

Adaptación curricular

- Unidad 1
- Unidad 2
- Unidad 3
- Unidad 4
- Unidad 5
- Unidad 6
- Unidad 7
- Unidad 8
- Unidad 9
- Unidad 10
- Unidad 11
- Unidad 12
- Unidad 13
- Unidad 14
- Unidad 15

APRENDER ES CRECER EN CONEXIÓN es un proyecto educativo de Anaya Educación para el tercer curso de la ESO.

En la realización de este libro han intervenido:

- **Coordinación editorial:** Mercedes García-Prieto
- **Edición:** Carlos Vallejo, Vicente Vallejo y Ana González
- **Diseño:** Dirección de arte: Javier Serrano. Cubierta: Patricia Gómez Serrano. Interiores: Marta Gómez Peso y Paco Martín. Desarrollo gráfico de cubierta: Juan Carlos Quignon
- **Ilustraciones:** David Guirao
- **Maquetación:** CloudBridge.es
- **Gráficos:** José Luis Román
- **Corrección:** Departamento de correctores de Anaya
- **Edición gráfica:** Olga Sayans
- **Fotografías:**
Age Fotostock, Album Archivo Fotográfico, Archivo Anaya (Candel, C., Canto, M., Cosano, P., Cruz, M., García Pelayo, Á., Leiva, Á. De, Lezama, D., Martín, J., Martín, J. A., Moreno, C., Moya, B., Osuna, J., Ortega, A., Peñuela-Py, E., Redondo, M., Ruiz, J.B., Ruiz Pastor, L., Steel, M., Valls, R., Zuazo, A.H.), ESA y NASA, Getty Images, Thinkstock/Getty Images, 123RF.

Las normas ortográficas seguidas en este libro son las establecidas por la Real Academia Española en la *Ortografía de la lengua española*, publicada en el año 2010.

Nuestras publicaciones mantienen el rigor en el uso y en la selección de los contenidos, en las imágenes y en el lenguaje, para cumplir con la **no discriminación** por razón de género, cultura u opinión.

IMPORTANTE. Las actividades propuestas en este libro deben ser realizadas en cuadernos u hojas sueltas; **nunca en el propio libro.**

ÍNDICE



1 Los números naturales

Pág. 6



2 Los números enteros

Pág. 25



3 Los números decimales y las fracciones

Pág. 40



4 Operaciones con fracciones

Pág. 57



5 Proporcionalidad y porcentajes

Pág. 70

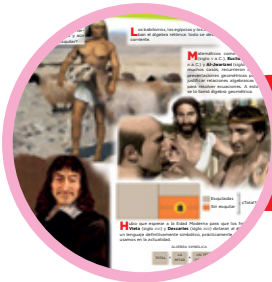
1. El conjunto de los números naturales.....	7
2. Operaciones con números naturales	9
3. La relación de divisibilidad	11
4. Números primos y compuestos	14
5. Mínimo común múltiplo de dos números.....	16
6. Máximo común divisor de dos números.....	19
Ejercicios y problemas	22
Autoevaluación.....	24

1. Números positivos y negativos	26
2. El conjunto Z de los números enteros	27
3. Operaciones con números enteros.....	28
4. Potencias de números enteros.....	32
5. Operaciones con potencias	33
6. Raíces de números enteros	36
Ejercicios y problemas	37
Autoevaluación.....	39

1. Los números decimales.....	41
2. Representación y ordenación de números decimales	42
3. Operaciones con números decimales.....	45
4. Raíz cuadrada de un número decimal.....	49
5. Las fracciones	50
6. Fracciones y números decimales	52
Ejercicios y problemas	53
Autoevaluación.....	56

1. Suma y resta de fracciones.....	58
2. Multiplicación y división de fracciones.....	60
3. Problemas con fracciones	62
4. Potencias y fracciones.....	65
Ejercicios y problemas	68
Autoevaluación.....	69

1. Razones y proporciones	71
2. Magnitudes directamente proporcionales.....	72
3. Magnitudes inversamente proporcionales.....	75
4. Problemas de repartos proporcionales.....	77
5. Porcentajes	78
6. Problemas con porcentajes	80
7. Interés bancario.....	84
Ejercicios y problemas	85
Autoevaluación.....	87



6 Álgebra

Pág. 88



7 Ecuaciones

Pág. 100



8 Sistemas de ecuaciones

Pág. 114



9 Teorema de Pitágoras

Pág. 123



10 Semejanza

Pág. 132

1. El álgebra: ¿para qué sirve?.....	89
2. Expresiones algebraicas	91
3. Polinomios.....	94
4. Extracción del factor común.....	96
Ejercicios y problemas	97
Autoevaluación.....	98

1. Ecuaciones: significado y utilidad.....	100
2. Ecuaciones: elementos y nomenclatura	102
3. Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones.....	103
4. Resolución de ecuaciones sencillas.....	105
5. Ecuaciones con denominadores.....	107
6. Resolución de problemas con ecuaciones.....	108
Ejercicios y problemas	111
Autoevaluación.....	113

1. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.....	115
2. Sistemas de ecuaciones lineales.....	117
3. Método algebraico para la resolución de sistemas lineales.....	118
4. Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones.....	119
Ejercicios y problemas	121
Autoevaluación.....	122

1. Teorema de Pitágoras.....	124
2. Cálculo de un lado conociendo los otros dos	126
3. Aplicaciones del teorema de Pitágoras	128
Ejercicios y problemas	130
Autoevaluación.....	131

1. Figuras semejantes	133
2. Planos, mapas y maquetas	135
3. Semejanza entre triángulos rectángulos. Aplicaciones.....	137
Ejercicios y problemas	139
Autoevaluación.....	140



11 Cuerpos geométricos

Pág. 141



12 Medida del volumen

Pág. 152



13 Funciones

Pág. 160



14 Estadística

Pág. 172



15 Azar y probabilidad

Pág. 181

1. Prismas	142
2. Pirámides	144
3. Poliedros regulares	146
4. Cilindros	147
5. Conos	148
6. Esferas.....	149
Ejercicios y problemas	150
Autoevaluación.....	151

1. Unidades de volumen	153
2. Volumen del prisma y del cilindro.....	155
3. Volumen de la pirámide y del cono.....	156
4. Volumen de la esfera.....	157
Ejercicios y problemas	158
Autoevaluación.....	159

1. Concepto de la función	161
2. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos	162
3. Funciones de proporcionalidad: $y = mx$	163
4. Pendiente de una recta	165
5. Funciones lineales: $y = mx + n$	167
6. Funciones constantes: $y = k$	169
Ejercicios y problemas	170
Autoevaluación.....	171

1. Confección de una tabla y su gráfica	173
2. Parámetros de centralización	175
3. Parámetros de dispersión.....	176
4. Parámetros de posición	177
Ejercicios y problemas	179
Autoevaluación.....	180

1. Sucesos aleatorios.....	182
2. Probabilidad de un suceso.....	184
3. Asignación de probabilidades en experiencias regulares.....	186
Ejercicios y problemas	188
Autoevaluación.....	190

1

Los números naturales

Los conocimientos matemáticos de los antiguos egipcios y babilonios iban dirigidos a facilitar la actividad cotidiana: medida, comercio, construcción... (matemática práctica).



Los griegos aprendieron de los egipcios y babilonios, pero fueron más allá: cultivaron las matemáticas por el puro placer de saber (matemática teórica).

Pitágoras (siglo VI a. C.) y sus discípulos rindieron un culto muy especial a los números. Según ellos, los números lo regían todo: la música, el movimiento de los planetas, la geometría... Hablaban de números rectangulares, triangulares, cuadrados, pentagonales...



Consideraban que el número 10 era *ideal* (incluso *sagrado*), porque coincidía con la suma de $1 + 2 + 3 + 4$, cantidades que asociaban respectivamente al punto (1), la recta (2), el plano (3) y el espacio (4).

Nombre y apellidos: Fecha:

1 El conjunto de los números naturales

Numeración maya

Investiga las reglas y características del sistema de numeración maya.



Numeración MAYA

$$20 \cdot (2 \times 5 + 1) + 1 \cdot (3 \times 5 + 3) = 220 + 18 = 238$$



Numeración EGIPCIA



Numeración ROMANA



Numeración DECIMAL

Ten en cuenta

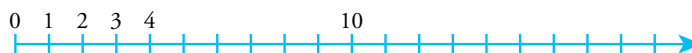
La adopción de 10 como base del sistema de numeración decimal se fundamenta en la forma primitiva de contar con los dedos de las manos.

Los números que usamos para contar objetos, uno a uno, se llaman **números naturales**.

El conjunto de los números naturales se designa por la letra \mathbb{N} , está ordenado y tiene principio, pero no tiene fin.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Los números naturales se representan, ordenados, en la recta numérica.



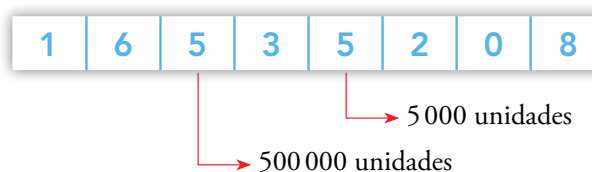
El Sistema de Numeración Decimal

Desde los albores de la civilización, las distintas culturas han ideado formas diversas de expresar los números naturales: son los sistemas de numeración.

Nosotros utilizamos habitualmente el Sistema de Numeración Decimal (S. N. D.) que fue inventado en la India y extendido hacia el Mediterráneo por los árabes, durante la expansión del mundo islámico, a partir del VIII.

El S. N. D. es **posicional**: el valor de una cifra depende de la posición que ocupa.

DMM	UMM	CM	DM	UM	C	D	U
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1



Y es **decimal**, porque diez unidades de cualquier orden hacen una unidad del orden inmediato superior.

$$1 \text{ CM} = 10 \text{ DM} = 100 \text{ UM} = 1000 \text{ C} = 10000 \text{ D} = 100000 \text{ U}$$

Ejemplo

La descomposición polinómica del número 16535208 es la siguiente:

$$16535208 = 1 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8$$

Piensa y practica

- ¿Verdadero o falso?
 - Los números naturales solo se expresan con el S. N. D.
 - Si eliges un número natural, por grande que sea, siempre hay otro número natural mayor.
 - En el S. N. D., veinte centenas de millar son dos unidades de millón.
 - El sistema de numeración maya es, en parte, posicional.

2. Copia y completa la tabla.

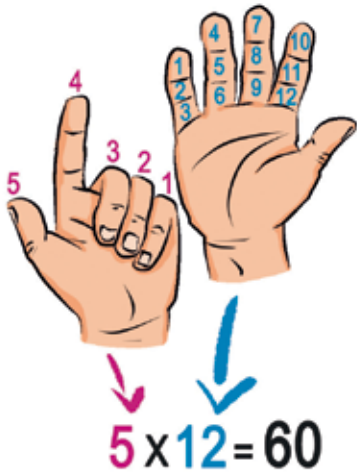
44		111		1502
	LXV		CMX	

3. ¿Qué número es?
Escríbelo en numeración romana y en numeración maya.



4. ¿Qué número tiene esta descomposición polinómica?
 $2 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3$

El sistema sexagesimal



De la misma forma que nosotros contamos de 10 en 10 (sistema decimal), otras culturas a lo largo de la historia han contado de 60 en 60 (sistema sexagesimal).

La adopción del 60 se basa, probablemente, en la forma de contar que utiliza las 12 falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de una mano recorridos con el pulgar como guía, mientras la cuenta del número de recorridos se llevaba con los dedos de la otra mano.

■ MEDIDA DEL TIEMPO Y DE LA AMPLITUD ANGULAR

En la actualidad, el sistema sexagesimal se utiliza en la medida del *tiempo* y en la medida de la *amplitud angular*. En estas magnitudes, cada unidad se divide en 60 unidades del orden inferior.



$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ h} = 60 \text{ min} \\ 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \end{array} \right\} 1 \text{ h} = 60 \cdot 60 = 3\,600 \text{ s} \qquad
 \left. \begin{array}{l} 1^\circ = 60' \\ 1' = 60'' \end{array} \right\} 1^\circ = 60 \cdot 60 = 3\,600''$$

Observa que las notaciones de los minutos y los segundos difieren de una magnitud a la otra.

■ EXPRESIONES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS

Recuerda que la medida de las cantidades relativas a una magnitud se pueden expresar utilizando simultáneamente varias unidades (forma compleja) o una unidad única (forma incompleja).

FORMA COMPLEJA	FORMA INCOMPLEJA
1 h 15 min	→ 75 min → 4500 s
13° 12'	→ 792' → 47520''

Piensa y practica

5. Pasa a forma incompleja.

- | | |
|------------------|----------------|
| a) 3 h 20 min | b) 5 h 6 s |
| c) 9 h 1 min 1 s | d) 2° 52' |
| e) 4' 12'' | f) 1° 11' 27'' |

6. Traduce a horas y minutos:

- | | | |
|-----------|------------|------------|
| a) 86 min | b) 132 min | c) 250 min |
|-----------|------------|------------|

7. Traduce a minutos y segundos:

- | | | |
|---------|----------|----------|
| a) 74'' | b) 135'' | c) 364'' |
|---------|----------|----------|

8. Expresa en forma compleja.

- | | | |
|------------|----------|----------|
| a) 222 min | b) 422 s | c) 666 s |
|------------|----------|----------|

Operaciones combinadas

Recuerda la prioridad entre los paréntesis y las operaciones en las expresiones aritméticas.

- Primero, los paréntesis $\longrightarrow 3 \cdot (7 - 2) - 2^3 - (10 - 4) : \sqrt{9} =$
- A continuación, las potencias y raíces $\longrightarrow = 3 \cdot 5 - 2^3 - 6 : \sqrt{9} =$
- Después, las multiplicaciones y divisiones $\longrightarrow = 3 \cdot 5 - 8 - 6 : 3 =$
- Por último, las sumas y restas $\longrightarrow = 15 - 8 - 2 = 15 - 10 = 5$

Ejercicios resueltos

1. $8 + (9 \cdot 2 - 3) : \sqrt{25} - 4^2 : 2$

$$8 + (18 - 3) : \sqrt{25} - 4^2 : 2 = 8 + 15 : \sqrt{25} - 4^2 : 2 = 8 + 15 : 5 - 16 : 2 =$$

$$= 8 + 3 - 8 = 3$$

2. $17 - 15 : [(10 - 6) \cdot 6 - 21] - 4 \cdot 2$

$$17 - 15 : [4 \cdot 6 - 21] - 4 \cdot 2 = 17 - 15 : [24 - 21] - 4 \cdot 2 =$$

$$= 17 - 15 : 3 - 4 \cdot 2 = 17 - 5 - 8 = 4$$

3. $[9 - (6 \cdot 2) + 15] : \sqrt{9} + 3^3 : 3$

$$[9 - 12 + 15] : \sqrt{9} + 3^3 : 3 = 12 : \sqrt{9} + 3^3 : 3 =$$

$$= 12 : 3 + 27 : 3 = 4 + 9 = 13$$

Piensa y practica

1. Resuelve en el orden en que aparecen.

- $2 \cdot 7 - 3 \cdot 3$
- $2 \cdot (15 - 8) - 3 \cdot (21 - 18)$
- $2 \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) - 3 \cdot (7 \cdot 3 - 2 \cdot 9)$
- $2 \cdot (15 - 2 \cdot \sqrt{16}) - 3 \cdot (7 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot 3^2)$

2. Resuelve y observa la influencia de los paréntesis.

- $6 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + 8$
- $6 \cdot 7 - 3 \cdot (2 + 8)$
- $6 \cdot (7 - 3) \cdot 2 + 8$
- $6 \cdot (7 - 3 \cdot 2) + 8$
- $6 \cdot (7 - 3) \cdot (2 + 8)$
- $6 \cdot (7 - 3 \cdot 2 + 8)$

3. Calcula.

- $(52 - 34) : 9 + 42 : (39 - 32)$
- $10 \cdot (2^3 - 2) - 2 \cdot 5^2 - 6^2 : 12$
- $(5 + \sqrt{5 \cdot 8 + 3^2}) : 2$
- $(3 - \sqrt{17 - 13})^2 + \sqrt{7 + (11 - 8)^2}$

4. En una prueba de 20 preguntas se califica con tres puntos cada respuesta acertada, se penaliza con dos puntos cada pregunta sin contestar y se resta un punto por cada respuesta errónea.

Observa lo que han hecho Jorge y Marta:

– Jorge ha acertado 13 preguntas y ha fallado 4, dejando el resto sin contestar.

– Marta ha contestado 18 preguntas, de las cuales ha fallado 2.

a) ¿Cuál de estas expresiones nos da la puntuación de Jorge?

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - (20 - 13 + 4) \cdot 2$$

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - [20 - (13 + 4)] \cdot 2$$

b) Escribe una expresión que nos dé la puntuación de Marta.

c) ¿Cuántos puntos ha obtenido cada uno?

La prioridad de operaciones en la calculadora

Las calculadoras son buenas herramientas que ayudan en los cálculos rutinarios o tediosos. Pero para que sean útiles, has de conocerlas bien.

Entre las calculadoras que encontrarás en tu entorno hay dos tipos con funcionamiento diferente. Vamos a verlo calculando en una de cada tipo el valor de estas expresiones:

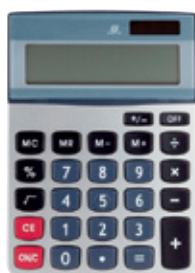
$$15 - 4 \cdot 2$$

$$(15 - 4) \cdot 2$$

■ CALCULADORAS BÁSICAS O DE CUATRO OPERACIONES

Son las que suele usar la mayoría de la gente en el día a día.

No disponen del uso de paréntesis. Las operaciones se realizan en el orden en que entran.



OPERACIÓN REALIZADA

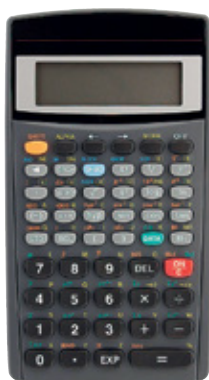
$$15 \ominus 4 \otimes 2 \ominus \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$$

$$15 \text{ (M.) } 4 \otimes 2 \text{ (M.) (MR)} \rightarrow \boxed{7.} \rightarrow 15 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$$

■ CALCULADORAS CIENTÍFICAS

Son de diversa complejidad, según el modelo. Resultarán imprescindibles en cursos superiores y en cualquier trabajo científico.

Las operaciones se realizan guardando las prioridades que dicta la aritmética.



OPERACIÓN REALIZADA

$$15 \ominus 4 \otimes 2 \ominus \rightarrow \boxed{7.} \rightarrow 15 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$$

$$15 \ominus 4 \ominus \otimes 2 \ominus \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$$

O bien, utilizando las teclas de paréntesis:

$$\text{(} 15 \ominus 4 \text{) } \otimes 2 \ominus \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$$

Observa la primera operación realizada con cada una de las calculadoras: el resultado es diferente para la misma secuencia de teclas.

Piensa y practica

5. Escribe y calcula la expresión aritmética que corresponde a cada una de estas entradas, según se realicen en una calculadora básica o en una científica.

a) $11 \oplus 2 \otimes 3 \ominus$

b) $48 \oplus 8 \oplus 7 \otimes 4 \ominus$

c) $21 \otimes 7 \oplus 9 \oplus 3 \ominus$

d) $78 \oplus 36 \oplus 6 \ominus 19 \ominus$

6. Practica con tu calculadora científica y comprueba que obtienes las soluciones indicadas.

a) $3\,232 - 36 \cdot 87 = 100$

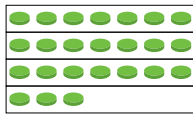
b) $27 \cdot 14 - 1\,368 : 38 = 342$

c) $(1\,408 - 736) : 56 = 12$

d) $754 - (186 + 397) = 171$

e) $6\,525 : 25 + (294 + 7 \cdot 12) = 639$

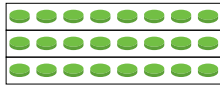
Divisibilidad



$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 7} \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

(NO EXACTA)

24 **no es divisible** entre 7



$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 8} \\ 0 \\ \hline \end{array}$$

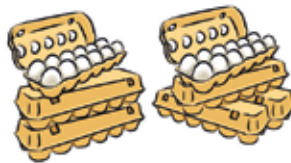
(EXACTA)

24 **es divisible** entre 8

Múltiplos de 12



$12 \cdot 1 = 12$ $12 \cdot 2 = 24$



$12 \cdot 3 = 36$ $12 \cdot 4 = 48$

Múltiplos y divisores

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando su cociente es exacto.

Ejemplo

$$60 \overline{) 20} \rightarrow 60 \text{ es divisible entre } 20. \begin{cases} 60 \text{ es múltiplo de } 20. \\ 20 \text{ es divisor de } 60. \end{cases}$$

Si la división $a : b$ es exacta $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ es múltiplo de } b. \\ b \text{ es divisor de } a. \end{array} \right.$

Los múltiplos y los divisores de un número

- Los múltiplos de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

Ejemplo

Calculamos los primeros múltiplos de 12:

$1 \cdot 12$	$2 \cdot 12$	$3 \cdot 12$	$4 \cdot 12$	$5 \cdot 12$	$6 \cdot 12$	$7 \cdot 12$...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
12	24	36	48	60	72	84	...

- Un número tiene infinitos múltiplos.
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $\rightarrow a \cdot 1 = a$ $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ es múltiplo de } 1. \\ a \text{ es múltiplo de } a. \end{array} \right.$

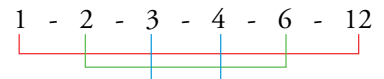
- Los divisores de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

Ejemplo

Calculamos los divisores de 12:

$12 \overline{) 1}$	$12 \overline{) 2}$	$12 \overline{) 3}$
00 12	0 6	0 4
↕	↕	↕
$12 \overline{) 12}$	$12 \overline{) 6}$	$12 \overline{) 4}$
00 1	0 2	0 3

Los divisores de 12 son:



Observa que van emparejados.

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

En la web

Refuerza los conceptos de múltiplo y divisor.

En la web

Encuentra múltiplos y divisores de un número.

Una propiedad de los múltiplos de un número

Observa que al sumar dos múltiplos de 12, se obtiene otro múltiplo de 12.

$$36 + 60 = 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 12 \cdot (3 + 5) = 12 \cdot 8 = 96$$

- La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a .

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$$

- Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a .

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son una serie de reglas prácticas que permiten descubrir con rapidez si un número es múltiplo de 2, 3, 5 o de otros números sencillos.

Ten en cuenta

Un número es múltiplo de 2 cuando es par.

■ DIVISIBILIDAD POR 2

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 2 más la cifra de las unidades:

$$\begin{array}{ccccccc}
 128 & = & 120 & + & 8 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \boxed{\text{NÚMERO}} & & \boxed{\text{MÚLTIPLO DE 2}} & & \boxed{\text{CIFRA UNIDADES}} & &
 \end{array}$$

Y según la propiedad que hemos visto arriba, para que el número sea múltiplo de 2, ha de serlo la cifra de las unidades.

- Un número es **múltiplo de 2** cuando termina en 0, 2, 4, 6 u 8.

■ DIVISIBILIDAD POR 5 Y POR 10

Siguiendo razonamientos similares al anterior, se demuestra que:

- Un número es **múltiplo de 5** si termina en 0 o en 5.
- Un número es **múltiplo de 10** si termina en 0.

■ DIVISIBILIDAD POR 3 Y POR 9

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras:

$$342 = \left\{ \begin{array}{l} 300 = 99 + 99 + 99 + 3 \\ 40 = 9 + 9 + 9 + 9 + 4 \\ 2 = 2 \end{array} \right\} = \underbrace{(3 \cdot 99 + 4 \cdot 9)}_{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE 3}}} + \underbrace{(3 + 4 + 2)}_{\boxed{\text{SUMA DE LAS CIFRAS}}}$$

El primer sumando es múltiplo de 3. Para que el número sea múltiplo de 3, también ha de serlo el segundo sumando.

Y el mismo razonamiento sirve para los múltiplos de 9.

- Un número es **múltiplo de 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es **múltiplo de 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Ten en cuenta

Un número formado por nueves es múltiplo de 3 y de 9.

$$\begin{aligned}
 9 &= 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3 \\
 99 &= 9 \cdot 11 = 3 \cdot 33 \\
 999 &= 9 \cdot 111 = 3 \cdot 333
 \end{aligned}$$

Ten en cuenta

$$\begin{aligned}
 1000 &= 1001 - 1 \\
 2000 &= 2002 - 2 \\
 3000 &= 3003 - 3 \\
 \dots &\dots \dots \dots \\
 100 &= 99 + 1 \\
 200 &= 198 + 2 \\
 300 &= 297 + 3 \\
 \dots &\dots \dots \dots \\
 10 &= 11 - 1 \\
 20 &= 22 - 2 \\
 30 &= 33 - 3 \\
 \dots &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Todos los números de los recuadros son múltiplos de 11. Compruébalo.

DIVISIBILIDAD POR 11

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 11 más el resultado de sumar y restar, alternativamente, sus cifras.

$$649 = \left\{ \begin{array}{l} 600 = 594 + 6 \\ 40 = 44 - 4 \\ 9 = - 9 \end{array} \right\} = (594 + 44) + (6 - 4 + 9)$$

MÚLTIPLO DE 11

SUMA Y RESTA ALTERNADA DE LAS CIFRAS

El primer sumando es múltiplo de 11. Para que el número sea múltiplo de 11, también ha de serlo el segundo sumando.

Un número es **múltiplo de 11** si lo es el resultado de sumar y restar alternativamente sus cifras. Es decir, un número es múltiplo de 11 si la suma de las cifras de lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par (o viceversa), es múltiplo de 11.

Ejemplos

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ 561 \end{array}$$

$5 + 1 - 6 = 0$

Es múltiplo de 11.

$$\begin{array}{c} \updownarrow \updownarrow \\ 1738 \end{array}$$

$7 + 8 - 1 - 3 = 11$

Es múltiplo de 11.

$$\begin{array}{c} \updownarrow \updownarrow \\ 4263 \end{array}$$

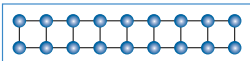
$4 + 6 - 2 - 3 = 5$

No es múltiplo de 11.

En la web Practica los criterios de divisibilidad.

Piensa y practica

1. Calcula y contesta.
 - a) ¿Es 173 múltiplo de 19? ¿Y 228?
 - b) ¿Es 516 múltiplo de 43? ¿Y 743?
2. Escribe:
 - a) Los cinco primeros múltiplos de 20.
 - b) Todos los divisores de 20.
3. Dibuja todas las formas de representar 18 como número rectangular.

$18 = 2 \cdot 9$


¿Qué relación tienen con los divisores de 18?
4. Escribe todos los divisores del número 70. Emparéjalos de forma que los productos de los distintos pares sean iguales.
5. Busca:
 - a) Todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 150.
 - b) El primer múltiplo de 13 después de 1 000.
6. Copia estos números y sigue las instrucciones.

$14 - 21 - 24 - 36 - 40 - 57 - 75 - 96$
 $111 - 180 - 241 - 255 - 308 - 354 - 420$

 - a) Rodea los múltiplos de 2.
 - b) Tacha los múltiplos de 3.
 - c) ¿Cuáles son múltiplos de 6?
7. ¿Cuáles de los números del ejercicio anterior son múltiplos de 9? ¿Y de 10?
8. Selecciona, entre estos números, los múltiplos de 11.

$286 \quad 611 \quad 913 \quad 1804 \quad 2444 \quad 3333$

En la web Resuelve los problemas: “Los collares”, “Las estanterías”.

Nombre y apellidos: Fecha:

4

Números primos y compuestos

Criba de Eratóstenes

En una tabla de números naturales, por ejemplo hasta 50, se suprimen: los múltiplos de 2, excepto el 2; los de 3, excepto el 3; los de 5, excepto el 5...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Los números que quedan, salvo el 1, son los números primos.

NOTA: El 1 no se considera primo, porque no tiene dos divisores.

En la web

Clasifica en primos y compuestos.

Recuerda

Para descomponer un número en factores primos, ten en cuenta los criterios de divisibilidad.

Divisible por 2	→	594		2
		297		3
Divisible por 3	→	99		3
		33		3
Divisible por 11	→	11		11
		1		1

En la web

Recuerda cómo hay que descomponer un número en sus factores primos.

En la web

Practica la descomposición de un número en factores primos.

- Los divisores de un número permiten su descomposición en forma de producto de dos o más factores.

Por ejemplo, los divisores de 40 son: 1 - 2 - 4 - 5 - 8 - 10 - 20 - 40

$$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Los números que, como el 40, se pueden descomponer en factores más simples se llaman *números compuestos*.

- Sin embargo, otros números, como el 13, solo tienen dos divisores, 13 y 1, y, por tanto, no se pueden descomponer en forma de producto:

$$13 = 13 \cdot 1 \rightarrow \text{no se puede descomponer}$$

Los números que, como el 13, no se pueden descomponer en factores se llaman *números primos*.

- Un número que no se puede descomponer en factores es un **número primo**.
- Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Los números que no son primos se llaman **compuestos**.

Estos son los números primos menores que 100:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Descomposición de un número en factores primos

El mayor nivel de descomposición factorial de un número se alcanza cuando todos los factores son primos.



Para descomponer un número en factores primos, conviene actuar ordenadamente. Observa cómo descomponemos el número 594:

594 : 2 = 297	→	594		2
297 : 3 = 99	→	297		3
99 : 3 = 33	→	99		3
33 : 3 = 11	→	33		3
11 : 11 = 1	→	11		11
		1		1

$$594 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$$

Para **descomponer un número en factores primos (factorizar)**, lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, ... y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores primos

Para facilitar la comprensión del resto de la unidad, conviene que nos paremos a reflexionar sobre la estructura de los múltiplos y los divisores de un número que se presenta descompuesto en factores primos.

Tomemos, por ejemplo, el número 150 descompuesto en factores primos:

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

- Los múltiplos de 150 se obtienen multiplicando 150 por un número:

$$\left. \begin{aligned} 300 &= 150 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \\ 450 &= 150 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \\ 600 &= 150 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \text{Un múltiplo de 150 contiene } \textit{todos} \text{ los factores primos de 150.}$$

Observa

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

- 180 es múltiplo de 36.
- 36 es divisor de 180.

Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

- Los divisores de 150 son, aparte de él mismo y de la unidad:

$$\left. \begin{aligned} 150 &= 2 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ 150 &= 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \\ 150 &= 5 \cdot 30 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 150 &= 6 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ 150 &= 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned} \right\} \text{Un divisor de 150 se construye con } \textit{algunos} \text{ de los factores primos de 150.}$$

En la web

Encuentra los divisores de un número.

Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

Piensa y practica

1. Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos.

29	39	57	83	91
101	111	113	243	341

2. Descompón en dos factores los siguientes números.

93 95 153 168 325 533 663

3. Copia y completa los procesos de descomposición factorial.

2	9	4		2	4	9	5		□
□	□	□		3	1	6	5		□
□	□	□		7		5	5		□
□	□	□		7		1	1		□ □
□	□	□					1		□

$294 = \square \cdot \square \cdot \square^2$
 $495 = \square^2 \cdot \square \cdot \square \square$

4. Descompón estos números en factores primos.

a) 84 b) 130 c) 160 d) 594
e) 720 f) 975 g) 2340 h) 5220

5. Descompón en forma de producto el número 210 de ocho formas diferentes.

6. Escribe factorizados sin hacer ninguna operación:

a) Tres múltiplos de $12 = 2^2 \cdot 3$.
b) Todos los divisores de $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

7. Teniendo en cuenta que $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 2^3 \cdot 3$, escribe:

a) Tres múltiplos comunes de m y n .
b) Tres divisores comunes de m y n .

5

Mínimo común múltiplo de dos números

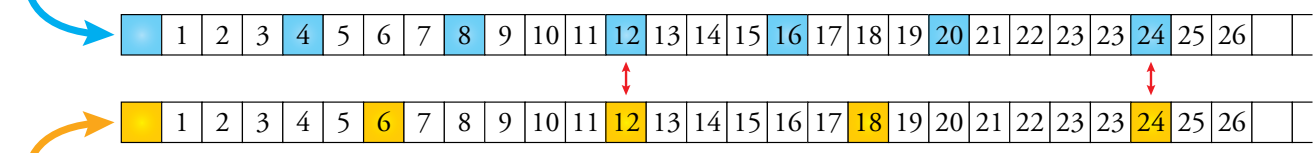
La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:



Ejemplo

En una compañía de taxis, tienen por norma lavar los coches cada cuatro días y revisar el nivel de aceite cada 6 días.

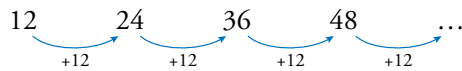
¿Cada cuántos días coinciden en un coche ambas tareas de mantenimiento?



Ambas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4	→ 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24
múltiplos de 6	→ 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36
múltiplos comunes	→ 12 - 24 - 36 - 48
mín.c.m. (4, 6) = 12	



El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, a , b , c , ... se llama **mínimo común múltiplo**, y se expresa así:

mín.c.m. (a , b , c , ...)

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 ...
 Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 ...
 Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 ...

El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. } → mín.c.m. (10, 15) = 30

Cálculo del mínimo común múltiplo (método óptimo)



El método anterior resulta apropiado para números sencillos, pero se complica demasiado con números mayores.

Observa una nueva forma de calcular el mínimo común múltiplo con los números descompuestos en factores primos.

Ejemplo

Calcular mín.c.m. (20, 30).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 5 \\ \end{array} \quad 20 = 2^2 \cdot 5
 \qquad
 \begin{array}{r|l} 3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 5 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \\ \end{array} \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del mín.c.m.

Recordando que el mín.c.m. ha de ser múltiplo de 20 y de 30, y lo más pequeño posible, hemos de tomar:

— Todos los factores primos de 20.
 — Todos los factores primos de 30.
 — El mínimo número de factores que sea posible.

$$\left. \begin{array}{l} \text{— Todos los factores primos de 20.} \\ \text{— Todos los factores primos de 30.} \\ \text{— El mínimo número de factores que sea posible.} \end{array} \right\} \text{mín.c.m. (20, 30) = }$$

$$\begin{array}{c} 20 \\ \begin{array}{c} 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 30 \end{array} \end{array}$$

Comprueba que todos los factores escogidos son imprescindibles, pues si se suprime cualquiera de ellos, deja de ser múltiplo de alguno de los números.

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el mín.c.m.

$$\text{mín.c.m. (20, 30) = } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números:

- Se descomponen los números en factores primos.
- Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
- Se multiplican los factores elegidos.

Problema resuelto

Un distribuidor de electrodomésticos desea cargar dos palés, uno con lavavajillas de 45 kg y otro con frigoríficos de 40 kg, de forma que ambos pesen lo mismo y lo menos posible. ¿Cuánto pesará cada palé?

La carga de un palé será un múltiplo común de 45 kg y de 40 kg, y además lo más pequeño posible, es decir, su mínimo común múltiplo.

$$\text{mín.c.m. (45, 40) = 360 kg } \begin{cases} 360 : 45 = 8 \text{ lavavajillas} \\ 360 : 40 = 9 \text{ frigoríficos} \end{cases}$$

Solución: Cada palé pesará 360 kilos, uno con 8 lavavajillas y el otro con 9 frigoríficos.

Método artesanal

múltiplos de 20 → 20 - 40 - **60** - 80 ...

múltiplos de 30 → 30 - **60** - 90 - 120 ...

mín.c.m. (20, 30) = 60

En la web

Calcula el mín.c.m. de dos números.

Ten en cuenta

Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el mín.c.m. es el mayor.

Ejemplo: mín.c.m. (15, 30) = 30

Compruébalo.

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{c} 15 \\ \begin{array}{c} 3 \cdot 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 30 \end{array} \end{array}$$

mín.c.m. (15, 30) = 2 · 3 · 5 = 30

Cálculo del mín.c.m. (45, 40)

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 5 \\ \end{array} \quad 45 = 3^2 \cdot 5
 \qquad
 \begin{array}{r|l} 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ \end{array} \quad 40 = 2^3 \cdot 5$$

mín.c.m. (45, 40) = 2³ · 3² · 5 = 360

Piensa y practica

1. Copia, observa y completa a simple vista.

a) $\overset{6}{\curvearrowright} \rightarrow 6 \ 12 \ 18 \ \underline{24} \ 30 \ 36 \ 42 \ \underline{48} \ 54 \dots$

$\overset{8}{\curvearrowright} \rightarrow 8 \ 16 \ \underline{24} \ 32 \ 40 \ \underline{48} \ 56 \dots$

mín.c.m. (6, 8) =

b) $\overset{9}{\curvearrowright} \rightarrow 9 \ 18 \ 27 \ \underline{36} \ 45 \ 54 \ 63 \ \underline{72} \dots$

$\overset{12}{\curvearrowright} \rightarrow 12 \ 24 \ \underline{36} \ 48 \ 60 \ \underline{72} \ 84 \dots$

mín.c.m. (9, 12) =

c) $\overset{15}{\curvearrowright} \rightarrow 15 \ 30 \ 45 \ 60 \ 75 \ 90 \ 105 \dots$

$\overset{25}{\curvearrowright} \rightarrow 25 \ 50 \ 75 \ 100 \ 125 \ 150 \dots$

mín.c.m. (15, 25) =

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

- a) mín.c.m. (5, 8) b) mín.c.m. (8, 12)
 c) mín.c.m. (12, 24) d) mín.c.m. (30, 40)
 e) mín.c.m. (50, 75) f) mín.c.m. (200, 300)

3. Calcula mentalmente.

- a) mín.c.m. (6, 9) b) mín.c.m. (6, 12)
 c) mín.c.m. (5, 10) d) mín.c.m. (15, 20)

4. Observa, completa en tu cuaderno y calcula.

3	0	2	4	<input type="text"/>	5	4	<input type="text"/>
1	5	3	2	0	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	5	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
1		<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
		1		1			

$\left. \begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = \dots \\ 54 = \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mín.c.m. (30, 40)} = \dots \\ \text{mín.c.m. (40, 54)} = \dots \end{array}$

5. Calcula mín.c.m. (a, b) por el método óptimo:

- a) $a = 2 \cdot 11$ b) $a = 2^4 \cdot 5$ c) $a = 5^2 \cdot 7$
 $b = 3 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 5^2$ $b = 5 \cdot 7^2$
 d) $a = 2^4 \cdot 3^2$ e) $a = 2 \cdot 5 \cdot 11$ f) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
 $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $b = 3 \cdot 5 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

6. Calcula.

- a) mín.c.m. (20, 25) b) mín.c.m. (28, 35)
 c) mín.c.m. (35, 40) d) mín.c.m. (36, 54)
 e) mín.c.m. (42, 63) f) mín.c.m. (72, 108)
 g) mín.c.m. (99, 165) h) mín.c.m. (216, 288)

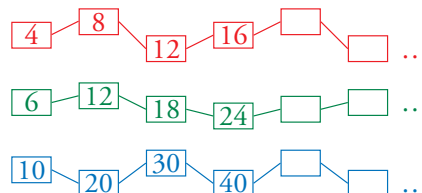
7. Calcula mín.c.m. (a, b) en cada caso. ¿Qué observas?:

- a) $a = 4$ b) $a = 5$ c) $a = 4$ d) $a = 6$
 $b = 8$ $b = 10$ $b = 12$ $b = 18$

8. ¿Verdadero o falso?

