frac{|4-8|+|5-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|7-8|+|11-8|+|12-8|+|17-8|}{10} =$$

$$= \frac{4+3+2+2+2+2+1+3+4+9}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2+11^2+12^2+17^2}{10} - 8^2 =$$

$$= \frac{16+25+36+36+36+36+49+121+144+289}{10} - 64 = 78,8 - 64 = 14,8$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{14,8} = 3,85$$

b) Recorrido o rango = 14 – 2 = 12

$$DM = \frac{|2-9|+|6-9|+|8-9|+|9-9|+|9-9|+|10-9|+|10-9|+|10-9|}{10} +$$

$$+ \frac{|12-9|+|14-9|}{10} = \frac{7+3+1+0+0+1+1+1+3+5}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+6^2+8^2+9^2+9^2+10^2+10^2+10^2+12^2+14^2}{10} - 9^2 =$$

$$= \frac{4+36+64+81+81+100+100+100+144+196}{10} - 81 = 90,6 - 81 = 9,6$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9,6} = 3,1$$

c) Recorrido o rango = 7 –2 = 5

$$DM = \frac{|2-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|4-4,5|+|5-4,5|}{12} +$$

$$+ \frac{|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|7-4,5|}{12} =$$

$$= \frac{2,5+1,5+1,5+1,5+1,5+0,5+0,5+1,5+1,5+1,5+1,5+2,5}{12} = \frac{18}{12} = 1,5$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+3^2+3^2+3^2+3^2+4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2}{12} - 4,5^2 =$$

$$= \frac{4+9+9+9+9+16+25+36+36+36+36+49}{12} - 20,25 = 22,83 - 20,25 = 2,58$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{2,58} = 1,61$$

d) Recorrido o rango = 5 – 1 = 4

$$DM = \frac{\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|}{9} +$$

$$+ \frac{\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|5-\frac{25}{9}\right|}{9} = \frac{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{11}{9}+\frac{11}{9}+\frac{20}{9}}{9} = \frac{92}{81} \approx 1,14$$

$$\text{Varianza} = \frac{1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2}{9} - \left(\frac{25}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+1+4+4+9+9+16+16+25}{9} - \frac{625}{81} = \frac{85}{9} - \frac{625}{81} = 1{,}73$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{1{,}73} = 1{,}31$$

4. Halla de dos formas distintas la varianza de esta distribución: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

7, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{7+7+8+9+11+13+15+15}{8} = \frac{85}{8} = 10{,}625$$

Forma 1

Promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(7-10{,}625)^2+(7-10{,}625)^2+(8-10{,}625)^2+(9-10{,}625)^2+(11-10{,}625)^2}{8} +$$

$$+ \frac{(13-10{,}625)^2+(15-10{,}625)^2+(15-10{,}625)^2}{8} =$$

$$= \frac{3{,}625^2+3{,}625^2+2{,}625^2+1{,}625^2+0{,}375^2+2{,}375^2+4{,}375^2+4{,}375^2}{8} = 9{,}984$$

Forma 2

Promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\text{Varianza} = \frac{7^2+7^2+8^2+9^2+11^2+13^2+15^2+15^2}{8} - 10{,}625^2 =$$

$$= \frac{49+49+64+81+121+169+225+225}{8} - 112{,}89 = 122{,}875 - 112{,}891 = 9{,}984$$

2 Cálculo de $\bar{x}$ y σ en tablas de frecuencias

Página 270

1. Calcula la media de las siguientes distribuciones:

a) NÚMERO DE HIJOS

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1

b) NÚMERO DE SUSPENSOS EN ESTA EVALUACIÓN

x_i	0	1	2	3	4
f_i	17	11	3	1	1

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1	50
$x_i \cdot f_i$	0	14	30	21	16	10	6	7	104

$$\bar{x} = \frac{104}{50} = 2,08$$

b)

x_i	0	1	2	3	4	
f_i	17	11	3	1	1	33
$x_i \cdot f_i$	0	11	6	3	4	24

$$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727$$

Página 271

2. **Dada la tabla de frecuencias con las columnas correspondientes $f_i \cdot x_i$ y $f_i \cdot x_i^2$, copia y completa la fila de los totales y halla la media y la desviación típica de esta distribución:**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL			

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL	80	240	842

$$\bar{x} = \frac{240}{80} = 3 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{842}{80} - 3^2} \approx 1,235$$

3. **Completa en tu cuaderno la tabla con las marcas de clase correspondientes y calcula la media y la desviación típica de la siguiente distribución:**

PESOS	PERSONAS
50 a 58	6
58 a 66	12
66 a 74	21
74 a 82	16
82 a 90	5

➡

x_i	f_i
54	6
	12
	21
	16
	5

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54	6	324	17 496
62	12	744	46 128
70	21	1 470	102 900
78	16	1 248	97 344
86	5	430	36 980
TOTAL	60	4 216	300 848

$$\bar{x} = \frac{4\,216}{60} = 70,267 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{300\,848}{30} - 70,267^2} \approx 8,76$$

4. Halla las desviaciones típicas de las distribuciones de la actividad 1 de la página anterior.

a) NÚMERO DE HIJOS

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	14	14	14
2	15	30	60
3	7	21	63
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
7	1	7	49
TOTAL	50	104	336

$\bar{x} = \frac{104}{50} \approx 2,08 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{336}{50} - 2,08^2} \approx 1,547$

b) NÚMERO DE SUSPENSOS ESTA EVALUACIÓN

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	17	0	0
1	11	11	11
2	3	6	12
3	1	3	9
4	1	4	16
TOTAL	33	24	48

$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{48}{33} - \left(\frac{24}{33}\right)^2} \approx 0,962$

3 Obtención de $\bar{x}$ y σ con calculadora

Página 272

1. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE HIJOS de la actividad 1 de la página 270.

Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 6 DATA → 0

1 ⊗ 14 DATA → 1

2 ⊗ 15 DATA → 2

3 ⊗ 7 DATA → 3

4 ⊗ 4 DATA → 4

5 ⊗ 2 DATA → 5

6 ⊗ 1 DATA → 6

7 ⊗ 1 DATA → 7

Obtenemos los resultados:

n → 50

Σx → 104

Σx^2 → 336

$\bar{x}$ → 2.08

σ_n → 1.547126

2. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE SUSPENSOS de la actividad 1 de la página 270.

Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 17 DATA → 0

1 ⊗ 11 DATA → 1

2 ⊗ 3 DATA → 2

3 ⊗ 1 DATA → 3

4 ⊗ 1 DATA → 4

Obtenemos los resultados:

n → 33

Σx → 24

Σx^2 → 48

$\bar{x}$ → 0.7272727

σ_n → 0.9620914

Página 273

3. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE HIJOS de la actividad 1 de la página 270.

Se introducen en la tabla los valores de la variable:

0 ⊜ 1 ⊜ 2 ⊜ 3 ⊜ 4 ⊜ 5 ⊜ 6 ⊜ 7 ⊜

Se introducen los valores de las frecuencias:

6 ⊜ 14 ⊜ 15 ⊜ 7 ⊜ 4 ⊜ 2 ⊜ 1 ⊜ 1 ⊜

Se obtienen los resultados:

n (n.º de individuos: $\sum f_i$):	SHIFT STAT 5(VAR)1(n) ⊜	→	50
$\sum x$ (suma de los valores: $\sum f_i x_i$):	SHIFT STAT 4(SUM)2($\sum x$) ⊜	→	104
$\sum x^2$ (suma de los cuadrados: $\sum f_i x_i^2$):	SHIFT STAT 4(SUM)1($\sum x^2$) ⊜	→	336
$\bar{x}$ (media):	SHIFT STAT 5(VAR)2($\bar{x}$) ⊜	→	2,08
σ (desviación típica):	SHIFT STAT 5(VAR)3($x\sigma n$) ⊜	→	1,547126

4. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE SUSPENSOS de la actividad 1 de la página 270.

Se introducen en la tabla los valores de la variable:

0 ⊜ 1 ⊜ 2 ⊜ 3 ⊜ 4 ⊜

Se introducen los valores de las frecuencias:

17 ⊜ 11 ⊜ 3 ⊜ 1 ⊜ 1 ⊜

Se obtienen los resultados:

n (n.º de individuos: $\sum f_i$):	SHIFT STAT 5(VAR)1(n) ⊜	→	33
$\sum x$ (suma de los valores: $\sum f_i x_i$):	SHIFT STAT 4(SUM)2($\sum x$) ⊜	→	24
$\sum x^2$ (suma de los cuadrados: $\sum f_i x_i^2$):	SHIFT STAT 4(SUM)1($\sum x^2$) ⊜	→	48
$\bar{x}$ (media):	SHIFT STAT 5(VAR)2($\bar{x}$) ⊜	→	0,7272727
σ (desviación típica):	SHIFT STAT 5(VAR)3($x\sigma n$) ⊜	→	0,9620914

4 Interpretación conjunta de $\bar{x}$ y σ

Página 275

2. **En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:**

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	**943 €**	**132 €**	**37 €**
DESV. TÍPICA	**148 €**	**22 €**	**12 €**

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943	132	37
DESV. TÍPICA	148	22	12
CV	0,157	0,167	0,324

$$CV_{\text{PIANO}} = \frac{148}{943} = 0,157 \ \to\ 15{,}7\,\%$$

$$CV_{\text{FLAUTAS}} = \frac{22}{132} = 0,167 \ \to\ 16{,}7\,\%$$

$$CV_{\text{ARMÓNICAS}} = \frac{12}{37} = 0,324 \ \to\ 32{,}4\,\%$$

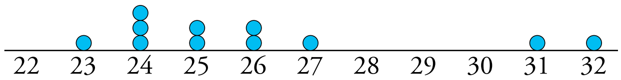
Podemos apreciar que la variación en los pianos y las flautas es muy parecida. En cambio, la variación de las armónicas es mayor que las anteriores, de hecho, es aproximadamente el doble que en las flautas.

5 Parámetros de posición: mediana y cuartiles

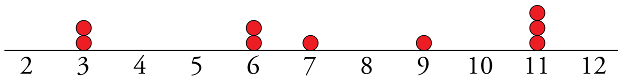
Página 276

1. Calcula Q_1, Me y Q_3 y sitúalos en cada una de las siguientes distribuciones representadas:

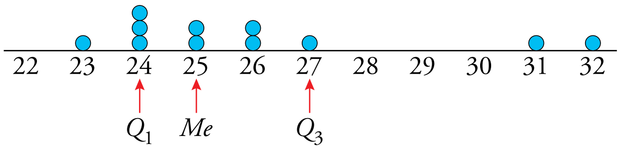
a)



b)



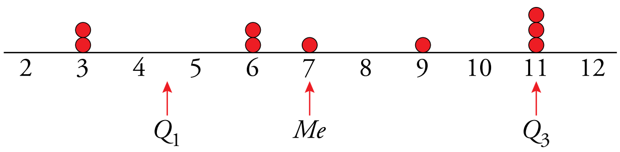
a)



		Q_1			Me			Q_3		
23	24	$\boxed{24}$	24	25	$\boxed{25}$	26	26	$\boxed{27}$	31	32

Los número marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

b)



Q_1: $\boxed{\dfrac{3+6}{2}=4}$ Me Q_3: $\boxed{\dfrac{11+11}{2}=11}$

3 3 | 6 6 $\boxed{7}$ 9 11 | 11 11

Los números marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

2. En cada una de las distribuciones siguientes:

a) Calcula Q_1, Me y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa en ellos Q_1, Me y Q_3.

A: 0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 14, 17, 29, 35

C: 12, 13, 19, 25, 63, 85, 123, 132, 147

a)

				Q_1				Me				Q_3			
A:	0	0	2	$\boxed{3}$	4	4	4	$\boxed{4}$	5	6	7	$\boxed{8}$	9	9	10

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 15 : 4 = 3,75.

$Q_1 = 3$; $Me = 4$; $Q_3 = 8$

Me: $\boxed{\dfrac{4+7}{2}=5,5}$

Q_1 $\qquad$ Q_3

B: 0 1 1 $\boxed{2}$ 3 4 4 7 7 7 $\boxed{14}$ 17 29 35

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 14 : 4 = 3,5

$Q_1 = 2$

$Me = \dfrac{4+7}{2} = 5,5$

$Q_3 = 14$

Q_1: $\boxed{\dfrac{13+19}{2}=16}$ $\qquad$ Q_3: $\boxed{\dfrac{123+132}{2}=127,5}$

Me

C: 12 13 19 25 $\boxed{63}$ 85 123 132 147

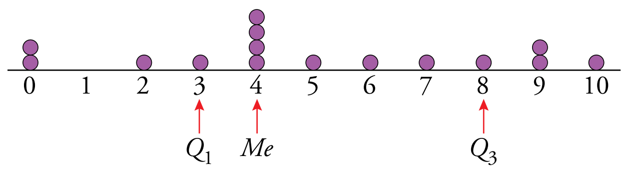
Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta es 9 : 4 = 2,25

$Q_1 = 16$

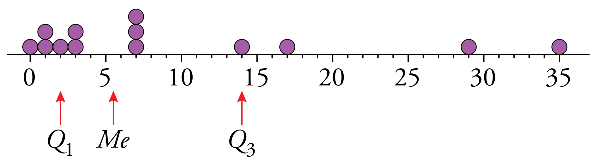
$Me = 63$

$Q_3 = 127,5$

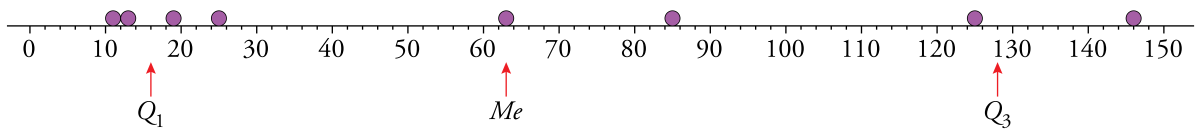
b) A



B



C

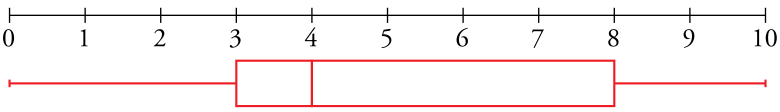


Página 277

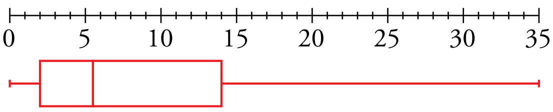
3. Representa con un diagrama de caja y bigotes cada distribución de la actividad 2 de la página anterior.