- a) El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.
 b) El mín.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.
 c) mín.c.m (1, k) = k
 d) Si a es múltiplo de b, mín.c.m. (a, b) = a.
 e) El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.

9. Julio cuenta de cuatro en cuatro; Adela, de seis en seis, y Virginia, de diez en diez. ¿Cuáles son los tres primeros números en los que coinciden?



10. Victoria tiene fichas de colores que puede apilar en montones de 8 y, también, en montones de 10 sin que sobre ninguna. Explica cuántas fichas puede tener Victoria y justifica tu respuesta.

11. Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuándo volverán a coincidir?

12. Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?

13. El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?



En la web Resuelve los problemas: "Las balizas", "Los coches".

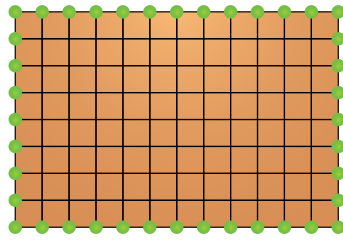
También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

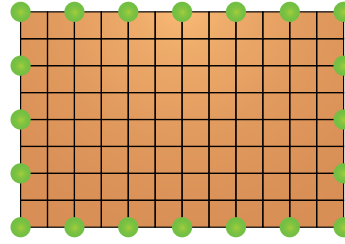
Se van a colocar maceteros, a intervalos iguales, en las esquinas y bordes de un patio interior de 8×12 metros.

¿A qué distancia se debe colocar un macetero del siguiente?

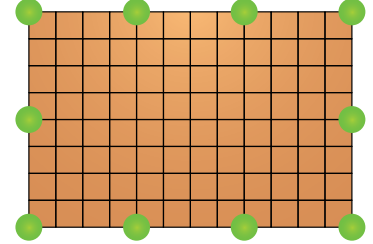
Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:



A 1 metro de distancia.

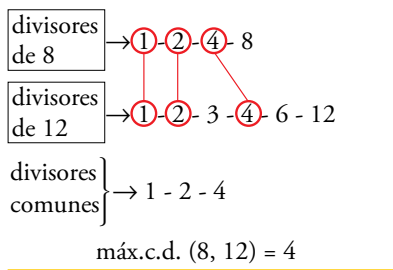


A 2 metros de distancia.



A 4 metros de distancia.

Cálculo del máx.c.d. (8, 12)



Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

$$1 - 2 - 4$$

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, \dots se llama **máximo común divisor**, y se expresa así:

$$\text{máx.c.d. } (a, b, c, \dots)$$

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30)

Divisores de 20 → 1 2 4 5 10 20

Divisores de 30 → 1 2 3 5 6 10 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Cálculo del máximo común divisor (método óptimo)



El método que has aprendido en la página anterior resulta adecuado para números sencillos.

En casos más complicados, resulta mucho más cómodo utilizar la descomposición en factores, como se muestra a continuación.

Ejemplo

Calcular máx.c.d. (40, 60).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 40 = 2^3 \cdot 5 \qquad
 \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del máx.c.d.

Recordando que el máx.c.d. ha de ser divisor de 40 y de 60, y lo más grande posible, hemos de tomar:

- Los factores comunes de 40 y 60.
- Ningún factor no común.
- El máximo número de factores que sea posible.

$$\begin{array}{l} 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \text{máx.c.d. (40, 60)} = 2 \cdot 2 \cdot 5
 \end{array}$$

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el máx.c.d.

$$\text{máx.c.d. (40, 60)} = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Para calcular el máximo común divisor de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Problema resuelto

En un almacén quieren envasar, para su distribución, 200 kilos de manzanas y 260 kilos de naranjas en cajones del mismo peso y de la mayor carga que sea posible. ¿Cuántos kilos deben poner en cada cajón?

El peso de un cajón debe ser un divisor común de 200 y 260, y además el mayor posible, es decir, su máximo común divisor.

$$\text{máx.c.d. (200, 260)} = 20 \text{ kg} \begin{cases} 200 : 20 = 10 \text{ cajones de manzanas} \\ 260 : 20 = 13 \text{ cajones de naranjas} \end{cases}$$

Solución: Cada cajón pesará 20 kilos y llenarán 10 cajones de manzanas y 13 de naranjas.

Método artesanal

Divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Divisores de 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

máx.c.d. (40, 60) = 20

En la web

Calcula el máx.c.d. de dos números.

Ten en cuenta

Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el máx.c.d. es el menor.

Ejemplo: máx.c.d. (15, 30) = 15

Compruébalo.

$$\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{máx.c.d. (15, 30)} = 3 \cdot 5 = 15$$

Cálculo del máx.c.d. (200, 260)

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 \qquad
 \begin{array}{r|l} 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad 260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$\text{máx.c.d. (200, 260)} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno, observa y completa.

- a) Div. de 12 → ① ② 3 ④ 6 12
 Div. de 16 → ① ② ④ 8 16
 máx.c.d. (12, 16) =
- b) Div. de 15 → ① 3 ⑤ 15
 Div. de 20 → ① 2 4 ⑤ 10 20
 máx.c.d. (15, 20) =
- c) Div. de 24 → ① ② ③ 4 ⑥ 8 12 24
 Div. de 30 → ① ② ③ 5 ⑥ 10 15 30
 máx.c.d. (24, 30) =

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

- a) máx.c.d. (6, 8) b) máx.c.d. (8, 20)
 c) máx.c.d. (10, 15) d) máx.c.d. (12, 24)
 e) máx.c.d. (18, 24) f) máx.c.d. (40, 50)

3. Calcula mentalmente.

- a) máx.c.d. (2, 3) b) máx.c.d. (4, 5)
 c) máx.c.d. (3, 9) d) máx.c.d. (6, 9)
 e) máx.c.d. (30, 40) f) máx.c.d. (50, 75)

4. Completa en tu cuaderno y calcula.

6	0	2	9	0	2	1	0	0	2
3	0	<input type="text"/>	4	5	<input type="text"/>	5	0	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
1			1			1			

- $60 = 2 \cdot \dots$ } máx.c.d. (60, 90) = ...
 $90 = 2 \cdot \dots$ } máx.c.d. (60, 100) = ...
 $100 = 2 \cdot \dots$ } máx.c.d. (90, 100) = ...

5. Calcula máx.c.d. (a, b) por el método óptimo.

- a) $a = 3 \cdot 7$ b) $a = 2^4 \cdot 3^2$ c) $a = 5^2 \cdot 7$
 $b = 5 \cdot 7$ $b = 2^2 \cdot 3^3$ $b = 5 \cdot 7^2$
 d) $a = 3 \cdot 5 \cdot 11$ e) $a = 2^3 \cdot 5^2$ f) $a = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$
 $b = 2 \cdot 5 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

6. Calcula.

- a) máx.c.d. (20, 24) b) máx.c.d. (24, 36)
 c) máx.c.d. (54, 60) d) máx.c.d. (56, 70)
 e) máx.c.d. (120, 144) f) máx.c.d. (140, 180)
 g) máx.c.d. (168, 196) h) máx.c.d. (180, 270)

7. Calcula máx.c.d. (a, b) en cada caso. ¿Qué observas?:

- a) $a = 4$ b) $a = 5$ c) $a = 4$ d) $a = 6$
 $b = 8$ $b = 10$ $b = 12$ $b = 18$

8. ¿Verdadero o falso?

- a) El máximo común divisor de dos números es igual al menor de ellos.
 b) El máx.c.d. de dos números contiene solo los factores primos comunes a ambos números.
 c) máx.c.d. (1, k) = k
 d) El máx.c.d. de dos números primos es uno.
 e) Si a es divisible entre b, máx.c.d. (a, b) = b.

9. Supón que tienes una hoja de papel de 30 cm × 21 cm, y quieres dibujar sobre ella una cuadrícula lo más grande que sea posible en la que no haya cuadros fraccionados. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadros?

10. Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un lapicero de 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos. ¿Cuál puede ser el valor de cada una de esas monedas si siempre ha dado el precio exacto? (Busca todas las soluciones posibles).

11. Alberto tiene 45 fichas rojas y 36 fichas verdes, y quiere apilarlas en columnas iguales, lo más altas que sea posible, y sin mezclar colores en la misma pila. ¿Cuántas fichas pondrá en cada montón?



12. El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

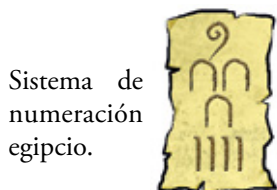
13. Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Nombre y apellidos: Fecha:

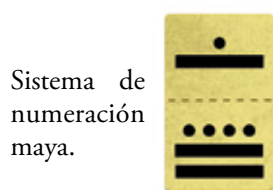
Ejercicios y problemas

Sistemas de numeración

1. Copia y completa.
 - a) ... centenas hacen 13 decenas de millar.
 - b) Mil millares hacen un ...
 - c) ... decenas de millar hacen 180 millones.
 - d) Un millón de millones hacen un ...
2. Observa un número escrito en dos sistemas de numeración diferente:



Sistema de numeración egipcio.



Sistema de numeración maya.

- a) Explica el significado de los signos en cada caso.
 - b) Escribe en ambos sistemas el número anterior y el siguiente.
3. Copia, calcula y completa.
 - a) $23 \text{ min } 45 \text{ s} \rightarrow \dots \text{ s}$
 - b) $1 \text{ h } 13 \text{ min } 27 \text{ s} \rightarrow \dots \text{ s}$
 - c) $587 \text{ min} \rightarrow \dots \text{ h } \dots \text{ min}$
 - d) $6542 \text{ s} \rightarrow \dots \text{ h } \dots \text{ min } \dots \text{ s}$

Operaciones

4. Calcula y escribe, paso a paso, el proceso para llegar a cada solución.
 - a) $30 : 5 - 2^2 + 2 \cdot 7 - 5 = 11$
 - b) $(30 : 5 - 2)^2 + 2 \cdot (7 - 5) = 20$
 - c) $30 : (5 - 2^2 + 2 \cdot 7 - 5) = 3$
 - d) $30 : [(5 - 2^2 + 2) \cdot (7 - 5)] = 5$
 - e) $[(30 : 5 - 2)^2 + 2] \cdot (7 - 5) = 36$
5. Calcula paso a paso y comprueba que obtienes la solución que se indica.
 - a) $19 - 11 - 7 + 13 + 6 - 12 = 8$
 - b) $18 - 5 \cdot 3 + 12 : 6 - 5 = 0$
 - c) $43 - 4 \cdot (6 + 3) + 28 : (10 - 3) = 11$
 - d) $[(13 + 7) : (6 - 1)] \cdot (5 + 1) = 24$
 - e) $12 - 48 : [40 - 3 \cdot (21 - 13)] = 9$
 - f) $(6^2 + 2^2) : [(12 - 8) \cdot (9 - 7)] = 5$

6. Resuelve con tu calculadora las expresiones del ejercicio anterior.

Múltiplos y divisores

7. Responde y justifica tu respuesta.
 - a) ¿Es 132 múltiplo de 11?
 - b) ¿Es 11 divisor de 132?
 - c) ¿Es 574 múltiplo de 14?
 - d) ¿Es 27 divisor de 1542?
8. Calcula.
 - a) Los cinco primeros múltiplos de 10.
 - b) Los cinco primeros múltiplos de 13.
 - c) Los cinco primeros múltiplos de 31.
9. Calcula.
 - a) Todos los divisores de 15.
 - b) Todos los divisores de 23.
 - c) Todos los divisores de 32.
10. Copia estos números y selecciona:

66	71	90	103	105
156	220	315	421	825
1000	2007	4829	5511	6005

 - a) Los múltiplos de 2.
 - b) Los múltiplos de 3.
 - c) Los múltiplos de 5.
 - d) Los múltiplos de 11.

Números primos y compuestos

11. Escribe.
 - a) Los diez primeros números primos.
 - b) Los números primos comprendidos entre 50 y 60.
 - c) Los números primos comprendidos entre 80 y 100.
 - d) Los tres primeros primos mayores que 100.
12. Descompón en factores primos.
 - a) 48
 - b) 54
 - c) 90
 - d) 105
 - e) 120
 - f) 135
 - g) 180
 - h) 200
13. Descompón en el máximo número de factores.
 - a) 378
 - b) 1144
 - c) 1872

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

14. Calcula.

- a) Los diez primeros múltiplos de 10.
- b) Los diez primeros múltiplos de 15.
- c) Los primeros múltiplos de 10 y 15.
- d) El mínimo común múltiplo de 10 y 15.

15. Calcula mentalmente.

- a) mín.c.m. (2, 3)
- b) mín.c.m. (6, 9)
- c) mín.c.m. (4, 10)
- d) mín.c.m. (6, 10)
- e) mín.c.m. (6, 12)
- f) mín.c.m. (12, 18)

16. Calcula.

- a) mín.c.m. (12, 15)
- b) mín.c.m. (24, 60)
- c) mín.c.m. (48, 54)
- d) mín.c.m. (90, 150)
- e) mín.c.m. (6, 10, 15)
- f) mín.c.m. (8, 12, 18)

17. Escribe.

- a) Todos los divisores de 18.
- b) Todos los divisores de 24.
- c) Los divisores comunes de 18 y 24.
- d) El máximo común divisor de 18 y 24.

18. Calcula mentalmente.

- a) máx.c.d. (4, 8)
- b) máx.c.d. (6, 9)
- c) máx.c.d. (10, 15)
- d) máx.c.d. (12, 16)
- e) máx.c.d. (16, 24)
- f) máx.c.d. (18, 24)

Reflexiona, decide, aplica

19. Marta ha comprado varios balones por 69 €. El precio de un balón era un número exacto de euros, sin decimales.

¿Cuántos balones ha comprado y cuánto costaba cada balón?



20. ¿Verdadero o falso? En una división:

- a) Si se multiplica el dividendo por 3, el cociente también se multiplica por 3.
- b) Si se multiplica el divisor por 5, el cociente también se multiplica por 5.
- c) Si se multiplican el dividendo y el divisor por 2, el cociente no varía y el resto tampoco.
- d) Si se multiplican el dividendo y el divisor por 4, el cociente no varía, pero el resto también se multiplica por 4.

21. En mi colegio hay dos clases de 2.º ESO: 2.º A, con 24 estudiantes, y 2.º B, con 30. Tenemos que hacer equipos con el mismo número de miembros, pero sin mezclar de las dos clases. Describe todas las formas posibles de hacer los equipos.

Resuelve problemas

22. Una compañía de danza de 156 bailarines hace una coreografía formando filas y columnas. Si en una fila hay 20 bailarines más que en una columna, ¿cuántas filas y cuántas columnas son?

23. El responsable de una agencia de viajes, que debe trasladar del aeropuerto al hotel a un grupo de 40 turistas, recibe un mail informando de que el autobús previsto para ese servicio tiene avería.

Entonces se le ofrecen dos opciones: hacer el traslado en taxis o hacerlo en furgonetas. Con esta segunda opción necesitaría cinco vehículos menos porque en cada furgoneta entrarían cuatro turistas más. ¿De cuántas plazas dispone cada taxi y de cuántas cada furgoneta?

24. En el grupo de chicos y chicas inscritos en un curso de baloncesto:

- Si hacen equipos de 5, sobran 4 (o falta 1).
- Si hacen equipos de 6, no sobra ninguno.

¿Cuántos son, sabiendo que para trasladarlos se utilizan dos autobuses de 45 plazas casi llenos?

25. En un encuentro cultural entre dos clubes, A y B, se organizan equipos iguales, sin mezclar elementos de uno y otro. El club A presenta 40 socios, y el B, 60 socios. ¿Cuántos elementos tendrá, como máximo, cada equipo?

Ejercicios y problemas

26. Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista. ¿A qué altura coinciden las cimas de ambas torres?
27. Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada?
28. De cierta parada de autobús parten dos líneas, A y B, que inician su actividad a las 7 h de la mañana. La línea A presta un servicio cada 24 minutos, y la línea B, cada 36 minutos. ¿A qué hora vuelven a coincidir en la parada los autobuses de ambas líneas?
29. Para pavimentar el suelo de una nave de 12,3 m de largo por 9 m de ancho, se han empleado baldosas cuadradas, que han venido justas, sin necesidad de cortar ninguna. ¿Qué medida tendrá el lado de cada baldosa, sabiendo que se han empleado las mayores que era posible?

30. Julia ha formado el cuadrado más pequeño posible uniendo piezas rectangulares de cartulina, de 12 cm por 18 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿Cuántas piezas ha empleado?
31. Se desea envasar 125 botes de conserva de tomate y 175 botes de conserva de pimiento en cajas del mismo número de botes, y sin mezclar ambos productos en la misma caja.
- a) ¿Cuál es el mínimo número de cajas necesarias?
- b) ¿Cuántos botes irán en cada caja?



Autoevaluación

1. Calcula.
- a) $37 - 6 \cdot 5 - 5 + 56 : 7$
- b) $(64 - 42) : 11 + 63 : (35 - 26)$
- c) $11 \cdot (2^3 - 1) - 2 \cdot 6^2 - 6^2 : 18$
- d) $(12 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}) : 2$
2. Responde y justifica:
- a) ¿Es 31 divisor de 744?
- b) ¿Es 999 múltiplo de 99?
3. Escribe.
- a) Los cuatro primeros múltiplos de 12.
- b) Todos los divisores de 60.
4. ¿Es el 60 un número rectangular? ¿De cuántas formas rectangulares diferentes se puede expresar?
5. Escribe los números primos comprendidos entre 20 y 40.
6. Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:
897 - 765 - 990 - 2713 - 6077 - 6324 - 7005
7. Descompón en factores primos los números 150 y 225.
8. Calcula.
- a) máx.c.d. (150, 225)
- b) mín.c.m. (150, 225)
9. Calcula mentalmente máx.c.d. (15, 20, 25) y mín.c.m. (15, 20, 25).
10. Se desea poner rodapié de madera en dos de las paredes de una habitación rectangular de 420 cm \times 540 cm. Para no tener que cortar, se van a encargar en la carpintería tramos de listón, todos iguales y lo más largos que sea posible, que encajen en número exacto en ambas paredes. ¿Cuánto debe medir cada uno de los trozos a encargar en la carpintería?
11. En una fábrica se oye el escape de una válvula de gas cada 45 segundos y el golpe de un martillo pilón cada 60 segundos. Si se acaban de oír ambos sonidos simultáneamente, ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?

2

Los números enteros

Los objetos existen, pero los números son un invento humano en el terreno de las ideas.



Los números negativos surgen mucho después de los naturales, respondiendo a las necesidades del comercio y tras aparecer los sistemas de numeración dotados del cero, elemento imprescindible para su construcción.

Se los ha llamado números falsos y números absurdos, lo que refleja su dificultad y los ubica en un nivel más elaborado del mundo de las ideas.


Los números negativos no aparecen sistematizados hasta el siglo VII, en escritos hindúes, ligados a cuestiones y actividades cotidianas como *tener* en contraste con *deber*.

“Una deuda restada de la nada se convierte en un bien”.

“Un bien restado de la nada se convierte en una deuda”.

En este tipo de enunciados observamos que manejaban el cero y la regla de los signos.

La introducción en Europa de los números negativos fue lenta y desigual.

Muchos matemáticos desde el siglo XVI teorizaron sobre ellos, pero no fue hasta finales del siglo XIX, que el pensamiento matemático se desvincula de modelos físicos, cuando el conjunto de los números enteros negativos es aceptado y reconocido como objeto matemático de pleno derecho. 

स्थितश्चलति



Nombre y apellidos: Fecha:

1 Números positivos y negativos

Los números negativos surgen, en contraste con los positivos, ante la necesidad de cuantificar magnitudes capaces de tomar valores opuestos: tener-deber, subir-bajar, ganar-perder, aumentar-disminuir, etc.

Ejemplos

- He crecido doce centímetros. $\rightarrow +12$ cm
- He adelgazado ochocientos gramos. $\rightarrow -800$ g

- Los números negativos se escriben precedidos del signo menos (-).
- Si un número no lleva signo, entendemos que es positivo.
- Los números negativos, en las operaciones, se escriben entre paréntesis para evitar que aparezcan dos signos seguidos.

Ejemplos

- $8 + (-4) \rightarrow$ El número positivo +8 se suma con el negativo -4.
- $(-2) \cdot (-5) \rightarrow$ El número negativo -2 se multiplica por el negativo -5.

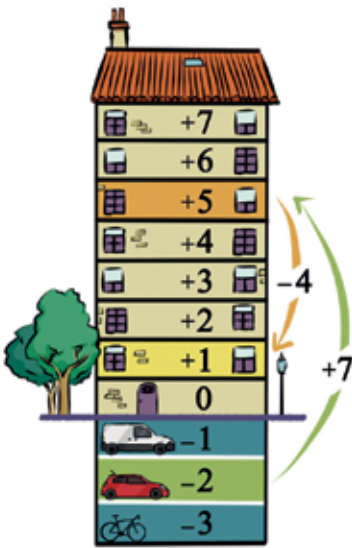
Utilidad de los números positivos y negativos

■ VALORACIÓN DE POSICIONES FIJAS

- Vivo en la quinta planta. $\rightarrow +5$
- Tengo el coche en el segundo sótano. $\rightarrow -2$

■ VALORACIÓN DE CAMBIOS O VARIACIONES

- Subo del segundo sótano al quinto piso (siete plantas). $\rightarrow +7$
- Bajo del quinto piso al primero (cuatro plantas). $\rightarrow -4$

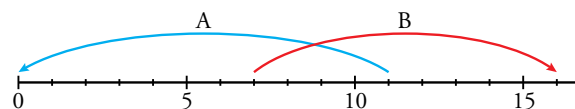



Piensa y practica

1. Asocia a cada enunciado un número con signo.

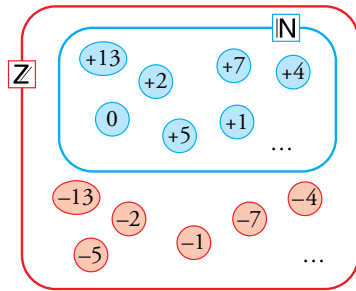
- Durante la visita nocturna a París estábamos a dos grados bajo cero.
- Ayer tuvimos doce grados de máxima.
- La empresa tuvo el mes pasado unas ganancias de medio millón de euros.
- El programa de televisión perdió ciento cincuenta mil espectadores.
- El barco hundido está a ciento veinte metros de profundidad.
- El avión vuela a once mil pies de altura.

2. Escribe un número para cada movimiento en la recta.



3.  Dibuja en una recta como la del ejercicio anterior:

- Un movimiento asociado al número -7.
- Un movimiento asociado al número +4.
- ¿Qué movimiento resulta de encadenar los dos anteriores?

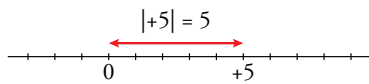
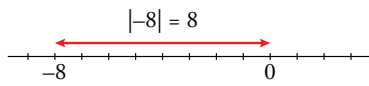


Si tomamos el conjunto \mathbb{N} de los números naturales y, por cada elemento distinto de cero, $+a$, añadimos otro con el signo negativo, $-a$, habremos obtenido un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como el conjunto de los números enteros y se designa por la letra \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \begin{cases} \text{POSITIVOS} & \rightarrow +1, +2, +3, +4, +5, \dots \\ \text{CERO} & \rightarrow 0 \\ \text{NEGATIVOS} & \rightarrow -1, -2, -3, -4, -5, \dots \end{cases}$$

Ten en cuenta

El valor absoluto de un número es su distancia al cero en la recta numérica.



Valor absoluto y opuesto de un número entero

- El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de quitarle el signo y se expresa escribiéndolo entre barras.

$$|a| \rightarrow \text{valor absoluto de } a$$

Ejemplos

$$|+7| = 7 \quad |-7| = 7$$

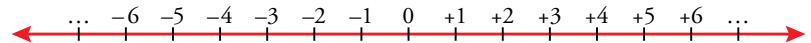
- El **opuesto** de un número entero es otro entero con el mismo valor absoluto, pero de signo contrario.

Ejemplos

$$\text{Opuesto de } (+7) \rightarrow (-7) \quad \text{Opuesto de } (-7) \rightarrow (+7)$$

Orden en el conjunto \mathbb{Z}

El conjunto de los números enteros se representa, ordenado, en la recta numérica:



Así, vemos que un número es mayor que cualquier otro que esté a su izquierda y menor que cualquier otro que esté a su derecha.

Ejemplos

$$\begin{aligned} (-7) &< 0 < (+1) \\ (-12) &< (-9) < (-2) \end{aligned}$$

- Cualquier número positivo es mayor que el cero, y este, mayor que cualquier número negativo.
- Los números negativos se ordenan *al revés* que los positivos. Es mayor el que tenga menor valor absoluto.

Piensa y practica

1. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada número.

- a) -3 b) +8 c) -1
d) +23 e) -37 f) +60

2. Ordena de menor a mayor.

$$-7, -13, +8, -1, +1, +5, 0, +10, -24$$

3. ¿Verdadero o falso?

- a) Cualquier número entero es también natural.
b) Cualquier número natural es entero.
c) Solo los negativos tienen opuesto.
d) Dos números enteros opuestos tienen el mismo valor absoluto.

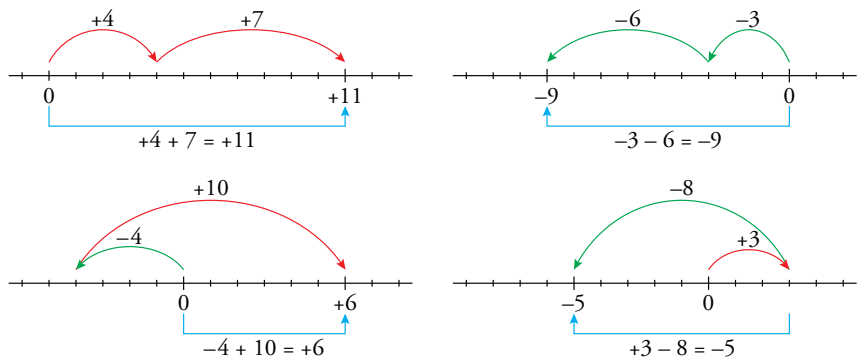
Suma y resta de números enteros

Recuerda algunas reglas básicas para resolver expresiones con números enteros:

Para sumar (restar) dos números:

- Si tienen **el mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.
- Si tienen **distinto signo**, se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos



- Al suprimir un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían.

$$+(-3 + 8 - 2) = -3 + 8 - 2$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos, se cambian los signos interiores: más por menos y menos por más.

$$-(-3 + 8 - 2) = +3 - 8 + 2$$

En la web

Actividades guiadas para practicar sumas y restas.

En la web

Practica la suma y la resta de números enteros.

Ten en cuenta

Otra forma:

$$\begin{aligned} (7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) &= \\ = 7 - 10 - 2 + 5 - 4 + 9 &= \\ = 7 + 5 + 9 - 10 - 2 - 4 &= \\ = 21 - 16 &= +5 \end{aligned}$$

Para operar más de dos números positivos y negativos podemos seguir dos caminos:

- Ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen.
- Agrupar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, operar.

$$\begin{aligned} 2 - 3 + 4 - 8 &= \\ = -1 + 4 - 8 &= \\ = 3 - 8 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 - 5 + 4 - 8 - 3 &= \\ = 7 + 4 - 5 - 3 - 8 &= \\ = 11 - 16 &= -5 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} (7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) &= (-3) - (2 + 4 - 5 - 9) = \\ &= (-3) - (6 - 14) = \\ &= (-3) - (-8) = -3 + 8 = +5 \end{aligned}$$

Multiplicación de números enteros

Podemos calcular el producto de dos números enteros teniendo en cuenta que una multiplicación es una suma de sumandos iguales:

$$(+3) \cdot (-6) = \begin{cases} \text{Sumamos tres veces } (-6): \\ +(-6) + (-6) + (-6) = -6 - 6 - 6 = -18 \end{cases}$$

$$(-3) \cdot (-6) = \begin{cases} \text{Restamos tres veces } (-6): \\ -(-6) - (-6) - (-6) = +6 + 6 + 6 = +18 \end{cases}$$

Sin embargo, para multiplicar con rapidez, aplicamos la siguiente regla:

REGLA DE LOS SIGNOS

El producto de dos números enteros es:

- **Positivo**, si los dos factores tienen **signos iguales**. $\begin{cases} (+) \cdot (+) = + \\ (-) \cdot (-) = + \end{cases}$
- **Negativo**, si los dos factores tienen **signos diferentes**. $\begin{cases} (+) \cdot (-) = - \\ (-) \cdot (+) = - \end{cases}$

En la web

Practica la regla de los signos.

Ejemplos

$$(+4) \cdot (+3) = +12 \quad (-5) \cdot (-4) = +20 \quad (+6) \cdot (-4) = -24 \quad (-4) \cdot (+8) = -32$$

División de números enteros

La división de números enteros guarda con la multiplicación las mismas relaciones que en los números naturales. En la división se aplica la misma regla de los signos que en la multiplicación:

$$(+4) \cdot (+6) = +24 \longrightarrow (+24) : (+4) = +6$$

$$(-4) \cdot (-6) = +24 \longrightarrow (+24) : (-4) = -6$$

$$(+4) \cdot (-6) = -24 \begin{cases} \longrightarrow (-24) : (+4) = -6 \\ \longrightarrow (-24) : (-6) = +4 \end{cases}$$

En la web

Recuerda la multiplicación y división de números enteros.

Operaciones combinadas

Observa el orden en el que realizamos las operaciones para calcular el valor de la siguiente expresión combinada:

$$(-15) : (4 - 9) + 3 \cdot (8 - 1)$$

↓

- Primero, las operaciones que están dentro de los paréntesis. $\longrightarrow (-15) : (-5) + 3 \cdot (-3)$

↓

- Después, las multiplicaciones y las divisiones. $\longrightarrow (+3) + (-9)$

↓

- Por último, las sumas y las restas. $\longrightarrow 3 - 9 = -6$

En la web

Actividades guiadas para practicar operaciones combinadas.

En la web

Practica las operaciones combinadas con números enteros.

Piensa y practica

11. Multiplica.

- a) $(+10) \cdot (-2)$ b) $(-4) \cdot (-9)$
 c) $(-7) \cdot (+5)$ d) $(+11) \cdot (+7)$

12. Observa los ejemplos y calcula.

• $(-3) \cdot (+2) \cdot (-5) = (-6) \cdot (-5) = +30$

$(-3) \cdot (+2) \cdot (-5) = (-3) \cdot (-10) = +30$

- a) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4)$ b) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-5)$
 c) $(+4) \cdot (-3) \cdot (+2)$ d) $(-6) \cdot (-2) \cdot (-5)$

13. Divide.

- a) $(-18) : (+3)$ b) $(-15) : (-5)$
 c) $(+36) : (-9)$ d) $(-30) : (-10)$
 e) $(-52) : (+13)$ f) $(+22) : (+11)$

14. Calcula el valor de x en cada caso.

- a) $(-18) : x = +6$ b) $(+4) \cdot x = -36$
 c) $x \cdot (-13) = +91$ d) $x : (-11) = +5$

15. Calcula.

- a) $(+3) \cdot (-5) \cdot (+2)$ b) $(-4) \cdot (-1) \cdot (+6)$
 c) $(-2) \cdot (-7) \cdot (-2)$ d) $(+5) \cdot (-4) \cdot (-3)$

16. Opera, sin olvidar el papel de los paréntesis.

- a) $[(+80) : (-8)] : (-5)$ b) $(-70) : [(-2) : (-7)]$
 c) $[(+50) : (-30)] : (+6)$ d) $(-40) : [(+24) : (+3)]$

17. Calcula como en los ejemplos.

- $15 - 8 \cdot 3 = 15 - 24 = -9$
 • $18 : 6 - 5 = 3 - 5 = -2$
 a) $18 - 5 \cdot 3$ b) $6 - 4 \cdot 2$ c) $7 \cdot 2 - 16$
 d) $18 - 15 : 3$ e) $5 - 30 : 6$ f) $20 : 2 - 11$

18. Calcula como en el ejemplo.

- $21 - 4 \cdot 6 + 12 : 3 = 21 - 24 + 4 = 25 - 24 = 1$
 a) $20 - 4 \cdot 7 + 11$ b) $12 - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2$
 c) $15 - 20 : 5 - 3$ d) $6 - 10 : 2 - 14 : 7$
 e) $5 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6$ f) $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 18 : 6$

19. Observa el ejemplo y calcula.

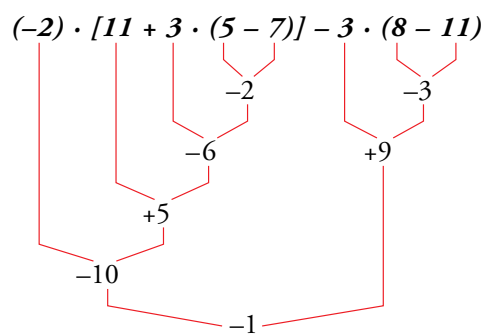
• $(-3) \cdot (-4) + (-6) \cdot 3 = (+12) + (-18) = 12 - 18 = -6$

- a) $5 \cdot (-8) - (+9) \cdot 4$
 b) $32 : (-8) - (-20) : 5$
 c) $(-2) \cdot (-9) + (-5) \cdot (+4)$
 d) $(+25) : (-5) + (-16) : (+4)$
 e) $(+6) \cdot (-7) + (-50) : (-2)$
 f) $(+56) : (-8) - (-12) \cdot (+3)$

20. Calcula.

- a) $18 - 5 \cdot (3 - 8)$
 b) $4 \cdot (8 - 11) - 6 \cdot (7 - 9)$
 c) $(4 - 5) \cdot (-3) - (8 - 2) : (-3)$

21.  **Ejercicio resuelto**



$(-2) \cdot [11 + 3 \cdot (5 - 7)] - 3 \cdot (8 - 11) =$
 $= (-2) \cdot [11 + 3 \cdot (-2)] - 3 \cdot (-3) =$
 $= (-2) \cdot [11 - 6] + 9 = (-2) \cdot [5] + 9 = -10 + 9 = -1$

22. Calcula.

- a) $5 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3)$
 b) $20 : (-5) - 8 : (+2)$
 c) $2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-7) - 4 \cdot (+3)$
 d) $6 : (+2) + 5 \cdot (-3) - 12 : (-4)$

23. Opera.

- a) $(-8) \cdot (+2) + (-5) \cdot (-3)$
 b) $(+40) : (-8) - (-30) : (+6)$
 c) $(-2) \cdot (-9) + (-24) : (-3) - (-6) \cdot (-4)$
 d) $(+27) : (6 - 9) - (11 - 8) \cdot (-5) - (-6) \cdot (-2)$

4

Potencias de números enteros

Recuerda que una potencia es una multiplicación de factores iguales:

$$\begin{array}{c}
 \text{EXPONENTE} \rightarrow \\
 a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \\
 \text{BASE} \rightarrow
 \end{array}$$

Ejemplos

$$(+4)^2 = (+4) \cdot (+4) = +16$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$$

Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un número negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$$(-3)^1 = -3 \quad (-3)^2 = +9 \quad (-3)^3 = -27 \quad (-3)^4 = +81$$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el exponente es par, el resultado es positivo.

$$(-a)^n \text{ (par)} \rightarrow \text{positivo}$$

- Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

$$(-a)^n \text{ (impar)} \rightarrow \text{negativo}$$

Piensa y practica

1. Escribe en forma de potencia.

a) $(-2) \cdot (-2)$

b) $(+5) \cdot (+5) \cdot (+5)$

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

2. Copia y completa en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	VALOR
$(-1)^7$			
$(-2)^4$			
$(+3)^3$			
$(-4)^2$			

3. Escribe en forma de producto y calcula:

a) $(-2)^6$

b) $(-3)^1$

c) $(+3)^4$

d) $(-5)^2$

e) $(-10)^5$

f) $(-8)^3$

4. Obtén con ayuda de la calculadora como se hace en el ejemplo.

• $12^5 \rightarrow$ \rightarrow

a) 8^6

b) $(-8)^6$

c) 11^5

d) $(-11)^5$

e) 27^7

f) $(-27)^7$

Vas a aprender, ahora, algunas propiedades que facilitan el cálculo con potencias. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Potencia de un producto

Compara las dos expresiones siguientes y observa que en ambas se obtiene el mismo resultado.

No te confundas

$$(2 + 3)^4 = 5^4 = 625$$

$$2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$$

$$(2 + 3)^4 \neq 2^4 + 3^4$$

La potencia de una suma NO ES IGUAL a la suma de las potencias de los sumandos.

Ejemplo

- $(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ ←
- $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 8 \cdot 27 = 216$ ←

La **potencia** de un **producto** es igual al producto de las potencias de los factores. } $\rightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Ejercicio resuelto

Calcular, por el camino más sencillo, $5^6 \cdot 2^6$.

$$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$$

Potencia de un cociente

Observa otras dos expresiones que también tienen el mismo valor.

Ejemplo

- $(6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ←
- $6^3 : 3^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (3 \cdot 3 \cdot 3) = 216 : 27 = 8$ ←

La **potencia** de un **cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. } $\rightarrow (a : b)^n = a^n : b^n$

Ejercicios resueltos

1. Calcular, por el camino más sencillo, $12^3 : 4^3$.

$$12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

2. Calcular: $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4$

$$(6^4 \cdot 5^4) : 15^4 = (6 \cdot 5)^4 : 15^4 = 30^4 : 15^4 = (30 : 15)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^4 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ veces}} = 5^7$$

Observa que el exponente del producto final es la suma de los exponentes de los factores.

Para **multiplicar** dos **potencias** de la **misma base**, se deja la base y se suman los exponentes. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Para multiplicar} \\ \text{dos potencias} \\ \text{de la misma base,} \\ \text{se deja la base y se} \\ \text{suman los exponentes.} \end{array}} \right\} \rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Por ejemplo:

$$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

Cociente de potencias de la misma base

Al dividir dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^7 : 5^3 = 5^4 \iff 5^4 \cdot 5^3 = 5^7$$

Observa que el exponente del cociente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

Para **dividir** dos **potencias** de la **misma base**, se deja la base y se restan los exponentes. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Para dividir} \\ \text{dos potencias} \\ \text{de la misma base,} \\ \text{se deja la base y se} \\ \text{restan los exponentes.} \end{array}} \right\} \rightarrow a^m : a^n = a^{m-n}$

Por ejemplo:

$$a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$$

Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se obtiene una nueva potencia de la misma base.

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

Observa que el exponente final es el producto de los exponentes de la expresión inicial.

Para **elevar** una **potencia** a **otra potencia**, se deja la base y se multiplican los exponentes. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Para elevar} \\ \text{una potencia} \\ \text{a otra potencia, se} \\ \text{deja la base y se} \\ \text{multiplican los} \\ \text{exponentes.} \end{array}} \right\} \rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Por ejemplo:

$$(a^2)^4 = a^{2 \cdot 4} = a^8$$

Ten en cuenta

$$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$$

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

La **potencia cero** de un número es igual a 1.

Piensa y practica

1. Calcula como en el ejemplo y compara los resultados.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} (4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144 \\ 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144 \end{array} \right\} \rightarrow (4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$$

$$a) \left. \begin{array}{l} (3 \cdot 5)^2 = \dots \\ 3^2 \cdot 5^2 = \dots \end{array} \right\} \dots$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (4 \cdot 2)^3 = \dots \\ 4^3 \cdot 2^3 = \dots \end{array} \right\} \dots$$

$$c) \left. \begin{array}{l} (12 : 3)^2 = \dots \\ 12^2 : 3^2 = \dots \end{array} \right\} \dots$$

$$d) \left. \begin{array}{l} (20 : 4)^3 = \dots \\ 20^3 : 4^3 = \dots \end{array} \right\} \dots$$

2. Copia y completa las casillas vacías.

$$a) (3 \cdot 5)^4 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$$

$$b) 8^3 \cdot 6^3 = (\square \cdot \square)^{\square}$$

$$c) (6 : 3)^7 = 6^{\square} : 3^{\square}$$

$$d) 15^{\square} : 5^{\square} = (\square : \square)^{\square}$$

$$e) (a \cdot b)^{\square} = \square^3 \cdot \square^3$$

$$f) m^2 \cdot n^2 = (\square \cdot \square)^2$$

$$g) (a : b)^{\square} = a^3 : \square^3$$

$$h) m^4 : n^4 = (\square : \square)^{\square}$$

3. Reduce a una sola potencia como en el ejemplo.

$$\bullet 2^5 \cdot (-3)^5 = [2 \cdot (-3)]^5 = (-6)^5$$

$$a) 3^2 \cdot 4^2$$

$$b) (-2)^3 \cdot 4^3$$

$$c) (-5)^2 \cdot (+3)^2$$

$$d) 3^6 \cdot (-2)^6$$

4. Expresa con una sola potencia igual que en el ejemplo.

$$\bullet (-15)^4 : (+3)^4 = [(-15) : (+3)]^4 = (-5)^4 = 5^4$$

$$a) 9^4 : 3^4$$

$$b) (+15)^3 : (-5)^3$$

$$c) (-20)^2 : (-4)^2$$

$$d) (-18)^4 : (-6)^4$$

5. Reflexiona y calcula de la forma más sencilla.

$$a) 5^3 \cdot 2^3$$

$$b) 4^2 \cdot 5^2$$

$$c) 25^2 \cdot 4^2$$

$$d) 20^3 \cdot 5^3$$

$$e) 16^5 : 8^5$$

$$f) 18^3 : 6^3$$

$$g) 21^4 : 7^4$$

$$h) 35^2 : 5^2$$

6. Copia y completa las casillas vacías.

$$a) 5^2 \cdot 5^3 = 5^{\square}$$

$$b) 6^4 \cdot 6^3 = 6^{\square}$$

$$c) a^5 \cdot a^3 = a^{\square}$$

$$d) m^3 \cdot m^{\square} = m^9$$

$$e) 2^6 : 2^4 = 2^{\square}$$

$$f) 7^8 : 7^5 = 7^{\square}$$

$$g) a^9 : a^8 = a^{\square}$$

$$h) m^8 : m^{\square} = m^6$$

$$i) (4^2)^3 = 4^{\square}$$

$$j) (5^3)^3 = 5^{\square}$$

$$k) (a^2)^2 = a^{\square}$$

$$l) (m^4)^{\square} = m^{12}$$

7. Reduce a una sola potencia.

$$a) 5^2 \cdot 5^2$$

$$b) 3^2 \cdot 3^5$$

$$c) 10^5 \cdot 10^2$$

$$d) a^5 \cdot a^5$$

$$e) m^7 \cdot m$$

$$f) x^2 \cdot x^6$$

8. Copia y completa en tu cuaderno.

$$a) (-6)^3 \cdot (-6)^4 = (-6)^{\square}$$

$$b) (+3)^6 \cdot (+3)^2 = 3^{\square}$$

$$c) (-2)^8 \cdot (-2)^2 = 2^{\square}$$

$$d) (-5)^3 \cdot (+5)^2 = (-5)^{\square}$$

9. Reduce a una sola potencia.

$$a) 2^5 \cdot 2^7$$

$$b) (-2)^3 \cdot (+2)^6$$

$$c) (-12)^2 \cdot (+12)^2$$

$$d) (+9)^4 \cdot (-9)^2$$

10. Expresa con una potencia única.

$$a) 2^6 : 2^2$$

$$b) 3^8 : 3^5$$

$$c) 10^7 : 10^6$$

$$d) a^{10} : a^6$$

$$e) m^5 : m$$

$$f) x^8 : x^4$$

11. Copia y completa en tu cuaderno.

$$a) 5^9 : 5^3 = 5^{\square}$$

$$b) (-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{\square}$$

$$c) (-4)^8 : (+4)^3 = 4^{\square}$$

$$d) (+6)^8 : (-6)^5 = (-6)^{\square}$$

12. Reduce a una potencia única.

$$a) (-7)^8 : (-7)^5$$

$$b) 10^9 : (-10)^4$$

$$c) 12^4 : (-12)$$

$$d) (-4)^{10} : (+4)^6$$

13. Reduce a una única potencia.

$$a) (5^2)^3$$

$$b) (2^5)^2$$

$$c) (10^3)^3$$

$$d) (a^5)^3$$

$$e) (m^2)^6$$

$$f) (x^4)^4$$

14. Reduce a una sola potencia.

$$a) [(-2)^2]^2$$

$$b) [(+5)^3]^2$$

$$c) [(+7)^3]^3$$

$$d) [(-4)^2]^4$$

6 Raíces de números enteros

Raíz cuadrada

Recuerda que la **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Los números cuya raíz cuadrada es entera se llaman **cuadrados perfectos**.

Ejemplos

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49 \\ \sqrt{400} = 20 \Leftrightarrow 20^2 = 400 \end{array} \right\} 49 \text{ y } 400 \text{ son cuadrados perfectos}$$

La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

$$\sqrt{(+16)} = \begin{cases} \rightarrow = +4 \rightarrow \text{porque } (+4)^2 = +16 \\ \rightarrow = -4 \rightarrow \text{porque } (-4)^2 = +16 \end{cases}$$

Sin embargo, para evitar ambigüedades, por convenio, tomaremos:

$$+\sqrt{(+16)} = +4 \qquad -\sqrt{(+16)} = -4$$

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

$$\sqrt{(-16)} = x \Leftrightarrow x^2 = -16 \rightarrow \text{Imposible}$$

$\sqrt{(-16)} \rightarrow$ No existe, porque no hay ningún número cuyo cuadrado sea un resultado negativo.

Piensa y practica

1. Escribe las dos soluciones enteras, si existen.

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\sqrt{(+1)}$ | b) $\sqrt{(-1)}$ | c) $\sqrt{(+4)}$ |
| d) $\sqrt{(-4)}$ | e) $\sqrt{(+36)}$ | f) $\sqrt{(-49)}$ |
| g) $\sqrt{(+64)}$ | h) $\sqrt{(-81)}$ | i) $\sqrt{(+100)}$ |

3. Resuelve, si es que existen soluciones.

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\sqrt{(+10)}$ | b) $\sqrt{(-12)}$ | c) $\sqrt{(+70)}$ |
| d) $\sqrt{(-55)}$ | e) $\sqrt{(+72)}$ | f) $\sqrt{(-110)}$ |

2. Ejercicio resuelto

$$\sqrt{20} \rightarrow \begin{cases} (\pm 4)^2 = 16 \text{ (no llega)} \rightarrow +4 < \sqrt{20} < +5 \\ (\pm 5)^2 = 25 \text{ (se pasa)} \rightarrow -5 < \sqrt{20} < -4 \end{cases}$$

Las dos raíces cuadradas de 20 están comprendidas, una, entre 4 y 5, y la otra, entre -5 y -4.

4. Ejercicio resuelto

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

5. Calcula, si existen, y observa las diferencias.

- $\sqrt{16+9}$ y $\sqrt{16} + \sqrt{9}$
- $\sqrt{100-36}$ y $\sqrt{100} - \sqrt{36}$
- $\sqrt{16-25}$ y $\sqrt{16} - \sqrt{25}$

Ejercicios y problemas

Los números enteros

1. Asocia cada enunciado con un número entero.

- a) Ayer gasté cinco euros en un cómic.
 b) Me he encontrado una moneda de dos euros.
 c) Ha llegado una factura de 57 euros.
 d) Al concierto acudieron 2 480 personas.
 e) Se ha obtenido una cosecha de once toneladas de aceituna.
 f) La temperatura ha bajado de cinco grados a dos bajo cero.
 g) Subo desde el primer sótano hasta la quinta planta.

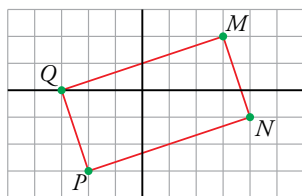
2. Ordena de menor a mayor.

-6, +8, -16, -3, +12, -7, +4, +15, -11

3. Dibuja una recta numérica y representa:

- a) Todos los enteros de una cifra menores que -5.
 b) Todos los enteros de dos cifras mayores que -16 y menores que 1.

4. Escribe las coordenadas de los vértices de este rectángulo.



5. Dibuja un rectángulo igual que el anterior, con el vértice M en el punto (-1, 0), y escribe las coordenadas de los otros tres.

Suma y resta de números enteros

6. Calcula mentalmente.

- a) $5 - 9$ b) $5 - 11$ c) $13 - 9$
 d) $22 - 30$ e) $21 - 33$ f) $46 - 52$
 g) $-8 - 14$ h) $-21 - 15$ i) $-33 - 22$
 j) $-13 + 18$ k) $-22 + 9$ l) $-37 + 21$

7. Calcula.

- a) $5 - 8 - 4 + 3 - 6 + 9$
 b) $10 - 11 + 7 - 13 + 15 - 6$
 c) $9 - 2 - 7 - 11 + 3 + 18 - 10$
 d) $-7 - 15 + 8 + 10 - 9 - 6 + 11$

8. Opera.

- a) $16 + [3 - 9 - (11 - 4)]$
 b) $8 - [(6 - 9) - (7 - 13)]$
 c) $(6 - 15) - [1 - (1 - 5 - 4)]$
 d) $(2 - 12 + 7) - [(4 - 10) - (5 - 15)]$
 e) $[9 - (5 - 17)] - [11 - (6 - 13)]$

Multiplicación y división de números enteros

9. Opera aplicando la regla de los signos.

- a) $(-4) \cdot (+7)$ b) $(-21) : (+3)$
 c) $(-6) \cdot (-8)$ d) $(+30) : (+5)$
 e) $(+10) \cdot (+5)$ f) $(-63) : (-9)$
 g) $(-9) \cdot (-5)$ h) $(+112) : (-14)$

10. Obtén el valor de x en cada caso:

- a) $x \cdot (-9) = +9$ b) $(-5) : x = -1$
 c) $(-5) \cdot x = -45$ d) $x : (-4) = +3$
 e) $x \cdot (+6) = -42$ f) $(+28) : x = -7$

11. Calcula.

- a) $(-2) \cdot [(+3) \cdot (-2)]$ b) $[(+5) \cdot (-3)] \cdot (+2)$
 c) $(+6) : [(-30) : (-15)]$ d) $[(+40) : (-4)] : (-5)$
 e) $(-5) \cdot [(-18) : (-6)]$ f) $[(-8) \cdot (+3)] : (-4)$
 g) $[(-21) : 7] \cdot [8 : (-4)]$ h) $[6 \cdot (-10)] : [(-5) \cdot 6]$

Operaciones combinadas con números enteros

12. Calcula.

- a) $5 - 4 \cdot 3$ b) $2 \cdot 9 - 7$
 c) $4 \cdot 5 - 6 \cdot 3$ d) $2 \cdot 8 - 4 \cdot 5$
 e) $16 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 - 19$ f) $5 \cdot 6 - 21 - 3 \cdot 7 + 12$

Ejercicios y problemas

13. Opera dentro del paréntesis y, después, multiplica.

- a) $-5 \cdot (4 - 9)$
- b) $5 \cdot (9 - 4) - 12$
- c) $1 + 4 \cdot (6 - 10)$
- d) $6 \cdot (8 - 12) - 3 \cdot (5 - 11)$
- e) $4 \cdot (13 - 8) + 3 \cdot (9 - 15)$

14. Calcula y observa que el resultado varía según la posición de los paréntesis.

- a) $17 - 6 \cdot 2$
- b) $(17 - 6) \cdot 2$
- c) $(-10) - 2 \cdot (-3)$
- d) $[(-10) - 2] \cdot (-3)$
- e) $(-3) \cdot (+5) + (-2)$
- f) $(-3) \cdot [(+5) + (-2)]$

15. Calcula paso a paso.

- a) $5 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6) + 13$
- b) $-6 \cdot (+4) + (-3) \cdot 7 + 38$
- c) $(-2) \cdot (+8) - (-5) \cdot (-6) + (-9) \cdot (+4)$
- d) $(-9) \cdot (+5) \cdot (-8) \cdot (+7) - (+4) \cdot (-6)$

Potencias de números enteros

16. Calcula.

- a) $(-2)^1$
- b) $(-2)^2$
- c) $(-2)^3$
- d) $(-2)^4$
- e) $(-2)^5$
- f) $(-2)^6$
- g) $(-2)^7$
- h) $(-2)^8$
- i) $(-2)^9$

17. Calcula.

- a) $(-5)^4$
- b) $(+4)^5$
- c) $(-6)^3$
- d) $(+7)^3$
- e) $(-8)^2$
- f) $(-10)^7$

18. Observa y, después, calcula.

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$$

$$-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$$

$$+2^3 = +(2 \cdot 2 \cdot 2) = +8$$

- a) $(-3)^4$
- b) $(+3)^4$
- c) -3^4
- d) $+3^4$

19. Expresa como potencia de un único número.

- a) $10^4 : 5^4$
- b) $12^7 : (-4)^7$
- c) $(-9)^6 : 3^6$
- d) $2^6 \cdot 2^6$
- e) $(-4)^5 \cdot (-2)^5$
- f) $2^4 \cdot (-5)^4$

20. Reduce a una sola potencia.

- a) $(x^2)^5$
- b) $(m^4)^3$
- c) $[a^{10} : a^6]^2$
- d) $(a \cdot a^3)^3$
- e) $(x^5 : x^2) \cdot x^4$
- f) $(x^6 \cdot x^4) : x^7$

Raíces de números enteros

21. Calcula.

- a) $\sqrt{49}$
- b) $\sqrt{7^2}$
- c) $\sqrt{-49}$
- d) $\sqrt{15^2}$
- e) $\sqrt{225}$
- f) $\sqrt{-225}$
- g) $\sqrt{2500}$
- h) $\sqrt{50^2}$
- i) $\sqrt{-2500}$

22. Calcula.

- a) $\sqrt{2^2}$
- b) $\sqrt{9^2}$
- c) $\sqrt{13^2}$
- d) $\sqrt{a^2}$
- e) $\sqrt{m^2}$
- f) $\sqrt{y^2}$

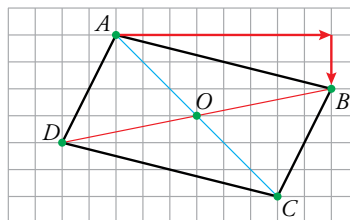
23. Observa el ejemplo y reduce.

$$\bullet \sqrt{x^6} = \sqrt{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt{(x^3)^2} = x^3$$

- a) $\sqrt{(x^2)^2}$
- b) $\sqrt{(m^3)^2}$
- c) $\sqrt{(a^4)^2}$
- d) $\sqrt{x^4}$
- e) $\sqrt{m^6}$
- f) $\sqrt{a^8}$

Interpreta, describe, exprésate

24. En el siguiente paralelogramo definimos, con dos números enteros, el desplazamiento que nos lleva desde el punto A al punto B .




Desplazamiento desde A hasta B



$$[+8, -2]$$

- a) ¿Cómo definiríamos, con el mismo código, el desplazamiento desde B hasta A ?
- b) ¿De qué vértice a qué vértice irías con el desplazamiento $[-2, -4]$?
- c) Expresa, con el mismo código, los desplazamientos que llevan desde el centro O a cada uno de los vértices.


25.  Una plataforma petrolífera marina se sostiene sobre flotadores, a 55 metros sobre la superficie del agua, anclada en una zona con una profundidad de 470 metros.

Sobre ella, hay una grúa de 35 metros de altura, de la que pende un cable y, en su extremo, un batiscafo auxiliar que se utiliza para los trabajos de mantenimiento de la plataforma.

En este momento, la grúa ha largado 120 metros de cable y sigue bajando el batiscafo a razón de un metro cada 3 segundos.

- a) ¿Cuánto tardará el batiscafo en llegar al fondo?
 b) ¿Cuánto tardará la grúa en izar el batiscafo hasta la superficie de la plataforma, si sube a la misma velocidad que baja?

Resuelve problemas


26.  El brazo mecánico de un robot ha sido programado de la siguiente forma:


- Encendido: inicio del programa.


- Primer minuto: avanza 1 cm y retrocede 5 cm.
- Segundo minuto: avanza 2 cm y retrocede 5 cm.
- Tercer minuto: avanza 3 cm y retrocede 5 cm.

Y así continúa, hasta que, al final de un determinado minuto, se encuentra en la posición inicial. Entonces, repite el proceso.

¿Cuántas veces repite el ciclo en hora y media? Justifica la respuesta.

27.  Tengo dos cuentas en el mismo banco, una con algo de dinero y la otra en números rojos. La suma de los saldos es 6 €, y la diferencia 22 €. ¿Cuál es el saldo de cada cuenta?

28.  La suma de dos números enteros es -22 , y la suma de sus valores absolutos, 70. ¿Cuáles son esos números?

29.  Si escribes todos los números enteros desde -50 hasta $+50$, ¿cuántas veces habrás utilizado la cifra 7? ¿Y la cifra 5? ¿Y la cifra 3?

Autoevaluación

1. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada uno de estos números.

- a) (-1) b) $(+13)$ c) (-16) d) $(+9)$

2. Copia y completa.

- a) $|-6| = \square$ b) $|+6| = \square$ c) $-|+6| = \square$

3. Ordena de menor a mayor.

$-7, -13, +8, -1, -11, +5, 0, +10, -24$

4. Quita paréntesis.

- a) $+(+13)$ b) $- (+17)$ c) $+(-15)$ d) $-(-23)$

5. Calcula.

- a) $6 - 11 + (9 - 13)$ b) $2 - (5 - 8)$
 c) $(7 - 15) - (6 - 2)$ d) $5 - [2 - (3 - 2)]$

6. Calcula.

- a) $4 \cdot 3 - 13$ b) $5 \cdot (-2) + 3 \cdot 4$ c) $20 - 4 \cdot 6 - 12 : (-2)$

7. Calcula.

- a) $4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-8) - 4 \cdot (-3)$
 b) $(10 - 3 \cdot 6) - 2 \cdot [5 + 3 \cdot (4 - 7)]$

8. Calcula.

- a) 5^2 b) $(-5)^2$ c) $(-5)^3$

9. Reduce a una sola potencia.

- a) $3^5 \cdot 3^2$ b) $(-12)^4 : (-3)^4$
 c) $2^3 \cdot 4^3$ d) $(-5)^7 : (-5)^5$

10. Opera y calcula.

- a) $10^4 : (5^3 \cdot 2^3)$
 b) $(-15)^6 : [(-5)^4 \cdot 3^4]$
 c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 6^5$

11. Calcula, si existen, estas raíces:

- a) $\sqrt{(+9)}$ b) $\sqrt{(-100)}$ c) $\sqrt{(-2)^2}$

12. La suma de dos números enteros es 4, y la suma de sus valores absolutos, 16. ¿Qué números son?

3

Los números decimales y las fracciones

En la Europa anterior a la Edad Moderna, los números enteros se expresaban en el sistema decimal, y las partes fraccionarias, en el sistema sexagesimal.



Por ejemplo, para expresar el número decimal 12,84 se ponía: 12; 50, 24 que significa:

$$12,84 \rightarrow 12 + \frac{50}{60} + \frac{24}{60^2}$$

¡Qué complicación! Pero no se sabía hacer de otra forma.

Esto que ahora nos parece tan engorroso se debe a la inercia en el uso del sistema sexagesimal, que tiene su origen en la antigua Babilonia, y a la lenta aceptación del sistema decimal, traído por los árabes desde la India, hacia el siglo VIII.



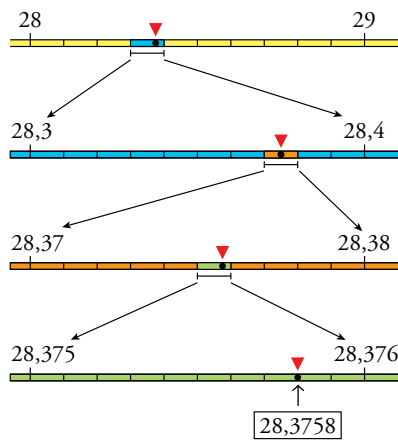
A mediados del siglo XVI, algunos matemáticos europeos, como el flamenco **Simon Stevin** (1548-1620), empezaron a sustituir las fracciones sexagesimales por las decimales, al constatar que con ellas se agilizaba el cálculo.

$$12 + \frac{8}{10} + \frac{4}{10^2} \rightarrow 12 + \frac{84}{100} \rightarrow 12,84$$

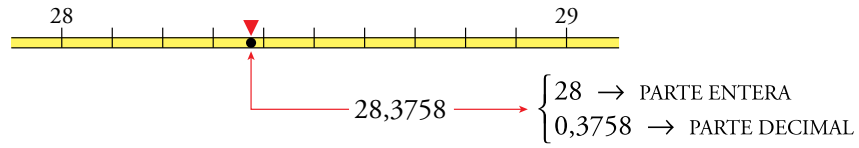
Con el uso, la notación basada en el sistema decimal fue evolucionando hacia la simplificación de su escritura para fijarse, a principios del XVII, en la que usamos en la actualidad.

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Los números decimales



Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los números decimales.



La parte decimal representa una cantidad menor que la unidad y sus órdenes de unidades tienen la misma estructura que los de la parte entera:

Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

1 unidad = 10 décimas $\longrightarrow 1 = 10 \cdot \frac{1}{10} = 10 \cdot 0,1$
 1 décima = 10 centésimas $\longrightarrow 0,1 = 10 \cdot \frac{1}{100} = 10 \cdot 0,01$
 1 centésima = 10 milésimas $\longrightarrow 0,01 = 10 \cdot \frac{1}{1000} = 10 \cdot 0,001$

	MILARES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS	MILÉSIMAS	DIEZMILÉSIMAS	CIENMILÉSIMAS	MILLONÉSIMAS	
...	M	C	D	U,	d	c	m	dm	cm	mm	...
			2	8,	3	7	5	8			

→ Veintiocho unidades y tres mil setecientos cincuenta y ocho diezmilésimas

$$28,3758 = 20 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000} = 28 + \frac{3758}{10000}$$

En la web Recuerda la lectura y la escritura de números decimales.

Clases de números decimales

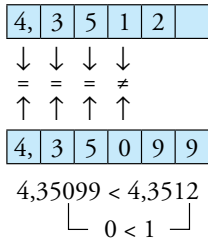
Conviene que sepas diferenciar los distintos tipos de números decimales que te encontrarás en mediciones, resultados de operaciones y problemas.

- **Decimales exactos:** tienen un número limitado de cifras decimales.
 $4,75$
 DOS CIFRAS DECIMALES
- **Decimales periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. Pueden ser de dos tipos:
 - Periódico puro:** $7,151515\dots = 7,\overline{15}$
 PERIODO
 - Periódico mixto:** $8,24666\dots = 8,24\overline{6}$
 PARTE DECIMAL NO PERIÓDICA PERIODO
- **Decimales no exactos y no periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.
 $\sqrt{2} = 1,4124135\dots$

Nombre y apellidos: Fecha:

Recuerda

Para comparar dos números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.

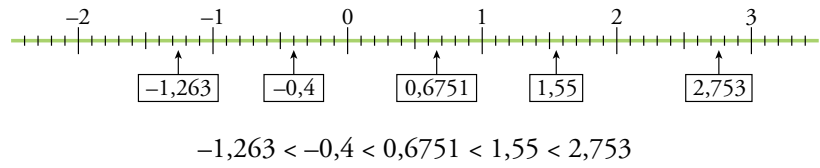


En la web

Practica la representación de números decimales en la recta numérica.

Cada número decimal se representa con un punto de la recta numérica.

Cada punto de la recta numérica se localiza mediante un número decimal.



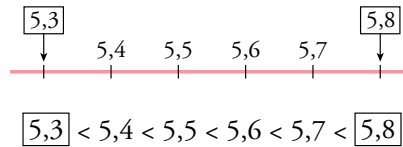
Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.

Si elegimos dos números cualesquiera, el menor queda a la izquierda, y el mayor, a la derecha.

Entre dos números decimales siempre hay otro decimal

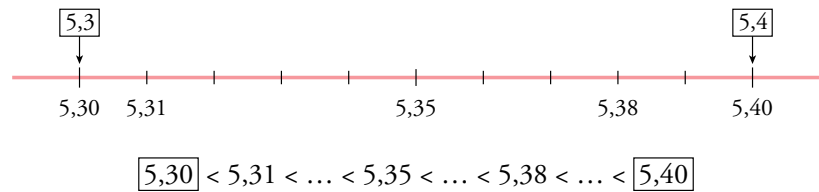
- Tomemos dos decimales cualesquiera; por ejemplo, 5,3 y 5,8.

Es evidente que entre ambos hay otros números.



- Tomemos, ahora, dos consecutivos de los anteriores; por ejemplo, 5,3 y 5,4.

Ambos números se diferencian en una décima, que se divide en diez centésimas.



El razonamiento puede continuar indefinidamente, y repetirse para cualquier otro par de números.

Entre dos números decimales cualesquiera hay infinitos decimales.

REGLA PRÁCTICA

El proceso anterior te resultará más claro si aumentas el número de cifras decimales añadiendo ceros a la derecha.

Ejemplo

Intercalamos varios números decimales entre 2,58 y 2,59:

$$\left. \begin{array}{l} 2,58 = 2,580 \\ 2,59 = 2,590 \end{array} \right\} \Rightarrow 2,580 < 2,581 < \dots < 2,589 < 2,590$$

Ejemplo

Intercalar un número decimal entre:

$$\begin{array}{ccc} 5,09 < \dots < 5,1 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 5,090 < 5,095 < 5,100 \end{array}$$

Aproximación de un número decimal a un determinado orden de unidades

En ocasiones, como resultado del cálculo, obtenemos números con excesivas cifras decimales que resultan de manejo engorroso y aportan información poco significativa. En estos casos, sustituimos los resultados por otros más manejables de *valor aproximado*.

En la web

Practica la aproximación de números decimales.

Ejemplo

Para recorrer los 55 metros que van desde el portal de su casa hasta el quiosco de la esquina, Andrés ha necesitado 75 pasos, y Julia, 80 pasos. ¿Cuánto mide aproximadamente el paso de Andrés? ¿Y el de Julia?



$$55 : 75 = 0,73333... \leftarrow \text{calculadora} \rightarrow 55 : 80 = 0,6875$$



El resultado 0,7333... está más cerca de 0,73 que de 0,74.

Andrés avanza 0,73 m en cada paso.



El resultado 0,6875 está más cerca de 0,69 que de 0,68.

Julia avanza 0,69 m en cada paso.

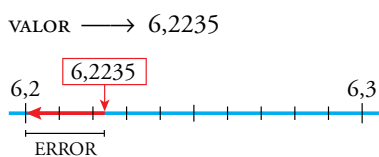
La manipulación de los resultados anteriores recibe el nombre de *redondeo*.

El **redondeo** consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden de unidades, sumando uno a la última cifra resultante cuando la primera cifra suprimida es 5 o mayor que 5.

En la web

Practica el redondeo de números decimales.

Ten en cuenta



REDONDEO A LAS DÉCIMAS $\rightarrow 6,2$
 ERROR $\rightarrow 6,2235 - 6,2 = 0,0235 < 0,05$
 ↓
 MEDIA DÉCIMA

El error cometido en el redondeo es inferior a media unidad del orden al que se aproxima.

Error cometido en el redondeo

En el redondeo damos un valor aproximado; por tanto, cometemos voluntariamente un error.

	VALOR REAL	REDONDEO	ERROR	COTA DE ERROR
ANDRÉS	0,7333...	0,73	$0,7333... - 0,73 = 0,00333...$	$< 0,005$
JULIA	0,6875	0,69	$0,6875 - 0,69 = 0,0025$	$< 0,005$

En ambos casos hemos redondeado a las centésimas y el error cometido es menor que cinco milésimas, es decir, **menor que media centésima**.

Decimos que media centésima es una **cota del error** cometido.

Nombre y apellidos: Fecha:

Piensa y practica

1. Escribe cómo se leen las cantidades de la tabla:

C	D	U,	d	c	m			
		0,	0	3	7			
	1	5,	4	6	8			
		0,	0	0	2	4		
4	3	5	8,	6				

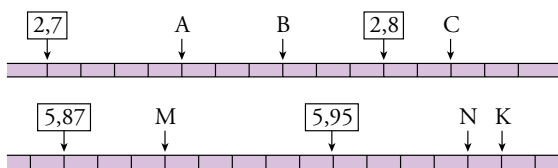
2. Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:

- a) 1,37
- b) 5,048
- c) 2,0024
- d) 0,00538
- e) 0,000468

3. Escribe con cifras.

- a) Tres unidades y cinco centésimas.
- b) Cuarenta y tres milésimas.
- c) Ocho cienmilésimas.
- d) Doscientas diecinueve millonésimas.
- e) Veintitrés millonésimas.

4. Escribe el número asociado a cada letra:



5. Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

A = 8,7 B = 9 C = 9,4 D = 10

6. Dibuja una recta numérica y representa los números siguientes sobre ella:

M = -0,02 N = 0,07 K = 0,1 H = 0,15

7. Ordena de menor a mayor en cada caso:

- a) 7,4; 6,9; 7,09; 7,11; 5,88
- b) 3,9; 3,941; 3,906; 4,001; 4,04
- c) 0,039; 0,01; 0,06; 0,009; 0,075

8. Copia y completa en tu cuaderno con los signos <, > o =, según corresponda.

2,5 2,50 6,1 6,987
 3,009 3,01 4,13 4,1300

9. Intercala un número decimal entre:

- a) 2,2 y 2,3
- b) 4,01 y 4,02
- c) 1,59 y 1,6
- d) 8 y 8,1

10. Redondea a las décimas.

- a) 5,48
- b) 2,8346
- c) 3,057

11. Redondea a las centésimas.

- a) 6,284
- b) 1,53369
- c) 0,79462

12. Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS
8,53	
5,884	
2,4̄	
5,17̄	
4,083	
6,995	

13. Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
6,527	
0,4639	
1,0894	
2,096	
5,15̄	
3,24̄	

Ya sabes sumar, restar y multiplicar números decimales. Como repaso, vamos a revisar este recibo de teléfono:

CUOTAS ABONO	
15,68	
+ 26	
<u>41,68</u>	

COSTE LLAMADAS	
MÓVILES	INTERNACIONALES
0,241	0,425
× 51	× 28
<u>241</u>	<u>3 400</u>
+ 12 05	+ 8 50
<u>12,291</u>	<u>11,900</u>
TOTAL	
12,2910	
+ 11,9000	
<u>24,1910</u>	

TELEFOX				IMPORTE	SUMAS
CUOTAS ABONO					
A	- LÍNEA BÁSICA			15,6800	
	- CONEXIÓN INTERNET			26,0000	41,6800
CONSUMO LLAMADAS		N.º LLAM.	TIEMPO (minutos)	TARIFAS (€/min)	
B	- MÓVILES	36	51	0,2410	12,2910
	- INTERNACIONALES	2	28	0,4250	11,9000
					24,1910
DESCUENTOS					
C	- AHORRO NÚMEROS MÓVILES			5,8400	
	- PROMOCIÓN FAMILIAS			3,0742	8,9142
TOTAL (base imponible A + B - C)					56,9568
IVA (21%)					11,9609
TOTAL					68,9177

DESCUENTOS	
5,84	
+ 3,0742	
<u>8,9142</u>	

TOTAL FACTURA	
41,68	→ CUOTAS
+ 24,191	→ COSTE LLAMADAS
<u>65,871</u>	
- 8,9142	→ DESCUENTOS
<u>56,9568</u>	
+ 11,9609	→ IVA
<u>68,9177</u>	

Las operaciones necesarias se realizan al margen y se recogen en las siguientes expresiones:

CÁLCULO BASE IMPONIBLE (A + B - C)

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{(15,6800 + 26,0000)}^{\text{CUOTA ABONO}} + \overbrace{(51 \cdot 0,2410 + 28 \cdot 0,4250)}^{\text{CONSUMO}} - \overbrace{(5,8400 + 3,0742)}^{\text{DESCUENTOS}} = \\
 & = 41,6800 + (12,2910 + 11,9000) - 8,9142 = \\
 & = 41,6800 + 24,1910 - 8,9142 = 65,8710 - 8,9142 = 56,9568
 \end{aligned}$$

CÁLCULO DEL IVA (21%)

$$(56,9568 \cdot 21) : 100 = 11,960928 \xrightarrow[\text{A LAS DIEZMILÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 11,9609$$

CÁLCULO DEL TOTAL A PAGAR

$$\overbrace{56,9568}^{A + B - C} + \overbrace{11,9609}^{\text{IVA}} = 68,9177 \xrightarrow[\text{A LAS CENTÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 68,92 \text{ €}$$

- Para **sumar** o **restar** números decimales, se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de unidades correspondientes.
- Para **multiplicar** números decimales, se opera como si fueran enteros y, después, se separan en el producto tantas cifras decimales como las que reúnen los dos factores.

En la web

Practica el cálculo mental de operaciones con números decimales.

En la web

Practica el algoritmo de la división con números decimales.

División de números decimales

Vamos a repasar ahora los distintos casos de división con números decimales.

Para cada uno, partiremos de un problema que da sentido a la operación.

■ DIVISIONES CON EL DIVISOR ENTERO

Problema 1

Una máquina tejedora ha fabricado una pieza de tela de 25 metros en 8 minutos.