Utiliza los valores de Q_1, *Me* y Q_3 que hallaste en esa actividad.

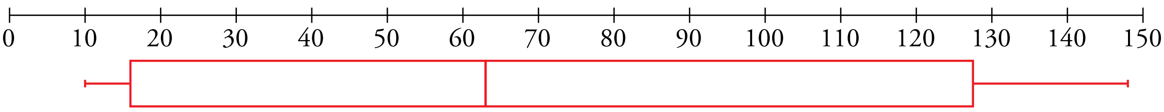
A. $Q_1 = 3$, $Me = 4$ y $Q_3 = 8$



B. $Q_1 = 2$, $Me = 5{,}5$ y $Q_3 = 14$



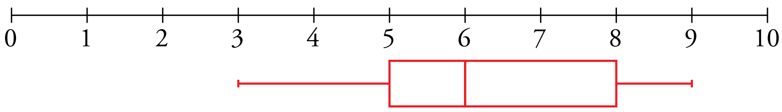
C. $Q_1 = 16$, $Me = 63$ y $Q_3 = 127{,}5$



4. Representa mediante un diagrama de caja y bigotes los siguientes puntos conseguidos en la diana:

7 6 6 8 5	**5 7 9 6 8**	**4 7 5 8 6**
7 5 6 6 7	**5 6 6 5 8**	**6 7 5 9 3**

Los parámetros de posición son $\rightarrow$ $Q_1 = 5$, $Me = 6$ y $Q_3 = 8$



Página 278

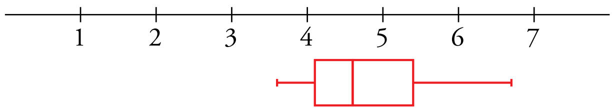
Hazlo tú

Construye el diagrama de caja y bigotes para el colectivo reducido (los 20 adultos sin niños) y compáralo con el del grupo inicial.

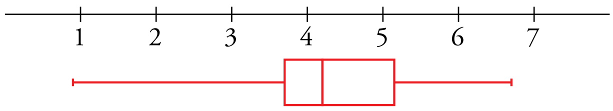
$\boxed{Q_1 = \frac{40+42}{2} = 41}$ $\boxed{Me = \frac{45+47}{2} = 46}$ $\boxed{Q_3 = \frac{53+55}{2} = 54}$

36 37 37 37 40 | 42 43 43 44 45 | 47 48 50 52 53 | 55 58 61 63 67

Sin los 5 miembros más jóvenes, el diagrama de caja y bigotes es el siguiente:



Con los 5 niños:



Haciendo una comparación de este diagrama y el del problema resuelto anterior podemos observar que las cajas son muy parecidas, lo que varía es la longitud del bigote izquierdo, ya que hemos suprimido las edades más jóvenes.

Ejercicios y problemas

Página 279

Practica

Parámetros de centralización y dispersión

1. **Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación en cada caso:**

a) 6, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 7, 6, 4, 6, 10, 6

b) 11, 12, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 14, 12

c) 165, 167, 172, 168, 164, 158, 160, 167, 159, 162

Calculamos la tabla de frecuencias para facilitar el cálculo:

a) 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 9, 7, 7, 10

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	1	2	4
3	1	3	9
4	3	12	48
5	3	15	75
6	7	42	252
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
TOTAL	20	115	731

$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{115}{20} = 5,75$ Recorrido = 8

$Me = \dfrac{6+6}{2} = 6$ DM = 1,4

Mo = 6

$\text{Varianza} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{731}{20} - 5,75^2 = 3,49$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{731}{20} - 5,75^2} = 1,87$

$\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,87}{5,75} = 0,3248 \rightarrow 32,48\,\%$

b) 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
10	1	10	100
11	2	22	242
12	3	36	432
13	1	13	169
14	2	28	392
15	1	15	225
TOTAL	10	124	1 560

$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{124}{10} = 12,4$ Recorrido = 5

$Me = \dfrac{12+12}{2} = 12$ DM = 1,28

Mo = 12

$\text{Varianza} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,560}{10} - 12,4^2 = 2,24$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,560}{10} - 12,4^2} = 1,50$

$\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,50}{12,4} = 0,1207 \rightarrow 12,07\,\%$

c) 158, 159, 160, 162, 164, 165, 167, 167, 168, 172

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
158	1	158	24 964
159	1	159	25 281
160	1	160	25 600
162	1	162	26 244
164	1	164	26 896
165	1	165	27 225
167	2	334	55 778
168	1	168	28 224
172	1	172	29 584
TOTAL	10	1 642	269 796

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1\,642}{10} = 164,2$$ Recorrido = 14

$$Me = \frac{164 + 165}{2} = 164,5$$ $DM = 3,6$

$Mo = 167$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{269\,796}{10} - 164,2^2 = 17,96$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{269\,796}{10} - 164,2^2} = 4,24$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,24}{164,2} = 0,0258 \to 2,58\,\%$$

2. **El número de calzado que llevan los alumnos y las alumnas de una clase son los siguientes:**

42, 40, 43, 45, 43

41, 42, 38, 36, 38

40, 39, 37, 36, 41

44, 38, 39, 40, 43

45, 38, 39, 42, 40

46, 44, 37, 42, 39

a) Haz una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos:

35,5 - 38,5 - 40,5 - 42,5 - - 44,5 - 46,5.

b) Halla la media, la desviación típica y el CV.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
35,5-38,5	37	8	296	10 952
38,5-40,5	39,5	8	316	12 482
40,5-42,5	41,5	6	249	10 333,5
42,5-44,5	43,5	5	217,5	9 461,25
44,5-46,5	45,5	3	136,5	6 210,75
	TOTALES	30	1 215	49 439,5

b) $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1215}{30} = 40,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{49\,439,5}{30} - 40,5^2} = 2,78$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,78}{40,5} = 0,0687 \to 6,87\,\%$$

3. **Una fábrica ha contado el número de vasos que se le rompen en cada cajón de camino a la tienda. Estos son los resultados:**

N.º DE VASOS ROTOS	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE CAJONES	51	23	11	8	4	2	1

a) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	51	0	0
1	23	23	23
2	11	22	44
3	8	24	72
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
TOTAL	100	101	289

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{101}{100} = 1,01$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{289}{100} - 1,01^2} = 1,37$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,37}{1,01} = 1,3539 \rightarrow 135,39\,\%$$

b) $Mo = 0$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 6 DATA → 0

1 ⊗ 14 DATA → 1

2 ⊗ 15 DATA → 2

3 ⊗ 7 DATA → 3

4 ⊗ 4 DATA → 4

5 ⊗ 2 DATA → 5

6 ⊗ 1 DATA → 6

Obtenemos los resultados:

n → 100

Σx → 101

Σx^2 → 289

$\bar{x}$ → 1.01

σ_n → 1.367443

4. **La siguiente tabla muestra los lanzamientos de jabalina que se han realizado en la clasificación para los juegos olímpicos:**

DISTANCIAS (m)	N.° DE LANZADORES
54 a 58	4
58 a 62	11
62 a 66	24
66 a 70	9
70 a 74	2

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54-58	56	4	224	12 544
58-62	60	11	660	39 600
62-66	64	24	1 536	98 304
66-70	68	9	612	41 616
70-74	72	2	144	10 368
	TOTALES	50	3 176	202 432

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{3\,176}{50} = 63,52$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,432}{50} - 63,52^2} = 3,72$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,72}{63,52} = 0,0586 \rightarrow 5,86\,\%$$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

56 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{56}$

60 $\boxed{\times}$ 14 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{60}$

64 $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{64}$

68 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{68}$

72 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{72}$

Obtenemos los resultados:

$\boxed{n}$ $\rightarrow$ $\boxed{50}$

$\boxed{\Sigma x}$ $\rightarrow$ $\boxed{3176}$

$\boxed{\Sigma x^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{202432}$

$\boxed{\bar{x}}$ $\rightarrow$ $\boxed{63.52}$

$\boxed{\sigma_n}$ $\rightarrow$ $\boxed{3.721505}$

Parámetros de posición y diagramas de caja y bigotes

5. **Calcula la mediana y los cuartiles de cada una de las siguientes distribuciones:**

a) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 7, 8 10, 11

b) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 12, 14, 19, 22

c) 123, 125, 134, 140, 151, 173, 178, 186, 192, 198

$\boxed{Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5}$ $\quad Me \quad$ $\boxed{Q_2 = \frac{7+8}{2} = 7,5}$

a) 1 1 1 2 2 5 $\boxed{6}$ 6 6 7 8 10 11

$\boxed{Q_1 = \frac{5+6}{2} = 5,5}$ $\quad$ $\boxed{Me = \frac{7+7}{2} = 7}$ $\quad$ $\boxed{Q_3 = \frac{12+14}{2} = 13}$

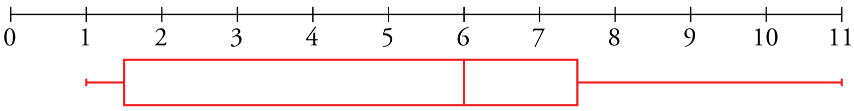
b) 4 5 5 6 7 7 7 8 12 14 19 2

Q_1 $\quad$ $\boxed{Me = \frac{151+173}{2} = 162}$ $\quad$ Q_3

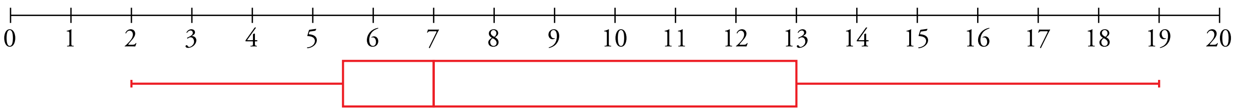
c) 123 125 $\boxed{134}$ 140 151 173 178 $\boxed{186}$ 192 198

6. **Dibuja el diagrama de caja y bigotes de cada una de las distribuciones del ejercicio anterior.**

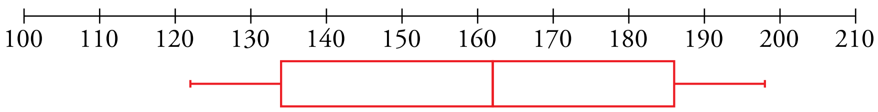
a)



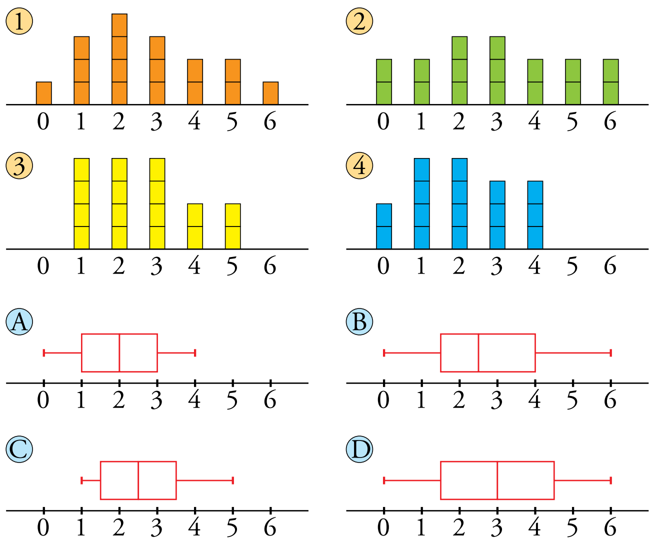
b)



c)



7. **Asocia cada gráfico de barras con su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**



1 → B 2 → D 3 → C 4 → A

8. **Esta tabla muestra la distribución del número de asignaturas suspendidas en una evaluación por los estudiantes de una clase:**

N.° DE ASIG. SUSP.	0	1	2	3	4	5
N.° DE ESTUDIANTES	10	4	5	2	4	3

Representa esta distribución mediante un diagrama de caja y bigotes.

Puedes poner todos los números en fila para hallar los cuartiles, pero mejor es que, sin ponerlos, los imagines en fila y razones en consecuencia.

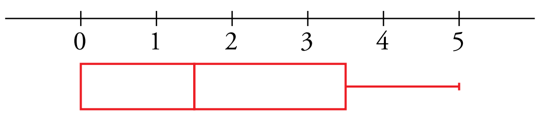
En total son 28 estudiantes preguntados.

La mediana estará entre el dato de la posición 14 y el 15, es decir, $Me = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$

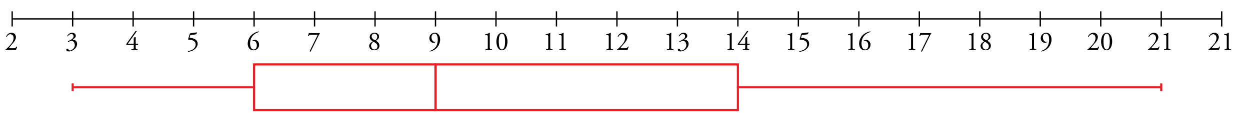
Quedarán 14 datos a la derecha y 14 datos a la izquierda de la mediana.

El primer cuartil estará entre los datos del puesto 7 y el puesto 8, es decir, $Q_1 = \frac{0+0}{2} = 0$

El tercer cuartil estará entre los datos del puesto 21 y el puesto 22, es decir, $Q_3 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$



9. **Conocemos el número de días al mes que ha llovido este año en una cierta región. Los valores de los cuartiles son 6, 9 y 14. El mes que más llovió fue marzo con 21 días y sabemos que el rango de la distribución es 18. Construye el diagrama de caja y bigotes. ¿Crees que es una región lluviosa?**



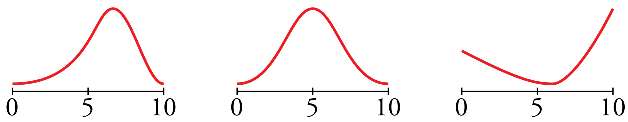
Observando el diagrama de caja y bigotes sí podemos deducir que es una región lluviosa.

Página 280

Resuelve problemas

10. **Se ha hecho un mismo examen en dos grupos, A y B, de 30 alumnos cada uno. Sus medias y sus desviaciones típicas son: $\bar{x}_A = 6$, $\sigma_A = 1$, $\bar{x}_B = 6$, $\sigma_B = 3$.**

a) Asigna una de estas gráficas a A y otra a B.

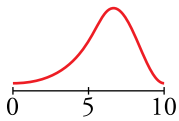


b) En una de las clases hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es A y cuál es B?

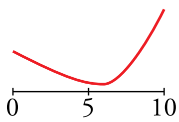
c) Si Marcos necesita sacar sobresaliente y Miguel se conforma con aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno de ellos?

a) La segunda gráfica la descartamos porque la media sería 5.

$\bar{x}_A = 6$ y $\sigma_A = 1 \rightarrow$ 1.ª gráfica



$\bar{x}_B = 6$ y $\sigma_B = 3 \rightarrow$ 3.ª gráfica

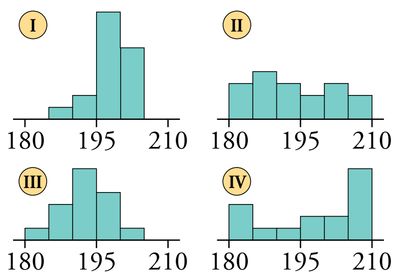


b) A corresponde con la clase de los 5 suspensos y el sobresaliente.

B corresponde con la clase de los 11 suspensos y los 4 sobresalientes.

c) La clase A será más adecuada para Marcos, y la clase B, para Miguel.

11. **Estas cuatro gráficas corresponden a las estaturas de los jugadores de cuatro equipos de baloncesto, A, B, C y D, cuyos parámetros aparecen en la tabla. ¿Cuál es la gráfica de cada equipo?**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
A	198,5	9,7
B	198,1	3,9
C	193	4,6
D	193,4	8,1

Halla el CV de cada equipo y ordénalos de menos a más regulares.

Los equipos I y IV tienen medias superiores a 195, y los equipos II y III, inferiores.

Además, los jugadores de IV tienen estaturas más extremas que I. Lo mismo ocurre con III que tiene estaturas más extremas que II.

Así, podemos relacionar:

A → IV   B → I   C → III   D → II

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9,7}{198,5} = 0,0489 \;\to\; 4,89\,\%$$

$$CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,9}{198,1} = 0,0197 \;\to\; 1,97\,\%$$

$$CV_C = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,6}{193} = 0,0238 \;\to\; 2,38\,\%$$

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8,1}{193,4} = 0,0419 \;\to\; 4,19\,\%$$

Los ordenamos de menos a más regulares:

A < D < C < B

12. **Elena, una jugadora de baloncesto, tiene una media de 17 puntos por partido y una desviación típica de 9. Su compañera, Sonia, tiene una media de 20 puntos y una desviación típica de 3 puntos.**

Para el próximo partido, el entrenador necesita una jugadora que intente conseguir 30 o más puntos. ¿A cuál de las dos debe seleccionar? ¿Por qué?

El entrenador necesita que la jugadora elegida haga 30 puntos.

Elena tiene $\bar{x} = 17$ y $\sigma = 9$ y pasa de los 30 puntos con 1,5 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 1,5\sigma = 17 + 1,5 \cdot 9 = 30,5$.

Sonia tiene $\bar{x} = 20$ y $\sigma = 3$ y para tener al menos 30 puntos, necesita más de 3 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 3\sigma = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.

Por tanto, el entrenador debe seleccionar a Elena.

13. **Lidia y Marcos juegan varias veces a acertar, en un minuto, el máximo número de palabras dada su definición. Estos son los resultados:**

LIDIA	14	8	15	9	7	13	12	15
MARCOS	11	9	10	10	12	11	6	9

a) Halla la media y la desviación típica de cada uno.

b) Calcula sus CV y di quién es más regular.

a) Lidia:

$$\bar{x} = \frac{14+8+15+9+7+13+12+15}{8} \approx 11,63$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{14^2+8^2+15^2+9^2+7^2+13^2+12^2+15^2}{8} - 11,63^2} \approx 2,98$$

Marcos:

$$\bar{x} = \frac{11+9+10+10+12+11+6+9}{8} = 9,75$$

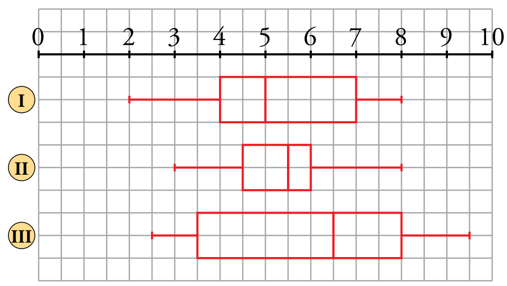
$$\sigma = \sqrt{\frac{11^2+9^2+10^2+10^2+12^2+11^2+6^2+9^2}{8} - 9,75^2} \approx 2,94$$

b) Lidia: $CV = \dfrac{2,98}{11,63} = 0,26 \to 26\,\%$

Marcos: $CV = \dfrac{2,94}{9,75} = 0,30 \to 30\,\%$

Lidia es un poco más regular.

14. **a) Compara estas distribuciones de notas obtenidas por tres grupos de alumnos indicando cuáles son la mediana y los cuartiles en cada una:**



b) En la evaluación se hicieron estos comentarios:

I. Aprobó el 50 % de la clase.

II. Las notas son muy parecidas.

III. La cuarta parte de la clase tiene notas superiores a 7.

IV. Es la mejor clase, aunque también es la que tiene mayor dispersión.

Indica a qué grupo corresponde cada comentario.

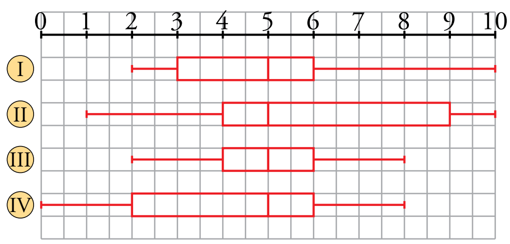
a) I. $Q_1 = 4$ $\quad Me = 5$ $\quad Q_3 = 7$

II. $Q_1 = 4,5$ $\quad Me = 5,5$ $\quad Q_3 = 6$

III. $Q_1 = 3,5$ $\quad Me = 6,5$ $\quad Q_3 = 8$

b) I. Grupo I $\qquad$ II. Grupo II $\qquad$ III. Grupo I $\qquad$ IV. Grupo III

15. **Estos son los diagramas de caja de las notas en matemáticas de cuatro clases de 20 alumnos:**



a) Di, en cada una de ellas, los valores menor y mayor así como Q_1, Me y Q_3.

b) Los parámetros son, no respectivamente:

	A	B	C	D
$\bar{x}$	4	6	5	5
σ	2,3	3,1	2,5	1,3

Asocia los parámetros con su clase.

c) Las 20 notas de la clase I son:

2 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 7 8 8 10 10

Comprueba que responden a su diagrama de caja.

Inventa tú 20 valores que respondan a cada uno de los diagramas II, III y IV.

d) Calcula $\bar{x}$ y σ en las distribuciones que has inventado en el apartado anterior y compáralos con los que se dan en la tabla del apartado b).

e) Halla el coeficiente de variación de cada distribución del apartado b) y determina cuál es más regular.

a) I. $Mín = 2$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 10$

II. $Mín = 1$ $Me = 5$ $Q_3 = 9$ $Máx = 10$

III. $Mín = 2$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 8$

IV. $Mín = 0$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 8$

b) A tiene la media más baja: A $\rightarrow$ IV

B tiene la media más alta: B $\rightarrow$ II

C parece centrada en 5 con dispersión alta: C $\rightarrow$ I

D tiene dispersión baja y la media y la mediana coinciden: D $\rightarrow$ III

c) Para que los datos respondan al diagrama I habría que cambiar el 7 por un 6.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

II $\rightarrow$ 1 2 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 7 8 9 9 9 9 10 10

III $\rightarrow$ 2 2 2 3 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8

IV $\rightarrow$ 0 1 1 2 2 2 3 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 8

d) Respuesta abierta.

e) Respuesta abierta.

Página 281

16. **Rafa es vendedor ambulante seis días a la semana. Ayer, viernes, calculó que durante esta semana había conseguido una ganancia media de 48 € diarios. Al hacer la misma cuenta hoy, sábado, resulta una media de 60 € diarios. ¿Cuánto ha ganado hoy?**

La media que calculó el viernes fue: $\bar{x} = 48 = \frac{\sum x_i}{5} \rightarrow \sum x_i = 240$.

La media de hoy, sábado, es: $\bar{x} = 60 = \frac{\sum x_i}{6} \rightarrow \sum x_i = 360$.

Por lo tanto, Rafa ha ganado hoy 360 – 240 = 120 €.

17. **Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero, el triple que el primero.**

a) ¿Cuál es la nota final de una alumna que sacó un 5, un 6 y un 4?

b) ¿Y si esas notas son el 10 %, el 40 % y el 50 %?

a) $\frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{1 + 2 + 3} = \frac{29}{6} = 4,8\widehat{3}$

b) $\frac{10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 50 \cdot 4}{10 + 40 + 50} = \frac{490}{100} = 4,9$

18. **Sabemos que, en una clase, la calificación media de un examen ha sido 5, y la desviación típica, 1,5. En esa misma clase, para otro examen, la calificación media ha sido, también, 5 y la desviación típica, 1.**

Si un alumno ha obtenido un 8 en el primer examen y un 7,5 en el segundo, ¿qué nota te parece más meritoria? ¿Por qué?

El coeficiente de variación en el primer examen es del 30 %, y en el segundo, del 20 %. Así, en el segundo examen hay menos personas que hayan sacado notas muy por encima de la media y, por lo tanto, el 7,5 de este alumno es más meritorio.

Problemas "+"

19. **En un test de inteligencia realizado a 200 personas, se han obtenido los siguientes resultados:**

PUNTUACIÓN	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
N.° PERSONAS	6	18	76	70	22	8

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) ¿Qué porcentaje de individuos tiene una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$? ¿Y cuántos inferior a $\bar{x} - 2\sigma$? Haz una estimación razonada.

a)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
30 - 40	35	6	210	7 350
40 - 50	45	18	810	36 450
50 - 60	55	76	4 180	229 900
60 - 70	65	70	4 550	295 750
70 - 80	75	22	1 650	123 750
80 - 90	85	8	680	57 800
		200	12 080	751 000

$\bar{x} = \dfrac{12\,080}{200} = 60{,}4$; $\sigma = \sqrt{\dfrac{751\,000}{200} - (60,4)^2} = 10{,}336$

b) Como $\bar{x} + 2\sigma = 60{,}4 + 2 \cdot 10{,}336 \approx 81$ y en el intervalo 80 - 90 hay 8 personas, estimamos que en el intervalo 81 - 90 hay, aproximadamente, 7 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$ es $\dfrac{7}{200} = 0{,}35 \approx 35\,\%$.

Por otro lado, como $\bar{x} - 2\sigma = 60{,}4 - 2 \cdot 10{,}336 \approx 39{,}7$, y en el intervalo 30 - 40 hay 6 personas, estimamos que en el intervalo 30 - 39,7 hay, aproximadamente, 6 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia inferior a $\bar{x} - 2\sigma$ es $\dfrac{6}{200} = 0{,}3 \approx 3\,\%$.

Los dos porcentajes deberían ser aproximadamente iguales.

20. **Al medir el peso al nacer en una determinada especie de animales, hemos obtenido los datos siguientes:**

PESO (kg)	N.° DE ANIMALES
3,5 - 4,5	**1**
4,5 - 5,5	**8**
5,5 - 6,5	**28**
6,5 - 7,5	**26**
7,5 - 8,5	**16**
8,5 - 9,5	**1**

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) ¿Qué porcentaje de animales pesó entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$? ¿Y más que $\bar{x} + \sigma$? ¿Y menos que $\bar{x} - \sigma$?

a)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
3,5 - 4,5	4	1	4	16
4,5 - 5,5	5	8	40	200
5,5 - 6,5	6	28	168	1 008
6,5 - 7,5	7	26	182	1 274
7,5 - 8,5	8	16	128	1 024
8,5 - 9,5	9	1	9	81
		80	531	3 603

$$\bar{x} = \frac{531}{80} = 6{,}638$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3\,603}{80} - (6,638)^2} = 0{,}997$$

b) $\bar{x} - \sigma = 6{,}638 - 0{,}997 = 5{,}641 \approx 5{,}5$; $\bar{x} + \sigma = 6{,}638 + 0{,}997 = 7{,}635 \approx 7{,}5$

En el intervalo que va de $\bar{x} - \sigma$ a $\bar{x} + \sigma$ hay 28 + 26 = 54 individuos, que supone un $\frac{54}{80} = 0{,}675 = 67{,}5\,\%$.

Con más de $\bar{x} + \sigma$ hay 16 + 1 = 17 individuos, que supone un $\frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

Con menos de $\bar{x} - \sigma$ hay 1 + 8 = 9 individuos, que supone un $\frac{9}{80} = 0{,}1125 = 11{,}25\,\%$.