¿Cuántos metros teje en un minuto?

$$\begin{array}{r} 25,000 \overline{) 8} \\ 10 \\ \underline{20} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Solución: Teje 3,125 m en un minuto.

Problema 2

En un obrador de pastelería se han empleado 8,2 kg de harina para la fabricación de 15 tartas iguales.

¿Qué cantidad de harina lleva cada tarta?

$$\begin{array}{r} 8,2 \overline{) 15} \\ 070 \\ \underline{100} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$$

Solución: Cada tarta lleva $0,54\overline{6} = 0,547$ kg.

Para obtener **cifras decimales en el cociente:**

- Al bajar la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para alcanzar la aproximación deseada.

Recuerda

Si se multiplican el dividendo y el divisor por el mismo número, el cociente no varía.

$$\begin{array}{ccc} 6 : 2 = 3 & \leftarrow & \text{COCIENTES IGUALES} \\ \times 10 \downarrow & & \downarrow \times 10 \\ 60 : 20 = 3 & \leftarrow & \end{array}$$

■ DIVISIONES CON EL DIVISOR DECIMAL

Problema 3

Dos kilos y medio de manzanas han costado 4 euros.

¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

$$\begin{array}{r} 4 : 2,5 \\ \times 10 \quad \downarrow \quad \times 10 \\ 40,0 \overline{) 25} \\ 150 \\ \underline{00} \end{array}$$

Solución: Un kilo cuesta 1,60 €.

Problema 4

Por un consumo de 24,88 metros cúbicos de agua nos ha llegado una factura de 93,30 €.

¿A cómo sale el metro cúbico?

$$\begin{array}{r} 93,3 : 24,88 \\ \times 100 \quad \downarrow \quad \times 100 \\ 9330,00 \overline{) 2488} \\ 18660 \\ \underline{12440} \\ 0000 \end{array}$$

Solución: Un metro cúbico cuesta 3,75 €.

Cuando hay **decimales en el divisor:**

Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor. La nueva división tiene el mismo cociente y el divisor entero.

En la web

Cálculo mental con números decimales.

Operaciones combinadas

En las expresiones de números decimales con paréntesis y operaciones combinadas seguiremos las mismas normas que con los enteros en cuanto a la prioridad de las operaciones, la regla de los signos, etc.

Regla de los signos

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= + \\ (+) \cdot (-) &= - \\ (-) \cdot (+) &= - \\ (-) \cdot (-) &= + \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} 1,5 - 0,5 \cdot (3,24 : 0,75 - 0,6 : 0,1) \\ 1,5 - 0,5 \cdot (4,32 - 6) \\ 1,5 - 0,5 \cdot (-1,68) \\ 1,5 + 0,84 \\ 2,34 \end{aligned}$$

Prioridad de las operaciones:

- Primero, los paréntesis.
- Después, las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, las sumas y las restas.

$$\begin{aligned} 1,5 - 0,5 \cdot (3,24 : 0,75 - 0,6 : 0,1) &= 1,5 - 0,5 \cdot (4,32 - 6) = \\ &= 1,5 - 0,5 \cdot (-1,68) = \\ &= 1,5 + 0,84 = 2,34 \end{aligned}$$

Ten en cuenta



Úsala siguiendo las recomendaciones del profesor o de la profesora y solo cuando te lo pidan.

Los decimales y la calculadora

La calculadora, si se usa adecuadamente, es una magnífica herramienta para evitar cálculos largos y tediosos, y para comprobar soluciones.

Sin embargo, la precisión de la máquina en los resultados es superior a la que necesitamos para resolver la mayoría de problemas y situaciones cotidianas.

Por eso, normalmente, se hace necesario interpretar los resultados teniendo en cuenta el contexto en el que se trabaja.

Ejemplo

Se ha utilizado medio kilo de plata para fabricar 24 medallas destinadas a un campeonato internacional de natación. ¿Cuánta plata contiene cada medalla?

Solución:

$$500 \text{ gramos} : 24 \rightarrow \boxed{20.833333} \begin{cases} \rightarrow 21 \text{ gramos} \\ \rightarrow 20,8 \text{ gramos} \end{cases}$$

En este caso, parece razonable aproximar a los gramos, 21 g, o como mucho, a las décimas de gramo, 20,8 g.

Ejemplo

¿Cuánto debe cobrar el frutero por un melón que pesa 2,410 kg y que se vende a 1,99 €/kg?

Solución:

$$2,410 \text{ kg} \cdot 1,99 \text{ €/kg} \rightarrow \boxed{4.7959} \rightarrow 4,80 \text{ €}$$

En este caso, a diferencia del anterior, es norma redondear a los céntimos de euro.

En la web

Resuelve el problema "De compras".



Piensa y practica

1. Responde mentalmente.

- a) $0,75 + 0,25$
- b) $0,75 - 0,25$
- c) $1,80 + 1,20$
- d) $1,80 - 1,20$
- e) $2,30 + 1,80$
- f) $2,30 - 1,80$
- g) $3,50 + 1,75$
- h) $3,50 - 1,75$

2. Calcula.

- a) $2,37 + 0,356$
- b) $5,86 - 1,749$
- c) $13,2 + 4,08 + 2,635$
- d) $15,4 - 6,843$
- e) $7,04 + 12,283 + 0,05$
- f) $0,35 - 0,0648$

3. Resuelve.

- a) $2,37 - 1,26 + 0,8 - 0,35$
- b) $2,50 - 1,25 - 1,75 - 0,20$
- c) $13,48 - 10,7 + 5,328 - 6,726$
- d) $5,6 - 8,42 - 4,725 + 1,48$

4. Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

- a) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre...
- b) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre...
- c) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre...

5. Calcula mentalmente.

- a) $12 \cdot 0,5$
- b) $28 \cdot 0,5$
- c) $0,02 \cdot 0,5$
- d) $8 \cdot 0,25$
- e) $1,2 \cdot 0,25$
- f) $0,24 \cdot 0,25$
- g) $17 \cdot 0,1$
- h) $2,3 \cdot 0,1$
- i) $0,6 \cdot 0,1$

6. Calcula.

- a) $6,3 \cdot 1,24$
- b) $0,44 \cdot 2,375$
- c) $0,016 \cdot 0,0025$
- d) $143 \cdot 0,068$
- e) $5,48 \cdot 2,63$
- f) $0,15 \cdot 1,01$

7. Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

- a) Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por...
- b) Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por...
- c) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar por...

8. Divide mentalmente.

- a) $7 : 0,5$
- b) $0,3 : 0,5$
- c) $2,3 : 0,5$
- d) $2 : 0,25$
- e) $0,6 : 0,25$
- f) $1,2 : 0,25$
- g) $8 : 0,1$
- h) $0,7 : 0,1$
- i) $4,8 : 0,1$

9. Calcula el cociente exacto o, como máximo, con tres cifras decimales.

- a) $8 : 6$
- b) $218 : 16$
- c) $3 : 4$
- d) $12 : 536$
- e) $149,04 : 23$
- f) $2,58 : 15$

10. Sustituye cada división por otra equivalente con el divisor entero. Después, calcula el cociente exacto o con tres cifras decimales.

- a) $6 : 0,2$
- b) $13 : 0,75$
- c) $53 : 4,11$
- d) $4 : 0,009$
- e) $45,6 : 3,8$
- f) $23,587 : 5,1$
- g) $2,549 : 8,5$
- h) $6,23 : 0,011$

11. Ejercicio resuelto

Aproximar a las centésimas el cociente de la división $17 : 2,45$.

$$\begin{array}{r}
 1700,000 \\
 230 \ 0 \\
 09 \ 50 \\
 2 \ 150 \\
 190
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \overline{) 2,45} \\
 6,938
 \end{array}$$

APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS } $\rightarrow 6,94$

12. Aproxima a las centésimas cada cociente:

- a) $5 : 6$
- b) $7 : 9$
- c) $6 : 3,5$
- d) $2,7 : 5,9$

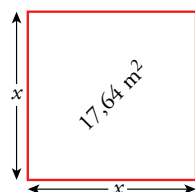
13. Calcula.

- a) $2,6 \cdot 100$
- b) $5,4 : 10$
- c) $0,83 \cdot 10$
- d) $12 : 100$
- e) $0,0048 \cdot 1000$
- f) $350 : 1000$

4 Raíz cuadrada de un número decimal

Aplicación

Calcular el lado de un cuadrado conociendo su superficie.



$$x \cdot x = x^2 = 17,64$$

$$x = \sqrt{17,64} = 4,2 \text{ m}$$

Ya sabes que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \quad \sqrt{0,25} = 0,5 \Leftrightarrow 0,5^2 = 0,25$$

También sabes que hay muchos números cuya raíz no es exacta. En esos casos, podemos tantear aproximaciones con tantas cifras decimales como queramos.

Como ejemplo, vamos a calcular sucesivas aproximaciones de $\sqrt{7,2}$.

$$\begin{array}{l} 2^2 = 4 \longrightarrow \text{no llega} \\ 3^2 = 9 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \end{array}} \right\} 2 < \sqrt{7,2} < 3$$

$$\begin{array}{l} 2,6^2 = 6,76 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2,7^2 = 7,29 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2,6^2 = 6,76 \\ 2,7^2 = 7,29 \end{array}} \right\} 2,6 < \sqrt{7,2} < 2,7$$

$$\begin{array}{l} 2,68^2 = 7,1824 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2,69^2 = 7,2361 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2,68^2 = 7,1824 \\ 2,69^2 = 7,2361 \end{array}} \right\} 2,68 < \sqrt{7,2} < 2,69$$

La raíz cuadrada en la calculadora

Normalmente, para calcular la raíz cuadrada, usamos la tecla $\sqrt{}$ de la calculadora, que nos ofrece con comodidad la aproximación deseada.

Ejemplo

Calcular $\sqrt{35}$.

a) Con dos cifras decimales.

En la calculadora obtenemos $\sqrt{35} = 5,9160797\dots$

Para dar la raíz con dos cifras decimales, aproximamos a las centésimas; es decir, $\sqrt{35} = 5,92$.

b) Aproximando el resultado a las milésimas.

$$\sqrt{35} = 5,916$$

Piensa y practica

1. Calcula las siguientes raíces exactas:

- a) $\sqrt{0,04}$ b) $\sqrt{0,49}$ c) $\sqrt{0,81}$
 d) $\sqrt{0,0001}$ e) $\sqrt{0,0121}$ f) $\sqrt{0,1225}$

3. Obtén las siguientes raíces con dos cifras decimales.

Ayúdate con la calculadora.

- a) $\sqrt{7,84}$ b) $\sqrt{56}$ c) $\sqrt{39,0625}$

2. Obtén por tanteo, con una cifra decimal:

- a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{11,5}$ c) $\sqrt{150}$

4. Usa la calculadora y redondea a las milésimas.

- a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2,54}$ c) $\sqrt{76,38}$

5 Las fracciones

En la web

Practica con el concepto de fracción.

En la web

Repasa el concepto de fracciones equivalentes.

Recuerda

¿Cómo reconocer fracciones equivalentes?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

En las fracciones equivalentes, los productos de los términos cruzados son iguales.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \leftrightarrow \frac{2 \cdot 15}{30} = \frac{6 \cdot 5}{30}$$

En la web

Practica la simplificación de fracciones.

En la web

Practica el cálculo de fracciones irreducibles.

Piensa y practica

1. Escribe tres fracciones equivalentes a:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{6}{8}$

c) $\frac{5}{50}$

2. Divide, expresa en forma decimal y comprueba que

las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

3. Obtén en cada caso la fracción irreducible.

a) $\frac{15}{18}$

b) $\frac{30}{54}$

c) $\frac{25}{75}$

4. Calcula, en cada igualdad, el término desconocido:

a) $\frac{8}{20} = \frac{10}{x}$

b) $\frac{25}{x} = \frac{15}{9}$

c) $\frac{x}{21} = \frac{12}{28}$

Ya conoces las fracciones. Vamos a recordar ahora algunos aspectos importantes para avanzar en la unidad.

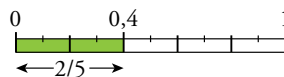
Fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad.

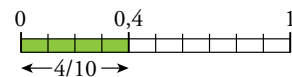
$$\frac{2}{5} \left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \color{green}{\blacksquare} & \color{green}{\blacksquare} & & \\ \hline \end{array} \right] = \frac{4}{10} \left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \color{green}{\blacksquare} & \color{green}{\blacksquare} & & \\ \hline \color{green}{\blacksquare} & \color{green}{\blacksquare} & & \\ \hline \end{array} \right]$$

Dos fracciones equivalentes tienen el mismo valor numérico.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$$



$$\frac{4}{10} = 4 : 10 = 0,4$$



PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

Si se multiplican los dos miembros de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Como consecuencia de la propiedad anterior, podemos afirmar:

Si se dividen los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

Esta transformación recibe el nombre de **simplificación de fracciones**.

Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible**.

$$\frac{12}{30} = \frac{12 : 2}{30 : 2} = \frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5} \rightarrow \text{FRACCIÓN IRREDUCIBLE}$$

Reducción de fracciones a común denominador

Comparar, sumar y restar fracciones es muy sencillo cuando todas tienen el mismo denominador. Por eso, cuando no lo tienen, las sustituimos por otras equivalentes con igual denominador.

Analiza el proceso que se ha de seguir en el ejemplo que viene a continuación.

Ejemplo

Vamos a ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{30}$ y $\frac{11}{20}$.

- Elegimos como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m. } (12, 30, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

- En cada fracción, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, el adecuado para obtener 60 en el denominador:

$$\left. \begin{array}{l} 60 : 12 = 5 \rightarrow \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60} \\ 60 : 30 = 2 \rightarrow \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60} \\ 60 : 20 = 3 \rightarrow \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60} \end{array} \right\} \underbrace{\frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60}}_{\downarrow}$$

Ahora, ya podemos ordenar las fracciones: $\frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}$

Recuerda

Para obtener el mínimo común múltiplo de varios números:

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman los factores primos comunes y los no comunes, con el mayor exponente.

En la web



Practica la comparación de fracciones.

Para reducir fracciones a común denominador:

- Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Piensa y practica

5. Reduce a común denominador, poniendo como denominador común el que se indica en cada caso.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \rightarrow$ Denominador común: 8

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9} \rightarrow$ Denominador común: 18

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9} \rightarrow$ Denominador común: 36

d) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10} \rightarrow$ Denominador común: 20

6. Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}$

f) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{22}{45}$

Las notaciones fraccionaria y decimal son formas numéricas y, como verás ahora, muchas cantidades se pueden expresar tanto en la una como en la otra.

Paso de fracción a decimal

Ya sabes que una fracción es una división indicada cuyo resultado es un decimal exacto o un decimal periódico.

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6$$

DECIMAL
EXACTO

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1,\widehat{6}$$

DECIMAL
PERIÓDICO PURO

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8\widehat{3}$$

DECIMAL
PERIÓDICO MIXTO

Toda fracción se puede pasar a forma decimal. Para ello, se divide el numerador entre el denominador. Sin embargo, lo contrario no es cierto: solo se pueden pasar a fracción los decimales exactos y los periódicos.

Decimal exacto. Paso a fracción

Un decimal exacto se transforma en fracción quitándole la coma y dividiéndolo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se hayan suprimido.

Ejemplo

$$0,7 = \frac{7}{10}$$

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

$$0,875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$$

Piensa y practica

1. Expresa en forma decimal.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{2}{9}$

f) $\frac{17}{110}$

2. Expresa en forma de fracción.

a) 0,5

b) 0,8

c) 1,6

d) 0,04

e) 1,35

f) 0,325

3. Tantea, prueba y resuelve:

a) Comprueba con la calculadora.

$$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0,11111\dots$$

$$\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0,22222\dots$$

$$\frac{3}{9} = 3 : 9 = 0,33333\dots$$

b) Busca la fracción generatriz de:

0,44444...

0,55555...

1,55555...

Ejercicios y problemas

Sistema de numeración decimal

1. Copia y completa.

a) 5 décimas = ... milésimas

b) 2 milésimas = ... millonésimas

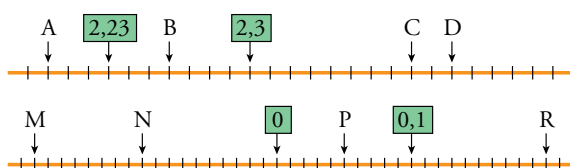
c) 6 cienmilésimas = ... centésimas

d) 8 millonésimas = ... milésimas
2. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) 5,1 - 5,099 - 4,83 - 4,9 - 4,99

b) 0,21 - 0,03 - 0,15 - 0,209 - 0,101 - 0,121

3. Escribe el número asociado a cada letra.



4. Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

NÚMERO	2,7	5,29	4,651
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES			
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS			

5. Berta pesa 52 kg y 450 gramos. María pesa 52,5 kg. Jacinto pesa más que Berta, pero menos que María.

a) ¿Qué puedes decir del error cometido al estimar el peso de Jacinto en 52 kilos?

b) ¿Y al estimarlo en cincuenta y dos kilos y medio?

Operaciones con números decimales

6. Calcula.

a) $3,2 - 1,63 - 0,528$

b) $0,85 + 1,23 - 0,638 - 0,4$

c) $3,458 - (6,7 - 4,284)$

d) $5,2 - (2,798 + 1,36)$

7. Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las centésimas.

a) $2,63 \cdot 0,84$ b) $0,27 \cdot 0,086$

c) $62,35 : 12$ d) $5,27 : 153$

e) $\sqrt{851}$ f) $\sqrt{13,29}$

8. Obtén el resultado con ayuda de la calculadora y redondea a las centésimas.

a) $8,73 : 1,7 - 3,42 : 2,1$

b) $(8,73 : 1,7 - 3,42) : 2,1$

9. Opera.

a) $5,8 - 3,2 \cdot 1,6 - 0,29$

b) $(5,8 - 3,2) \cdot 1,6 - 0,29$

c) $5,8 - 3,2 \cdot (1,6 - 0,29)$

d) $5,8 - (3,2 \cdot 1,6 - 0,29)$

10. Para multiplicar por 0,1 podemos dividir entre diez, como ves en el ejemplo.

• $80 \cdot 0,1 = 80 : 10 = 8$

¿Por qué número hay que dividir para ...

- a) ... multiplicar por 0,01?
- b) ... multiplicar por 0,001?

11. Copia y completa en tu cuaderno este cuadrado mágico.

La suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal ha de ser la misma.

	1,23	
1,08	0,03	0,78

12. Continúa en tres términos cada serie.

a) $2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 - \dots$

b) $5 - 1 - 0,2 - 0,04 - \dots$

c) $0,24 - 1,2 - 6 - 30 - \dots$

13. Calcula, con dos cifras decimales, la nota media de Julián en cada asignatura.

a) Lengua: $8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 7$

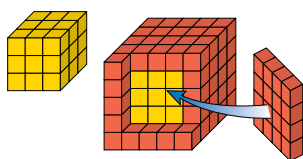
b) Matemáticas: $5,2 - 6 - 5,8 - 4,5 - 7,1 - 5,7$

Ejercicios y problemas

14. ¿Verdadero o falso?
- El producto de un decimal por un entero es siempre decimal.
 - El producto de dos números decimales puede ser entero.
 - Al dividir dos números decimales nunca se obtiene un entero.
 - La raíz cuadrada de un número decimal siempre es menor que el número.
 - La raíz cuadrada de un número decimal nunca es un decimal exacto.
15. Expresa en horas como número decimal y fracción.
- 48 min
 - 66 min
 - 6 120 s
16. Pasa a horas, minutos y segundos.
- 8,42 h
 - 123,45 min
 - 12 746 s

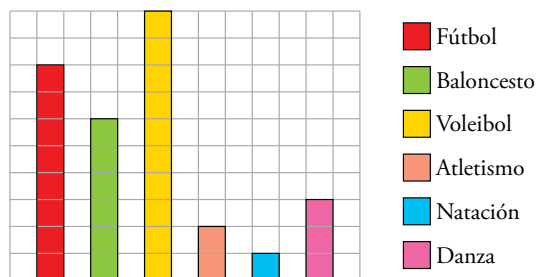
Fracciones. Aplicación de conceptos

17. El cubo pequeño está construido con dados amarillos. Para formar el cubo grande, recubrimos el anterior de dados rojos.



¿Qué fracción de los dados del cubo grande son amarillos? ¿Y rojos?

18. La gráfica informa sobre los deportes preferidos en una clase de 30 estudiantes de segundo de ESO.



¿Qué fracción de la clase...

- ... practica fútbol?
- ... practica baloncesto?
- ... no practica baloncesto?
- ... no practica ni fútbol ni baloncesto?

19. ¿Cuántos gramos son?
- $\frac{3}{4}$ de kilo
 - $\frac{3}{5}$ de kilo
 - $\frac{7}{20}$ de kilo
20. ¿Cuántos minutos son?
- $\frac{5}{6}$ de hora
 - $\frac{3}{12}$ de hora
 - $\frac{4}{5}$ de hora
21. ¿Qué fracción de hora son?
- 5 minutos
 - 24 minutos
 - 360 segundos

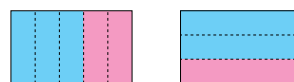
Equivalencia de fracciones

22. Escribe:
- Una fracción equivalente a $\frac{4}{10}$ que tenga por numerador 6.
 - Una fracción equivalente a $\frac{15}{45}$ que tenga por denominador 12.
 - Una fracción equivalente a $\frac{35}{45}$ que tenga por numerador 91.

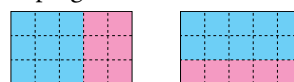
23. Simplifica:
- $\frac{12}{16}$
 - $\frac{21}{28}$
 - $\frac{30}{48}$
 - $\frac{33}{55}$
 - $\frac{42}{99}$
 - $\frac{63}{180}$

24. Reduce a común denominador.
- $\frac{5}{6}, \frac{1}{9}$
 - $1, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}$
 - $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$
 - $\frac{4}{9}, \frac{17}{33}, \frac{52}{99}$

25. Estos dos trozos de tela son igual de grandes:



¿Cuál de los dos tiene una porción mayor de azul? Explica la transformación que propone este gráfico para resolver la pregunta:



Fracciones y decimales

26. Expresa en forma decimal:
- $\frac{7}{2}$
 - $\frac{27}{50}$
 - $\frac{13}{125}$
 - $\frac{7}{6}$
 - $\frac{4}{9}$
 - $\frac{5}{11}$
27. Pasa a forma fraccionaria.
- 1,1
 - 0,13
 - 0,008
 - $0,\widehat{8}$
 - $1,\widehat{8}$
 - $0,2\widehat{8}$
 - $0,\widehat{24}$
 - $0,0\widehat{2}$

Resuelve problemas

28. ¿Cuánto cuestan dos kilos y ochocientos gramos de manzanas a 1,65 € el kilo?

29. ¿Cuánto pagaré si compro 1,083 kg de salmón a 9,75 €/kg?

Atención al redondeo.

30. Para fabricar 3500 dosis de cierto medicamento, se necesitan 1,96 kg de principio activo. ¿Cuántos gramos de este principio lleva cada dosis?

31. Marcelo compra un melón que pesa dos kilos y cuatrocientos gramos.

Si el melón se vende a 1,99 €/kg, ¿cuál de estas cantidades debe pagar por la compra?

4,80 €

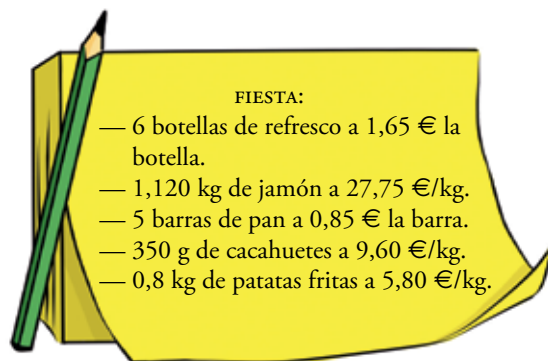
4,90 €

4,78 €

4,88 €

32. Karla ha comprado 340 gramos de jamón, ha pagado con un billete de 10 € y le han devuelto 3,88 €. ¿A cómo está el kilo de jamón?

33. Para celebrar una fiesta, trece amigos adquieren:



¿Cuánto debe poner cada uno?

34. Una empresa inmobiliaria adquiere un terreno rectangular de 125,40 m de largo y 74,60 m de ancho por 350 000 €. Después, lo urbaniza, con un coste de 62 528,43 €. Y, por último, lo divide en parcelas y lo pone a la venta a 52,75 € el metro cuadrado. ¿Qué beneficio espera obtener?

35. Problema resuelto

Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj en una hora y treinta seis minutos. ¿Cuál ha sido su velocidad media en km/h?

Resolvemos el problema con una división:

$$\text{Velocidad (km/h)} = \text{Espacio (km)} : \text{Tiempo (h)}$$

Para que los datos sean compatibles, hemos de expresar el tiempo en horas:

$$1 \text{ h } 36 \text{ min} = (1 + 36 : 60) \text{ h} = (1 + 0,6) \text{ h} = 1,6 \text{ h}$$

Solución: $52 : 1,6 = 32,5 \text{ km/h}$

36. Un camión de mudanzas ha realizado un viaje de 169,29 km en 2 h 42 min. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

37. Problema resuelto

Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj a una velocidad de 32,5 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en la etapa?

Resolvemos el problema con una división:

$$\text{Tiempo (h)} = \text{Espacio (km)} : \text{Velocidad (km/h)}$$

$$52 : 32,5 = 1,6 \text{ h}$$

Pero la solución, una cantidad de tiempo, se tiene que expresar en el sistema sexagesimal. Para eso, calculamos el cociente entero (horas), multiplicamos el resto por 60 y seguimos dividiendo para obtener los minutos.

$$\begin{array}{r} 520 \qquad \qquad \qquad | 32,5 \\ 195 \rightarrow 195 \quad 1 \text{ h } 36 \text{ min} \\ \quad \times 60 \\ \quad \hline \quad 11700 \\ \quad 1950 \\ \quad \quad 000 \end{array}$$

Solución: $52 : 32,5 = 1 \text{ hora y } 36 \text{ minutos}$

38. Un tren de mercancías ha recorrido 187 km a 55 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en el trayecto?

39. Un autobús de línea ha invertido siete horas y doce minutos en el trayecto Barcelona – Murcia. ¿Cuál ha sido la velocidad media del viaje?

Si te falta algún dato, debes buscarlo.

40. Un barco velero, a una velocidad media de 5 nudos, recorre la distancia entre dos islas en una hora y 24 minutos. ¿Qué distancia ha cubierto en la travesía?

Ejercicios y problemas

Analiza y exprésate

41. Describe las distintas formas en que se ha resuelto el problema y di si aprecias errores en algunas de ellas.

Un camión circula por una autopista a 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 km?

Resolución 1

$$\begin{array}{r} 300 \quad | \quad 90 \\ 30 \rightarrow 30 \quad 3 \text{ h } 20 \text{ min} \\ \times \quad 60 \\ \hline 1800 \\ 000 \end{array}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 2

$$\begin{array}{r} 300,00 \quad | \quad 90 \\ 300 \quad 3,33 \\ \hline 300 \\ 30 \end{array}$$

El camión tarda 3 h 33 min.

Resolución 3

$$300 = 90 + 90 + 90 + 30$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1\text{h} & 1\text{h} & 1\text{h} & 20 \text{ min} \end{array}$$

Resolución 4

$$90 \text{ km/h} = 90\,000 : 60 \text{ m/min} = 1\,500 \text{ m/min}$$

$$300 \text{ km} = 300\,000 \text{ m}$$

$$300\,000 \text{ m} : 1\,500 \text{ m/min} = 200 \text{ min} =$$

$$= 180 \text{ min} + 20 \text{ min} = 3 \text{ h } 20 \text{ min}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 5

$$\begin{array}{r} 300 \quad | \quad 90 \\ 300 \quad 3,33 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,33 \text{ h} \\ 300 \\ 30 \end{array}$$

$$0,33 \text{ h} \rightarrow 0,33 \cdot 60 = 19,8 \text{ min} = 19 + 0,8$$

$$0,8 \text{ min} \rightarrow 0,8 \cdot 60 = 48 \text{ s}$$

El camión tarda 3,33 h = 3 h 19 min 48 s.

Autoevaluación

1. Escribe con cifras.

- a) Dieciocho centésimas.
b) Trece cienmilésimas.
c) Doscientas treinta y cinco millonésimas.

2. Redondea a las centésimas.

- a) 5,052 b) 0,55555 c) 0,7481

3. Calcula.

- a) $0,25 \cdot 11,48$ b) $23 : 4,5$
c) $0,08 : 1,6$ d) $10,2 : 0,034$

4. Calcula.

- a) $1,4 - 1,8 \cdot 0,2 - 0,4 : 1,6$
b) $2,024 - 0,3 \cdot (7,1 - 4,02)$

5. Obtén con la calculadora y redondea a las centésimas.

- a) $\sqrt{21,8}$ b) $\sqrt{290}$

6. Expresa en forma decimal.

- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{26}{13}$ c) $\frac{15}{12}$

7. Expresa cada decimal con una fracción irreducible.

- a) 0,05 b) 1,2 c) $0,\hat{7}$ d) $0,3\hat{6}$

8. Simplifica.

- a) $\frac{50}{75}$ b) $\frac{27}{45}$ c) $\frac{210}{180}$

9. Reduce a común denominador las fracciones.

- a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{7}{10}$

10. Un automóvil realiza un viaje de ida y vuelta. En la ida gasta $\frac{13}{15}$ de la capacidad total del depósito de combustible. A la vuelta, reposta, y consume $\frac{17}{20}$ de este. ¿En cuál de los dos trayectos ha gastado más combustible?

11. Un camión que circula por una autovía a una velocidad de 95 km/h debe realizar un recorrido de 228 km. ¿Cuánto durará el viaje?

12. Un mayorista compra en una bodega una cuba con 15 000 litros de vino a 0,60 €/litro, para envasarlo en botellas de 0,75 litros destinadas a una cadena de supermercados. ¿Cuál será la ganancia si recibe 0,95 € por cada botella y estima sus gastos de almacén en 2 350 €?

4

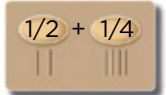
Operaciones con fracciones



El origen de las fracciones es muy antiguo: babilonios, egipcios, griegos, chinos e indios las manejaban hace miles de años.

Los egipcios usaban, exclusivamente, fracciones unitarias (con numerador uno).

$3/4 \rightarrow$



Las fracciones de los babilonios eran sexagesimales, solo utilizaban como denominadores el número 60 y sus potencias.

Por ejemplo: para $3/4$ ponían $45/60$.

$3765 \rightarrow$ 60^2 60 1 $1/60$

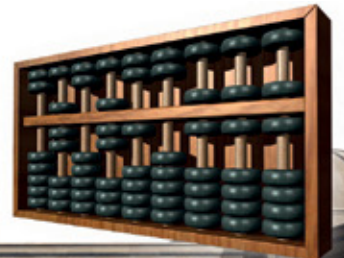
$3765 \rightarrow$




$3/4 \rightarrow$

Los chinos, sin embargo, ya en el siglo IV manejaban con toda destreza las fracciones ordinarias.

Y cosa curiosa: llamaban *hijo* al numerador y *madre* al denominador.



Los árabes, en su época de expansión y esplendor, también tuvieron grandes matemáticos en cuyos tratados aparecen las fracciones. De hecho, el nombre de fracción viene de la traducción de la palabra árabe *al-kasr*, que significa *quebrar*, *romper* (la unidad), y se tradujo al latín por *fractio*. 

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Suma y resta de fracciones

Recuerda

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{Mín.c.m. } (6, 8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

En la web

Practica la suma y la resta de fracciones.

Fracciones opuestas

• Dos **fracciones** son **opuestas** cuando su suma es cero.

• Toda fracción $\frac{a}{b}$ tiene una opuesta,

$\frac{-a}{b}$ (o bien $\frac{a}{-b}$):

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{5} \rightarrow \text{Formas de la opuesta } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{-5} \end{array} \right.$$

En la web

Practica la suma y la resta de fracciones con paréntesis.

• Para sumar o restar fracciones, las reducimos previamente a común denominador.

• Si alguno de los sumandos es un número entero, a , lo transformamos en una fracción con denominador la unidad ($a = \frac{a}{1}$).

Ejemplo

$$1 - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{5}{12} \rightarrow \text{mín.c.m. } (6, 8, 12) = 24$$

$$24 : 1 = 24$$

$$24 : 6 = 4$$

$$24 : 8 = 3$$

$$24 : 12 = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{5}{12} &= \frac{1 \cdot 24}{24} - \frac{5 \cdot 4}{24} + \frac{3 \cdot 3}{24} - \frac{5 \cdot 2}{24} = \\ &= \frac{24 - 20 + 9 - 10}{24} = \frac{33 - 30}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Sumas, restas y paréntesis

El manejo de los paréntesis en las sumas y las restas de fracciones sigue las mismas reglas que en los números enteros.

• Si se suprime un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían:

$$+\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}$$

• Si se suprime un paréntesis precedido del signo menos, los signos interiores se transforman; más en menos y menos es más:

$$-\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$$

Ejemplos

• Resolución suprimiendo previamente los paréntesis:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \frac{2}{1} - \frac{4}{3} - \frac{13}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{13}{12} + \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{33 - 31}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

• Resolución operando dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{6}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{9}{12} + \frac{2}{12}\right) = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{15 - 9}{12} = \frac{2}{3} - \frac{6}{12} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Piensa y practica

1. Escribe la fracción opuesta de:

a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{-5}$

2. Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\frac{2}{7} - \frac{2}{\square} = 0$ b) $\frac{3}{4} + \frac{\square}{4} = 0$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{\square} = 0$ d) $\frac{5}{8} - \frac{-5}{\square} = 0$

3. Calcula mentalmente.

a) $1 + \frac{1}{2}$ b) $1 - \frac{1}{2}$ c) $2 + \frac{1}{2}$

d) $1 + \frac{1}{3}$ e) $1 - \frac{1}{3}$ f) $2 + \frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ h) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ i) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

4. Calcula.

a) $1 - \frac{3}{7}$ b) $2 - \frac{5}{4}$ c) $\frac{17}{5} - 3$ d) $\frac{13}{15} - 1$

5. Opera.

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{6} - \frac{5}{9}$

d) $\frac{1}{4} + \frac{5}{16}$ e) $\frac{3}{11} - \frac{1}{2}$ f) $\frac{9}{14} + \frac{1}{4}$

6. Opera y simplifica.

a) $\frac{7}{6} + \frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$ c) $\frac{2}{7} - \frac{11}{14}$

d) $\frac{1}{6} - \frac{1}{14}$ e) $\frac{7}{15} - \frac{3}{10}$ f) $\frac{7}{20} - \frac{4}{15}$

7. Calcula, reduciendo al común denominador que se indica.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \rightarrow$ Denominador común: 30

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \rightarrow$ Denominador común: 8

c) $\frac{5}{6} - \frac{3}{9} - \frac{3}{4} \rightarrow$ Denominador común: 36

d) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \rightarrow$ Denominador común: 6

e) $\frac{7}{9} - \frac{4}{15} - \frac{1}{5} \rightarrow$ Denominador común: 45

8. Calcula.

a) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

c) $1 - \frac{6}{7} + \frac{5}{11}$

d) $\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2$

9. Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}$

b) $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} + \frac{27}{35}$

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$

d) $\frac{13}{12} - \frac{5}{8} - \frac{5}{6}$

10. Opera y compara los resultados.

a) $2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

b) $2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$

d) $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right)$

11. Quita paréntesis y calcula.

a) $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$

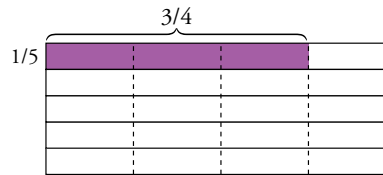
d) $\left(1 - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right)$

Multiplicación

Observa e interpreta los siguientes gráficos:



$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

Fracciones inversas

- Dos **fracciones** son **inversas** cuando su producto es la unidad.
- Toda fracción distinta de cero tiene inversa:

$$\text{Inversa de } \frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

La forma de llegar a los mismos resultados, sin ayuda de los gráficos, sería:

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \leftrightarrow \text{Se multiplican los numeradores.}$$

$$\leftrightarrow \text{Se multiplican los denominadores.}$$

Recuerda

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

- Primero, los paréntesis.
- Después, las multiplicaciones y las divisiones.
- Por último, las sumas y las restas.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{15}{48} = \frac{9}{16}$$

División

Recuerda las relaciones entre la multiplicación y la división de enteros.

$$8 \cdot 5 = 40 \rightarrow \begin{cases} 40 : 8 = 5 \\ 40 : 5 = 8 \end{cases}$$

Estas relaciones se han de mantener con las fracciones.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \rightarrow \begin{cases} \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \\ \frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

En la práctica, para obtener esos resultados al dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda o, lo que es lo mismo, se multiplican los términos cruzados.

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \leftrightarrow \text{Se multiplican los términos cruzados.}$$

Ejemplos

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} : 6 = \frac{2}{5} : \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Piensa y practica

1. Multiplica.

a) $2 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4} \cdot 5$ c) $(-7) \cdot \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{(-2)}{7}$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

2. Multiplica y reduce como en el ejemplo.

• $\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{20}{5} = 4$

a) $\frac{1}{3} \cdot 6$ b) $\frac{2}{(-3)} \cdot 12$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 7$

d) $\frac{3}{4} \cdot 8$ e) $\frac{5}{3} \cdot (-12)$ f) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18)$

3. Multiplica y obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}$ b) $\frac{(-3)}{5} \cdot \frac{(-5)}{3}$ c) $\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{13}$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$ e) $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$

4. Divide estas fracciones:

a) $4 : \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5} : 2$ c) $\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$

d) $\frac{1}{3} : 4$ e) $2 : \frac{3}{5}$ f) $\frac{8}{7} : \frac{3}{5}$

5. Ejercicio resuelto

a) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9-4}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{6}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = \frac{9-10}{30} = \frac{-1}{30}$

6. Calcula y compara los resultados de cada apartado.

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

c) $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

7. Opera.

a) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 20$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : 7$

c) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$ d) $\frac{3}{21} : \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right)$

Se presenta una serie de problemas tipo, resueltos, cuya comprensión te facilitará el camino para resolver, por analogía, muchas situaciones con fracciones.