21. **Estas son las estaturas de 4 350 soldados:**

ESTATURA (m) (MARCAS DE CLASE)	1,52	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,76	1,80	1,84	1,88
N.º SOLDADOS	62	186	530	812	953	860	507	285	126	29

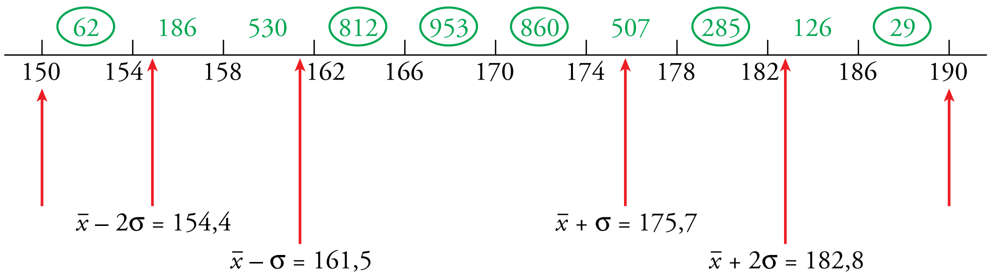
Decimos que los soldados que tienen su estatura entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ son *altos*, si la tienen entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} - 2\sigma$, son *bajos* y entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$, son *normales*. Estima qué tanto por ciento de altos, de bajos y de normales hay. ¿Qué porcentaje hay de *altísimos* y de *bajísimos*?

Empezamos por calcular $\bar{x}$ y σ. Obtenemos $\bar{x} = 168{,}6$ cm, $\sigma = 7{,}1$ cm.

Son importantes los siguientes valores:

$\bar{x} - 2\sigma = 154{,}4$ $\quad\quad$ $\bar{x} - \sigma = 161{,}6$ $\quad\quad$ $\bar{x} + \sigma = 175{,}7$ $\quad\quad$ $\bar{x} + 2\sigma = 182{,}8$

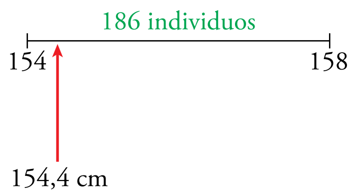
Representamos estos valores junto con los extremos de los intervalos:



Deseamos averiguar el número de individuos que hay en los *tramos* delimitados por las líneas rojas. Para ello, hemos puesto, en verde, los individuos de cada intervalo. Se han señalado los que están contenidos por completo en uno de los *tramos*. Así, 62 son los individuos del primer intervalo que están dentro del *tramo* 150 - 154,4.

Los demás números en verde hemos de repartirlos del siguiente modo:

2.º intervalo:



$$\frac{186 \text{ individuos}}{4 \text{ cm}} = \frac{x}{154{,}4 - 154} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{0{,}4 \cdot 186}{4} = 18{,}6 \approx 19 \text{ individuos}$$

Asignamos **19** inidividuos a la izquierda de 154,4 y 186 – 19 = **167** a la derecha.

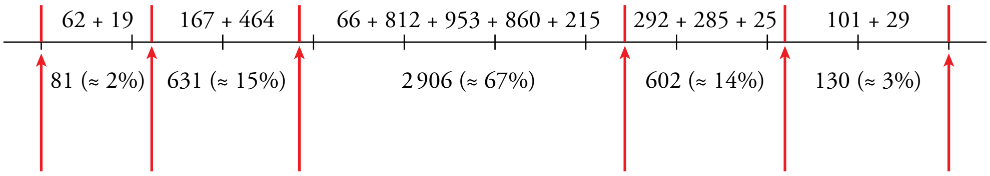
Análogamente:

3.er intervalo: $\rightarrow$ **464** individuos a la izquierda de 161,5 y **66** a la derecha.

7.º intervalo: $\rightarrow$ **215** individuos a la izquierda de 175,7 y **292** a la derecha.

9.º intervalo: $\rightarrow$ **25** individuos a la izquierda de 182,8 y **101** a la derecha.

Conclusión:



Por tanto, diremos que hay:

2 % de bajísimos, 15 % de bajos, 67 % de normales, 14 % de altos y 3 % de altísimos.

(Los porcentajes suman 101 y no 100 debido al redondeo).

22. **Estas son las horas de estudio semanal de un grupo de alumnas y alumnos:**

14	**9**	**9**	**20**	**18**	**12**	**14**	**6**	**14**	**8**
15	**10**	**18**	**20**	**2**	**7**	**18**	**8**	**12**	**10**
20	**16**	**18**	**15**	**24**	**10**	**12**	**25**	**24**	**17**
10	**4**	**8**	**20**	**10**	**12**	**16**	**5**	**4**	**13**

a) Construye una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 1,5 - 6,5 - 11,5 - - 16,5 - 21,5 - 26,5

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) Utilizando los parámetros $\bar{x}$ y σ, haz cinco intervalos con las siguientes características: *estudia muy poco*, *estudia poco*, *estudia normal*, *estudia mucho*, *estudia muchísimo*. ¿Qué proporción de individuos hay en cada uno?

a)

INTERVALO	FRECUENCIA
1,5 - 6,5	5
6,5 - 11,5	11
11,5 - 16,5	12
16,5 - 21,5	9
21,5 - 26,5	3

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1,5 - 6,5	4	5	20	80
6,5 - 11,5	9	11	99	891
11,5 - 16,5	14	12	168	2 352
16,5 - 21,5	19	9	171	3 249
21,5 - 26,5	24	3	72	1 728
		40	530	8 300

$$\bar{x} = \frac{530}{40} = 13{,}25 \text{ h}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8\,300}{40} - (13{,}25)^2} = 5{,}6513$$

c) $\bar{x} - 2\sigma = 13{,}25 - 2 \cdot 5{,}6513 \approx 1{,}9$

$\bar{x} - \sigma = 13{,}25 - 5{,}6513 \approx 7{,}6$

$\bar{x} + \sigma = 13{,}25 + 5{,}6513 \approx 18{,}9$

$\bar{x} + 2\sigma = 13{,}25 + 2 \cdot 5{,}6513 \approx 24{,}6$

Por tanto:

Estudian muy poco los que están entre 0 h y 1,9 h a la semana.

Estudian poco los que están entre 1,9 h y 7,6 h a la semana.

Estudian normal los que están entre 7,6 h y 18,9 h a la semana.

Estudian mucho los que están entre 18,9 h y 24,6 h a la semana.

Estudian muchísimo los que están más de 24,6 h a la semana.

Construimos una tabla para hallar la proporción de individuos que hay en cada intervalo:

INTERVALO	f_i	%
menos de 1,9	0	0 %
1,9 - 7,6	6	15 %
7,6 - 18,9	27	67,5 %
18,9 - 24,6	6	15 %
más de 24,6	1	2,5 %
TOTAL	40	100 %

23. **En una clase, estas son las notas de un examen:**

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.° ALUMNOS	4	3	2	1	7	3	2	8	3	2

Calcula las notas medias de: la clase ($\bar{x}$), los aprobados ($\bar{x}_A$) y los suspensos ($\bar{x}_B$). ¿Se podría hallar $\bar{x}$ haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$?

$\bar{x} = \dfrac{198}{35} \approx 5{,}657$ $\qquad$ $\bar{x}_A = \dfrac{178}{25} = 7{,}12$ $\qquad$ $\bar{x}_B = \dfrac{20}{10} = 2$

Haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ no se puede hallar $\bar{x}$. Observamos que:

Si $\bar{x}_A = \dfrac{a}{b}$ y $\bar{x}_B = \dfrac{c}{d}$, $\bar{x} = \dfrac{a+c}{b+d}$

$$\frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} \neq \frac{a+c}{b+d}$$

Reflexiona sobre la teoría

24. **Si dos distribuciones tienen igual media, y la desviación típica de la primera es mayor que la de la segunda, ¿en cuál de las dos es mayor el coeficiente de variación? ¿Y si tienen la misma desviación típica, y la media de la primera es mayor que la de la segunda?**

- Primer caso:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x}' \\ \sigma > \sigma' \end{array}\right\} \to CV = \frac{\sigma}{\bar{x}},\ CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma'}{\bar{x}} \to CV > CV'$$

El coeficiente de variación es mayor en la primera distribución.

- Segundo caso:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x}' \\ \sigma > \sigma' \end{array}\right\} \to CV = \frac{\sigma}{\bar{x}},\ CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x}'} \to CV < CV'$$

El coeficiente de variación es mayor en la segunda distribución.

25. **¿Qué les ocurre a la $\bar{x}$ y a la σ de una distribución si a todos sus datos les sumamos un mismo número? ¿Y si los multiplicamos por el mismo número? Comprueba tus conjeturas con estos datos:**

4, 3, 6, 7, 5, 4, 5, 3, 2, 6, 5

- Si a cada dato le sumamos un mismo número, a, entonces la media aumenta a unidades pero la desviación típica no varía.

  Datos $\rightarrow$ $x'_i = x_i + a$

  Parámetros $\rightarrow$ $\bar{x}' = \bar{x} + a$; $\sigma' = \sigma$

- Si cada dato se multiplica por k, la media y la desviación típica se multiplican por k:

  Datos $\rightarrow$ $x_i'' = k \cdot x_i$

  Parámetros $\rightarrow$ $\bar{x}'' = k \cdot \bar{x}$; $\sigma'' = \sigma$

Comprobación:

Los parámetros de la distribución son $\bar{x} \approx 4{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

Si sumamos 3 a cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 7{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

Si multiplicamos por 2 cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 9{,}1$ y $\sigma \approx 2{,}84$.

Página 282

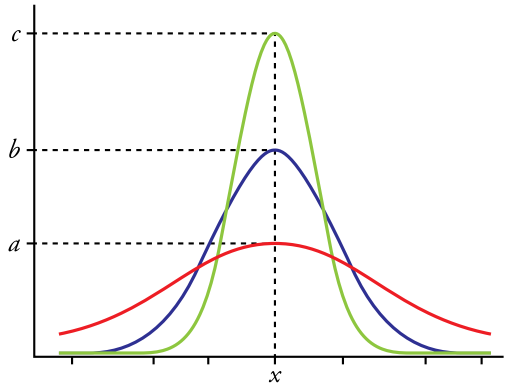
Lee y aprende

La campana de Gauss

Muchas variables estadísticas relativas a fenómenos del mundo real, con componentes aleatorios, presentan frecuencias muy bajas en los valores extremos, que van creciendo a medida que se acercan a los valores centrales.

Así se comporta, por ejemplo, la distribución de las alturas de un conjunto de personas: unos poquitos muy bajos (menos de 1,55 m), otros poquitos muy altos (más de 1,95 m) y muchos entre los valores intermedios (alrededor de 1,75 m). Y lo mismo podemos decir de la distribución de pesos, el tallaje en las prendas de vestir, los datos relativos a temperaturas, caudales de ríos, gasto de energía, ingresos, etc.

Este tipo de distribuciones, en su forma ideal, responden al concepto de distribución normal y su representación gráfica (*valores-frecuencias*) se conoce como Campana de Gauss, por su forma y por ser Gauss el primer matemático que aplicó estos conceptos en estudios prácticos, para otras ciencias.

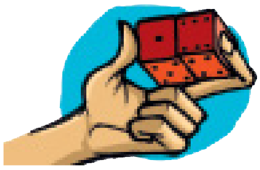


- **¿Cuál sería la media en la distribución de la gráfica roja? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?**
- **¿Qué valor tendrían esos parámetros en la gráfica verde? ¿Y en la morada?**

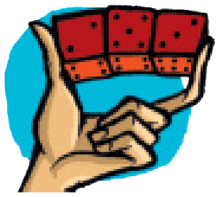
La media, la mediana y la moda de cualquier distribución normal coinciden.

Piensa y generaliza

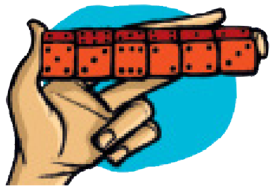
Este dado tiene dos caras ocultas y cuatro a la vista. ¿Cuántos puntos suman las caras ocultas?



Aquí hay cuatro caras ocultas. ¿Cuántos puntos suman esas cuatro caras?



¿Y aquí?

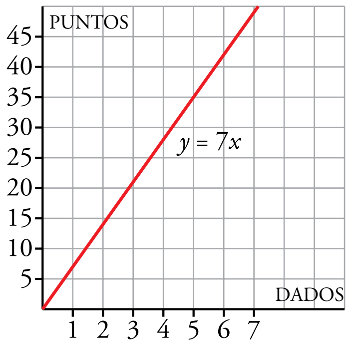


¿Y aquí?

- **¿Y si hubiera x dados?**

El número de puntos de las caras ocultas está en función del número de dados. Escribe y representa una función que relacione el número de dados, x, con el de puntos en las caras ocultas, y.

- Las caras opuestas de un dado siempre suman 7 puntos.
- Según la respuesta anterior, $7 \cdot 2 = 14$ puntos.
- $7 \cdot 3 = 21$ puntos.
- $7 \cdot 6 = 42$ puntos.
- Según la serie anterior, si hubiera x dados las caras ocultas sumarían $7 \cdot x$ puntos.
- $y = 7x$



Página 283

Entrénate resolviendo problemas

- **Fátima ha invitado a diez amigos a su fiesta de cumpleaños. Después de merendar, propone un acertijo con premio:**

  "Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Doy tres pistas:

  — Hay menos de cinco docenas.

  — Están ordenados en filas de nueve.

  — Si se repartieran entre todos los presentes, sobraría uno".

  ¿Cuántos bombones contiene la caja?

  Las pistas de Fátima se traducen en lo siguiente:

  • Hay menos de 60 bombones.

  • El número de bombones es un múltiplo de 9.

  Pueden ser 54, 45, 36, 27, 18 y 9.

  • El número de bombones es una unidad mayor que un múltiplo de 11.

  Solo 45 cumple esta última condición (44 es múltiplo de 11).

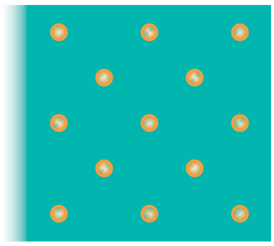
- **Un cocinero va a freír tres filetes. Cada uno ha de estar en la sartén cinco minutos por cada cara. Pero en la sartén solo caben dos. ¿Cómo debe hacerlo para tardar el menor tiempo posible?**

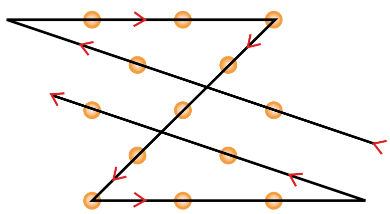
  Pone dos filetes, A y B, durante 5 minutos.