Fracción de una cantidad

PROBLEMA 1: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

La empresa municipal de alquiler de bicicletas dispone de un total de 1155 unidades, de las que 330 están en reparación o reserva, y el resto, en funcionamiento. ¿Qué fracción de las bicicletas está en funcionamiento?



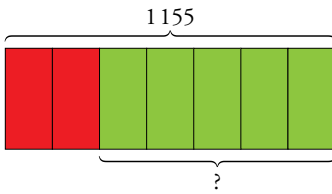
$$\text{Fuera de servicio} \longrightarrow \frac{330}{1155} \xrightarrow{\div 3}{\div 3} \frac{110}{385} \xrightarrow{\div 5}{\div 5} \frac{22}{77} \xrightarrow{\div 11}{\div 11} \frac{2}{7}$$

$$\text{En funcionamiento} \longrightarrow \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Solución: Están en funcionamiento $\frac{5}{7}$ de las bicicletas.

PROBLEMA 2: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

La empresa municipal de alquiler de bicicletas dispone de un total de 1155 unidades, de las que $\frac{2}{7}$ están, en reparación o reserva, fuera de servicio. ¿Cuántas bicicletas hay en funcionamiento?



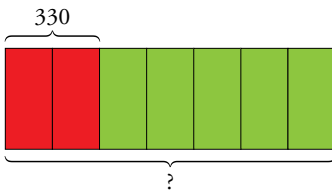
$$\text{Fuera de servicio} \longrightarrow \frac{2}{7} \text{ de } 1155 = \frac{1155 \cdot 2}{7} = 330$$

$$\text{En funcionamiento} \longrightarrow 1155 - 330 = 825$$

Solución: Hay 825 bicicletas en funcionamiento.

PROBLEMA 3: CÁLCULO DEL TOTAL (PROBLEMA INVERSO)

La empresa municipal de alquiler de bicicletas tiene 330 unidades fuera de servicio, en reparación o reserva, lo que supone $\frac{2}{7}$ del total. ¿De cuántas bicicletas dispone la empresa?



$$\frac{2}{7} \text{ del total} \longrightarrow 330$$

$$\frac{1}{7} \text{ del total} \longrightarrow 330 : 2 = 165$$

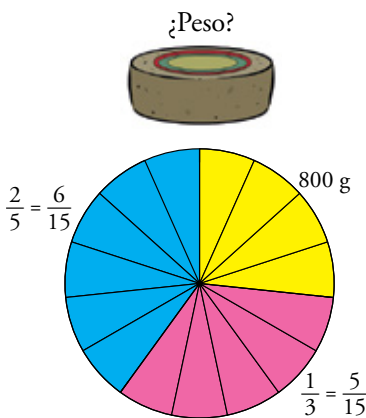
$$\frac{7}{7}, \text{ es decir, el total} \longrightarrow 165 \cdot 7 = 1155$$

Solución: La empresa dispone de 1155 bicicletas.

Suma y resta de fracciones

PROBLEMA 4: CÁLCULO DEL TOTAL (PROBLEMA INVERSO)

Adela compra un queso y regala dos quintos a su hermana y un tercio a su vecina. Si el trozo que le queda pesa 800 gramos, ¿cuánto pesaba el queso completo?



$$\text{Regala} \longrightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{Le quedan} \longrightarrow \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15} \text{ del queso} \longrightarrow 800 \text{ g}$$

$$\frac{1}{15} \text{ del queso} \longrightarrow 800 : 4 = 200 \text{ g}$$

$$\frac{15}{15}, \text{ es decir, el queso completo} \longrightarrow 200 \cdot 15 = 3000 \text{ g} = 3 \text{ kg}$$

Solución: El queso completo pesaba 3 kg.

Multiplicación y división de fracciones



■ PROBLEMA 5: PRODUCTO

Cada cápsula de cierto medicamento lleva $\frac{3}{20}$ de gramo del principio activo. ¿Cuántos gramos de principio activo hay en un bote de 30 cápsulas?

$$\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{20} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Solución: En un bote de 30 cápsulas hay cuatro gramos y medio de principio activo.

■ PROBLEMA 6: COCIENTE

Cada cápsula de cierto medicamento lleva $\frac{3}{20}$ de gramo del principio activo. ¿Cuántas cápsulas hay en un bote que contiene en total cuatro gramos y medio de principio activo?

$$\text{Cuatro gramos y medio} \longrightarrow 4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

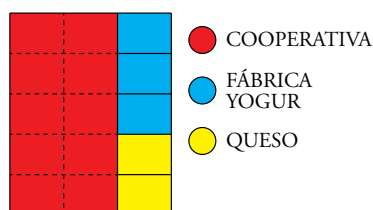
$$\text{Número de cápsulas} \longrightarrow \frac{9}{2} : \frac{3}{20} = \frac{9 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{180}{6} = 30$$

Solución: En un bote con cuatro gramos y medio de principio activo hay 30 cápsulas.

Fracción de otra fracción

■ PROBLEMA 7: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

Un granjero entregó el mes pasado $\frac{2}{3}$ de su producción de leche a la cooperativa ganadera y vendió $\frac{3}{5}$ del resto a la fábrica de yogur. Con lo que le quedó, hizo queso. ¿Qué fracción de la leche destinó a la producción de queso?



$$\text{En la cooperativa} \begin{cases} \text{Entrega } \frac{2}{3} \\ \text{Queda } \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{En la fábrica de yogur} \begin{cases} \text{Entrega } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \\ \text{Queda } \frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Solución: El granjero destinó $\frac{2}{15}$ de la leche a la producción de queso.

Ten en cuenta

La fracción de otra fracción es igual al producto de ambas fracciones.

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$



■ PROBLEMA 8: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

Un ganadero obtuvo el mes pasado 90 000 litros de leche. Entregó $\frac{2}{3}$ a la cooperativa ganadera y $\frac{3}{5}$ del resto a la fábrica de yogur. Con lo que le quedó, hizo queso. ¿Cuántos litros destinó a la producción de queso?

	ENTREGA	QUEDA
A LA COOPERATIVA	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A LA FÁBRICA DE YOGUR	$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

$$\begin{aligned} \text{Quedan } \frac{2}{15} \text{ de } 90\,000 \text{ litros} &= \\ &= \frac{2 \cdot 90\,000}{15} = 12\,000 \text{ litros} \end{aligned}$$

Solución: El granjero destinó 12 000 litros de leche a la producción de queso.

Piensa y practica

- Roberto ha necesitado 100 pasos para avanzar 80 metros. ¿Qué fracción de metro recorre en cada paso?
- Un colegio tiene matriculados 837 alumnos de los cuales 186 están en primer ciclo de ESO. ¿Qué fracción de alumnos matriculados cursa primer ciclo de ESO?
- Un colegio tiene matriculados 837 alumnos de los cuales $\frac{2}{9}$ están en primer ciclo de ESO. ¿Cuántos alumnos tiene en primer ciclo de ESO?
- Una familia dedica dos tercios de sus ingresos a cubrir gastos de funcionamiento, ahorra la cuarta parte del total y gasta el resto en ocio. ¿Qué fracción de los ingresos invierte en ocio?
- En unas instalaciones deportivas, $\frac{3}{8}$ de los presentes está practicando atletismo; $\frac{2}{5}$ juega al tenis; una décima parte, al fútbol, y el resto efectúa tareas no deportivas. ¿Qué fracción de personas no está haciendo deporte?
- En un hotel, la mitad de las habitaciones están en el primer piso; la tercera parte, en el segundo piso, y el resto, en el ático, que tiene diez habitaciones. ¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?
- Un saltamontes recorre 25 metros en 40 saltos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada salto?
- ¿Cuántas botellas de vino de tres cuartos de litro se llenan con un tonel de 1 800 litros?
- Un bote de suavizante tiene un tapón dosificador con una capacidad de $\frac{3}{40}$ de litro. ¿Cuál es la capacidad del bote sabiendo que llena 30 taponos?
- Un bote de suavizante de dos litros y cuarto proporciona, mediante su tapón dosificador, 30 dosis para lavado automático. ¿Qué fracción de litro contiene cada dosis?
- Un bote de suavizante de dos litros y cuarto lleva un tapón dosificador con una capacidad de $\frac{3}{40}$ de litro. ¿Cuántas dosis contiene el bote?
- Los $\frac{3}{4}$ de los empleados de una empresa tienen contrato indefinido; $\frac{2}{3}$ del resto tienen contrato temporal, y los demás son eventuales. ¿Qué fracción suponen los eventuales?
- Una empresa tiene 60 empleados. Los $\frac{3}{4}$ tienen contrato indefinido; $\frac{2}{3}$ del resto tienen contrato temporal, y los demás son eventuales. ¿Cuántos trabajadores eventuales hay en la empresa?
- Un embalse está lleno a principios de verano. En julio pierde $\frac{3}{7}$ de su contenido, y en agosto, $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Qué fracción conserva aún a principios de septiembre?



En la web  Resuelve problemas con fracciones.

Las propiedades que estudiaste para las potencias de números enteros se conservan con los números fraccionarios. Estas propiedades se traducen en reglas de uso práctico; pero no te limites a memorizarlas, si comprendes su justificación, las usarás con mayor seguridad y eficacia.

Potencia de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

Potencia de un producto de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

Por ejemplo: $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Potencia de un cociente de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^3 = \frac{a^3 \cdot d^3}{b^3 \cdot c^3} = \frac{a^3}{b^3} : \frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{c}{d}\right)^3$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

Por ejemplo: $\left(\frac{3}{10}\right)^2 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{10} : \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Producto de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5 \leftarrow (5=3+2)$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

Cociente de potencias de la misma base

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^7}{b^7} : \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^7 \cdot b^4}{b^7 \cdot a^4} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \leftarrow (3 = 7 - 4)$$

Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes.

Ejemplo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{8-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Potencias de exponente cero (a^0)

En principio, la expresión a^0 no tendría sentido; pero a esa combinación de signos le vamos a dar un significado dentro del lenguaje matemático:

- El cociente de dos números iguales es igual a la unidad. $\rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 1$
- Para dividir dos potencias de igual base, restamos los exponentes. $\rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5^3}{5^3} = 1 \\ 5^{3-3} = 5^0 \end{array} \right\} 5^0 = 1$$

Y de la misma forma:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \end{array} \right\} \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

No lo olvides

$$a^0 = 1 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

Potencia de otra potencia

Siguiendo un razonamiento similar al del apartado anterior:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{a^2}{b^2}\right]^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^6 \leftarrow (6 = 2 \cdot 3)$$

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

Ejemplo

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

No lo olvides

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Números y potencias de base 10

Ya conoces la descomposición polinómica de un número entero según las sucesivas potencias de base 10:

$$2458 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Esto nos proporciona un método para expresar con comodidad números de muchas cifras.

Ejemplos

- Un millón de billones.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$$

- La distancia media de la Tierra al Sol es 149 598 000 km.

$$149\,598\,000 \approx 150\,000\,000 = 150 \cdot 1\,000\,000$$

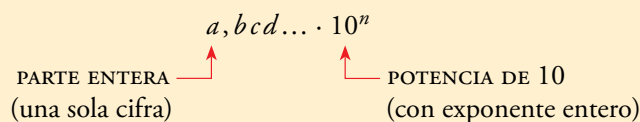
$$\text{Distancia media de la Tierra al Sol} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Esta forma de expresar los números recibe el nombre de **notación científica**.

Reflexiona

$$52\,463\,000\,000\,000 = 52 \cdot 10^{12}$$

¿Cuál de las dos formas te parece más efectiva?



Piensa y practica

1. Calcula.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ d) $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

2. Calcula, como en el ejemplo, por el camino más corto.

• $\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81$

a) $\frac{12^3}{4^3}$ b) $\frac{8^5}{4^5}$ c) $\frac{5^4}{10^4}$
 d) $5^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2$ e) $(-4)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ f) $10^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^2$

3. Reduce.

a) $\frac{x^6}{x^2}$ b) $\frac{z^4}{z^4}$ c) $\frac{x^7 \cdot x^{10}}{x^{12}}$ d) $\frac{a^3 \cdot a^7}{a^4 \cdot a^5}$

4. Reduce a una sola potencia.

a) $x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$ b) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^3$ c) $\left(\frac{z}{m}\right)^4 \cdot \frac{z}{m}$

5. Reduce.

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot y^4$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^4$
 d) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 : x^3$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^3$ f) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 : \frac{y}{x}$

6. Calcula.

a) 2^0 b) 5^0 c) 10^0 d) $(-4)^0$

7. Escribe la descomposición polinómica de:

a) 72,605
 b) 658,32

8. Expresa con todas sus cifras.

a) $5 \cdot 10^6$
 b) $34 \cdot 10^7$

9. Expresa en notación científica.

Un año luz equivale a 9 460 800 000 000 km.

Ejercicios y problemas

Suma y resta de fracciones

1. Calcula mentalmente.

a) $1 - \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ c) $1 + \frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

2. Calcula y simplifica.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$
c) $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$

3. Opera.

a) $2 - \left(1 + \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \left(2 - \frac{5}{4}\right)$

Multiplicación y división de fracciones

4. Calcula y simplifica.

a) $\frac{3}{7} \cdot 14$ b) $\frac{2}{5} : 4$ c) $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{(-7)}$
d) $\frac{3}{11} : \frac{(-5)}{11}$ e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{20}$ f) $\frac{4}{15} : \frac{2}{5}$

Operaciones combinadas

5. Opera y reduce.

a) $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{8}\right)$
c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$

Potencias y fracciones

6. Reduce a una sola potencia.

a) $a^5 \cdot a^2$ b) $a^8 : a^5$
c) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^5}$ d) $\frac{a^6}{a \cdot a^3}$

7. Simplifica.

a) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$ b) $x^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^5$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot b^4$
d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : a^3$ e) $(a^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^7$ f) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$

8. Escribe con todas sus cifras estas cantidades:

a) $37 \cdot 10^7$ b) $64 \cdot 10^{11}$ c) $3,5 \cdot 10^{13}$

9. Expresa en forma abreviada como se ha hecho en el ejemplo.

• $5\,300\,000\,000 = 53 \cdot 10^8$

a) 8 400 000
b) 61 000 000 000

Interpreta, describe, exprésate

10. Aquí tienes la resolución que han presentado David y Olga al siguiente problema.

Una empresa de coches usados recibe un lote de 180 vehículos. El primer mes vende las tres cuartas partes. El siguiente mes coloca la quinta parte del lote. ¿Cuántos coches le quedan aún por vender?

Solución de David

• $3/4$ de 180 = $(180 : 4) \cdot 3 = 135$
• $1/5$ de 180 = $180 : 5 = 36$
• $135 + 36 = 171$
• $180 - 171 = 9$

Solución de Olga

• $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}$
• $\frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$
• $1/20$ de 180 = $180 : 20 = 9$

Ambos se han limitado a realizar las operaciones sin explicar el proceso. Hazlo tú, indicando el significado de cada operación y el resultado obtenido en cada caso.

Resuelve problemas

11. Un pilón de riego con una capacidad de $2\,800 \text{ m}^3$ guarda en este momento $1\,600 \text{ m}^3$ de agua. ¿Qué fracción del pilón falta por completar?

12. Una furgoneta de reparto llevaba 36 cajas con 30 botellas de refrescos en cada una. Si se han roto 162 botellas en el trayecto, ¿qué fracción de las botellas se ha roto?

13. Un incendio ha arrasado las tres décimas partes de un monte de 1 700 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas se han salvado de la quema?

14. Se ha volcado un palé que tenía 5 cajas con 30 docenas de huevos en cada una y se han estropeado dos quintas partes. ¿Cuántos huevos se han salvado?
15. Por tres cuartos de kilo de cerezas hemos pagado 1,80 €. ¿A cómo sale el kilo?
16. Amelia ha gastado $\frac{3}{8}$ de sus ahorros en la compra de un teléfono móvil que le ha costado 90 €. ¿Cuánto dinero le queda todavía?
17. La tercera parte de los 240 viajeros que ocupan un avión son europeos y $\frac{2}{5}$ africanos. El resto son americanos. ¿Cuántos americanos viajan en el avión?
18. Un decorador ha hecho una mezcla de 20 kilos de pintura que lleva dos quintas partes de rojo, tres décimas partes de azul y el resto de amarillo. ¿Cuántos kilos de pintura amarilla llevará la mezcla?
19. Begoña gasta $\frac{3}{8}$ de sus ahorros en arreglar la moto y $\frac{3}{10}$ del resto en un concierto. ¿Qué fracción de lo que tenía ahorrado le queda?
20. Una confitería ha recibido un pedido de varias bolsas de caramelos. Dos quintas partes de las bolsas son de naranja, tres décimas partes de limón y el resto de fresa. Si había 6 bolsas de fresa, ¿cuántas bolsas formaban el pedido?
21. Sara avanza 4 metros en 5 pasos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada paso? ¿Y en 100 pasos?
22. Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón que contiene tres litros y medio?
23. ¿Cuántos litros de zumo se necesitan para llenar 200 botellas de $\frac{3}{8}$ de litro cada una?
24. Una máquina depuradora filtra tres metros cúbicos de agua en cinco horas. ¿Cuántos metros cúbicos de agua filtra en hora y cuarto?
25. Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2800 kg de pienso para alimentar a su ganado. En junio gasta $\frac{3}{7}$ de sus existencias, y en julio, $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Cuántos kilos de pienso tiene a primeros de agosto?
26. Un jardinero poda el lunes $\frac{2}{7}$ de sus rosales, el martes $\frac{3}{5}$ del resto y el miércoles finaliza el trabajo podando los 20 que faltaban. ¿Cuántos rosales tiene en total en el jardín?
27. Una empresa de transportes trabaja con camiones de largo recorrido, furgonetas de reparto y motos de mensajería. De cada doce vehículos, siete son furgonetas y tres motos. Si los camiones son ocho, ¿cuántos vehículos tiene la empresa en total?

Autoevaluación

1. Calcula.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$

b) $\frac{5}{9} - \frac{7}{12} + \frac{11}{18}$

2. Opera.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{3} \cdot 6$

d) $\frac{2}{3} : 4$

3. Resuelve.

a) $\frac{2}{\frac{1}{3}}$

b) $\frac{10}{\frac{3}{6}}$

c) $\frac{2}{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{1}{\frac{3}{6}} \cdot 5$
 $\frac{1}{6} \cdot 10$

4. Resuelve.

a) $\left(1 - \frac{11}{12}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)$

5. Calcula.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 6^3$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^3$

6. Escribe con todas sus cifras: $1,38 \cdot 10^6$

7. Expresa en notación científica: 24700 000 000

8. Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana $\frac{1}{3}$ del total, y, por la tarde, $\frac{2}{5}$ también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

9. Un señor sale de casa con 60 €. Gasta en un vestido $\frac{1}{3}$ de su dinero, y, en el mercado, $\frac{2}{5}$ de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?

b) ¿Cuánto dinero le queda?

5

Proporcionalidad y porcentajes



El concepto de proporcionalidad aparece en los vestigios de todas las culturas, asociado inicialmente a problemas y a situaciones prácticas: en una yunta, dos bueyes; en tres yuntas, seis bueyes.



En la antigua Grecia, los matemáticos reflexionaron sobre sus aspectos teóricos, sus leyes y relaciones, independientemente de situaciones concretas.

Bastante más tarde, en el Renacimiento, el desarrollo del comercio da un nuevo impulso a la proporcionalidad, concretándose en el avance de la matemática comercial: porcentajes, descuentos, deudas, plazos...

- Si te presto 100 doblones durante un mes, me devolverás 106.
- Si me pides 200 durante un año, me devolverás...

En la actualidad, la proporcionalidad resulta imprescindible en el desarrollo de cualquier ciencia aplicada (física, química, biología, estadística, etc.).

Y, si te fijas, verás que tú la utilizas, junto al cálculo mental, en multitud de situaciones cotidianas: comprar, distribuir, predecir, especular, hacer recuentos...

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Razones y proporciones



Recuerda ahora algunos términos que pertenecen al lenguaje matemático, pero que te servirán también para enriquecer en precisión el lenguaje cotidiano.

La **razón** de los números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$ (o su irreducible).

Ejemplo

La razón de las edades de Marcos y su madre es un tercio.

$$\frac{\text{EDAD DE MARCOS}}{\text{EDAD DE LA MADRE}} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

Una **proporción** es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \text{Se lee: } a \text{ es a } b \text{ como } c \text{ es a } d.$$

En la web

Razón de dos números.

En la web

Practica la identificación de relaciones de proporcionalidad.

Para automatizar el cálculo

$$\frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet}{x} \rightarrow x = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet}$$

$$\frac{\bullet}{\bullet} = \frac{x}{\bullet} \rightarrow x = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet}$$

$$\frac{\bullet}{x} = \frac{\bullet}{\bullet} \rightarrow x = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet}$$

$$\frac{x}{\bullet} = \frac{\bullet}{\bullet} \rightarrow x = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet}$$

Ejemplo

Proporción: $\frac{14}{77} = \frac{2}{11} \rightarrow$ La edad de Marcos es a la de su abuelo, como 2 es a 11.

Cálculo del término desconocido en una proporción

Una proporción está formada por una pareja de fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad \frac{14}{77} = \frac{2}{11} \rightarrow \underbrace{14 \cdot 11}_{154} = \underbrace{77 \cdot 2}_{154}$$

Esto nos permite calcular el término desconocido en una proporción:

$$\frac{6}{x} = \frac{15}{25} \rightarrow 6 \cdot 25 = x \cdot 15 \rightarrow 150 = x \cdot 15 \rightarrow x = \frac{150}{15} = 10$$

Para calcular el término desconocido en una proporción, se aplica esta propiedad de las fracciones equivalentes:

El producto de los extremos, a y x , es igual al de los medios, b y c .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Piensa y practica

- Elige la respuesta correcta en cada caso.
 - La razón de 5 y 15 es $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.
 - La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$.
- Escribe en tu cuaderno tres parejas de números cuya razón sea $2/5$.
- Calcula el término desconocido en cada proporción.
 - $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$
 - $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$
 - $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$
 - $\frac{15}{6} = \frac{x}{14}$
 - $\frac{14}{x} = \frac{21}{33}$
 - $\frac{91}{42} = \frac{x}{9}$
- La razón de los pesos de Marcos y su padre es de $3/5$. Si Marcos pesa 45 kilos, ¿cuánto pesa su padre?

2

Magnitudes directamente proporcionales

En la web

Ayuda para la construcción razonada de tablas de valores directamente proporcionales.

En las magnitudes directamente proporcionales, multiplicando (dividiendo) por el mismo número dos valores correspondientes se obtiene otro par de valores correspondientes.

MAGNITUD A	a	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$...	ka
MAGNITUD B	b	$2 \cdot b$	$3 \cdot b$...	kb

Ejemplo

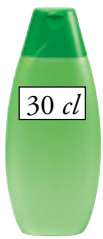
Un corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:

TIEMPO (s)	1	2	3	...	6	...	24	...
DISTANCIA (m)	3	6	9	...	18	...	72	...

Diagrama de relaciones: $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 8 = 24$, $6 \div 4 = 24$, $18 \times 4 = 72$.

Ejemplo

¿Cuánto cuesta el litro de champú?



2,70 €

1 litro = 100 cl

CENTILITROS

EUROS

30 cl → 2,70 €

10 cl → $2,70 : 3 = 0,90$ €

100 cl → $0,90 \cdot 10 = 9$ €

El litro (100 cl) de champú cuesta 9 €.

Resolución de problemas: reducción a la unidad

La propiedad anterior permite completar cualquier par de valores de la tabla a partir de un par conocido. Observa ahora el método utilizado en el ejemplo: *reducción a la unidad*.

Ejemplo

Un corredor de medio fondo ha avanzado 18 metros en 6 segundos. Si va a velocidad constante, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos?

TIEMPO (s)	1	6	20
DISTANCIA (m)	?	18	?

Diagrama de relaciones: $6 \div 6 = 1$, $1 \times 20 = 20$.

TIEMPO (s)

6 s

1 s

20 s

DISTANCIA (m)

18 m

$18 : 6 = 3$ m

$3 \cdot 20 = 60$ m

Solución: Recorrerá 60 metros en 20 segundos.

Reducción a la unidad

- Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad en la tabla de valores correspondientes.
- Conociendo ese dato, no hay dificultad en completar cualquier otro par de valores correspondientes.

1	a	c
?	b	?

Diagrama de relaciones: $1 \div a = a$, $a \times c = c$.

Piensa y practica

1. Resuelve mentalmente.

a) Un grifo arroja 12 litros de agua en 3 minutos.
¿Cuántos litros arroja en 5 minutos?

b) Tres cajas de chinchetas pesan 150 gramos.
¿Cuánto pesan 10 cajas?

2. ¿Cuánto pagaré por 300 gramos de un salmón ahumado que se vende a 16 € el kilo?

3. Un ciclista, que avanza a velocidad constante, ha recorrido 200 metros en 20 segundos. ¿Qué distancia recorrerá en 5 minutos?

En la web

Practica el concepto de proporcionalidad directa.

Otras relaciones en las tablas de proporcionalidad directa

En una tabla de proporcionalidad directa, con dos pares cualesquiera de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes; es decir, una proporción.

Ejemplo

Una viña produce, por término medio, 3,5 kilos de uva de cada cepa.

N.º DE CEPAS	1	2	3	4	5	...
KILOS DE UVA	3,5	7	10,5	14	17,5	...

Elegimos dos pares cualesquiera:

N.º DE CEPAS	...	3	...	5
KILOS DE UVA	...	10,5	...	17,5

$$\rightarrow \frac{3}{10,5} = \frac{5}{17,5} \rightarrow \frac{3 \cdot 17,5}{52,5} = \frac{10,5 \cdot 5}{52,5}$$

La proporción anterior también se puede escribir así: $\frac{3}{5} = \frac{10,5}{17,5}$

Comprueba que ocurre lo mismo para cualquier par de columnas de la tabla.

En una tabla de proporcionalidad directa, dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

Resolución de problemas: regla de tres

Basándonos en lo anterior y en el cálculo del término desconocido en una proporción, obtenemos un método cómodo para resolver problemas de proporcionalidad: *regla de tres*.

Ejemplo

Una vendimiadora ha recolectado 14 kilos de uva en las 4 primeras cepas de la viña. ¿Cuántos kilos puede esperar de las próximas 10 cepas?

<u>CEPAS</u>		<u>KILOS</u>	<u>PROPORCIÓN</u>
4	→	14	} $\frac{4}{14} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 10}{4} = 35$
10	→	x	

Solución: De 10 cepas puede esperar 35 kilos.

Regla de tres

	<u>MAGNITUD A</u>	<u>MAGNITUD B</u>
• Se ordenan los datos y la incógnita.	a →	b
	c →	d

• Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen. } $\rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

• Se calcula el término desconocido en la proporción.



Nombre y apellidos: Fecha:

Problemas resueltos

1. *Un avión, que vuela a velocidad constante, ha recorrido 91 millas en 35 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en los próximos 20 minutos?*

TIEMPO (min)	→	DISTANCIA (millas)
35	→	91
20	→	x

La proporción es:

$$\frac{35}{20} = \frac{91}{x} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 91}{35} = 52$$

Solución: En 20 minutos recorrerá 52 millas.

2. *Un avión, que viaja a velocidad constante, ha tardado 35 minutos en recorrer 91 millas. Si sigue a la misma velocidad, ¿cuanto tiempo tardará en recorrer las 52 millas que le faltan para llegar a su destino?*

DISTANCIA (millas)	→	TIEMPO (min)
91	→	35
52	→	x

La proporción es:

$$\frac{91}{52} = \frac{35}{x} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 52}{91} = 20$$

Solución: Tardará 20 minutos en recorrer las 52 millas que le faltan.

Piensa y practica



- | | |
|---|---|
| <p>4. Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora.
¿Cuánto tardará en llenar 1 000 botellas?</p> | <p>7. En un colegio que tiene 480 alumnos, tres de cada diez han tenido gripe.
¿Cuántos alumnos han padecido esa enfermedad?</p> |
| <p>5. En un taller de confección se han necesitado siete metros y medio de tela para confeccionar 6 camisas.
¿Cuántos metros de tela se necesitarán para cubrir un pedido de ochenta camisas?</p> | <p>8. De la vendimia de las 10 primeras parras de una viña se han obtenido 125 kilos de uva.
¿Qué cosecha cabe esperar de toda la viña, que tiene 362 parras?</p> |
| <p>6. Un granjero ha gastado 260 € en 325 dosis de vacuna para su ganado.
¿Cuánto debe gastar aún si necesita adquirir 180 dosis más?</p> | <p>9. ¿Cuánto costará un trozo de queso de 465 gramos si el queso se vende a 13,5 euros el kilo?
(Redondea el resultado a los céntimos).</p> |

En la web

Ayuda para la construcción razonada de tablas de valores inversamente proporcionales.

Recuerda que en las magnitudes inversamente proporcionales, si se aumenta un valor de una de ellas al doble, al triple, etc., el correspondiente valor de la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etc.

Ejemplo

Dos trabajadores descargan un camión en seis horas. Veamos cómo varía el tiempo de descarga al variar el número de trabajadores.



Nosotros dos tardamos 6 h.



Yo solo, $6 \cdot 2 = 12$ h.



Entre los tres, $12 : 3 = 4$ h.



Los 12 tardamos 1 h.

N.º DE TRABAJADORES	1	2	3	4	6	12
TIEMPO DE DESCARGA (h)	12	6	4	3	2	1

Diagram showing relationships between columns: 1 to 2 (x2), 1 to 3 (x3), 1 to 4 (x4), 1 to 6 (x6), 1 to 12 (x12). Corresponding inverse relationships for time: 12 to 6 (:2), 12 to 4 (:3), 12 to 3 (:4), 12 to 2 (:6), 12 to 1 (:12).



Tenemos alimento para 10 días.



Para mí sola, duraría el triple:
 $10 \cdot 3 = 30$ días



A las 5 nos duraría menos:
 $30 : 5 = 6$ días

En las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica (o divide) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por dicho número.

MAGNITUD A	a	$a \cdot 3$	$a : 5$
MAGNITUD B	b	$b : 3$	$b \cdot 5$

Resolución de problemas: reducción a la unidad

Aplicaremos el método que ya conocemos (buscar el valor asociado a la unidad), teniendo en cuenta lo que hemos visto más arriba.

Ejemplo

Un granjero tiene alfalfa en el almacén para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días. ¿Cuánto le duraría el forraje si tuviera 5 vacas?

N.º DE VACAS	1	3	5
DÍAS	?	10	?

Diagram showing relationships: 1 to 3 (x3), 1 to 5 (x5), 3 to 5 (x5/3). Corresponding inverse relationships for days: 10 to ? (:3), 10 to ? (:5), 10 to ? (:15).

N.º DE VACAS	DURACIÓN ALIMENTO
3	→ 10 días
1	→ $10 \cdot 3 = 30$ días
5	→ $30 : 5 = 6$ días

Solución: Si tuviera 5 vacas, le duraría 6 días.

Proporciones en las tablas de proporcionalidad inversa

Volviendo al ejemplo de la página anterior, observa que el producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo:

1	2	3	4	...
12	6	4	3	...

 $\rightarrow 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = \dots$

Esto nos permite construir proporciones a partir de dos pares de valores, pero ordenando los elementos de distinta forma que en la proporcionalidad directa.

TRABAJADORES	2	3
HORAS	6	4

 $\rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, o bien $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Ten en cuenta

MAGNITUD A	→	MAGNITUD B
a	→	b
c	→	x

o bien $\frac{a}{c} = \frac{x}{b}$ o bien $\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$

Se invierte el orden en los elementos de una de las magnitudes.

En la web

Practica el concepto de proporcionalidad inversa.

Resolución de problemas: regla de tres inversa

Aplicaremos la regla de tres, pero para construir la proporción invertiremos la razón de los valores en una de las magnitudes.

Ejemplo

Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en ir de un pueblo a la aldea vecina.
¿Cuánto tardará un motorista, a 50 km/h?

VELOCIDAD	TIEMPO (min)	PROPORCIÓN
20	→ 30	} $\rightarrow \frac{20}{50} = \frac{x}{30}$, o bien $\frac{50}{20} = \frac{30}{x}$
50	→ x	

Solución: $x = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12$ minutos

Piensa y practica

1. Completa en tu cuaderno estas tablas:

MAGNITUD A	1	2	3	4			10
MAGNITUD B	30	15			6	5	

MAGNITUD H	1	2	3	4	6	8	
MAGNITUD N			16	12			4

2. Construye tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad inversa:

MAGNITUD A	1	2	4	5
MAGNITUD B	40	20	10	8

3. Un coche, a 80 km/h, tarda 2 h en llegar a Barcelona. ¿Cuánto tardaría un camión, a 40 km/h? ¿Y un tren de alta velocidad, a 160 km/h?

4. Tres operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 operarios?

5. Un conducto de agua, con un caudal de 3 litros por segundo, tarda 20 minutos en llenar un depósito.

a) ¿Cuánto tardaría con un caudal de 2 litros por segundo?

b) ¿Y si fuera de 10 litros por segundo?

6. Un tractor ara un campo en 15 horas.

a) ¿Cuánto tardarían dos tractores?

b) ¿Y tres tractores?

c) ¿Y cuatro tractores?

7. Un embalse tiene reservas de agua para abastecer a una población de 2 000 habitantes durante 6 meses.

a) Si fueran 1 000 habitantes, ¿para cuántos meses tendrían?

b) ¿Y si fueran 3 000 habitantes?

c) ¿Y si fueran 6 000 habitantes?

En la web



Practica el concepto de proporcionalidad inversa.

A continuación se presenta un problema de repartos. Estudia el procedimiento de resolución para poder aplicarlo en situaciones similares.

Repartos directamente proporcionales

Ejemplo

Tres amigos aficionados al bricolaje alquilan un taladro para hacer arreglos en casa. El primero lo utiliza durante dos días y se lo pasa al segundo, que lo tiene cinco días. Después lo recibe el tercero, que lo usa durante tres días y lo devuelve a la tienda. ¿Cuánto debe poner cada uno para pagar los 60 € que cuesta en total el alquiler?



DÍAS	2	5	3	$2 + 5 + 3 = 10$	→ PROPORCIONALIDAD DIRECTA
COSTE (€)	x	y	z	60	

$$x = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12 \text{ €} \quad y = \frac{5 \cdot 60}{10} = 30 \text{ €} \quad z = \frac{3 \cdot 60}{10} = 18 \text{ €}$$

Solución: El primero debe poner 12 €; el segundo, 30 €, y el tercero, 18 €.

Lo anterior, se podría resumir así:

$$\text{Coste por día} \rightarrow 60 : 10 = 6 \text{ €} \quad \begin{cases} \text{El primero pagará} \rightarrow 2 \cdot 6 = 12 \text{ €} \\ \text{El segundo pagará} \rightarrow 5 \cdot 6 = 30 \text{ €} \\ \text{El tercero pagará} \rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \text{ €} \end{cases}$$

Para repartir una cantidad, C , en partes directamente proporcionales a m , n , k :

– Se divide la cantidad a repartir, C , entre la suma $S = m + n + k$.

Así, calculamos la parte, p , que corresponde a una unidad.

– Se multiplica cada número m , n , k , por el cociente, p , obtenido.

NÚMEROS	m	n	k	$m + n + k = S$	→ $p = \frac{C}{S} \begin{cases} x = p \cdot m \\ y = p \cdot n \\ z = p \cdot k \end{cases}$
CANTIDAD	x	y	z	C	

Piensa y practica

1. Reparte:

- 180 en partes directamente proporcionales a 2, 5 y 8.
- 130 en partes directamente proporcionales a $1/2$, $1/3$ y $1/4$.

2. Tres familias alquilan conjuntamente un apartamento en la costa por 1 200 euros para 20 días.

Los Rodríguez lo disfrutaron durante la primera semana; los Riveiro, los 6 días siguientes y, el resto del tiempo, los Ochoa. ¿Cuánto debe pagar cada familia por la estancia?



En la web



Resuelve problemas de repartos proporcionales.

5 Porcentajes

Un porcentaje se puede contemplar como una *proporción*, como una *fracción* o como un *número decimal*.

Un porcentaje indica una proporción

Con la frase *El 30 % de los jóvenes supera el metro ochenta de altura*, estamos diciendo que de cada 100 jóvenes, 30 miden más de 1,80 m.

TOTAL	100	200	300	50	250	...
PARTE (30 %)	30	60	90	15	?	...

Vemos que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, lo que nos permite tratar una situación de porcentaje como una situación de proporcionalidad.

$$\begin{array}{l} \text{TOTAL} \\ 100 \\ 250 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{PARTE (30 \%)} \\ 30 \\ x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{TOTAL} \\ 100 \\ 250 \end{array}} \right\} \frac{100}{250} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{En un grupo de 250 jóvenes, hay 75} \\ \text{que superan la altura de 1,80 m.} \end{array} \right.$$

Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100. $a\%$ de $C = \frac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje es una fracción

Tomar el 30 % de una cantidad es dividir la cantidad en 100 partes y tomar 30; es decir, tomar la fracción $\frac{30}{100}$.