  Saca uno de ellos, A, da la vuelta al otro, B, y pone el tercero, C, durante 5 minutos.

  Saca el B (ya está hecho por las dos caras), da la vuelta al C, y pone el A por la cara cruda. Otros 5 minutos. Ya están los tres. Ha tardado 15 minutos.

- **Copia el dibujo de la derecha y traza en tu cuaderno una línea quebrada de cinco segmentos que pase por estos trece puntos.**





Autoevaluación

1. Halla la media, la mediana, la desviación media, la desviación típica y el coeficiente de variación de esta distribución:

6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

Ordenamos primero los datos: 1 2 3 4 4 4 6 8 9 9

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4\cdot 3+6+8+9\cdot 2}{10} = 5$

MEDIANA $= 4$

DESVIACIÓN MEDIA: $\text{DM} = \dfrac{|1-5|+|2-5|+|3-5|+\dots}{10} = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$

VARIANZA: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2\cdot 3+6^2+8^2+9^2\cdot 2}{10} - 5^2 = \dfrac{324}{10} - 25 = 7{,}4$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{7{,}4} \approx 2{,}72$

2. Calcula $\bar{x}$, σ y CV de las siguientes distribuciones:

a) Número de días que han ido a la biblioteca los alumnos de un curso:

N.° DE DÍAS	FRECUENCIA
0	6
1	7
2	8
3	5
4	2
5	2

b) Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

TIEMPO (min)	FRECUENCIA
De 1 a 9	4
De 9 a 17	5
De 17 a 25	8
De 25 a 33	7
De 33 a 41	4
De 41 a 49	2

a)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	7	7	7
2	8	16	32
3	5	15	45
4	2	8	32
5	2	10	50
	30	56	166

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{56}{30} \approx 1{,}87$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{166}{30} - 1{,}87^2} \approx 1{,}43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1{,}43}{1{,}87} \approx 0{,}7647$

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0 - 10	5	6	30	150
10 - 20	15	9	135	2025
20 - 30	25	8	200	5000
30 - 40	35	5	175	6125
40 - 50	45	2	90	4050
		30	630	17350

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{630}{30} \approx 21$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{17350}{30} - 21^2} \approx 11{,}72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11{,}72}{21} \approx 0{,}56$

3. Las notas obtenidas por los 30 alumnos de una clase de 3.º ESO en un examen tipo test con 5 preguntas han sido:

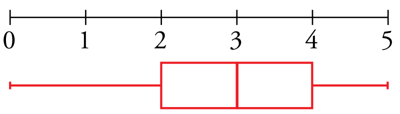
3	**3**	**2**	**4**	**5**	**4**	**1**	**3**	**3**	**2**
3	**2**	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**	**0**	**5**	**3**
2	**0**	**3**	**5**	**3**	**3**	**5**	**2**	**1**	**4**

a) Calcula la mediana y los cuartiles.

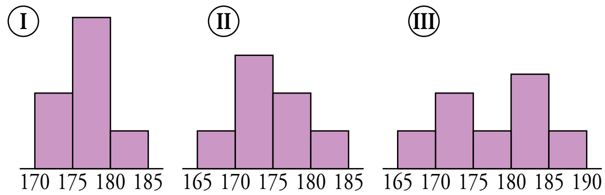
b) Dibuja el correspondiente diagrama de caja y bigotes.

a) $Me = 3$, $Q_1 = 2$ y $Q_3 = 4$

b)



4. Las estaturas de los componentes de tres equipos escolares de baloncesto, A, B y C, se distribuyen según las siguientes gráficas:



Los parámetros correspondientes a cada uno de los equipos son:

	A	B	C
$\bar{x}$	**177,8**	**176,8**	**174,6**
σ	**6,4**	**3,2**	**4,5**

Decide, razonadamente, qué gráfica corresponde a cada equipo.

La gráfica I corresponde al equipo B, ya que su medida debe estar entre 175 y 180 y su desviación media es la más pequeña.

La gráfica II corresponde al equipo C, ya que su media debe estar entre 170 y 175 y su desviación media está entre las de los otros dos equipos.

La gráfica III corresponde al equipo A, ya que su media está más cercana a 180 y su desviación media es la más grande.

Página 285

Resuelve

1. ¿Qué es más fácil, sacar un 5 al tirar un dado, o sumar 5 al tirar dos dados?

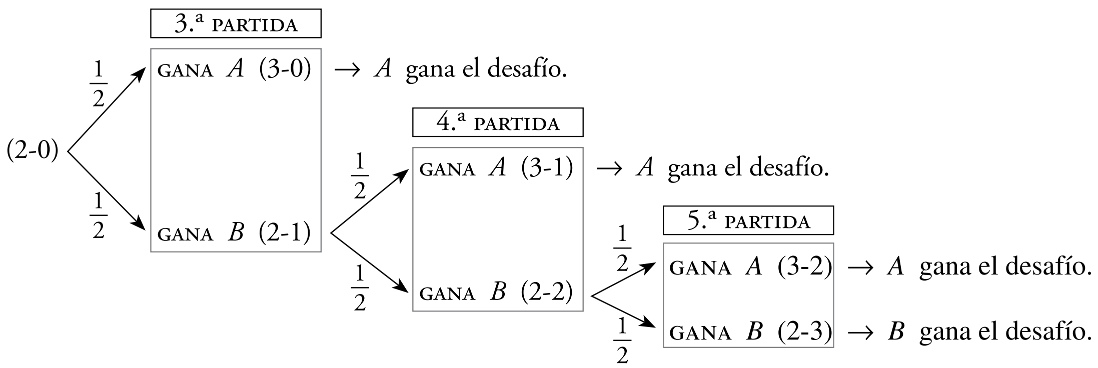
Al tirar un dado: $P[5] = \frac{1}{6}$

Al tirar dos dados, hay cuatro posibilidades de sumar 5 (1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1) entre 36:

$P[\text{suma } 5] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Por tanto, es más fácil sacar un 5 al tirar un dado que sumar 5 al tirar dos dados.

2. ¿Cómo se deberían repartir los doblones en la partida interrumpida si se para cuando A va ganando 2 a 0?



B ganaría el desafío en la mitad de la mitad de la mitad de los casos; es decir, en la octava parte de los casos.

$P[B \text{ gana el desafío}] = \frac{1}{8}$

$P[A \text{ gana el desafío}] = \frac{7}{8}$

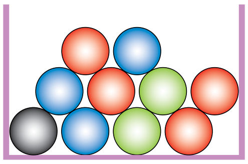
A debería llevarse $\frac{7}{8} \cdot 3\,000 = 2\,625$ doblones.

B debería llevarse $\frac{1}{8} \cdot 3\,000 = 375$ doblones.

1 Sucesos aleatorios

Página 287

1. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores. ***Sacamos una bola y anotamos su color.***



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) E = {R, A, V, N}

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

S_1 = {R, A, V, N} S_2 = {R, N} S_3 = {V}

S_4 = {A} S_5 = {A, V, N}

2. Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña. ***Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.***

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

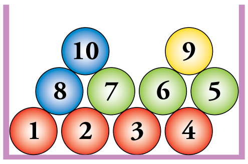
c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) $E = \{F, N, L, P\}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $S_1 = \{F, N\}$; $S_2 = \{N, L, P\}$

3. En una urna hay 10 bolas numeradas. ***Sacamos una bola y anotamos el número.***



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

S_1: "PAR" = {2, 4, 6, 8, 10} S_2: "IMPAR" = {1, 3, 5, 7, 9}

S_3: "MÚLTIPLO DE 3" = {3, 6, 9} S_4: "MÚLTIPLO DE 5" = {5, 10}

S_5: "NÚMERO PRIMO" = {2, 3, 5, 7} S_6: "CUADRADO PERFECTO" = {1, 4, 9}

4. Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.

Saca un bombón y ve si es de chocolate.

¿Es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?

No es una experiencia aleatoria, Daniel sabe que todos los bombones son de chocolate; por lo tanto, no interviene el azar.

2 Probabilidad de un suceso

Página 289

1. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17?

b) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17?

a) $P[17] = \frac{1}{90}$

b) $P[17] = \frac{1}{10}$

2. En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, *CH*, y las normales, *N*. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a $P[CH]$ y a $P[N]$?

Hemos extraído 27 + 13 = 40 galletas en total.

$P[CH] = \frac{27}{40} = 0{,}675$

$P[N] = \frac{13}{40} = 0{,}325$

3 Ley de Laplace para experiencias regulares

Página 290

1. Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:

a) El as de espadas.

b) El rey de bastos.

c) Una figura (sota, caballo o rey).

d) Una copa.

a) $P[\text{as de espadas}] = \frac{1}{40}$

b) $P[\text{rey de bastos}] = \frac{1}{40}$

c) $P[\text{una figura}] = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

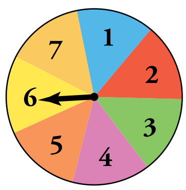
d) $P[\text{una copa}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

2. En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

En el campamento hay 32 + 13 + 15 + 23 = 83 jóvenes.

$P[\text{europeo}] = \frac{32}{83}$

3. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?



$P[\text{par}] = \frac{3}{7}$

Página 291

4. Calcula las restantes probabilidades en la Experiencia i. (Sumar 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12).

$P[2] = \dfrac{1}{36}$ $\qquad P[3] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P[4] = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ $\qquad P[6] = \dfrac{5}{36}$

$P[7] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ $\qquad P[8] = \dfrac{5}{36}$

$P[9] = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ $\qquad P[10] = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$P[11] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ $\qquad P[12] = \dfrac{1}{36}$

5. En la Experiencia i:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 6?

c) ¿Y de que esté entre 4 y 7, ambos incluidos?

a) 1 + 2 + 3 + 4 = 10 resultados menores que 6. Por tanto:

$P[\text{MENOR QUE } 6] = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

b) $P[\text{MAYOR QUE } 6] = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$

c) $P[4, 5, 6 \text{ o } 7] = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

6. ***Lanzamos dos dados y nos fijamos en la mayor de las puntuaciones.***

Completa en tu cuaderno el cuadro. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea 1?

¿Y de que sea 2? ¿Y 3? ¿Y 4? ¿Y 5? ¿Y 6?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		2	**3**	**4**		
					5	
					5	
					5	**6**
					6	**6**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	2	**2**	**3**	**4**	5	6
	3	3	3	4	**5**	6
	4	4	4	4	**5**	6
	5	5	5	5	**5**	**6**
	6	6	6	6	**6**	**6**

$P[1] = \dfrac{1}{36}$ $\qquad P[2] = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ $\qquad P[3] = \dfrac{5}{36}$

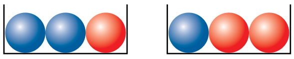
$P[4] = \dfrac{7}{36}$ $\qquad P[5] = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad P[6] = \dfrac{11}{36}$

Página 292

7. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.

$P[\text{par y múltiplo de 3}] = P[\text{par}] \cdot P[\text{múltiplo de 3}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

8. Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.



¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

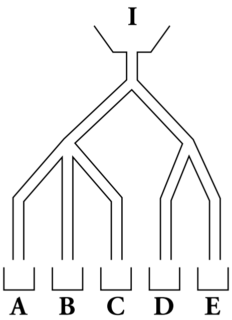
La probabilidad de sacar bola azul de la primera urna es $P[\text{azul 1.ª urna}] = \frac{2}{3}$.

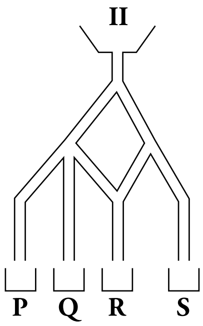
Si sacamos bola azul y la ponemos en la segunda urna, esta segunda tendrá dos bolas azules y dos rojas. La probabilidad de sacar una bola azul de ella, ahora, es: $P[\text{azul 2.ª urna}] = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $P[\text{azul 1.ª urna y azul 2.ª urna}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

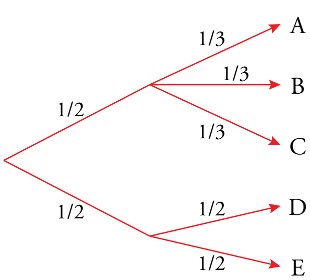
9. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?

a) En el aparato I. **b) En el aparato II.**





a)



$P[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

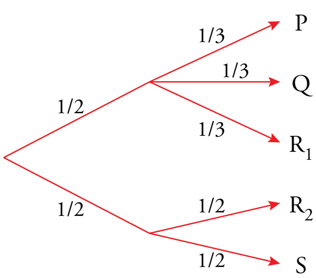
$P[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[D] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[E] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b)



$P[P] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\left.\begin{array}{l} P[R_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P[R_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} P[R] = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$

$P[S] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Página 293

Hazlo tú

Halla P[VERDE] y P[NI ROJO NI NEGRO] en los dos supuestos del problema resuelto.

a) $P[\text{VERDE}] = \frac{3}{8} = 0{,}375$

$P[\text{NI ROJO NI NEGRO}] = 1 - P[\text{ROJO}] = 1 - \frac{2}{8} = 0{,}75$

b) $P[\text{VERDE}] = \frac{354}{1000} \approx 0{,}35$

$P[\text{NI ROJO NI NEGRO}] = 1 - P[\text{ROJO}] = 1 - \frac{310}{1000} = 0{,}69$

Hazlo tú

Suprime una bola verde de cada una de las dos urnas de este ejercicio y calcula las mismas probabilidades que en él se piden.

Llamamos: $R \to$ bola roja $\qquad V \to$ bola verde

a) $P[1.^a\ R \text{ y } 2.^a\ R] = P[1.^a\ R] \cdot P[2.^a\ R \text{ habiendo sido } 1.^a\ R] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}05$

b) $P[1.^a\ V \text{ y } 2.^a\ R] = P[1.^a\ V] \cdot P[2.^a\ R \text{ habiendo sido } 1.^a\ V] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}05$

c) $P[2.^a\ R] = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35$

d) $P[2.^a\ V] = 1 - P[2.^a\ R] = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

Ejercicios y problemas

Página 294

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1. **Indica el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias aleatorias:**

a) Señalo al azar una provincia en un mapa de Galicia.

b) Lanzo un cubo de Rubik recién montado y anoto el color de la cara de arriba.

c) Señalo una palabra cualquiera de un libro elegido al azar y observo cuál es la primera vocal que aparece.

d) Saco una carta de una baraja española y observo el palo.

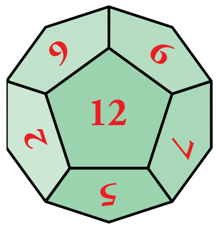
a) E = {A Coruña. Lugo, Orense, Pontevedra}

b) E = {azul, amarillo, rojo, verde, blanco, naranja}

c) E = {a, e, i, o, u}

d) E = {oros, copas, espadas, bastos}

2. **Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.**



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" **B = "Más de 4"**

C = "Número par" **D = "No múltiplo de 3"**

a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) A = {1, 2, 3, 4} B = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

C = {2, 4, 6, 8, 10, 12} D = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11}

3. **Escogemos al azar un día cualquiera de la semana.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Fin de semana"

B = "Los que empiezan por la letra M"

C = "Los que acaban en *es*"

a) E = {L, M, X, J, V, S, D}

b) A = {S, D} B = {M, X} C = {L, M, X, J, V}

4. **Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.**

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos A = "La primera salió C".

c) Repite la actividad suponiendo que lanzamos tres monedas en lugar de dos. Describe: B = "Obtener dos veces C" y D = "No obtener ninguna C".

a) E = {CC, C+, +C, ++}

b) A = {CC, C+}

c) E = {CCC, CC+, C+C, +CC, +++, ++C, +C+, C++}

B = {CC+, C+C, +CC}

D = {+++}

5. **Escogemos una bola al azar de cada urna. Un caso es, por ejemplo, Azul-Negra.**

1.ª urna **2.ª urna**

a) Describe el espacio muestral.

b) Haz lo mismo si en la segunda urna hubiera una blanca y una negra.

a) E = {roja-negra, azul-negra, verde-negra}

b) E = {roja-negra, azul-negra, verde-negra, roja-blanca, azul-blanca, verde-blanca}.

Probabilidad en experiencias simples

6. **Lanzamos un dado correcto. Calcula las probabilidades de que el resultado sea:**

a) 1 o 2. **b) Mayor que 2.** **c) Par.**

d) Mayor que 1. **e) Menor que 1.** **f) Menor que 7.**

a) $P[1 \text{ o } 2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

b) $P[\text{mayor que } 2] = 1 - P[1 \text{ o } 2] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) $P[\text{par}] = \frac{1}{2}$

d) $P[\text{mayor que } 1] = 1 - P[1] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

e) $P[\text{menor que } 1] = 0$

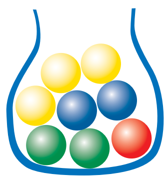
f) $P[\text{menor que } 7] = 1$

7. **Se extrae al azar una bola de la siguiente bolsa. Calcula la probabilidad de que:**

a) Sea azul.

b) No sea verde.

c) Sea roja o azul.



a) $P[\text{azul}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{no verde}] = 1 - P[\text{verde}] = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

c) $P[\text{roja o azul}] = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

8. **El profesor ha traído estos libros a clase:**

TÍTULO	NÚMERO DE LIBROS
La isla del tesoro	11
El principito	8
De la Tierra a la Luna	6
El conde de Montecristo	5

Si se asignan al azar, calcula la probabilidad de que el libro que me toque:

a) Sea *La isla del tesoro*.

b) No sea *El principito* ni *El conde de Montecristo*.

c) No sea *De la Tierra a la Luna*.

En total hay 30 libros.

a) A = Sea *La Isla del tesoro*. $P[A] = \frac{11}{30}$

b) B = No sea *El Principito* ni *El Conde de Montecristo*. $P[B] = \frac{11+6}{30} = \frac{17}{30}$

c) C = No sea *De la Tierra a la Luna*. $P[C] = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

9. **Metemos las piezas de un juego de ajedrez en una bolsa y elegimos una al azar. Recuerda qué piezas componen el juego:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un peón? ¿Y de obtener un peón negro?

b) ¿Qué probabilidad hay de sacar una torre? ¿Y un caballo blanco? ¿Y uno de los reyes?

ATENCIÓN: Supón que las figuras de ajedrez son piezas de la misma forma, tamaño y textura.

a) $P[\text{peón}] = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$P[\text{peón negro}] = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{torre}] = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$P[\text{caballo blanco}] = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

$P[\text{rey}] = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

10. **Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos, A, B, C y D, de la actividad 2.**

$P[A] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P[B] = 1 - P[A] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P[C] = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P[D] = 1 - P[\text{múltiplo de 3}] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

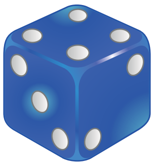
11. **Halla la probabilidad de los sucesos, A, B y C de la actividad 3.**

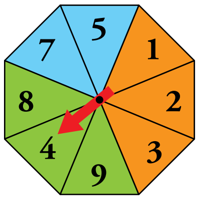
$P[A] = \frac{2}{7}$ $\quad$ $P[B] = \frac{2}{7}$ $\quad$ $P[C] = \frac{5}{7}$

Página 295

Probabilidad en experiencias compuestas

12. **Tiramos un dado y hacemos girar la ruleta:**





a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números pares?

b) Halla la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en el dado y un color que no sea azul en la ruleta.

c) Calcula la probabilidad de obtener un 6 o un 5 en el dado.

d) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea más de 10.

a) $P[\text{par y par}] = P[\text{par}] \cdot P[\text{par}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

b) $P[\text{mayor que 2 y no azul}] = P[\text{mayor que 2}] \cdot P[\text{no azul}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P[6 \text{ o } 5] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

d) Construimos la tabla del espacio muestral:

	1	2	3	4	5	7	8	9
1	2	3	4	5	6	8	9	10
2	3	4	5	6	7	9	10	11
3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	5	6	7	8	9	11	12	13
5	6	7	8	9	10	12	13	14
6	7	8	9	10	11	13	14	15

$P[\text{suma mayor que } 10] = \frac{13}{48}$

13. **De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Ambas sean verdes. **b) La 1.ª sea roja y la 2.ª verde.** **c) Las dos sean rojas.**

Llamamos: $V \to$ bola verde $R \to$ bola roja

a) $P[1.^a\ V \text{ y } 2.^a\ V] = P[1.^a\ V] \cdot P[2.^a\ V \text{ habiendo sido } 1.^a\ V] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[1.^a\ R \text{ y } 2.^a\ V] = P[1.^a\ R] \cdot P[2.^a\ V \text{ habiendo sido } 1.^a\ R] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

c) $P[1.^a\ R \text{ y } 2.^a\ R] = P[1.^a\ R] \cdot P[2.^a\ R \text{ habiendo sido } 1.^a\ R] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

14. **Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de estos sucesos:**

a) Dos ases. **b) Un as y un rey.** **c) Dos oros.**

d) Ninguna copa (no copa y no copa).

e) Dos figuras (sota, caballo o rey).

f) Una figura y una no figura.

a) $P[\text{AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS habiendo sido AS}] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{130}$

b) $P[\text{AS y REY}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{REY habiendo sido AS}] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{39} = \dfrac{2}{195}$

c) $P[\text{OROS y OROS}] = P[\text{OROS}] \cdot P[\text{OROS habiendo sido OROS}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{3}{52}$

d) $P[\text{NINGUNA COPA}] = P[\text{NO COPA}] \cdot P[\text{NO COPA habiendo sido NO COPA}] = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{29}{52}$

e) $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = P[\text{FIGURA}] \cdot P[\text{FIGURA habiendo sido FIGURA}] = \dfrac{12}{40} \cdot \dfrac{11}{39} = \dfrac{11}{130}$

f) $P[\text{FIGURA y NO FIGURA}] = P[\text{FIGURA}] \cdot P[\text{NO FIGURA habiendo sido FIGURA}] = \dfrac{12}{40} \cdot \dfrac{28}{39} = \dfrac{14}{65}$

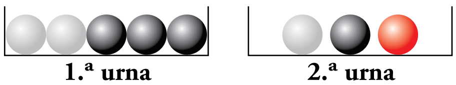
15. **Lanzamos una moneda: si sale cara, tomo una carta de una baraja; si sale cruz, no sigo jugando. ¿Qué probabilidad hay de obtener OROS o FIGURA?**

Primero calculamos la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja sea de Oros o Figura: $P[\text{OROS o FIGURA}] = P[\text{OROS}] + P[\text{FIGURA}] = \dfrac{10}{40} + \dfrac{9}{40} = \dfrac{19}{40}$.

Ahora tenemos también en cuenta el lanzamiento de la moneda:

$P[\text{CARA y OROS o FIGURA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{19}{40} = \dfrac{19}{80}$

16. **Cogemos al azar una bola de la 1.ª urna, la echamos en la 2.ª y sacamos una bola de esta 2.ª urna.**

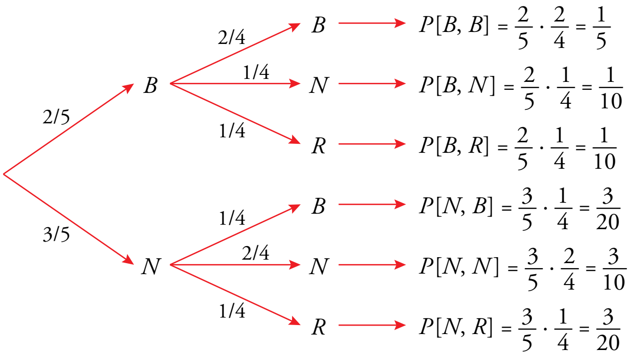


Calcula las siguientes probabilidades:

a) P**[1.ª y 2.ª]** **b)** P**[1.ª y 2.ª]**

c) P**[2.ª]** **d)** P**[2.ª]** **e)** P**[2.ª]**

$N \rightarrow$ bola negra $B \rightarrow$ bola blanca $R \rightarrow$ bola roja



a) $P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ N] = P[1.^a\ N] \cdot P[2.^a\ N \text{ habiendo sido } 1.^a\ N] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ N] = P[1.^a\ B] \cdot P[2.^a\ N \text{ habiendo sido } 1.^a\ B] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

c) $P[2.^a\ N] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ N] + P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ N] = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$

d) $P[2.^a\ B] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ B] + P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ B] = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

e) $P[2.^a\ R] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ R] + P[1.^a\ N \text{y } 2.^a\ R] = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$

Resuelve problemas

17. **Encima de la mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española (40 cartas):**

Sacando al azar otra carta del mazo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una escalera?

a) 5 + 1 + 4 + 2 = 12 son los puntos de las que ya hay. Para que la suma sea 15, la nueva carta debe ser un 3. Quedan los 4 “treses” en las 36 cartas restantes.

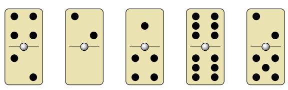
Por tanto, $P[\text{SUMA } 15] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$

Para que la suma sea 16, la nueva carta debe ser “cuatro”. Quedan 3 “cuatros” entre las 36 cartas sin repartir.

Por tanto, $P[\text{SUMA } 16] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$

b) $P[\text{ESCALERA}] = P[\text{sacar } 3] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

18. **¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:**



Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

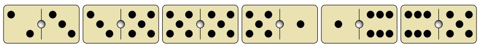
Si sacamos una ficha al azar, calcula la probabilidad de que:

b) La suma de los números sea 6.

c) La suma sea un número impar.

d) El producto de los dos números sea menor que 6.

En el desarrollo del juego, las fichas se van poniendo sobre la mesa y se van enlazando unas con otras, así:



La siguiente ficha debe tener un 2, y se situaría a la izquierda, o un 5, e iría a la derecha.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, sacando al azar una de las restantes fichas, pueda enlazar con una de las que están sobre la mesa?

a) En esta tabla vemos cuáles son las fichas del dominó: son 28.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

b) Hay 4 fichas cuya suma es 6 (marcadas en amarillo).

$P[\text{SUMA } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) Hay 12 fichas cuya suma es un número impar (marcadas en verde).

$P[\text{SUMA IMPAR}] = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

d) Hay 13 fichas en las que el producto de los dos números es menor que 6.

$P[\text{PRODUCTO MENOR QUE } 6] = \frac{13}{28}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	~~1-5~~	1-6
2			2-2	~~2-3~~	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	~~3-5~~	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						~~5-5~~	~~5-6~~
6							6-6

e) Como hay 6 fichas sobre la mesa, hay 22 casos posibles.

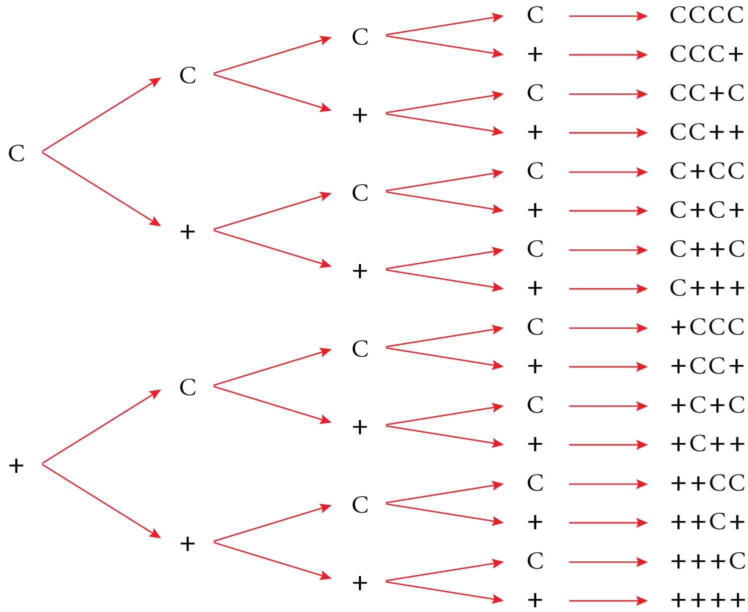
Hay 13 fichas que cumplen la condición, pero 5 de ellas ya están sobre la mesa.