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{30}{100} \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad. $a\%$ de $C = \frac{a}{100}$ de $C = \frac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje se asocia a un número decimal

Un porcentaje se puede expresar en forma de fracción y, a su vez, la fracción en forma de número decimal, lo que nos proporciona una forma rápida para el cálculo de porcentajes.

$$30\% \rightarrow \frac{30}{100} \rightarrow 30 : 100 \rightarrow 0,30 \quad 30\% \text{ de } 250 = 250 \cdot 0,30 = 75$$

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

Ejemplo

$$12\% \rightarrow \frac{12}{100} = 0,12$$

$$12\% \text{ de } 80 = 80 \cdot 0,12 = 9,6$$

Ten en cuenta

$$50\% \rightarrow \frac{1}{2} \quad 25\% \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$75\% \rightarrow \frac{3}{4} \quad 20\% \rightarrow \frac{1}{5}$$

$$10\% \rightarrow \frac{1}{10} \quad 5\% \rightarrow \frac{1}{20}$$

En la web

Practica el cálculo de porcentajes.

Cálculo rápido de algunos porcentajes

Algunos porcentajes equivalen a fracciones muy sencillas, lo cual facilita el cálculo. Ten en cuenta las que vas a ver a continuación, sobre todo para el cálculo mental.

• El 50% es la mitad.

$$50\% \rightarrow \frac{50}{100} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \text{Para calcular el 50\%, se divide entre 2.}$$

$$\text{Por ejemplo: } 50\% \text{ de } 47 = \frac{1}{2} \text{ de } 47 = 47 : 2 = 23,5$$

• El 25% es la cuarta parte.

$$25\% \rightarrow \frac{25}{100} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \text{Para calcular el 25\%, se divide entre 4.}$$

$$\text{Por ejemplo: } 25\% \text{ de } 88 = \frac{1}{4} \text{ de } 88 = 88 : 4 = 22$$

• El 20% es la quinta parte.

$$20\% \rightarrow \frac{20}{100} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \text{Para calcular el 20\%, se divide entre 5.}$$

Puedes razonar de la misma forma estrategias para calcular porcentajes habituales: el 10%, el 5%, el 75%, etc.

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente.

- a) 20% de 200 b) 15% de 200 c) 10% de 200
d) 8% de 200 e) 60% de 50 f) 30% de 50
g) 12% de 50 h) 8% de 50 i) 2% de 50

2. Calcula mentalmente.

- a) 50% de 46 b) 50% de 120 c) 25% de 40
d) 75% de 40 e) 25% de 24 f) 75% de 24
g) 10% de 460 h) 5% de 460 i) 10% de 70

3. Calcula.

- a) 12% de 750 b) 35% de 240 c) 85% de 360
d) 14% de 650 e) 2,5% de 20 f) 95% de 20
g) 150% de 40 h) 115% de 200 i) 200% de 10

4. Copia y completa en tu cuaderno, asociando cada porcentaje con un número decimal:

PORCENTAJE	35%	24%		8%		95%	120%
EXPRESIÓN DECIMAL	0,35		0,52	0,03			1,50

5. El 62% de los cargos directivos de una empresa metalúrgica son varones. ¿Qué porcentaje son mujeres?

6. Unos grandes almacenes anuncian rebajas del 15%. Al comprar un producto rebajado, ¿qué porcentaje se paga?

7. Una biblioteca pública adquiere 260 nuevos libros de los que el 25% son novelas. ¿Cuántas novelas se han adquirido?

8. En una aldea de 875 habitantes solo queda un 12% de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes viven en la aldea?

9. En clase somos treinta y el 90% hemos aprobado el examen de Matemáticas. ¿Cuántos hemos aprobado?

10. En un país de quince millones de habitantes el 8% son inmigrantes extranjeros. ¿Cuántos inmigrantes alberga?

11. Un avión transporta 425 viajeros. El 52% son europeos; el 28%, americanos; el 12%, africanos, y el resto, asiáticos. ¿Cuál es el porcentaje de asiáticos? ¿Cuántos asiáticos viajan en el avión?

En la web

Calcula porcentajes.

6 Problemas con porcentajes

Ten en cuenta

$$\begin{array}{l}
 a \% \text{ de } C = P \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{TOTAL} & & \text{PARTE} \\
 100 & \longrightarrow & a \\
 C & \longrightarrow & P
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 P = \frac{a \cdot C}{100} \\
 C = \frac{P \cdot 100}{a} \\
 a = \frac{P \cdot 100}{C}
 \end{array}$$

Cualquier situación de porcentaje maneja básicamente tres elementos: un *total*, un *tanto por ciento* y una *parte* del total. Veámoslo con un ejemplo:

Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales el 35 % trabaja en el turno de noche. ¿Cuántos empleados hay en el turno de noche?

$$35 \% \text{ de } 180 = \frac{180 \cdot 35}{100} = 180 \cdot 0,35 = 63$$

TOTAL	180 empleados
TANTO POR CIENTO ...	35 %
PARTE	63 empleados

Solución: En el turno de noche hay 63 empleados.

Veamos, ahora, otros problemas en los que se pide calcular el total o el tanto por ciento.

Cálculo del total, conocidos el tanto por ciento y la parte

Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35 % de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?



TOTAL	→	PARTE	}	$\frac{100}{x} = \frac{35}{63} \rightarrow x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$
100		35		
x		63		

Solución: La empresa tiene en total 180 trabajadores.

En la web

Resuelve problemas con porcentajes (directos e inversos).

Cálculo del tanto por ciento, conocidos el total y la parte

De los 180 empleados que tiene una empresa de limpieza, 63 trabajan en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja de noche?

TOTAL	→	PARTE	}	$\frac{180}{100} = \frac{63}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 63}{180} = 35$
180		63		
100		x		

De cada 100 empleados, 35 trabajan de noche; es decir, el 35 %.

Solución: El 35 % de la plantilla está en el turno de noche.

Aumentos porcentuales



El aparcamiento del centro comercial, que tiene 180 plazas, se va a reformar aumentando su capacidad en un 20%. ¿De cuántas plazas dispondrá después de la obra?

• Primera forma

$$\boxed{\text{PLAZAS FINALES}} = \boxed{180} + \boxed{20\% \text{ de } 180} \\ \boxed{\text{PLAZAS FINALES}} = \boxed{\text{PLAZAS INICIALES}} + \boxed{\text{AUMENTO}}$$

$$\text{AUMENTO} \rightarrow 20\% \text{ de } 180 = \frac{180 \cdot 20}{100} = 36 \text{ plazas}$$

$$\text{PLAZAS FINALES} \rightarrow 180 + 36 = 216 \text{ plazas}$$

Solución: Después de la reforma, el aparcamiento dispondrá de 216 plazas.

• Segunda forma

Un aumento del 20% significa que cada 100 plazas se convierten en 120.

PLAZAS INICIALES	→	PLAZAS FINALES
100	→	120
180	→	x

$$\left. \begin{array}{l} 100 \rightarrow 120 \\ 180 \rightarrow x \end{array} \right\} \frac{100}{180} = \frac{120}{x} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 120}{100} = 216 \text{ plazas}$$

• Forma rápida

Observa que, en realidad, en el punto anterior hemos calculado el 120% de 180, por lo que podíamos haber resuelto el problema así:

$$\text{PLAZAS FINALES} \rightarrow 120\% \text{ de } 180 = 180 \cdot 1,20 = 216 \text{ plazas}$$

Aumentar una cantidad en un $a\%$ equivale a calcular el $(100 + a)\%$ de dicha cantidad.

Problema resuelto

Una población costera tiene 35 000 habitantes en invierno, pero en verano, con el turismo, aumenta en un 40%. ¿Cuántos residentes tiene durante el verano?

Primera forma

$$\text{AUMENTO: } 40\% \text{ de } 35\,000 = \frac{35\,000 \cdot 40}{100} = 14\,000$$

$$\text{HABITANTES EN VERANO: } 35\,000 + 14\,000 = 49\,000$$

Segunda forma

POBLACIÓN VERANO	→	POBLACIÓN INVIERNO
100	→	140
35 000	→	x

$$\left. \begin{array}{l} 100 \rightarrow 140 \\ 35\,000 \rightarrow x \end{array} \right\} \frac{100}{35\,000} = \frac{140}{x} \rightarrow x = \frac{35\,000 \cdot 140}{100} = 49\,000$$

Solución: En verano albergará a 49 000 residentes.

Forma rápida

La población en verano es el 140% de la población en invierno.

$$\text{Población en verano: } 140\% \text{ de } 35\,000 = 35\,000 \cdot 1,40 = 49\,000 \text{ habitantes.}$$

Disminuciones porcentuales

El trimestre pasado hubo en la provincia 620 accidentes de tráfico. Tras adoptar medidas, las autoridades esperan rebajar la siniestralidad al menos en un 15%. En ese caso, ¿cuál sería el máximo de accidentes en el trimestre actual?

• Primera forma

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{PREVISIÓN} \\ \text{DE ACCIDENTES} \end{array}} = \frac{620}{\begin{array}{c} \text{ACCIDENTES} \\ \text{TRIMESTRE ANTERIOR} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} 15\% \text{ de } 620 \\ \text{DISMINUCIÓN} \end{array}}$$

$$\text{DISMINUCIÓN DE ACCIDENTES} \rightarrow 15\% \text{ de } 620 = \frac{620 \cdot 15}{100} = 93 \text{ accidentes}$$

$$\text{PREVISIÓN PARA EL TRIMESTRE ACTUAL} \rightarrow 620 - 93 = 527 \text{ accidentes}$$

Solución: El máximo de accidentes previstos para el trimestre actual sería de 527.

• Segunda forma

Una disminución de accidentes del 15% significa que cada 100 se quedan en 85.

ACCIDENTES ANTES	→	PREVISIÓN ACTUAL	}	$\frac{100}{620} = \frac{85}{x}$	→	$x = \frac{620 \cdot 85}{100} = 527$ accidentes
100		85				
620		x				

• Forma rápida

Observa que, en realidad, los accidentes previstos son el 85% de 620, por lo que podemos resolver el problema así:

$$\text{ACCIDENTES PREVISTOS} \rightarrow 85\% \text{ de } 620 = 620 \cdot 0,85 = 527 \text{ accidentes}$$

Disminuir una cantidad en un $a\%$ equivale a calcular el $(100 - a)\%$ de dicha cantidad.

Problema resuelto

Un teatro ha vendido 4 600 entradas en la semana del estreno de una nueva obra. El gerente estima que en la segunda semana la venta descenderá en un 20%. ¿Cuántas entradas espera vender en la segunda semana?

Primera forma

$$\text{DISMINUCIÓN: } 20\% \text{ de } 4\,600 = \frac{4\,600 \cdot 20}{100} = 920$$

$$\text{VENTAS ESPERADAS EN LA SEGUNDA SEMANA: } 4\,600 - 920 = 3\,680$$

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Segunda forma

VENTAS 1ª SEMANA	→	VENTAS 2ª SEMANA	}	$\frac{100}{4\,600} = \frac{80}{x}$	→	$x = \frac{4\,600 \cdot 80}{100} = 3\,680$
100		80				
4 600		x				

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Forma rápida

Las ventas descienden un 20%. Es decir, quedan en un 80%.

$$\text{Ventas } 2^{\text{a}} \text{ semana: } 80\% \text{ de } 4\,600 = 4\,600 \cdot 0,80 = 3\,680 \text{ entradas.}$$

En la web

Resuelve problemas de aumentos y disminuciones porcentuales.

Piensa y practica

1. Calcula, mentalmente, el valor de x .

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) 50 % de $x = 80$ | b) 25 % de $x = 6$ |
| c) 10 % de $x = 40$ | d) 75 % de $x = 15$ |
| e) 5 % de $x = 2$ | f) 20 % de $x = 6$ |
| g) x % de $15 = 30$ | h) x % de $40 = 10$ |
| i) x % de $8 = 80$ | j) x % de $80 = 20$ |

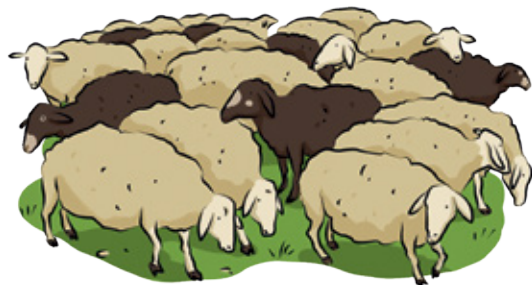
CADA PROBLEMA CON SUS INVERSOS

2. Resuelve:

- a) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados. Al envasarlos se le rompe un 5%. ¿Cuántos se le han roto?
- b) Un pastelero saca del horno una bandeja de mantecados y al envasarlos se le rompen cuatro, lo que supone un 5% del total. ¿Cuántos mantecados había en la bandeja?
- c) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados y al envasarlos se le rompen 4. ¿Que tanto por ciento de los mantecados se le han roto?

3.  Resuelve cada apartado:

- a) En un rebaño de 175 ovejas, el 8% son negras. ¿Cuántas ovejas negras tiene el rebaño?
- b) En un rebaño hay 14 ovejas negras, lo que supone el 8% del total. ¿Cuántas ovejas tiene en total el rebaño?
- c) En un rebaño que tiene 175 ovejas, 14 son negras. ¿Cuál es el porcentaje de negras?



 **En la web**  Resuelve problemas con porcentajes.

4.  Resuelve:

- a) El 75 % de los 220 asistentes a un congreso de economía habla inglés.
¿Cuántos de los asistentes hablan inglés?
- b) El 75 % de los asistentes a un congreso de economía habla inglés. Sabiendo que 165 hablan inglés, ¿cuál es el número total de asistentes?
- c) De los 220 asistentes a un congreso de economía, 165 hablan inglés.
¿Qué porcentaje de asistentes habla inglés?
5. Marta gasta el 25 % del dinero que llevaba en el monedero y aún le quedan 6 euros. ¿Cuánto llevaba en el monedero?
6. En una bolsa de caramelos, el 20 % son del limón. Hay 30 caramelos de limón. ¿Cuántos caramelos hay en la bolsa?
7. Roberto ha leído 48 páginas de una novela, lo que supone el 30 % del total. ¿Cuántas páginas tiene en total la novela?

PROBLEMAS PARA CALCULAR LA CANTIDAD INICIAL

8. Hoy han faltado al ensayo de la banda 6 músicos, lo que supone un 20 % del total. ¿Cuántos músicos componen la banda?

PROBLEMAS PARA CALCULAR EL TANTO POR CIENTO

9. Adriano tenía ahorrados 200 € y ha gastado 50 € en un reproductor MP3. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?
10. De las 24 solicitudes de trabajo que ha recibido una empresa, ha aceptado 21. ¿Qué porcentaje ha sido rechazado?

7

Interés bancario

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo. Así, por ejemplo, un préstamo al 4% anual significa:

Ten en cuenta

El tanto por ciento de beneficio anual se llama **rédito** (r).

$$r = 4\%$$



Significa que 100 €, en 1 año, producen un beneficio de 4 €.

<u>CAPITAL PRESTADO</u>		<u>TIEMPO</u>		<u>BENEFICIO</u>
100 €	→	en 1 año	→ producen →	4 €
500 €	→	en 1 año	→ producen →	$4 \cdot 5 = 20$ €
500 €	→	en 3 años	→ producen →	$20 \cdot 3 = 60$ €

Como puedes ver, se trata de una situación de proporcionalidad compuesta.

Problema resuelto

Un banco ofrece un beneficio anual del 4%. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos 750€ durante 3 años?

<u>CAPITAL</u>		<u>TIEMPO</u>		<u>BENEFICIO = INTERÉS</u>
100 €	→	en 1 año	→ producen →	4 €
1 €	→	en 1 año	→ produce →	$\frac{4}{100}$ €
750 €	→	en 1 año	→ producen →	$\frac{750 \cdot 4}{100}$ €
750 €	→	en 3 años	→ producen →	$\frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 90$ €

En la web

Resuelve problemas de interés bancario.

Un capital, C , colocado al $r\%$ anual durante t años produce un beneficio I .


$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$


Piensa y practica


- Un banco ofrece un beneficio del 5% anual.
 - ¿Qué beneficio producen 100 euros en 4 años?
 - ¿Qué beneficio producen 600 euros en 1 año?
 - ¿Qué beneficio producen 600 euros en 4 años?
- Calcula el interés producido por 8000 euros colocados al 5% durante 3 años.
- ¿Qué interés debo pagar por un préstamo de 3000 € al 8% que devuelvo al cabo de 2 años?

Ejercicios y problemas

Razones y proporciones


1.  Escribe:

 - Tres pares de números cuya razón sea $2/3$.
 - Tres parejas de números que estén en relación de cinco a uno.
 - Tres parejas de números que estén en razón de tres a cuatro.
2.  Calcula x en las siguientes proporciones:

 - $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$
 - $\frac{6}{4} = \frac{x}{6}$
 - $\frac{8}{x} = \frac{12}{15}$
 - $\frac{x}{21} = \frac{4}{28}$
 - $\frac{x}{39} = \frac{30}{65}$
 - $\frac{14}{x} = \frac{49}{42}$
 - $\frac{15}{24} = \frac{55}{x}$
 - $\frac{42}{54} = \frac{x}{63}$
 - $\frac{16}{x} = \frac{32}{16}$
3.  ¿Verdadero o falso?

 - La razón de dos números no puede ser un número entero.
 - Si la razón de a y b es la unidad, entonces $a = b$.
 - La razón de a y b es igual a la razón de b y a .
 - Una proporción es la igualdad de dos fracciones equivalentes.
 - La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ da la misma información que la proporción $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
 - En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $a = d$, entonces $b = c$.
 - En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $a = b$, entonces $c = d$.

Relaciones de proporcionalidad

4.  Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que guardan relación de proporcionalidad directa, los que guardan relación de proporcionalidad inversa y los que no guardan relación de proporcionalidad.



 - El número de kilos vendidos y el dinero recaudado.
 - El número de operarios que hacen un trabajo y el tiempo invertido.
 - La edad de una persona y su altura.
 - La velocidad de un vehículo y la distancia que ha recorrido en media hora.
 - El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.










f) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

g) El número de páginas de un libro y su precio.



Problemas de proporcionalidad directa e inversa

5.   Calcula mentalmente y contesta.

 - Un tren recorre 240 km en 3 horas. ¿Qué distancia recorre en 2 horas?
 - Dos kilos de manzanas cuestan 1,80 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos?
 - Cuatro obreros hacen un trabajo en 3 horas. ¿Cuánto tardarían seis obreros?
 - Cinco entradas para un concierto han costado 40 euros. ¿Cuánto cuestan cuatro entradas?
 - Un ciclista, a 20 km/h, recorre cierta distancia en 3 horas. ¿Cuánto tardará una moto a 60 km/h?
6.  Dos kilos y medio de patatas cuestan 1,75 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos y medio?
7.  Cuatro operarios tardan 10 horas en limpiar un solar. ¿Cuánto tardarían cinco operarios?
8.  Un paquete de 500 folios pesa 1,8 kg. ¿Cuánto pesará una pila de 850 folios?
9.  Una piscina tiene tres desagües iguales. Si se abren dos, la piscina se vacía en 45 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse si se abren los tres?
10.  Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuántas botellas llena en hora y media?
11.  Un tractor, trabajando 8 horas al día, labra un campo en 9 días. ¿Cuántas horas diarias debe trabajar para realizar el trabajo en solo 6 días?
12.  Una merluza de dos kilos y trescientos gramos ha costado 28,75 €. ¿Cuánto pagaré por otra más pequeña de kilo y medio?
13.  Un ciclista ha recorrido 6,3 km en 18 minutos. Expresa su velocidad media en kilómetros por hora.
14.  Un coche a 90 km/h tarda 20 minutos en ir de la población A a la población B. ¿Cuánto tardaría un camión a 60 km/h? ¿Y una furgoneta a 80 km/h?

Ejercicios y problemas

15. Ejercicio resuelto

Una motobomba ha vertido 1250 metros cúbicos de agua a un aljibe en 7 horas.

¿Cuánto tardará en aportar los 1000 metros cúbicos que aún faltan para llenarlo?

$$\begin{array}{l} \text{m}^3 \\ 1250 \longrightarrow 7 \\ 1000 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{m}^3 \\ 1250 \\ 1000 \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{1250}{1000} \cdot \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{700}{125}$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 0 \ 0 \ \text{h} \quad \overline{)125} \\ 0 \ 7 \ 5 \\ \times \ 6 \ 0 \\ \hline 4 \ 5 \ 0 \ 0 \ \text{min} \\ 0 \ 7 \ 5 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Solución: Tardará 5 h 36 min.

16. Un ciclista ha recorrido 25 kilómetros en hora y cuarto. A esa velocidad, ¿cuánto tardaría en recorrer una etapa de 64 kilómetros?

17. Un tren, a 90 km/h, cubre un recorrido en 6 horas. ¿Cuánto tardaría a 100 km/h?

Repartos proporcionales

18. ¿Cómo repartirán tres socios 50 000 € de beneficios, generados por su negocio, si en su constitución el primero invirtió el doble de capital que el segundo y este el triple que el tercero?

Cálculo con porcentajes

19. Calcula mentalmente.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 50 % de 220 | b) 50 % de 82 |
| c) 50 % de 12 | d) 25 % de 800 |
| e) 75 % de 800 | f) 25 % de 280 |

20. Obtén mentalmente el valor de x en cada caso:

- | | |
|----------------------|--------------------|
| a) 50 % de $x = 150$ | b) 50 % de $x = 7$ |
| c) 25 % de $x = 120$ | d) 25 % de $x = 6$ |
| e) 75 % de $x = 150$ | f) 75 % de $x = 9$ |

21. Calcula.

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) 15 % de 160 | b) 13 % de 700 |
| c) 12 % de 3625 | d) 4 % de 75 |
| e) 76 % de 1200 | f) 5 % de 182 |
| g) 2,4 % de 350 | h) 1,7 % de 2500 |

Relaciones porcentajes-fracciones-decimales

22. Completa en tu cuaderno.

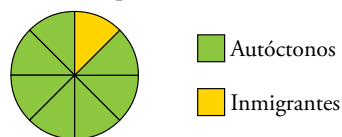
PORCENTAJE	25 %	20 %	80 %	5 %	2 %
FRACCIÓN	1/4				
N.º DECIMAL	0,25	0,20			

23. Calcula como se hace en el ejemplo.

• 15 % de 280 = $280 \cdot 0,15 = 42$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 18 % de 1350 | b) 57 % de 2400 |
| c) 8 % de 125 | d) 6 % de 40 |

24. El gráfico representa la relación entre la población autóctona y la inmigrante en un pueblo agrícola del sur de España.



- ¿Qué fracción de la población es inmigrante?
- ¿Cuántas de cada 1000 personas son inmigrantes?
- ¿Cuántas de cada 100 personas son inmigrantes?
- ¿Cuál es el porcentaje de inmigrantes?

Problemas con porcentajes

25. Un empleado gana 1700 euros al mes y gasta el 40 % en pagar la hipoteca de su vivienda. ¿Cuánto le queda para afrontar el resto de sus gastos?

26. De una clase de 35 alumnos y alumnas, han ido de excursión 28. ¿Qué tanto por ciento de la clase ha faltado a la excursión?

27. Un hotel tiene 187 habitaciones ocupadas, lo que supone el 85 % del total. ¿De cuántas habitaciones dispone el hotel?

28. Un jugador de baloncesto ha efectuado 25 lanzamientos y ha conseguido 16 canastas. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

29. Un embalse está al final del verano al 23 % de su capacidad. Si en ese momento contiene 35 dam³ de agua, ¿cuál es la capacidad total del embalse?

30. Luisa tiene de tarea resolver 18 problemas de matemáticas de los que ya ha solucionado más del 65 %, pero menos del 70 %. ¿Cuántos problemas le quedan por resolver?

31. Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14 000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

32. Hace cinco años compré un piso por 240 000 €. En este tiempo, la vivienda ha subido un 37%. ¿Cuánto vale ahora mi piso?

33. La barra de pan ha subido un 10% y ya cuesta 0,55 €. ¿Cuánto costaba antes de la subida?



34. Un embalse tenía, a principios de verano, 775 decímetros cúbicos de agua. Durante el estío, sus reservas han disminuido en un 68%. ¿Cuáles son las reservas actuales ahora, al final del verano?

Interpreta, describe, exprésate

35. Eva, Juan y Sara han resuelto este problema de diferentes formas. Explica lo que ha hecho cada uno. *Una oficina tiene 45 empleados y en agosto se va de vacaciones el 80%. ¿Cuántos empleados trabajan en agosto?*

Resolución de Eva

$100\% - 80\% = 20\% \rightarrow 20\% \text{ de } 45 = 45 \cdot \frac{20}{100} = 9$
 Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Juan

$$80\% \text{ de } 45 = \frac{45 \cdot 80}{100} = 36 \rightarrow 45 - 36 = 9$$

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Sara

TOTAL	→	DE VACACIONES	+	TRABAJANDO
100	→	80	+	20
10	→	8	+	2
5	→	4	+	1
40	→	32	+	8
45	→	36	+	9

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Problemas “+”

36. ¿Qué interés producen 800 euros al 6% durante un año? ¿Y durante un mes? ¿Y durante 7 meses?

37. Calcula el interés que produce en 5 meses un capital de 9 000 € colocado al 4% anual.

38. Las ventas de una tienda bajaron un 35% en febrero y en marzo se recuperaron al nivel de enero. ¿En qué porcentaje las ventas de marzo superaron a las de febrero?

Autoevaluación

- Resuelve por reducción a la unidad.
 - Un manantial arroja 180 l de agua en 6 min. ¿Cuántos litros arrojará en un cuarto de hora?
 - Abriendo 6 grifos, un depósito se vacía en 50 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse abriendo solo 4?
- Resuelve utilizando la regla de tres.
 - Un coche, a una media de 100 km/h, hace un viaje en 6 horas. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo viaje un a camión a 80 km/h?
 - Por un besugo de 875 g Eva ha pagado 10,85 €. ¿Cuánto pagará Miguel por otro besugo de 1,2 kg?
- Una modista que cobra por horas, ha recibido 585 € por la confección de un pantalón en el que ha invertido tres horas, un vestido en que ha invertido 4 horas, y un abrigo en el que ha trabajado 6 horas. ¿Cuánto ha cobrado por cada prenda?.

4. Completa la tabla en tu cuaderno.

PORCENTAJE	25%	80%	6%		
FRACCIÓN				1/5	
N.º DECIMAL					0,07

- Calcula:
 - 65% de 80
 - 4% de 3 200
 - 16% de 160
- De un pilón de agua que contenía 36 000 litros, se ha gastado un 15%. ¿Cuántos litros quedan?
- En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Qué porcentaje ha faltado?
- Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que supone el 75% de las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

6

Álgebra

El álgebra utiliza símbolos para expresar los procesos matemáticos. Pero antes de llegar ahí, ha recorrido un largo camino.

¿Cuántas ovejas tengo si he esquilado la mitad del rebaño más la tercera parte de la otra mitad y aún me faltan 8 ovejas por esquilar?

Los babilonios, los egipcios y los antiguos griegos practicaban el álgebra retórica: todo se describía con el lenguaje corriente.

Matemáticos como **Pitágoras** (siglo V a. C.), **Euclides** (siglo III a. C.) y **Al-Jwarizmi** (siglo IX), en muchos casos, recurrieron a representaciones geométricas para justificar relaciones algebraicas y para resolver ecuaciones. A esto se lo llamó álgebra geométrica.



Hubo que esperar a la Edad Moderna para que los franceses **Vieta** (siglo XVI) y **Descartes** (siglo XVII) dotaran al álgebra de un lenguaje definitivamente simbólico, prácticamente igual al que usamos en la actualidad.

ÁLGEBRA SIMBÓLICA

TOTAL	=	LA MITAD	+	UN TERCIO DE LA MITAD	+	OCHO
-------	---	-------------	---	--------------------------	---	------

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + 8$$

Nombre y apellidos: Fecha:

El **álgebra** abarca la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar números de valor desconocido, variable o indeterminado. Constituye un **lenguaje** que facilita la construcción y la descripción de los procesos matemáticos. Veamos algunos ejemplos de las aplicaciones del álgebra.

Expresar propiedades aritméticas

- La suma es asociativa, pero la resta no.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (a - b) - c \neq a - (b - c)$$

- La multiplicación es distributiva respecto de la suma.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Generalizar series numéricas (Término general)

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \end{array} \right\} a_n = \begin{cases} (n-1) \cdot n \\ n^2 - n \end{cases}$$

Así, si queremos saber, por ejemplo, el décimo término de la serie:

$$a_{10} = 9 \cdot 10 = 90$$

O bien: $a_{10} = 10^2 - 10 = 90$

Expresar relaciones entre magnitudes (Fórmulas)

- El valor, V , de la fracción, $\frac{a}{b}$, de una cantidad, c .

$$V = (c : b) \cdot a$$

- El espacio, e , recorrido en un tiempo, t , por un móvil que lleva una velocidad, v .

$$e = v \cdot t$$

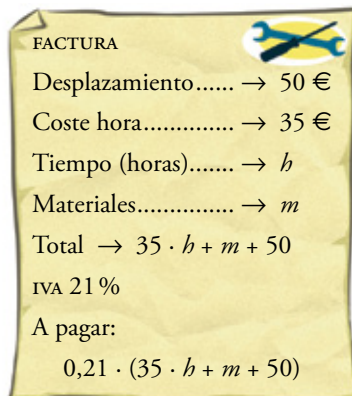
- El interés, I , que produce un capital, C , al $r\%$ anual, en t meses.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100}$$

Expresar y operar números de valor indeterminado (Expresiones algebraicas)

Ejemplos

- Un número natural $\longrightarrow a$
- El siguiente $\longrightarrow a + 1$
- El doble del siguiente $\longrightarrow 2 \cdot (a + 1)$
- El cuadrado del siguiente $\longrightarrow (a + 1)^2$



Expresar relaciones que facilitan la resolución de problemas (Ecuaciones)

Problema resuelto

Manuel es camarero. La mitad de los cafés que ha servido esta mañana eran con leche; la tercera parte, cortados, y los siete restantes, solos. ¿Cuántos cafés ha servido Manuel?

Llamamos x al número de cafés que Manuel ha servido esta mañana.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{CON LECHE}} & + & \boxed{\text{CORTADOS}} & + & \boxed{\text{SOLOS}} & = & \boxed{\text{TOTAL}} \\ \frac{x}{2} & + & \frac{x}{3} & + & 7 & = & x \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x & \rightarrow & x = 42 & & & & \end{array}$$

Comprobación = $\frac{42}{2} + \frac{42}{3} + 7 = 42$

Solución: Manuel ha servido 42 cafés.

Piensa y practica

1. ¿Cuál de estas identidades corresponde al enunciado de la propiedad asociativa de la multiplicación?

Si al multiplicar tres o más números se agrupan de diferentes formas, el resultado no varía.

$$\begin{array}{l} \boxed{a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b} \\ \boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)} \\ \boxed{a \cdot (c + 1) = a \cdot c + a} \end{array}$$

2. Copia y completa las casillas vacías.

1	2	3	4	5	...	n
			10		...	$3n - 2$

3. Escribe los cinco primeros elementos de la serie cuyo término general es $a_n = \frac{3n+1}{2}$.

4. Escribe el término general de estas series:

a) $1 - 4 - 9 - 16 - 25 - \dots \rightarrow a_n = ?$

b) $0 - 3 - 8 - 15 - 24 - \dots \rightarrow b_n = ?$

5. La suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Calcula la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 50$.

6. Traduce en tu cuaderno a lenguaje algebraico las edades de los miembros de esta familia:

	EDAD
Sara Tiene x años.	x
Rosa (hermana mayor) Le saca 2 años a Sara.	
Ana (madre) Tenía 25 años cuando Sara nació.	
Joaquín (padre) Triplica la edad de Rosa.	

Una expresión formada por letras y números recibe el nombre de **expresión algebraica**.

Empecemos estudiando las más sencillas: los monomios.

Monomios

Un **monomio** es el *producto* indicado de un valor conocido (**coeficiente**) por uno o varios valores desconocidos, representados por letras (**parte literal**).

$$3a \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{COEFICIENTE} \\ \uparrow \\ \text{PARTE LITERAL} \end{array}$$

$$\frac{3}{5}xy^2 \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{COEFICIENTE} \\ \uparrow \\ \text{PARTE LITERAL} \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{l} -5ax^2 \rightarrow \text{MONOMIO} \\ \left. \begin{array}{l} \text{COEFICIENTE} \rightarrow -5 \\ \text{PARTE LITERAL} \rightarrow ax^2 \\ \text{GRADO} \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \quad \quad \quad \underbrace{a \cdot x \cdot x}_3 \end{array}$$

En la web

Practica el reconocimiento de los elementos de un monomio.

Ejemplo

$$\begin{array}{c} 5x^2 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{IDÉNTICA PARTE LITERAL} \end{array}$$

En la web

Practica la suma y la resta de monomios.

GRADO DE UN MONOMIO

Se llama grado de un monomio al número de factores que forman la parte literal.

$$4a^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{MONOMIO DE} \\ \text{SEGUNDO GRADO} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ a \cdot a \end{array}$$

$$5x^2y^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{MONOMIO DE} \\ \text{CUARTO GRADO} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ x \cdot x \cdot y \cdot y \end{array}$$

VALOR NUMÉRICO DE UN MONOMIO

Es el valor del monomio cuando las letras toman valores concretos.

$$\text{El valor numérico de } 2ab^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{para } a = 1 \text{ y } b = 2 \text{ es } 8. \\ \rightarrow 2ab^2 \xrightarrow[\substack{a=1 \\ b=2}]{} 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8 \end{array} \right.$$

MONOMIOS SEMEJANTES

Se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen la parte literal idéntica.

$$3a \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} -2a \quad \quad 4x^2y \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} \frac{1}{5}x^2y$$

Suma de monomios

- Dos monomios solo se pueden sumar si son semejantes. En ese caso, se suman los coeficientes, dejando la misma parte literal.
- Si los monomios no son semejantes, la suma queda indicada.

Ejemplos

$$\bullet 5a + 2a = 7a$$

$$\bullet 8x^2 - 3x^2 = 5x^2$$

$$\bullet 3x + 2x^2 \longrightarrow \text{queda indicada}$$

$$\bullet a^2 - a + a^2 = 2a^2 - a \longrightarrow \text{queda indicada}$$



1. Copia en tu cuaderno y completa.

MONOMIO	$8a$	$-3x$	a^2b	$\frac{2}{3}xy^4$	
COEFICIENTE			1		$\frac{1}{4}$
PARTE LITERAL					ab
GRADO					

2. Ejercicio resuelto

Sumar las siguientes expresiones:

a) $x + x = 2x$

b) $a^2 + a^2 = 2a^2$

c) $3x + x = 4x$

d) $4x^2 + 3x^2 = 7x^2$

e) $\frac{1}{3}x + x = \frac{4}{3}x$

3. Suma los siguientes monomios:

a) $x + x + x$

b) $n + n + n + n$

c) $x^2 + x^2$

d) $a^3 + a^3 + a^3 + a^3$

e) $4a + 2a$

f) $4m + 4m$

g) $3x^2 + 6x^2$

h) $5a^2 + a^2 + 2a^2$

i) $m^3 + 2m^3 + 4m^3$

j) $3x^4 + 6x^4 + 2x^4$

4. Ejercicio resuelto

Restar las siguientes expresiones:

a) $5x - x = 4x$

b) $2a - 6a = -4a$

c) $4a^2 - a^2 = 3a^2$

d) $5x^3 - 2x^3 = 3x^3$

5. Resta estos monomios:

a) $8x - 3x$

b) $8a - 7a$

c) $11x^2 - 6x^2$

d) $5a^2 - 9a^2$

e) $m^3 - 5m^3$

f) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x$

6. Ejercicio resuelto

Reducir.

a) $5x + 3 + x - 7 = \overbrace{5x + x} + \overbrace{3 - 7} = 6x - 4$

b) $3a + 2a^2 - 5a + a^2 = \overbrace{2a^2 + a^2} + \overbrace{3a - 5a} = 3a^2 - 2a$

7. Reduce todo lo posible.

a) $3x + x + 2 + 6$

b) $4a + 2a - 7 + 5$

c) $3a + 3 - 2a + 1$

d) $5 - 3x + 4x - 4$

e) $5x + 2 - 3x + x$

f) $2a - 3 - 2 + 3a$

g) $7 - 4a - 7 + 5a$

h) $4x - 3 - 4x + 2$

8. Reduce.

a) $x^2 + 4 + x^2 + 1$

b) $5x^2 - 3 - 4x^2 + 1$

c) $x^2 - 6x + 2x + x^2$

d) $3x + 4x^2 - x^2 + x$

e) $x^2 + 4x + 1 + 2x + 3$

f) $5x^2 + 3x - 4x^2 - 2x + 1$

9. Ejercicio resuelto

Eliminar paréntesis y reducir.

a) $(5x + 1) - (2x - 3) = 5x + 1 - 2x + 3 = 5x - 2x + 1 + 3 = 3x + 4$

b) $(4x^2 - 6) - (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 6 - x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - x^2 + 2x - 6 - 1 = 3x^2 + 2x - 7$

10. Quita paréntesis y reduce.

a) $3x + (2x - 1)$

b) $7x - (5x - 4)$

c) $6x - (4x + 2)$

d) $3x - (x + 5)$

e) $(x - 5) + (x - 3)$

f) $(4x + 2) - (3x + 2)$

11. Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 2x + 1)$

b) $(5x^2 - 2x - 3) - (4x^2 + 3x - 1)$

c) $(x - 3) + (x^2 + 2x + 1)$

d) $(6x^2 - x) - (3x^2 - 5x + 6)$

12. Calcula.

a) El valor numérico de $5x^2$ para $x = 1$.

b) El valor numérico de $-4x^2$ para $x = -3$.

c) El valor numérico de $-2xy$ para $x = 3$ e $y = -5$.