$P[\text{TIENE 2 O TIENE 5}] = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

19. **Lanzamos cuatro monedas. Halla la probabilidad de obtener:**

a) Dos caras. **b) Ninguna cara.** **c) Alguna cara.**

Hacemos un diagrama en árbol para ver los casos posibles:



Hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ casos posibles.

a) $P[\text{dos caras}] = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

b) $P[\text{ninguna cara}] = \dfrac{1}{16}$

c) $P[\text{alguna cara}] = 1 - P[\text{ninguna cara}] = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

20. **¿Qué probabilidad hay de obtener dos caras lanzando dos monedas? ¿Y lanzando tres monedas? ¿Y si tiramos cuatro monedas?**

Podemos ayudarnos de diagramas de árbol para calcular estas probabilidades.

- Dos monedas: el espacio muestral tiene 4 casos y los favorables al suceso son CC.

  $P[\text{CC}] = \dfrac{1}{4}$

- Tres monedas: el espacio muestral tiene 8 casos y los favorables al suceso son CC+, C+C, +CC.

  $P[\text{dos caras}] = \dfrac{3}{8}$

- Cuatro monedas: el espacio muestral tiene 16 casos y los favorables al suceso son CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC.

  $P[\text{dos caras}] = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

Página 296

21. En una familia de 4 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que todos sean varones?

¿Cuál es la probabilidad de que en una familia de tres hijos, sean 2 chicos y 1 chica?

Hay 16 combinaciones distintas y solo una opción de que los cuatro salgan varones. Por tanto, $P[\text{TODOS VARONES}] = \frac{1}{16}$.

En una familia de tres hijos, pueden darse $2^3 = 8$ combinaciones distintas. En 3 de ellas hay 2 chicos y 1 chica. Por tanto, $P[\text{DOS CHICOS Y UNA CHICA}] = \frac{3}{8}$.

22. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5. **b) Sea 6.** **c) Sea 4.**

a) 1 y 5, 5 y 1

$P[\text{PROD.} = 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) 1 y 6, 2 y 3, 3 y 2, 6 y 1

$P[\text{PROD.} = 6] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) 1 y 4, 2 y 2, 4 y 1

$P[\text{PROD.} = 4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

23. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que la diferencia de las puntuaciones:

a) Sea 0. **b) Sea 1.** **c) Sea 3.** **d) Sea 5.**

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Hay 36 posibles casos.

a) $P[\text{SEA } 0] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{SEA } 1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

c) $P[\text{SEA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $P[\text{SEA } 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

24. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de:

a) Obtener al menos un 6.

b) Que las dos puntuaciones coincidan.

c) Que una puntuación sea mayor que la otra.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

a) Hay 36 opciones y 11 de ellas tienen un 6. Por tanto, $P[\text{AL MENOS UN } 6] = \frac{11}{36}$

b) Hay 36 opciones y en 6 de ellas las puntuaciones coinciden.

Así, $P[\text{COINCIDEN}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) Es lo mismo que decir que no coincidan las puntuaciones.

Por tanto, $P[\text{UNA MAYOR QUE OTRA}] = P[\text{NO COINCIDEN}] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

25. **En un centro escolar hay 1 000 alumnos repartidos como indica esta tabla:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	**187**	**113**
NO USAN GAFAS	**413**	**287**

Se elige al azar uno de ellos. Di cuál es la probabilidad de que:

a) Sea chico.

b) Sea chica.

c) Use gafas.

d) No use gafas.

e) Sea una chica con gafas.

f) Sabiendo que es una chica, use gafas.

Completamos la tabla con los totales; así se obtienen las probabilidades de forma más sencilla:

	CHICOS	CHICAS	TOTAL
USAN GAFAS	187	113	300
NO USAN GAFAS	413	287	700
TOTAL	600	400	1 000

a) $P[\text{CHICO}] = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$

b) $P[\text{CHICA}] = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$

c) $P[\text{USA GAFAS}] = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{NO USA GAFAS}] = \frac{700}{1000} = \frac{7}{10}$

e) $P[\text{CHICA CON GAFAS}] = \frac{113}{1000}$

f) $P[\text{USA GAFAS SABIENDO QUE ES CHICA}] = \frac{113}{400}$

26. **En una empresa hay 200 empleados, de los que 100 son hombres y 100 son mujeres. Los alérgicos son 40 hombres y 35 mujeres.**

a) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no sea alérgico.

b) Si sabemos que el elegido no es alérgico, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Haz una tabla como la del ejercicio anterior.

Construimos una tabla.

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
ALÉRGICOS	40	35	75
NO ALÉRGICOS	60	65	125
TOTAL	100	100	200

a) $P[\text{HOMBRE NO ALÉRGICO}] = \dfrac{60}{200} = \dfrac{3}{10}$

b) $P[\text{MUJER SABIENDO QUE NO ES ALÉRGICA}] = \dfrac{65}{125} = \dfrac{13}{25}$

27. **Hoy hay tres partidos: de baloncesto, de fútbol y de tenis. De los 40 amigos que hay en casa, 21 prefieren fútbol y 5, tenis. Hay 10 chicos que quieren baloncesto, 9 chicas que quieren fútbol y 3 chicas que prefieren ver el tenis. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) Sea chico.

b) No quiera ver el tenis.

c) Sea un chico que quiere ver el tenis.

d) Sea una chica que quiera ver el baloncesto.

e) Sabiendo que es una chica, que quiera ver fútbol.

f) Sabiendo que prefiere ver tenis, que sea un chico.

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	CHICOS	CHICAS	TOTALES
FÚTBOL	12	9	21
TENIS	2	3	5
BALONCESTO	10	4	14
TOTALES	24	16	40

a) $P[\text{CHICO}] = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$

b) $P[\text{NO QUIERA VER TENIS}] = \dfrac{21+14}{40} = \dfrac{7}{8}$

c) $P[\text{CHICO QUIERE VER TENIS}] = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20}$

d) $P[\text{CHICA QUIERE VER BALONCESTO}] = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$

e) $P[\text{VER FÚTBOL SABIENDO QUE ES UNA CHICA}] = \dfrac{9}{16}$

f) $P[\text{CHICO SABIENDO QUE QUIERE VER TENIS}] = \dfrac{2}{5}$

28. **Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.**

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar*, *inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Al final, hemos obtenido estos resultados:

f(●) = 461 f(●) = 343 f(●) = 196

Podemos averiguar, con cierta seguridad, cuántas bolas hay de cada color. Hagámoslo con las negras:

$$f_r(●) = \frac{461}{1\,000} = 0{,}461$$

$$P[●] = \frac{n}{20} \quad (n \text{ es el número de bolas negras})$$

Como $f_r(●) \approx P[●]$, **hacemos:**

$$0{,}461 \approx \frac{n}{20} \;\rightarrow\; n \approx 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$$

Estimamos que el número de bolas negras es 9.

¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

- Bolas rojas: $0{,}343 \approx \dfrac{n}{20} \;\rightarrow\; n \approx 20 \cdot 0{,}343 = 6{,}86 \;\rightarrow\; n = 7$
- Bolas verdes: $0{,}196 \approx \dfrac{n}{20} \;\rightarrow\; n \approx 20 \cdot 0{,}196 = 3{,}92 \;\rightarrow\; n = 4$

Estimamos que hay 9 bolas negras, 7 rojas y 4 verdes.

29. **En un cajón hay calcetines. No sabemos cuántos, ni de qué colores. Sacamos un calcetín, anotamos el color y lo devolvemos al cajón. Lo hacemos cien veces y hemos obtenido 42 veces un calcetín negro; 8 veces uno rojo, y 50 veces uno blanco.**

a) Haz una tabla de frecuencias relativas.

b) ¿Qué porcentaje de calcetines de cada color hay en el cajón?

c) Si sabemos que hay 20 calcetines, ¿cuántos estimas que hay de cada color?

a)

	f	f_r
NEGRO	42	42/100 = 0,42
ROJO	8	8/100 = 0,08
BLANCO	50	50/100 = 0,5

b) Podemos estimar que, aproximadamente, el 42 % de los calcetines son negros, el 8 % rojos, y el 50 %, blancos.

c) Habrá 8 calcetines negros, 2 rojos y 10 blancos.

30. **Coge 10 canicas, caramelos, papeles… todos de igual tamaño y de tres colores, sabores… distintos. Extrae al azar uno cada vez, míralo, anota el color o el sabor o… y devuélvelo. Repite esto 100 veces. Realiza, con los resultados, una estimación de cuántos hay de cada color. Comprueba luego cómo de acertado estabas en tu predicción.**

Respuesta abierta.

Página 297

31. **Hemos de jugar a cara o cruz con una cierta ficha. Antes de empezar, experimento con ella y obtengo 37 caras y 3 cruces.**

¿Qué te parece más correcto, apostar por cruz porque "ya es hora de que salga" o por cara porque "parece que sale más"?

Si de 40 lanzamientos se han obtenido 37 CARAS y 3 CRUCES, las probabilidades de C o + serán equivalente a sus frecuencias relativas (el número de lanzamientos es relativamente grande). Por tanto:

$f_r(\text{C}) \approx P[\text{C}] = \dfrac{37}{40}$ $f_r(+) \approx P[+] = \dfrac{3}{40}$

Sería más correcto apostar por CARA.

32. **En cada mano del juego *Piedra, papel o tijera* puedes ganar, empatar o perder. Si me juego un refresco, ¿qué probabilidad tengo de ganarlo a la primera? ¿Qué probabilidad tengo de llegar a la segunda y ganarlo? ¿Y a la tercera y ganarlo?**

Nos podemos ayudar de un diagrama de árbol para averiguar que:

$P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}}\text{ PARTIDA}] = \dfrac{1}{3}$

Si quiero ganar dos partidas, $P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}}\text{ Y 2.}^{\text{a}}\text{ PARTIDAS}] = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

Si quiero llegar a la tercera y ganar, $P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}}\text{, 2.}^{\text{a}}\text{ Y 3.}^{\text{a}}\text{ PARTIDAS}] = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

33. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol para comprobar que la probabilidad que nos piden es la siguiente:

$P[< 5 \text{ y } < 5 \text{ y } < 5] = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{8}{27}$

34. **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?**

Llamaremos $p\uparrow$ al suceso "caer con la punta hacia arriba" y $p\downarrow$ "caer con la punta hacia abajo".

Si $P[p\uparrow] = 0{,}38 \Rightarrow P[p\downarrow] = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$. Por tanto:

$P[\text{LAS DOS DE DISTINTA FORMA}] = P[p\uparrow \text{ y } p\downarrow] + P[p\downarrow \text{ y } p\uparrow] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 \approx 0{,}47$

35. **En un laboratorio, para que un medicamento salga al mercado tiene que pasar tres controles. La probabilidad de superar el primero es 0,89; la de superar el segundo es 0,93 y la de superar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto no sea apto para salir al mercado?**

Llamaremos SC_n al suceso "superar el control n".

$P[SC_1] = 0{,}89 \Rightarrow P[\text{no } SC_1] = 1 - 0{,}89 = 0{,}11$

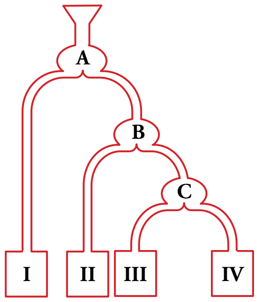
$P[SC_2] = 0{,}93 \Rightarrow P[\text{no } SC_2] = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$

$P[SC_3] = 0{,}85 \Rightarrow P[\text{no } SC_3] = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

$P[\text{NO APTO}] = P[\text{no } SC_1] + P[\text{no } SC_1 \text{ y no } SC_2] + P[SC_1 \text{ y } SC_2 \text{ y no } SC_3] =$

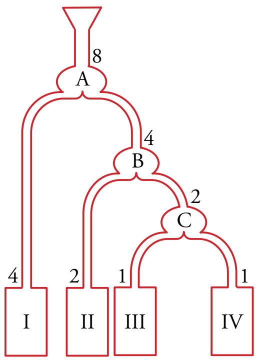
$= 0{,}11 + 0{,}89 \cdot 0{,}07 + 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}3$

36. **Dejamos caer una bola en el embudo de este aparato.**



Calcula la probabilidad de que caiga en cada uno de los depósitos I, II, III y IV.

Si tirásemos 8 bolas y se repartieran equitativamente:



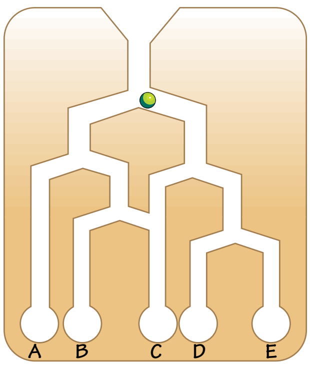
$P[\text{I}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P[\text{II}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

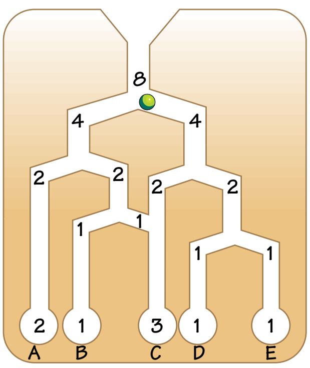
$P[\text{III}] = \frac{1}{8}$

$P[\text{IV}] = \frac{1}{8}$

37. **¿Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?**



Si tirásemos 8 bolas:



$P[A] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P[B] = \frac{1}{8}$

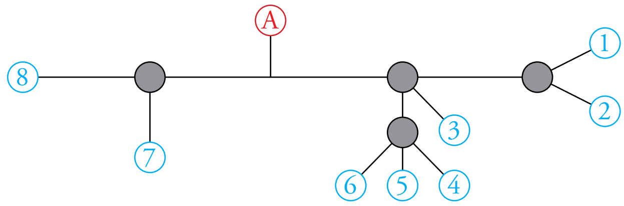
$P[C] = \frac{3}{8}$

$P[D] = \frac{1}{8}$

$P[E] = \frac{1}{8}$

Problemas "+"

38. **Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada bifurcación es igual de probable que el tren continúe por un camino u otro y no se puede ir hacia atrás.**



Si un viajero sube a un tren en A sin saber adónde se dirige, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las otras estaciones.

Si el tren se encuentra en una bifurcación con 2 opciones, tiene 1/2 de probabilidad de ir por cada una de ellas. Si se encuentra en una bifurcación con 3 posibles opciones, tendrá 1/3 de probabilidad de ir por cada uno de los caminos, y así en todos los casos.

Para llegar de A a la estación 5 pasa por una bifurcación con 2 posibles caminos, otra con 3 posibles caminos y una última con otros tres posibles caminos.

Por tanto, $P[\text{LLEGAR A } 5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

$P[\text{LLEGAR A } 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[\text{LLEGAR A } 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[\text{LLEGAR A } 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[\text{LLEGAR A } 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P[\text{LLEGAR A } 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P[\text{LLEGAR A } 7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\text{LLEGAR A } 8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

39. **Se han hecho análisis de sangre 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:**

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH–	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?

b) Si elegimos al azar una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

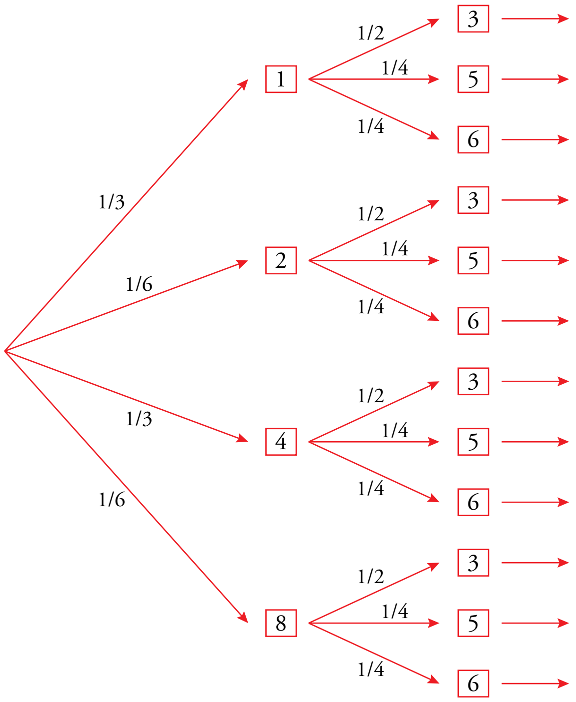
c) Sabiendo que una persona es del grupo A o B, ¿cuál es la probabilidad de que sea RH+?

a) $P[A] = \frac{92}{200} = 0{,}46$ $\quad P[O] = \frac{86}{200} = 0{,}43$ $\quad P[Rh+] = \frac{162}{200} = 0{,}81$

b) Si elegimos alguien con grupo B: $P[Rh+] = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

c) $P[\text{Rh+ sabiendo que es del grupo A o B}] = \frac{74 + 12}{92 + 15} = \frac{86}{107}$

40. **Se hace girar cada una de estas dos ruletas y gana el que consiga la puntuación más alta. Calcula la probabilidad de que gane A y la de que gane B.**



$P[1, 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P[1, 5] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[1, 6] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[2, 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[2, 5] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[2, 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[4, 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P[4, 5] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[4, 6] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[8, 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[8, 5] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[8, 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$$P[\text{GANA A}] = P[4, 3] + P[8, 3] + P[8, 5] + P[8, 6] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3}$$

En el resto de ocasiones gana B. Por tanto: $P[\text{GANA B}] = 1 - P[\text{GANA A}] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Página 298

Utiliza tu ingenio

Rifa

Todas las papeletas de una rifa se han vendido en tres pueblos: Montejo, Montoro y Montilla.

En Montoro se han vendido la mitad que en Montejo, y en este, el triple que en Montilla.

- **¿Cuál es la probabilidad de que toque el premio en cada uno?**

Supongamos que la probabilidad de que toque en Montejo es p. Las probabilidades para cada población serían:

Montoro (mitad que en Montejo) $\longrightarrow \dfrac{p}{2}$

Montejo $\longrightarrow p$

Montilla (un tercio de Montejo) $\longrightarrow \dfrac{p}{3}$

La suma de probabilidades debe ser 1:

$$\frac{p}{2} + p + \frac{p}{3} = 1 \rightarrow \frac{11}{6}p = 1 \rightarrow p = \frac{6}{11}$$

Las probabilidades para cada población son, por tanto:

Montoro $\rightarrow \dfrac{6}{22} = \dfrac{3}{11}$

Montejo $\rightarrow \dfrac{6}{11}$

Montilla $\rightarrow \dfrac{6}{33} = \dfrac{2}{11}$

Página 299

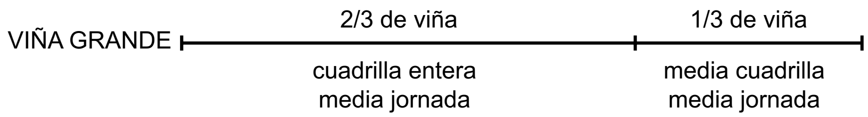
Entrénate resolviendo problemas

- **Una cuadrilla de vendimiadores trabaja media jornada en una viña. Por la tarde, la mitad pasa a otra viña, que es la mitad de grande que la anterior, y todos trabajan hasta el final de la jornada.**

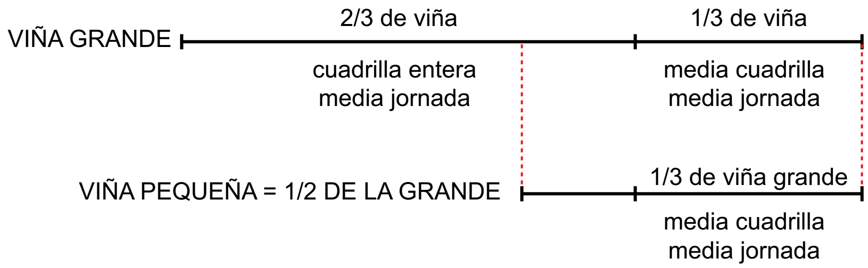
  De esta forma, han terminado de vendimiar la viña grande y queda un trozo de la pequeña, que acaba un solo vendimiador en una jornada completa.

  ¿Cuántas personas componen la cuadrilla?

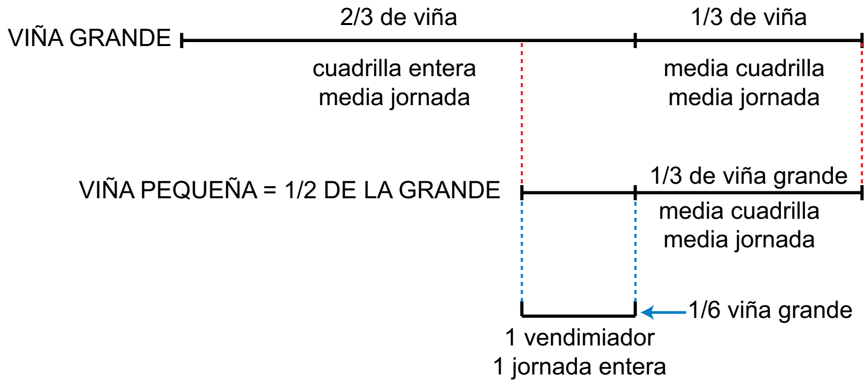
  La viña grande se vendimia por la cuadrilla entera durante media jornada y por media cuadrilla otra media jornada. Es decir, por la mañana vendimian dos tercios de la viña grande y, por la tarde, el tercio que queda.



  La media cuadrilla que pasa a la pequeña, vendimia en media jornada lo que la otra mitad de la cuadrilla; es decir, lo equivalente a 1/3 de la viña grande. Y la viña pequeña es la mitad de la grande.



  Lo que queda, que es equivalente a 1/6 de la grande, lo acaba un jornalero en 8 horas al día siguiente.



  Se concluye que cada sexta parte de la grande necesita un vendimiador un día entero. Es decir, 6 vendimiadores para la viña grande.

  Lo que vendimian por la tarde de la pequeña es lo equivalente a 1/3 de la grande. Es decir, otros dos vendimiadores.

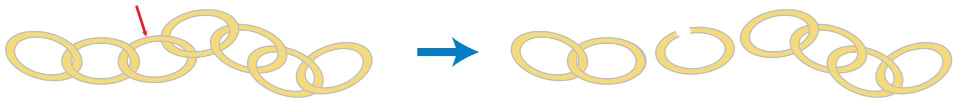
  Por tanto, la cuadrilla está compuesta por 8 personas.

- **Una chica se queda sin dinero para pagar la pensión en la que se hospeda. No recibirá dinero hasta dentro de siete días. Tiene una pulsera de oro con siete eslabones que el hostelero admite como pago.**

Pero no se fían cada uno del otro: el hospedero no consiente en que tenga ninguna deuda y ella no quiere pagar nada por adelantado. Convienen, como pago, un eslabón al día.

¿Cuántos eslabones debe partir para poder pagar uno al día? (Se supone que quiere estropear lo menos posible su pulsera).

Con partir un eslabón es suficiente: el tercero.



La entrega de eslabones sería como se indica en la siguiente tabla, en la que hemos llamado:

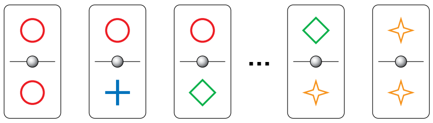
Eslabón suelto → 1. Dos eslabones unidos → 2. Cuatro eslabones unidos → 4.

	LA CHICA ENTREGA	EL HOSTELERO DA A LA CHICA	A LA CHICA LE QUEDA	EL HOSTELERO TIENE EN TOTAL
PRIMER DÍA	1		2 + 4	1
SEGUNDO DÍA	2	1	1 + 4	2
TERCER DÍA	1		4	1 + 2
CUARTO DÍA	4	1 + 2	1 + 2	4
QUINTO DÍA	1		2	1 + 4
SEXTO DÍA	2	1	1	2 + 4
SÉPTIMO DÍA	1		0	1 + 2 + 4

Autoevaluación

1. Describe un dominó con los símbolos ○ + ◇ ✧.

Las piezas serían como estas:



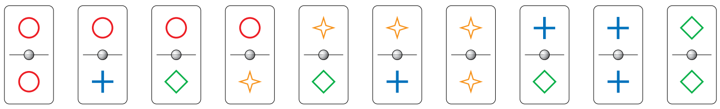
Dibuja en tu cuaderno todas. Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

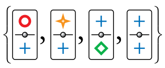
b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".



a) Sí, es aleatoria.

b) El espacio muestral consta de 10 elementos.

c) LA FICHA EXTRAÍDA TIENE EL SÍMBOLO + = 

2. Hemos lanzado 1000 veces un dado de cuatro caras, numeradas del 1 al 4, obteniendo los siguientes resultados:

CARA OBTENIDA	1	2	3	4
N.° DE VECES	180	370	262	188

a) ¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los posibles resultados?

b) ¿Se puede suponer que el dado es correcto?

a) $P[1] \approx \dfrac{180}{1000} = 0{,}18$ $\qquad P[2] \approx \dfrac{370}{1000} = 0{,}37$

$P[3] \approx \dfrac{262}{1000} = 0{,}26$ $\qquad P[4] \approx \dfrac{188}{1000} = 0{,}19$

b) El dado no es correcto, porque la probabilidad de cada cara no es la misma.

3. Marta tira un dado y su hermana Alba lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Alba sea mayor que la de Marta?

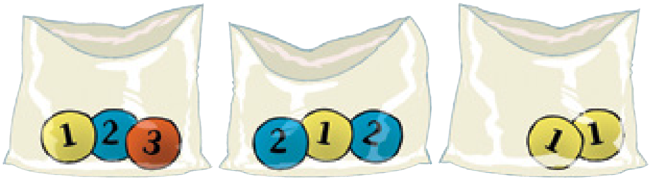
Construimos una tabla:

		ALBA					
		1	2	3	4	5	6
MARTA	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Hay 36 posibles casos, 15 de los cuales (los sombreados) son favorables para Alba. Por tanto,

P[ALBA TENGA MAYOR PUNTUACIÓN QUE MARTA] $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

4. De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?



Que la suma de las tres cifras sea 5 es lo mismo que que la suma de las dos primeras bolas sea 4, ya que la tercera bolsa solo tiene dos bolas con la cifra 1. Resolvemos entonces el problema de sacar al azar una bola de la primera bolsa, otra bola de la segunda bolsa y sumar sus cifras.

Si sacamos un 1 de la primera, no sumaremos nunca 4. Por tanto, descartamos esa posibilidad.

Si sacamos un 2 de la primera bolsa, habrá que sacar un 2 de la segunda. Las probabilidades son:

P[SACAR 2 EN LA 1.ª BOLSA Y SACAR 2 EN LA 2.ª BOLSA] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Si sacamos un 3 de la primera bolsa, habrá que sacar un 1 de la segunda. Las probabilidades son:

P[SACAR 3 EN LA 1.ª BOLSA Y SACAR 1 EN LA 2.ª BOLSA] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Por lo tanto: P[LA SUMA DE LAS TRES CIFRAS SEA 5] $= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

5. Lanzamos dos dados sucesivamente. Halla la probabilidad de obtener "impar" en el primero y "mayor que 4" en el segundo.

Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol para comprobar que la probabilidad pedida es la siguiente:

P[IMPAR Y > 4] $= P$[IMPAR] $\cdot P$[> 4] $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

6. Extraemos una bola de la urna A y la echamos en la B. Después, sacamos una bola de B.

Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

a) P[ROJA EN A Y ROJA EN B] $= P$[ROJA EN A] $\cdot P$[ROJA EN B HABIENDO OBTENIDO ROJA EN A] $=$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$$

b) P[NEGRA EN A Y NEGRA EN B] $= P$[NEGRA EN A] $\cdot P$[NEGRA EN B HABIENDO OBTENIDO NEGRA EN A]$=$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$