Observa

GRADO 3
 GRADO 2
 $(2x^2) \cdot (3x^3) = 6x^5$
 GRADO 5

El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

Multiplicación de monomios

Recordando que un monomio es un producto de números y letras, deducimos que el producto de dos monomios es otro monomio.

Ejemplos

- $(3a) \cdot (2a) = 3 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 6a^2$
- $(5x) \cdot (-3x^2) = 5 \cdot (-3) \cdot x \cdot x^2 = -15x^3$
- $(3a) \cdot \left(\frac{5}{6}ab\right) = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot a \cdot a \cdot b = \frac{15}{6}a^2b = \frac{5}{2}a^2b$

División de monomios

El cociente de dos monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción.

Ejemplos

- $(6a^2b) : (3a^2b) = \frac{2 \cdot \cancel{3a^2} \cdot \cancel{b}}{\cancel{3a^2} \cdot \cancel{b}} = 2 \rightarrow$ (número)
- $(15x^4) : (3x^3) = \frac{5 \cdot \cancel{3x^3} \cdot x}{\cancel{3x^3}} = 5x \rightarrow$ (monomio)
- $(2ab) : (6b^2) = \frac{\cancel{2} \cdot a \cdot \cancel{b}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b} = \frac{a}{3b} \rightarrow$ (fracción)

En la web

Practica la multiplicación y la división de monomios.

Teniendo en cuenta que las letras representan números, en las operaciones con expresiones algebraicas se conservan todas las propiedades de las operaciones numéricas.

Piensa y practica

13. Haz las multiplicaciones siguientes:

- a) $(3x) \cdot (5x)$
- b) $(-a) \cdot (4a)$
- c) $(4a) \cdot (-5a^2)$
- d) $\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot (6x)$
- e) $\left(\frac{x^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$
- f) $(5a) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2\right)$

14. Ejercicio resuelto

Multiplicar.

$(2ab^2) \cdot (3a^2b^2) = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = 6a^3b^4$

15. Multiplica estos monomios:

- a) $(3x) \cdot (5xy)$
- b) $(-2ab) \cdot (4b)$
- c) $(4x^3y) \cdot (xy)$
- d) $\left(-\frac{2}{3}ab\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}ab\right)$

16. Simplifica como en los ejemplos.

• $\frac{20x^3}{4x^2} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot x^2 \cdot x}{\cancel{4} \cdot x^2} = \frac{5x}{1} = 5x$

• $\frac{3a}{15a^2} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 5 \cdot a \cdot a} = \frac{1}{5a}$

- a) $\frac{4x}{2}$
- b) $\frac{3}{3a}$
- c) $\frac{5x}{10x}$
- d) $\frac{12a^2}{4a}$
- e) $\frac{15x}{3x^2}$
- f) $\frac{8a^2}{8a^3}$

17. Divide.

- a) $(10x) : (2x)$
- b) $(5a^2) : (15a^2)$
- c) $(14a^2) : (-7a)$
- d) $(6x^3) : (9x^2)$
- e) $(10x^2) : (5x^3)$
- f) $(-5a) : (-5a^3)$
- g) $(-16a^4) : (8a^6)$
- h) $(27x^3) : (-9x)$

- La suma (o resta) indicada de dos monomios es un **binomio**.
- La suma (o resta) indicada de tres monomios es un **trinomio**.
- En general, la suma (o resta) de varios monomios es un **polinomio**.

Ejemplos

$$\left. \begin{array}{l} x + y \\ a^2 - 1 \end{array} \right\} \text{BINOMIOS}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ a^2 - ab + 2 \end{array} \right\} \text{TRINOMIOS}$$

$$5x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{BINOMIOS} \\ \text{TRINOMIOS} \\ \text{POLINOMIOS} \end{array} \right\} \text{POLINOMIOS}$$

GRADO DE UN POLINOMIO

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplo

$$\underbrace{2x^4}_{\text{GRADO 4}} - \underbrace{5x^2}_{\text{GRADO 2}} + \underbrace{3x}_{\text{GRADO 1}} - \underbrace{8}_{\text{GRADO 0}} \longrightarrow \text{POLINOMIO DE CUARTO GRADO}$$

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Cuando en un polinomio las letras toman valores concretos, también el polinomio toma un valor concreto.


Ejemplo

Dado el polinomio $3x^2 - 2x + 5$:

- Para $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$
El valor numérico de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = 0$ es 5.
- Para $x = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$
El valor numérico de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = -2$ es 21.

Observa que el valor numérico de un polinomio depende del valor que tomen las letras.

Piensa y practica

- Indica el grado de cada polinomio.
 - $x^2 - 3x + 7$
 - $x^4 - 2$
 - $5x^3 - 3x^2$
 - $9x^6 + 2x$
 - $x^5 - 2x^2$
 - $6x^4 - 3x^4$
- Calcula el valor numérico de $x^3 - 5x^2 - 11$.
 - Para $x = 1$.
 - Para $x = -1$.
- Calcula el valor numérico de $3ab^2 - 5a + 3b$ para $a = 2$ y $b = -1$.
-  Calcula, por tanteo, los valores de x que anulan cada polinomio.
 - $x^2 - 2x + 1$
 - $x^3 - 8$
 - $x^4 - x^3$

Regla práctica

Para **sumar** dos (o más) **polinomios**, se coloca uno bajo el otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes.

Regla práctica

Para **restar** dos **polinomios**, se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman.

En la web

Practica la suma y la resta de polinomios.

Suma de polinomios

Para sumar dos o más polinomios, tendremos en cuenta lo que ya sabemos sobre la suma de monomios.

Por ejemplo, sumemos los polinomios $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$ y $B = x^2 - 5x + 4$.

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar así:

$$A + B = (2x^3 - 3x^2 + 6) + (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 5x + 6 + 4 = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10$$

- En la práctica, se suele hacer de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} A \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ B \rightarrow \quad + x^2 - 5x + 4 \\ \hline A + B \rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{array}$$

Resta de polinomios

Restemos los mismos polinomios A y B de antes.

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar como sigue:

$$A - B = (2x^3 - 3x^2 + 6) - (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2x^3 - 3x^2 - x^2 + 5x + 6 - 4 = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$

- En la práctica, se suele hacer así:

$$\begin{array}{r} A \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ -B \rightarrow \quad - x^2 + 5x - 4 \\ \hline A - B \rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

Producto de un polinomio por un número

Recuerda que para multiplicar un número por una suma, debemos multiplicar el número por cada sumando (propiedad distributiva).

Ejemplo

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \times 2 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2 \end{array} \rightarrow (x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot 2 = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$$

Piensa y practica

5. Copia y completa.

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 7 \\ + x^2 - 8x + 5 \\ \hline \square - \square - \square \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 9 \\ \hline \square - \square + \square - \square \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} -x^2 + 3x - 9 \\ + \square - \square + \square \\ \hline 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - \square - 1 \\ + \square - \square + x + \square \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

6. Calcula las siguientes operaciones con estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ $B = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$

- a) $A + B$ b) $A - B$

7. Calcula.

- a) $3 \cdot (2x + 5)$ b) $5 \cdot (x^2 - x)$
c) $7 \cdot (x^3 - 1)$ d) $(-2) \cdot (5x - 3)$

4 Extracción de factor común

Cuando hablamos de extraer *factor común* nos referimos a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y restas y que resulta muy útil en el cálculo algebraico.

Observa la siguiente expresión:

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d \begin{cases} \text{— Es una suma cuyos sumandos son productos.} \\ \text{— Todos los productos tienen el } \textit{factor común} \textit{ } a. \end{cases}$$

Entonces, podemos transformar la suma en un producto **sacando factor común** y colocando un paréntesis.

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)$$

Observa que la transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.

Ejemplos

a) $4 \cdot a + 4 \cdot b = 4 \cdot (a + b)$

b) $a^2 + ab = a \cdot a + a \cdot b = a \cdot (a + b)$

c) $x^3 - 2x^2 + 5x = x^2 \cdot x - 2x \cdot x + 5 \cdot x = (x^2 - 2x + 5) \cdot x$

Como caso particular, podemos estudiar qué ocurre cuando el factor común a extraer coincide con uno de los sumandos.

En este caso, en su lugar en la suma queda la unidad.

$$a + ab = a \cdot 1 + ab = a \cdot (1 + b)$$

Ejemplos

a) $a^2 + 5a^3 = a^2 \cdot (1 + 5a)$

b) $x^3 + 6x^2 - x = (x^2 + 6x - 1) \cdot x$

c) $3m^2n - 2mn^2 + mn = mn \cdot (3m - 2n + 1)$

Piensa y practica

1. Copia y completa.

a) $7x + 7y = 7 \cdot (\square + \square)$

b) $6a - 9b = 3 \cdot (\square - \square)$

c) $2x + xy = x \cdot (\square + \square)$

d) $x + x^2 - x^3 = x \cdot (\square + \square - \square)$

e) $5x^2 + 10xy + 15x = 5x \cdot (\square + \square + \square)$

2. Extrae factor común.

a) $8x + 8y$

b) $3a + 3b$

c) $5x + 10$

d) $8 + 4a$

e) $x^2 + xy$

f) $2a^2 + 6a$

Ejercicios y problemas

Utiliza el lenguaje algebraico

- Si llamamos x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada enunciado.
 - El triple de x .
 - El resultado de sumarle 3 unidades.
 - La mitad de un número 3 unidades mayor que x .
 - El triple del número que resulta de sumar 5 unidades a x .
 - Un número 5 unidades mayor que el triple de x .

- Copia en tu cuaderno y completa.

1	2	3	4	5	...	n
		22			...	$3n^2 - 5$

1	2	3	4	5	...	n
			10		...	$\frac{n(n+1)}{2}$

- Siguiendo la lógica de la tabla, completa en tu cuaderno las casillas vacías.

1	2	3	5	10	15	20	n
0	3	8	24			399	

1	2	3	5	10	20	25	n
1	4	7	13			73	

- Copia y completa la tabla en tu cuaderno sabiendo que los valores a , b y c se relacionan mediante la fórmula:

$$a = \frac{3b + 2c}{5}$$

b	0	0	2	3	4
c	0	5	7	3	9
a					

Monomios

- Copia y completa.

MONOMIO	$8a$	$\frac{2}{3}xy$	
COEFICIENTE			1
PARTE LITERAL			a^3b
GRADO			

- Opera.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $2x + 8x$ | b) $7a - 5a$ |
| c) $8x - 6 - 3x - 1$ | d) $6a - 2 - 5a - 1$ |
| e) $2x + 3 - 9x + 1$ | f) $a - 6 - 2a + 7$ |

- Quita paréntesis y reduce.

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| a) $x - (x - 2)$ | b) $3x + (2x + 3)$ |
| c) $(5x - 1) - (2x + 1)$ | d) $(7x - 4) + (1 - 6x)$ |
| e) $(1 - 3x) - (1 - 5x)$ | f) $2x - (x - 3) - (2x - 1)$ |

- Opera y reduce.

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| a) $3x \cdot 4x$ | b) $12x : 3x$ |
| c) $\frac{2}{3}x \cdot 6x$ | d) $\frac{3}{4}x^2 : \frac{1}{4}x$ |
| e) $3x \cdot 5x^3$ | f) $15x^6 : 5x^4$ |
| g) $(-2x^2) \cdot (-3x^4)$ | h) $(-20x^8) : 5x^7$ |

Polinomios

- Indica el grado de estos polinomios:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ | b) $4 - 3x^2$ |
| c) $2x^5 - 4x^2 + 1$ | d) $7x^4 - x^3 + x^2 + 1$ |

- Reduce.

- $x^2 - 6x + 1 + x^2 + 3x - 5$
- $3x - x^2 + 5x + 2x^2 - x - 1$
- $5x^3 - 1 - x + x^3 - 6x^2 - x^2 + 4$

- Quita paréntesis y reduce.

- $(3x^2 - 5x + 6) + (2x - 8)$
- $(9x^2 - 5x + 2) - (7x^2 - 3x - 7)$
- $(3x^2 - 1) - (5x + 2) + (x^2 - 3x)$

- Copia y completa.

$$\frac{3x^2 - 5x - 5}{5x^2 - x - 6} + \frac{\square x^3 - 3x^2 + \square x - 8}{6x^3 + 2x^2 - x - 10}$$

- Considera los siguientes polinomios y calcula.

$$A = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \quad B = x^3 - 3x + 1$$

- $A + B$
- $A - B$

- Reduce.

- $2(3x - 1) + 3(x + 2)$
- $3(x^2 - 2x - 1) - 2(x + 5)$
- $6(3x^2 - 4x + 4) - 5(3x^2 - 2x + 3)$

Ejercicios y problemas

Extracción de factor común

15. Extrae factor común.

- a) $3x + 3y + 3z$ b) $2x - 5xy + 3xz$
 c) $a^2 + 3a$ d) $3a - 6b$
 e) $2x + 4y + 6z$ f) $4x - 8x^2 + 12x^3$
 g) $9a + 6a^2 + 3a^3$ h) $2a^2 - 5a^3 + a^4$

Relaciona y aplica tus conocimientos

16. En un campo de cultivo hay cuatro estanques. Llamando C a la cantidad de agua que tendrá un estanque dentro de m minutos, asocia cada estanque con la expresión que le corresponde.

ESTANQUE M: Contiene 4 500 litros de agua y se abre un grifo que le aporta 4 litros por minuto.

ESTANQUE N: Contiene 4 500 litros de agua y se le conecta una bomba que extrae 4 litros por minuto.

ESTANQUE P: Contiene 4 metros cúbicos de agua y se conecta a una tubería que aporta 4,5 metros cúbicos a la hora.

ESTANQUE Q: Contiene 4 metros cúbicos de agua y se abre una boca de riego que extrae 4,5 metros cúbicos a la hora.

$C = 4000 + \frac{4500 \cdot m}{60}$	$C = 4500 - 4 \cdot m$
$C = 4000 - \frac{4500 \cdot m}{60}$	$C = 4500 + 4 \cdot m$

Autoevaluación

1. Completa en tu cuaderno las casillas vacías, siguiendo la lógica de la tabla.

1	3	5	8	10		15	n
2	12	22	37		57		

2. Llamando x a un número, expresa en lenguaje algebraico.

- a) Su doble.
 b) El siguiente de su doble.
 c) El doble de su siguiente.
 d) El triple de su mitad.

3. ¿Cuáles son el coeficiente y el grado del monomio $-\frac{2}{3}xy^2$?

4. Calcula el valor numérico del polinomio $2x^3 - 7x - 2$.

- a) Para $x = 0$ b) Para $x = 1$

5. Reduce estas expresiones:

- a) $2x + 4 + x - 6$
 b) $5x^2 + 2 + 6x - x - 3x^2 + 1$
 c) $6x^3 + 7x - 2x^2 + x^2 - 5x^3 + 17$

6. Opera y reduce.

- a) $3 \cdot (-5x)$
 b) $2x \cdot 3x^2$
 c) $6x^4 : 3x$
 d) $10x^5 : 5x^3$

7. Opera y reduce.

- a) $(5x - 3) - (4x - 5)$
 b) $2(2x + 1) - 3(x + 2)$

8. Observa los siguientes polinomios y calcula:

$A = 3x^3 + 5x^2 - 6x + 8$ $B = x^3 - 5x^2 + 1$
 a) $A + B$ b) $A - B$

9. Sacar factor común.

- a) $3a^2 + 6a$ b) $4x^3 + 6x^2 - 2x$

10. ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular la suma, S , de los primeros n múltiplos de 5?

- a) $\frac{4n + n^2}{5}$ b) $\frac{5n^2 + n}{2}$ c) $\frac{5(n^2 + n)}{2}$

7

Ecuaciones

Algunos consideran a Diofanto el “padre del álgebra”, debido a su significativa aportación en la mejora de la terminología algebraica.


Diofanto dio los primeros pasos hacia la utilización de símbolos para expresar los procesos matemáticos (álgebra simbólica), abandonando el lenguaje corriente (álgebra retórica). Su obra se tradujo al árabe en el siglo x y al latín en el xvi, teniendo gran influencia en los matemáticos de distintas épocas.

DIOFANTO (siglo III)

Matemático griego de la Escuela de Alejandría.



No obstante, la mayor parte de los autores otorgan la paternidad del álgebra a **Al-Jwarizmi**, a pesar de que con él la simbología algebraica dio un gran paso atrás volviendo a la retórica. El nivel de Al-Jwarizmi es, además, mucho más elemental que el de Diofanto.

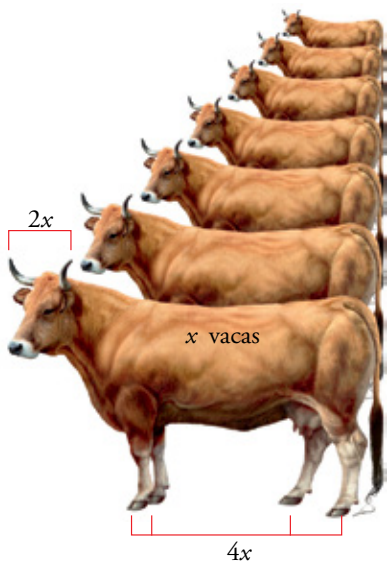
Sin embargo, Al-Jwarizmi, en su libro *Al-jabr* (álgebra), expone de forma directa cómo se resuelven ecuaciones mediante una argumentación lógica, clara y sistemática, lo que propició que fuera seguida y aprendida en su época, y difundida en épocas posteriores. 

AL-JWARIZMI (siglo IX)

Matemático de la cultura árabe. Casa de la Sabiduría. Bagdad.

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Ecuaciones: significado y utilidad



$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 \cdot x \\ \hline x & x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x/3 \\ \hline \end{array} + 30$$

Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento, no conocemos.

Esas cantidades se representan con letras.

Ejemplos

- En el establo, entre cuernos y patas, he contado 42:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vacas} \rightarrow x \\ \text{Cuernos} \rightarrow 2x \\ \text{Patas} \rightarrow 4x \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow 2x + 4x = 42$$

- Raquel tuvo a su hijo Daniel a los 26 años y en la actualidad triplica su edad:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Edad de Raquel} \rightarrow x \\ \text{Edad de Daniel} \rightarrow x - 26 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow x = 3 \cdot (x - 26)$$

- La luna de un escarapate es un metro más larga que ancha y su superficie mide 3,75 m²:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ancho} \rightarrow x \\ \text{Largo} \rightarrow x + 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow x \cdot (x + 1) = 3,75$$

- El doble de un número es igual a su tercera parte más treinta unidades:

$$\left. \begin{array}{l} \text{El número} \rightarrow x \\ \text{Su doble} \rightarrow 2x \\ \text{Su tercera parte} \rightarrow \frac{x}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow 2x = \frac{x}{3} + 30$$

Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir de ahí, manejarlas matemáticamente. Eso, como comprobarás más adelante, supone una **potentísima herramienta para resolver problemas**.

Pero antes, debes aprender a resolverlas.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo

En la ecuación del último ejemplo, $2x = \frac{x}{3} + 30$, la igualdad se cumple solamente para el valor $x = 18$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x = \frac{x}{3} + 30 \\ x = 18 \end{array} \right\} \underbrace{2 \cdot 18}_{36} = \underbrace{\frac{18}{3}}_{36} + 30$$

Diremos, entonces, que la solución de la ecuación es $x = 18$.

Ecuaciones con infinitas soluciones y ecuaciones sin solución

- En la ecuación $0 \cdot x = 0$, cualquier valor que tome x hace cierta la igualdad.

$$0 \cdot x = 0 \rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones}$$

- En la ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no hay ningún valor de x , que haga cierta la igualdad.

$$0 \cdot x = k \rightarrow \text{No tiene solución}$$

Resuelve ecuaciones "con lo que ya sabes"

Antes de aprender ninguna técnica específica, ten en cuenta que razonando con lo que ya sabes, o tanteando, puedes resolver muchas ecuaciones.

Ejemplos


- $5x - 20 = 0 \rightarrow$ Piensa primero: ¿A qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?

Y, después: ¿Cuánto debe valer x ?

- $\frac{4x + 3}{5} = 3 \rightarrow$ Piensa primero: ¿Qué número dividido entre 5 da 3? ¿Cuál es el valor de $4x + 3$?

Y, después: ¿Cuánto debe valer $4x$? ¿Cuánto debe valer x ?

Piensa y practica

1.  ¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?

- La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades. (Número $\rightarrow x$)
- La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años. (Andrés $\rightarrow x$ años)
- Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros. (Ancho $\rightarrow x$ metros)
- He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc. (Bloc $\rightarrow x$ euros)
- Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más. (Ciclista $\rightarrow x$ horas)
- Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5. (Saltamontes $\rightarrow x$ metros)

$$x + \frac{x}{3} = 20$$

$$2x + 2(x + 3) = 30$$

$$15(x - 1) = 5x$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 20$$

$$3x + 2x = 30$$

$$15x = 5(x + 1)$$


2. Resuelve en el orden en que aparecen.

$$a) 3x = 21$$

$$b) 3x - 1 = 20$$

$$c) \frac{3x - 1}{5} = 4$$

$$d) \sqrt{\frac{3x - 1}{5}} = 2$$

3.  Resuelve con lo que sabes.

$$a) 7x = 35$$

$$b) 4x - 12 = 0$$

$$c) x + 3 = 10$$

$$d) 2x - 4 = 6$$

$$e) \frac{x}{3} = 9$$

$$f) \frac{x - 2}{2} = 5$$

$$g) \frac{x + 1}{3} = 2$$

$$h) \frac{3x - 4}{2} = 1$$

$$i) \frac{7}{x + 1} = 1$$

$$j) \frac{10}{2x - 3} = 2$$

$$k) x^2 + 1 = 26$$

$$l) \sqrt{3x + 1} = 5$$

4. Encuentra alguna solución por tanteo.

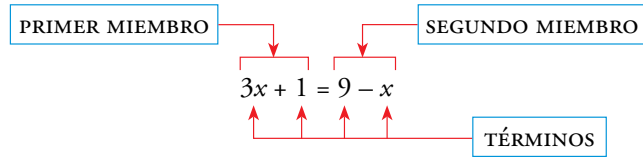
$$a) x^2 + 2x + 1 = 4$$

$$b) x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$c) \frac{x}{4} + \frac{8}{x} = 3$$

$$d) x^3 - \sqrt{x} = 0$$

- **Miembros de una ecuación:** son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.



- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en la ecuación.

Ejemplos

$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación con una incógnita, x .

$5x + 3y = y + 2 \rightarrow$ Ecuación con dos incógnitas, x e y .

- **Soluciones:** son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo

$$3x + 1 = 9 - x \begin{cases} x = 2 \text{ es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 \text{ no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 9 - 1. \end{cases}$$

- **Grado de una ecuación:** es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros, una vez reducida la ecuación.

Ejemplos

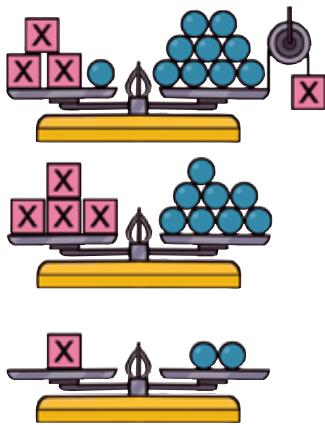
$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación de primer grado.

$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \rightarrow$ Ecuación de segundo grado.

- **Ecuaciones equivalentes:** dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x = 8 \end{cases} \text{ Son equivalentes. Las dos tienen como solución } x = 2.$$



Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

- La ecuación $x^2 + 6x - x^2 = 7x - 1$ es de segundo grado.
- La ecuación $2x + x \cdot y = 6$ es de segundo grado.
- Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.
- Una ecuación puede tener más de dos miembros.
- Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.
- La ecuación $x + 1 = 5$ es equivalente a la ecuación $x + 2 = 6$.

2. Copia en tu cuaderno y asocia cada ecuación con su solución:

$4x + 4 = 5$

$4x - 3 = x + 3$

$x^2 - 3 = 2x$

$3x = x + 1$

3

-1

2

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

3. Agrupa las ecuaciones equivalentes.

a) $4x = 20$

c) $5x - 4 = x$

e) $4x - 5 = 15$

b) $3x - 1 = 8$

d) $3x = 9$

f) $4x - 4 = 0$

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

$$\text{a) } x + 4 = 7$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ x = 7 - 4 \\ \downarrow \\ x = 3 \end{array}$$

$$\text{b) } x + 5 = 1$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ x = 1 - 5 \\ \downarrow \\ x = -4 \end{array}$$

Resolución de la ecuación $x + a = b$

Ejemplo: $x + 4 = 7$



$$\begin{array}{r} x + 4 = 7 \\ \downarrow \\ x + \cancel{4} - \cancel{4} = 7 - 4 \\ \downarrow \\ x = 3 \end{array}$$

- Restando 4 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 3$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \rightarrow x + \cancel{a} - \cancel{a} = b - a \rightarrow x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

$$\text{a) } x - 2 = 6$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ x = 6 + 2 \\ \downarrow \\ x = 8 \end{array}$$

$$\text{b) } 5 - x = 2$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ 5 - 2 = x \\ \downarrow \\ x = 3 \end{array}$$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

Ejemplo: $x - 2 = 6$



$$\begin{array}{r} x - 2 = 6 \\ \downarrow \\ x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2 \\ \downarrow \\ x = 8 \end{array}$$

- Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 8$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \rightarrow x - \cancel{a} + \cancel{a} = b + a \rightarrow x = b + a$$

Piensa y practica

1. Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

$$\text{a) } x + 3 = 4$$

$$\text{b) } x - 1 = 8$$

$$\text{c) } x + 5 = 11$$

$$\text{d) } x - 7 = 3$$

$$\text{e) } x + 4 = 1$$

$$\text{f) } x - 2 = -6$$

$$\text{g) } 9 = x + 5$$

$$\text{h) } 5 = x - 4$$

$$\text{i) } 2 = x + 6$$

2. Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

$$\text{a) } x + 6 = 9$$

$$\text{b) } x - 4 = 5$$

$$\text{c) } 2 - x = 4$$

$$\text{d) } 5 + x = 4$$

$$\text{e) } 3 + x = 3$$

$$\text{f) } 6 = x + 8$$

$$\text{g) } 0 = x + 6$$

$$\text{h) } 1 = 9 - x$$

$$\text{i) } 4 = x - 8$$

Nombre y apellidos: Fecha:

En la práctica

REGLA: Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él) pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $3x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$

b) $7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

Ejemplo: $3x = 15$



$$\begin{aligned} 3x &= 15 \\ \downarrow \\ \cancel{3}x &= \frac{15}{\cancel{3}} \\ \downarrow \\ x &= 5 \end{aligned}$$

• Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.

• La solución es $x = 5$.

Para resolver la ecuación $ax = b$, } $ax = b \rightarrow \frac{ax}{\cancel{a}} = \frac{b}{\cancel{a}} \rightarrow x = \frac{b}{a}$
dividimos ambos miembros por a .

Casos especiales

- La ecuación $0 \cdot x = 6$ no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé seis.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

En la práctica

REGLA: Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él) pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{4} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 4 \rightarrow x = 12$

b) $\frac{x}{2} = \frac{7}{10} \rightarrow x = \frac{7}{10} \cdot 2 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

Ejemplo: $\frac{x}{4} = 3$



$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 3 \\ \downarrow \\ \frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} &= 3 \cdot 4 \\ \downarrow \\ x &= 12 \end{aligned}$$

• Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.

• La solución es $x = 12$.

Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, mul- } $\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$
tiplicamos ambos miembros por a .

Piensa y practica

3. Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

4. Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $4x = 20$

b) $\frac{x}{2} = 1$

c) $3x = 12$

a) $3x - 2 = 0$

b) $4x + 5 = 13$

c) $2x - 5 = 9$

d) $\frac{x}{5} = 2$

e) $8 = 4x$

f) $4 = \frac{x}{2}$

d) $8 - 3x = 2$

e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$

f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

Analiza los siguientes ejemplos y resuelve las ecuaciones que siguen. Para que puedas evaluar tu trabajo, tienes las soluciones al margen.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{l}
 \text{TRANSPONER} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5 = 3 \\ 2x = 3 + 5 \end{array} \right. \text{ Sumamos 5 en ambos miembros.} \\
 \text{REDUCIR} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 8 \\ 2x = 8 \end{array} \right. \\
 \text{TRANSPONER} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 8 \\ x = \frac{8}{2} \end{array} \right. \text{ Dividimos ambos miembros entre 2.} \\
 \text{REDUCIR} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8}{2} \\ x = 4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Recuerda

- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- La ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no tiene solución.

Soluciones

- ① 1 ② 1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 1 ⑥ 2
 ⑦ -4 ⑧ 3 ⑨ 1
 ⑩ -1 ⑪ 2/3 ⑫ -1/3
 ⑬ -1/2 ⑭ I.S. (*) ⑮ S.S. (**)
 (*) → I.S. (infinitas soluciones).
 (**) → S.S. (sin solución).

En la web

Actividades guiadas para afianzar la resolución de ecuaciones.

Soluciones

- ⑯ 1 ⑰ 3 ⑱ -2
 ⑲ 2 ⑳ -4 ㉑ 1/2
 ㉒ -3 ㉓ -1 ㉔ 1
 ㉕ 0 ㉖ 1/5 ㉗ -4
 ㉘ 3/4 ㉙ I.S. ㉚ S.S.

PRACTICA

- ① $2x - 1 = 1$ ② $5x - 3 = 2$ ③ $7x - 5 = 9$
 ④ $10 + 3x = 4$ ⑤ $2x - 3 = -1$ ⑥ $8 = 5x - 2$
 ⑦ $0 = 3x + 12$ ⑧ $5 - x = 2$ ⑨ $6 - 2x = 4$
 ⑩ $4 - 5x = 9$ ⑪ $3x - 1 = 1$ ⑫ $4 = 3x + 5$
 ⑬ $5 = 4x + 7$ ⑭ $0x + 2 = 2$ ⑮ $0x + 1 = 4$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{l}
 \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 1 - 3x = 7 \\ 2x + 1 = 7 \end{array} \right. \\
 \text{T} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = 7 \\ 2x = 7 - 1 \end{array} \right. \\
 \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 6 \end{array} \right. \\
 \text{T} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6 \\ x = \frac{6}{2} \end{array} \right. \\
 \text{R} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6}{2} \\ x = 3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Ejemplo 3

$$\begin{array}{l}
 \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 4x - x + 3 = 7 - 5 \\ 3x + 3 = 2 \end{array} \right. \\
 \text{T} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3 = 2 \\ 3x = 2 - 3 \end{array} \right. \\
 \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 3x = 2 - 3 \\ 3x = -1 \end{array} \right. \\
 \text{T} \left\{ \begin{array}{l} 3x = -1 \\ x = \frac{-1}{3} \end{array} \right. \\
 x = \frac{-1}{3}
 \end{array}$$

PRACTICA

- ⑯ $8x - 4 + x = 5$ ⑰ $5x - 8 - x = 7 - 3$ ⑱ $3x + 10 + x = 2$
 ⑲ $7x - 2x - 3 = 7$ ⑳ $3x + 15 + 2x = -5$ ㉑ $5 + 2x + 1 = 7$
 ㉒ $5 - x + 2 = 10$ ㉓ $7x + 3 - 9x = 5$ ㉔ $5 - 1 = x + 5 - 2x$
 ㉕ $1 = x + 1 + 2x$ ㉖ $4 = x + 5 - 6x$ ㉗ $9 = 4x + 1 - 6x$
 ㉘ $5 = 3x - 1 + 5x$ ㉙ $7x + 2 - 7x = 3 - 1$ ㉚ $5x + 3 - 5x = 7$

A medida que las ecuaciones se complican, se abren diferentes opciones de resolución. Cualquiera es válida, siempre que operes correctamente.

A continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de dos formas:

Ejemplo 4

OPCIÓN A

La incógnita, en el miembro de la izquierda.

$$\begin{array}{l} \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\ -3x - 1 = 3 + 3x \\ -3x - 3x = 3 + 1 \\ -6x = 4 \\ x = \frac{4}{-6} \\ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

OPCIÓN B

La incógnita, en el miembro en el que tome coeficiente positivo.

$$\begin{array}{l} \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\ -3x - 1 = 3 + 3x \\ -1 - 3 = 3x + 3x \\ -4 = 6x \\ \frac{-4}{6} = x \\ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

Soluciones

- | | | |
|--------|----------|----------|
| 31) 3 | 32) 2 | 33) 2 |
| 34) 3 | 35) -1 | 36) 2/5 |
| 37) 1 | 38) 3/5 | 39) -1/2 |
| 40) -5 | 41) I.S. | 42) S.S. |

■ PRACTICA

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 31) $2x - 1 = x + 2$ | 32) $3x + 2 = x + 6$ |
| 33) $2x + 1 = 5x - 5$ | 34) $1 - x = 4 - 2x$ |
| 35) $x - 6 = 5x - 2$ | 36) $3 + 7x = 2x + 5$ |
| 37) $6x - 2 + x = 2x + 3$ | 38) $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$ |
| 39) $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$ | 40) $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$ |
| 41) $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$ | 42) $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$ |

Cuando una ecuación contiene paréntesis, comenzaremos suprimiéndolos y reduciendo.

Ejemplo 5

$$\begin{array}{l} \text{R} \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2(2x - 2) = 8 - (3 + 2x) \\ 5x - 4x + 4 = 8 - 3 - 2x \\ x + 4 = 5 - 2x \\ x + 2x = 5 - 4 \\ 3x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

■ PRACTICA

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 43) $x - 7 = 6 - (x - 3)$ | 44) $x - (1 - 3x) = 8x - 1$ |
| 45) $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$ | 46) $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$ |
| 47) $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$ | 48) $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$ |
| 49) $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$ | 50) $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$ |
| 51) $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$ | 52) $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$ |
| 53) $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$ | 54) $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$ |

Soluciones

- | | | |
|---------|----------|----------|
| 43) 8 | 44) 0 | 45) 2 |
| 46) 1/2 | 47) 3/4 | 48) -1 |
| 49) 2/3 | 50) 1/6 | 51) -2 |
| 52) 1 | 53) I.S. | 54) S.S. |

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, *multiplicaremos los dos miembros* de la ecuación por un número que sea múltiplo de todos los denominadores. El múltiplo más adecuado es el más pequeño; es decir, el *mínimo común múltiplo de los denominadores*.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5x}{6} - 1 = \frac{x}{3} - \frac{3}{4} \\ 12 \cdot \left(\frac{5x}{6} - 1 \right) = 12 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mín.c.m. } (6, 3, 4) = 12 \\ \text{Multiplicamos los dos miembros por 12.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{60x}{6} - 12 = \frac{12x}{3} - \frac{36}{4} \\ 10x - 12 = 4x - 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Al quitar paréntesis y reducir, desaparecen} \\ \text{los denominadores.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10x - 4x = -9 + 12 \\ 6x = 3 \\ x = \frac{3}{6} \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A partir de ahí, actuaremos como ya sabemos.} \end{array}$$

Una estrategia similar

- Reducir a común denominador:

$$\frac{5x}{6} - \frac{1}{1} = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

Común denominador $\rightarrow 12$

$$\frac{10x}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{9}{12}$$

- Eliminar denominadores:

$$10x - 12 = 4x - 9$$

En la web

Ayuda para la resolución de ecuaciones con denominadores.

Para **eliminar** los **denominadores** en una ecuación, se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Piensa y practica

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

c) $4 - \frac{2x}{3} = x + \frac{2}{3}$

d) $1 + \frac{2x}{5} = \frac{1}{5} - 2x$

e) $\frac{1}{4} - x = \frac{3x}{4} - 1$

f) $\frac{3x}{2} + 5 = 2x - \frac{1}{2}$

2. Halla x en cada caso.

a) $1 - \frac{x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} = 1$

c) $\frac{5x}{6} + 1 = x - \frac{1}{3}$

d) $\frac{7x}{10} + 1 = \frac{2}{5} + x$

3. Resuelve.

a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{15} + \frac{2x}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} - x$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 1$

d) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5x}{6} - 1$

SOLUCIONES

1. a) 3 b) -2 c) 2 d) -1/3 e) 5/7 f) 11

2. a) 2 b) 4/5 c) 8 d) 2

3. a) -1 b) 1/8 c) 6 d) 10 e) 3/8 f) -3

En la información que aporta el enunciado de un problema, encontramos elementos conocidos (*datos*) y elementos desconocidos (*incógnitas*).

Si conseguimos *codificar algebraicamente* todos esos elementos, y relacionarlos mediante una igualdad, habremos construido una *ecuación*.

Resolviendo la ecuación e interpretando las soluciones en el contexto del enunciado, habremos resuelto el problema.

En esta página, y en las siguientes, verás varios ejemplos del proceso a seguir.

Problema resuelto

1. Un hipermercado ha sacado hoy, en oferta, una partida de lavadoras y ha vendido la mitad por la mañana y la tercera parte por la tarde. Si en total ha vendido 20 unidades, ¿cuántas lavadoras ha sacado en oferta?



a) Identifica los elementos del problema, expresando algebraicamente los que son desconocidos.

- Lavadoras en oferta $\longrightarrow x$
- Las ventas por la mañana $\longrightarrow \frac{x}{2}$
- Las ventas por la tarde $\longrightarrow \frac{x}{3}$

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{VENDIDAS POR LA MAÑANA}} + \boxed{\text{VENDIDAS POR LA TARDE}} = 20$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20$$

c) Resuelve la ecuación.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20 \rightarrow 3x + 2x = 120 \rightarrow 5x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{5} \rightarrow x = 24$$

d) Interpreta la solución de la ecuación dentro del enunciado del problema y comprueba si es correcta.

Solución: El lote de lavadoras se componía de 24 unidades.

Comprobación:

$$\frac{24}{2} + \frac{24}{3} = 12 + 8 = 20$$

Piensa y practica

1. Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25.

¿Qué número es?

2. Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble.

¿De qué número se trata?

3. Anteayer salieron a la venta las entradas para un concierto y, en ese mismo día, se vendió un tercio; ayer, una cuarta parte, y hoy, se han vendido las 200 restantes.

¿Cuántas entradas se pusieron a la venta?

$$\boxed{\text{VENDIDAS ANTEAYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS AYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS HOY}} = \boxed{\text{TOTAL}}$$

Problema resuelto

2. Ana y su madre cruzan una calle por el paso de cebra. Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana, ¿cuánto mide el paso de cada una?



a) Los datos:

- Paso de Ana (cm) $\longrightarrow x$
- Paso de la madre (cm) $\longrightarrow x + 20$

b) La ecuación:

$$\begin{array}{|l} \text{ANCHURA DE LA CALLE} \\ \text{35 PASOS DE ANA} \end{array} = \begin{array}{|l} \text{ANCHURA DE LA CALLE} \\ \text{25 PASOS DE LA MADRE} \end{array}$$

$$35x = 25(x + 20)$$

c) Resuelve la ecuación:

$$35x = 25(x + 20) \rightarrow 35x = 25x + 500 \rightarrow 35x - 25x = 500 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x = 500 \rightarrow x = \frac{500}{10} \rightarrow x = 50$$

d) Solución:

- Paso de Ana $\rightarrow 50$ cm
- Paso de la madre $\rightarrow 50 + 20 = 70$ cm

Comprobación:

$$\begin{array}{ccc} 35 \text{ pasos de Ana} & & 25 \text{ pasos de la madre} \\ \underline{35 \cdot 50} & \Leftrightarrow & \underline{25 \cdot 70} \\ 1750 & = & 1750 \end{array}$$

Piensa y practica

4. Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

$$\left. \begin{array}{l} \text{NARANJAS} \rightarrow x \\ \text{MANZANAS} \rightarrow x + 0,5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{|l} \text{NARANJAS} \\ \text{COSTE 3 kg} \end{array} + \begin{array}{|l} \text{MANZANAS} \\ \text{COSTE 1 kg} \end{array} = 5,30 \text{ €}$$

5. Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

$$\left. \begin{array}{l} \text{ROSA} \rightarrow x \\ \text{JUAN} \rightarrow x + 25 \\ \text{ALBERTO} \rightarrow x - 26 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{|l} \text{EDAD} \\ \text{DE ROSA} \end{array} + \begin{array}{|l} \text{EDAD} \\ \text{DE JUAN} \end{array} + \begin{array}{|l} \text{EDAD} \\ \text{DE ALBERTO} \end{array} = 98 \text{ años}$$

6. La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería. Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich. Por tres sándwiches y dos bocadillos pagan 11 euros. ¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?

$$\begin{array}{|l} \text{COSTE} \\ \text{3 sándwiches} \end{array} + \begin{array}{|l} \text{COSTE} \\ \text{2 bocadillos} \end{array} = 11 \text{ €}$$

7. Un frutero ha cargado en su furgoneta 26 cajas: unas de kiwis, de 12 kilos, y otras de plátanos, de 10 kilos. Si en total pesan 290 kilos, ¿cuántas cajas eran de cada clase?

$$\begin{array}{|l} \text{Cajas kiwis} \end{array} \rightarrow x \quad \begin{array}{|l} \text{Cajas plátanos} \end{array} \rightarrow 26 - x$$

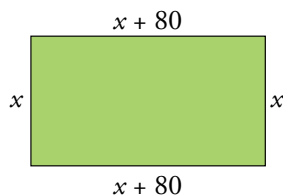
8. En un test de 50 preguntas se consiguen dos puntos por cada respuesta correcta y se pierden dos por cada respuesta errónea o en blanco. ¿Cuántos aciertos son necesarios para superar la prueba si se exige un mínimo de 75 puntos?

Problema resuelto

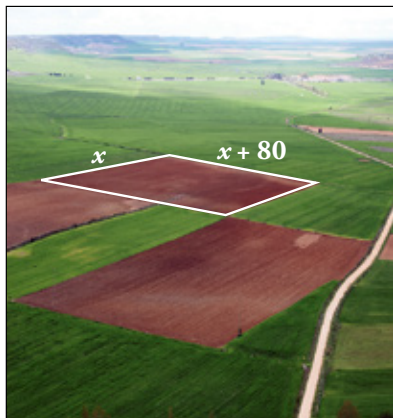


4. Calcular las dimensiones de una finca rectangular, sabiendo que es 80 metros más larga que ancha y que la valla que la rodea tiene una longitud de 560 metros.

a) Los datos:



Lado menor (ancho) $\rightarrow x$
 Lado mayor (largo) $\rightarrow x + 80$
 Longitud de la valla $\rightarrow 560$ m



b) La ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$

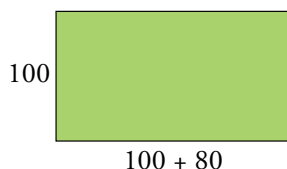
c) Resolución de la ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$

$$2x + 2x + 160 = 560$$

$$4x = 560 - 160 \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

d) Solución:



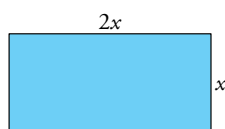
Lado menor $\rightarrow 100$ m
 Lado mayor $\rightarrow 100 + 80 = 180$ m
 La finca mide 180 m de larga por 100 m de ancha.

Comprobación:

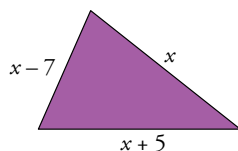
Longitud de la valla: $2 \cdot 100 + 2 \cdot 180 = 200 + 360 = 560$ metros

Piensa y practica

9. Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

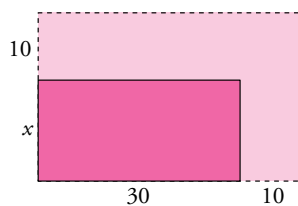


10. En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor. Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



11. De una parcela rectangular se han cedido, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, por lo que la parcela ha perdido una superficie de 480 m^2 .

Si el rectángulo resultante mide 30 metros de largo, ¿cuál es su anchura?



SUPERFICIE ORIGINAL $\rightarrow 40 \cdot (x + 10)$

SUPERFICIE RESULTANTE $\rightarrow 30 \cdot x$

SUPERFICIE PERDIDA $\rightarrow 40 \cdot (x + 10) - 30 \cdot x$
 $\rightarrow 480 \text{ m}^2$

En la web Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado.

Ejercicios y problemas

Ecuaciones sencillas

1. Resuelve mentalmente.

a) $x + 4 = 5$ b) $x - 3 = 6$ c) $7 + x = 10$
 d) $7 - x = 5$ e) $9 = 15 - x$ f) $2 - x = 9$

2. Resuelve.

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$
 b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$
 c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$
 d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$
 e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$
 f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

3. Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$
 b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$
 c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$
 d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$
 e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$
 f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$
 g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4. Quita denominadores y resuelve.

a) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$
 b) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$
 c) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$
 d) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$
 e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5}{6} + \frac{x}{6} - \frac{2}{3}$

5. Elimina los paréntesis y los denominadores, y resuelve.

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$ b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$
 c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$ d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

6. Calcula, primero, mentalmente y, después, con la ayuda de una ecuación.

- a) Si a un número le sumas 12, obtienes 25. ¿De qué número se trata?
 b) Si a un número le restas 10, obtienes 20. ¿Qué número es?
 c) Un número, x , y su siguiente, $x + 1$, suman 13. ¿Cuáles son esos números?
 d) En mi clase somos 29 en total, pero hay tres chicos más que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

7. Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.

8. Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12.

¿Cuál es ese número?

9. La suma de tres números consecutivos es 135.

¿Cuáles son esos números?

10. Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.

ANTONIO $\rightarrow x - 7$; TERESA $\rightarrow x$; BLANCA $\rightarrow x + 2$

11. Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros. ¿Cuál es el coste de cada pieza?

12. Nicolás ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €. ¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?

13. Reparte 280 € entre tres personas, de forma que la primera reciba el triple que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

1.^a PERSONA $\rightarrow 6x$; 2.^a $\rightarrow 2x$; 3.^a $\rightarrow x$

14. Tres agricultores reciben una indemnización de 100 000 € por la expropiación de terrenos para la construcción de una autopista. ¿Cómo han de repartirse el dinero, sabiendo que el primero ha perdido el doble de terreno que el segundo, y este, el triple de terreno que el tercero?

Ejercicios y problemas

15. En la caja de un supermercado hay 1 140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros.

Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase tiene la caja?

16. Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

17. Un hortelano siembra la mitad de su huerta de melones, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200 m², de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

SUPERFICIE HUERTA → x MELONES → $x/2$

TOMATES → $x/3$ PATATAS → 200 m²

18. Ejercicio resuelto

Joaquín tiene 14 años; su hermana, 16, y su madre, 42. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre ambos hijos iguallen la edad de la madre?

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE x AÑOS
JOAQUÍN	14	$14 + x$
HERMANA	16	$16 + x$
MADRE	42	$42 + x$

Dentro de x años, debe ocurrir que:

$$\boxed{\text{EDAD DE JOAQUÍN}} + \boxed{\text{EDAD DE LA HERMANA}} = \boxed{\text{EDAD DE LA MADRE}}$$

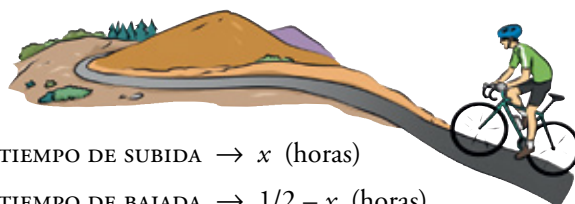
$$(14 + x) + (16 + x) = 42 + x$$

$$2x + 30 = 42 + x \rightarrow x = 12$$

Solución: Deben transcurrir 12 años.

19. Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?

20. Un ciclista sube un puerto a 15 km/h y, después, desciende por el mismo camino a 35 km/h. Si la ruta ha durado 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha invertido en la subida?



TIEMPO DE SUBIDA → x (horas)

TIEMPO DE BAJADA → $1/2 - x$ (horas)

DISTANCIA RECORRIDA SUBIENDO → $15x$

DISTANCIA RECORRIDA BAJANDO → $35\left(\frac{1}{2} - x\right)$

21. Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

TIEMPO HASTA EL ENCUENTRO → x (horas)

DISTANCIA RECORRIDA POR EL PRIMERO → $24x$

DISTANCIA RECORRIDA POR EL SEGUNDO → $16x$

22. Dos trenes se encuentran, respectivamente, en las estaciones de dos ciudades separadas entre sí 132 km. Ambos parten a la misma hora, por vías paralelas, hacia la ciudad contraria. Si el primero va a 70 km/h, y el segundo, a 95 km/h, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

23. Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

24. Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12%. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

PRECIO ORIGINAL → x

REBAJA → $\frac{12x}{100}$

ECUACIÓN → $x - \frac{12x}{100} = 66$

25. Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20% de rebaja, y en la blusa, solo un 15%. ¿Cuánto costaba cada prenda?

26. Para delimitar una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta. ¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?

27. Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca, a 0,50 €/l, con otra cantidad de leche de oveja, a 0,80 €/l, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio medio de 0,70 €/l. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche empleó?

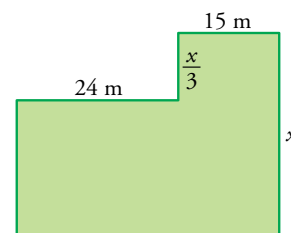
	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	COSTE (€)
VACA	x	0,50	$0,5x$
OVEJA	$300 - x$	0,80	$0,8(300 - x)$
MEZCLA	300	0,70	$0,7 \cdot 300$

$$\begin{matrix} \text{COSTE LECHE} \\ \text{VACA} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{COSTE LECHE} \\ \text{OVEJA} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{COSTE} \\ \text{MEZCLA} \end{matrix}$$

Analiza y exprésate

28. Analiza las soluciones que siguen al problema y explica cómo se ha construido la ecuación en cada caso.

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 930 metros cuadrados.



Resolución A

$$24 \cdot \left(x - \frac{x}{3}\right) + 15 \cdot x = 930$$

$$24 \cdot \frac{2x}{3} + 15 \cdot x = 930 \rightarrow 16x + 15x = 930$$

$$31x = 930 \rightarrow x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 30 + 15 + 10 + 24 + 20 + 39 = 138 \text{ m}$$

Resolución B

$$(24 + 15) \cdot x - 24 \cdot \frac{x}{3} = 930$$

$$39x - 8x = 930 \rightarrow 31x = 930$$

$$x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 24 + 10 + 15 + 30 + 39 + 20 = 138 \text{ m}$$

Autoevaluación

1. ¿Cuál de los valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 9$, $x = -1/2$ es solución de la ecuación $\frac{x^2 - 1}{5} = \sqrt{x} + 1$?

2. Despeja la incógnita y resuelve la ecuación.

- a) $x + 4 = 3$ b) $3 = x - 2$
 c) $5 - x = 3$ d) $20 = 5x$

3. Resuelve.

- a) $7x - 3 - 2x = 6 + 3x + 1$
 b) $1 - 4x - 6 = x - 3 \cdot (2x - 1)$

4. Resuelve.

- a) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{2}{5}$
 b) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$
 c) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}$

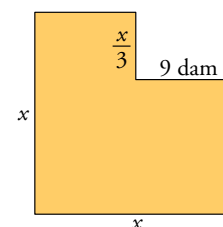
5. Si la tercera parte de un número le sumas su cuarta parte, obtienes 14. ¿Cuál es el número?

6. Por seis tortas y cuatro bollos, Raquel ha pagado seis euros. Averigua el precio de unas y otros, sabiendo que una torta cuesta el doble que un bollo.

7. Un hortelano ha plantado 1/3 de la superficie de su huerta de acelgas y 3/10 de zanahorias. Si aún le quedan 110 m² libres, ¿cuál es la superficie total de la huerta?

$$\begin{matrix} \text{SUPERFICIE} \\ \text{ACELGAS} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{SUPERFICIE} \\ \text{ZANAHORIAS} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{SUPERFICIE} \\ \text{LIBRE} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{SUPERFICIE} \\ \text{TOTAL} \end{matrix}$$

8. Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que ocupa una superficie de 180 decámetros cuadrados.



8

Sistemas de ecuaciones

Desde el siglo XVII a.C., los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya conocían el concepto de ecuación.



Los escritos de los matemáticos de Babilonia incluían ya sistemas de ecuaciones relacionados con sencillos problemas cotidianos, como el que ves aquí, traducido de una tablilla de barro.

Los resolvían apelando al ingenio en cada caso particular, sin desarrollar un método general. Y algo parecido les ocurrió a los egipcios y, después, a los griegos.

$\frac{1}{4}$ anchura + longitud = 7 manos
 longitud + anchura = 10 manos

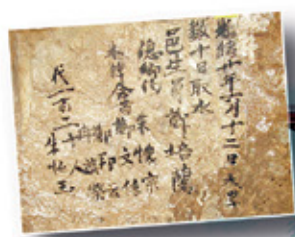


$\frac{x}{4} + y = 7$
 $x + y = 10$

$x + 4y = 21$
 $x + y = 10$



Los chinos, en el siglo II a.C., avanzaron mucho en ese terreno, llegando a resolver con toda soltura los sistemas de ecuaciones. Pero ese saber no llegó a Occidente hasta muchos siglos más tarde.



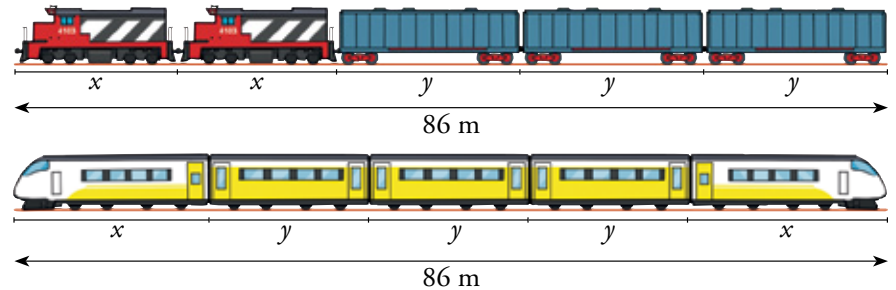
En Europa, la aparición del álgebra simbólica a partir del siglo XV permitió su despegue definitivo, abriendo camino al descubrimiento de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

Nombre y apellidos: Fecha:

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

Ejemplo

En cada uno de los siguientes trenes, no conocemos ni la longitud de una máquina, x , ni la de un vagón, y .



Ten en cuenta

La ecuación $2x + 3y = 86$ tiene infinitas soluciones.

x	16	19	20,5	...
y	18	16	15	...

Pero en ambos podemos afirmar que: $2x + 3y = 86$.

Observa, también, que las longitudes x e y son distintas en cada tren. Es decir, la igualdad puede ser cierta para valores diferentes de x e y . Por ejemplo:

$$\begin{matrix} x = 16 \\ y = 18 \end{matrix} \rightarrow 2 \cdot 16 + 3 \cdot 18 = 86 \qquad \begin{matrix} x = 19 \\ y = 16 \end{matrix} \rightarrow 2 \cdot 19 + 3 \cdot 16 = 86$$

Decimos entonces que esos pares de valores (x, y) son soluciones de la ecuación y vemos que la solución no es única.

En realidad, dando a x un valor cualquiera, se obtiene un valor correspondiente para y ; es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Y si queremos determinar la longitud de cada máquina y la de cada vagón, necesitamos más datos.

Forma general

Toda ecuación lineal puede escribirse en esta forma:

$$ax + by = c$$

donde a , b y c son valores conocidos.

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de **ecuaciones lineales**.
- Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hace cierta la igualdad.
- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones**.

Piensa y practica

1. Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación $3x - 4y = 8$.

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

2. Busca tres soluciones diferentes para la siguiente ecuación:

$$2x - y = 5$$

3. Copia y completa en tu cuaderno la tabla con soluciones de la ecuación $3x + y = 12$.

x	0		3		5	-1		-3
y		9		0			18	

4. Reduce a la forma general estas ecuaciones:

a) $2x - 5 = y$ b) $x - 3 = 2(x + y)$ c) $y = \frac{x+1}{2}$

Representación gráfica de una ecuación lineal


Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra.

Los valores se recogen, ordenados, en una tabla.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación que relaciona el peso de una pelota (x) y de un dado (y) en la balanza que ves a la izquierda:



 $\rightarrow x$

 $\rightarrow y$

$$3x + y = 45$$

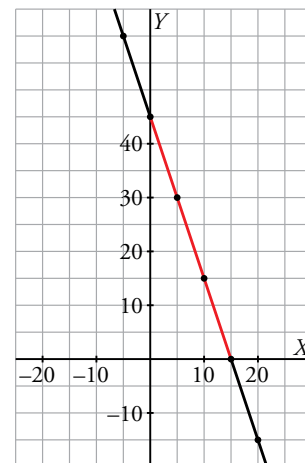
$$3x + y = 45$$

↓ Despejamos y .

$$y = 45 - 3x$$

↓ Dando distintos valores a x , obtenemos los correspondientes de y .

x	0	5	10	15	20	-5	...
y	45	30	15	0	-15	60	...

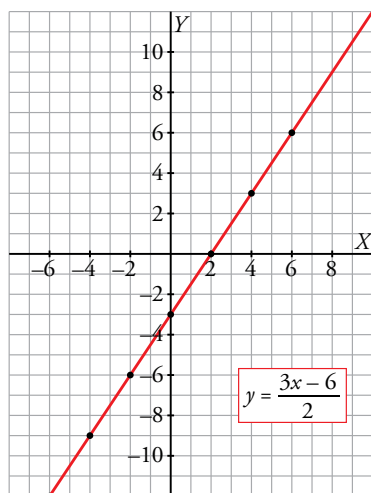


Al representar estos valores en el plano, quedan alineados en una recta.

Cada punto del segmento rojo corresponde a una posible solución para el peso de la pelota y el del dado (valores positivos).

En la web

Practica la representación gráfica de ecuaciones lineales.



- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Ejercicio resuelto

Representar gráficamente la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Despejamos y para construir la tabla de valores:

$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$3x - 6 = 2y$$

$$y = \frac{3x - 6}{2}$$

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y	-12	-9	-6	-3	0	3	6	...

- A la izquierda puedes ver la representación gráfica.

Piensa y practica

5. Copia y completa la tabla para cada ecuación y representa la recta correspondiente.

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$ b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \frac{x - 2}{2}$

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y								...

6. Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$

b) $2x + y = 1$

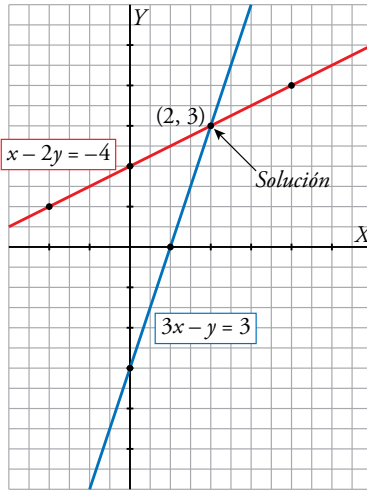
c) $y = \frac{x}{2} + 3$

7. Escribe la ecuación y representa su recta.



- Dos ecuaciones lineales forman un **sistema**:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.



SOLUCIÓN DEL SISTEMA:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ejemplo

Las dos ecuaciones siguientes forman un sistema:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Observa las tablas de soluciones de cada ecuación:

$$3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3$$

$$x - 2y = -4 \rightarrow y = \frac{x + 4}{2}$$

x	-1	0	1	2	3	...
y	-6	-3	0	3	6	...

x	-2	0	2	4	6	...
y	1	2	3	4	5	...

La solución del sistema es el par de valores
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$
 que satisface ambas ecuaciones.

Observa, en la representación gráfica, que las dos rectas pasan por el punto (2, 3); es decir, se cortan en dicho punto.

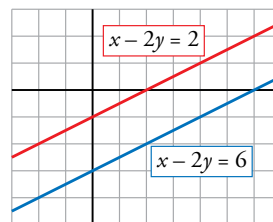
La *solución de un sistema* de ecuaciones lineales coincide con el *punto de corte* de las rectas asociadas a las ecuaciones.

CASOS ESPECIALES

SISTEMAS SIN SOLUCIÓN

Las ecuaciones son incompatibles.
Las rectas son paralelas.

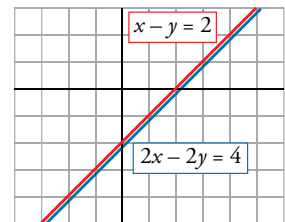
Por ejemplo:
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$



SISTEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Las ecuaciones son equivalentes.
Las rectas se superponen.

Por ejemplo:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$



En la web

Practica la resolución gráfica de ecuaciones lineales.

Piensa y practica

1. Representa gráficamente y escribe la solución.

a)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = 2 + x/2 \\ y = 4 - x/2 \end{cases}$$

2. Representa gráficamente.

a)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

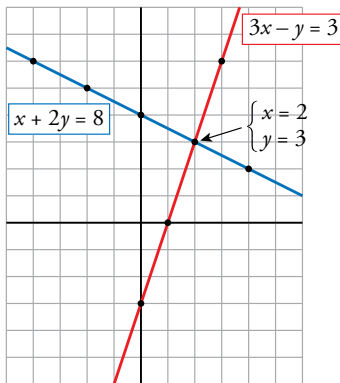
3

Método algebraico para la resolución de sistemas lineales

En la web

Ayuda para resolver sistemas por el método de sustitución.

Practica la resolución de sistemas por el método de sustitución.



Vamos a aprender una técnica para resolver sistemas de ecuaciones. Consiste en obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejercicio resuelto

Resolver por sustitución este sistema:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow x = 8 - 2y$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{cases} \rightarrow 3(8 - 2y) - y = 3$$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$$3(8 - 2y) - y = 3 \rightarrow 24 - 6y - y = 3 \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow y = 3$$

d) Sustituimos el valor de $y = 3$ en la expresión obtenida al principio, al despejar x , y calculamos:

$$x = 8 - 2y \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Solución del sistema} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

En la web

Practica el método de sustitución.

Piensa y practica

1. Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a)
$$\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$$

SOLUCIONES

a) $x = 3$
 $y = 3$

b) $x = 4$
 $y = 2$

c) $x = 9$
 $y = 10$

d) $x = 2$
 $y = -1$

2. Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$$

SOLUCIONES

a) $x = 3$
 $y = 4$

b) $x = 3$
 $y = 5$

c) $x = 5$
 $y = -2$

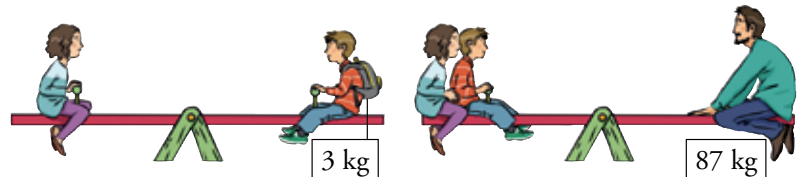
d) $x = -1$
 $y = -4$

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

Estudia con detenimiento los ejemplos que tienes a continuación. En ellos se resuelven problemas tipo que te servirán de modelo para abordar otros similares.

Problemas resueltos

1. Sara, en el balancín, se equilibra con Alberto, su hermano menor, que lleva una mochila de 3 kilos y juntos, sin mochila, se equilibran con su padre, que pesa 87 kilos. ¿Cuánto pesa cada uno?



- a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente.

PESO DE SARA $\rightarrow x$

PESO DE ALBERTO $\rightarrow y$

- b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre esos elementos.

Sara pesa 3 kilos más que Alberto $\rightarrow x = y + 3$

Sara y Alberto, juntos, pesan 87 kilos $\rightarrow x + y = 87$

- c) Resuelve el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 3 \\ x + y = 87 \end{array} \right\} \rightarrow (y + 3) + y = 87 \rightarrow 2y + 3 = 87 \rightarrow 2y = 87 - 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 84 \rightarrow y = \frac{84}{2} \rightarrow y = 42$$

$$x = y + 3 \rightarrow x = 42 + 3 \rightarrow x = 45$$

- d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: Sara pesa 45 kilos, y Alberto, 42 kilos.

Comprobación: $45 = 42 + 3$

$$45 + 42 = 87$$

Piensa y practica

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

EDAD DE PEPA $\rightarrow x$

EDAD DE ENRIQUE $\rightarrow y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{EDAD DE PEPA} = \text{EDAD DE ENRIQUE} + 5 \\ \text{EDAD DE PEPA} + \text{EDAD DE ENRIQUE} = 21 \end{array} \right\}$$

2. En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

CHICOS $\rightarrow x$

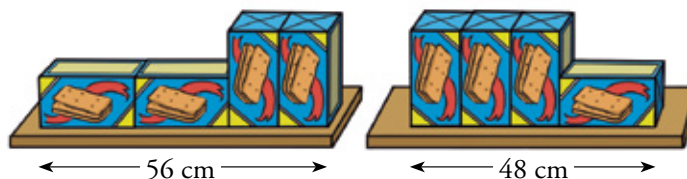
CHICAS $\rightarrow y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CHICAS} = \text{CHICOS} + 3 \\ \text{CHICOS} + \text{CHICAS} = 29 \end{array} \right\}$$


2. Quiero colocar cuatro cajas iguales en una balda.

Si pongo dos tumbadas y dos de pie, ocupan 56 cm. Pero si pongo tres de pie y una tumbada, ocupan solo 48 cm.

¿Qué trozo de la balda ocupa una caja tumbada? ¿Y de pie?



a) Identifica los elementos del problema y codificalos algebraicamente.

Dimensiones de la caja: $\left. \begin{array}{l} \text{LARGO} \rightarrow x \\ \text{ALTO} \rightarrow y \end{array} \right\}$ 

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre los elementos.

Dos cajas tumbadas y dos de pie ocupan 56 cm $\rightarrow 2x + 2y = 56$

Una caja tumbada y tres de pie ocupan 48 cm $\rightarrow x + 3y = 48$

c) Resuelve el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 56 \\ x + 3y = 48 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times (-1/2)} -x - y = -28 \\ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad x + 3y = 48 \end{array}$$

$$2y = 20 \rightarrow y = 10$$

$$x + 3y = 48 \rightarrow x + 3 \cdot 10 = 48 \rightarrow x + 30 = 48 \rightarrow x = 48 - 30 \rightarrow x = 18$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: Una caja ocupa, en la balda, 18 cm si está tumbada y 10 cm si está de pie.

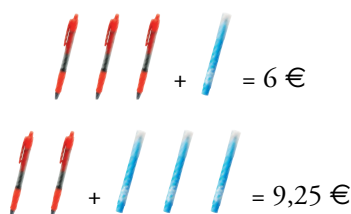
Comprobación: $2 \cdot 18 + 2 \cdot 10 = 56$

$$18 + 3 \cdot 10 = 48$$

Piensa y practica



3. He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €. Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?



4. En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?

5. La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.

Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

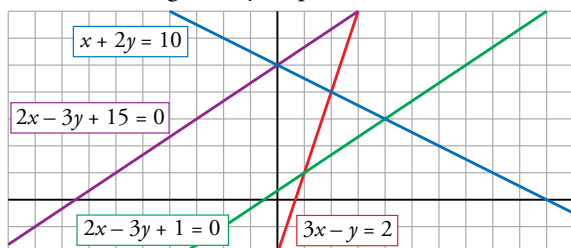
Ejercicios y problemas

Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

1. Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

2. Observa el gráfico y responde.



- a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2, y = 4$.
 b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0, y = 5$.
 c) Escribe un sistema sin solución.

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

3. Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones

4. La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9. ¿Cuáles son esos números?
5. Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 16 y que el doble del menor sobrepasa en cinco unidades al mayor.
6. Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,50 €, ella tendría el doble. ¿Cuánto lleva cada uno?
7. Una caña de bambú, de 4,80 m de altura, se quiebra por la acción del viento, y el extremo superior, ahora apuntando hacia el suelo, queda a una altura de 60 cm. ¿A qué altura se ha quebrado la caña?

8. Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

9. En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 2,70 €. Hoy hemos tomado un café y tres refrescos, y nos han cobrado 4,10 €. ¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?



10. Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un precio fijo la unidad. Carolina se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 13 €. Julián paga 12 € por 3 melones y 4 sandías. ¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?

11. Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

12. En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?



$\text{Búfalos} \rightarrow x$ $\text{Avestruces} \rightarrow y$
 $\text{Patas de búfalo} \rightarrow 4x$ $\text{Patas de avestruz} \rightarrow 2y$

13. Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

	HOY	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

Ejercicios y problemas

14. Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambra. Calcula las dimensiones de la parcela.

15. Un concurso televisivo está dotado de un premio de 3 000 € para repartir entre dos concursantes, A y B.

El reparto se hará en partes proporcionales al número de pruebas superadas. Tras la realización de estas, resulta que el concursante A ha superado cinco pruebas, y el B, siete. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

A se lleva $\rightarrow x$ B se lleva $\rightarrow y$

El premio conseguido es proporcional al número de pruebas superadas $\rightarrow x/5 = y/7$

16. ¿Qué cantidades de aceite, uno puro de oliva, a 3 €/litro, y otro de orujo, a 2 €/litro, hay que emplear para conseguir 600 litros de mezcla a 2,40 €/litro?

17. Dos ciudades, A y B, distan 270 km. En cierto momento, un coche parte de A hacia B a 110 km/h, y, a la vez, sale de B hacia A un camión a 70 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se encuentran?

La suma de las distancias es 270 $\rightarrow x + y = 270$

Los tiempos invertidos por el coche y el camión, hasta el encuentro, son iguales $\rightarrow x/110 = y/70$

Analiza y describe. Exprésate

18. A continuación tienes un problema resuelto de dos formas. Indica sus diferencias e incluye las explicaciones oportunas para aclarar su desarrollo.

Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzarlo y la distancia recorrida desde el punto de partida.

Solución A

	VELOCIDAD	TIEMPO	DISTANCIA
COCHE	110	x	y
CAMIÓN	90	$x + \frac{10}{60}$	y

$$\left. \begin{aligned} y &= 110x \\ y &= 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \end{aligned} \right\} 110x = 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} \text{ h} \\ y &= 82,5 \text{ km} \end{aligned}$$

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

Solución B

Distancia coche = distancia camión $\rightarrow d$

Tiempo coche $\rightarrow \text{distancia/velocidad} = \frac{d}{110}$

Tiempo camión $\rightarrow \text{distancia/velocidad} = \frac{d}{90}$

$$\frac{d}{90} = \frac{d}{110} + \frac{1}{6} \rightarrow d = 82,5 \text{ km}$$

Tiempo coche $\rightarrow \frac{d}{110} = \frac{82,5}{110} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}$

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

19. Escribe el enunciado de un problema que se resuelva con el sistema que muestra la ilustración y resuélvelo.

$$\begin{aligned} 1x + 2y &= 3,90 \text{ €} \\ 3x + 1y &= 5,70 \text{ €} \end{aligned}$$

Autoevaluación

1. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2x - 1$ b) $2x + 3y - 3 = 0$

2. Resuelve gráficamente este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

3. Resuelve por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$


4. La suma de dos números es 977, y su diferencia, 31. ¿Cuáles son esos números?

5. En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café y cuánto una tostada?

6. La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

9

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es un importantísimo resultado geométrico. Como sabes, relaciona los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo. 



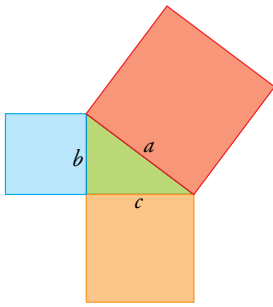
Hace más de 3000 años, tanto los egipcios como los babilonios sabían que ciertos triángulos eran rectángulos. En concreto, aquellos cuyos lados miden 3, 4 y 5, y los de medidas 5, 12 y 13. Se valían de esta propiedad para construir ángulos rectos.

Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su gran mérito fue que enunció el teorema de forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo. Sin embargo, no fue él quien dio la demostración de este teorema, sino Euclides dos siglos después.

Euclides de Alejandría escribió sus *Elementos* en torno al año 300 a.C. Se trata de un conjunto de 13 libros en los que se recopila, amplía y organiza todo el saber matemático de su época, aportándole una sólida estructura lógica. En el libro I demuestra el que ahora llamamos *teorema de Pitágoras*.

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos**. El lado mayor se llama **hipotenusa**.

En general, llamaremos a a la hipotenusa y b y c a los catetos.

El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$

Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Esta relación es cierta, solamente si el triángulo es rectángulo.

Sorprendente!

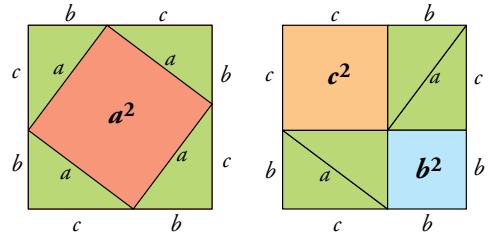
Esta demostración la construyeron los chinos 400 años antes de que naciera Pitágoras.

En la web

Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

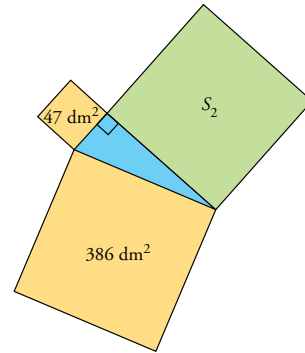
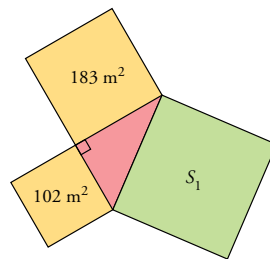
Observa la siguiente demostración:

Los dos cuadrados iguales tienen por lados $b + c$. Comparando las dos descomposiciones, es claro que $a^2 = b^2 + c^2$.



Ejercicio resuelto

¿Cuáles son las áreas de los cuadrados desconocidos en las siguientes figuras?



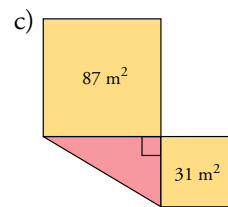
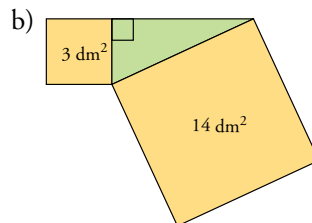
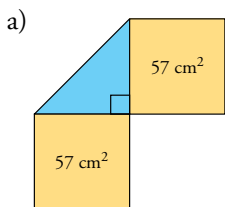
Como ambos triángulos son rectángulos, en los dos casos el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores. Por tanto:

$$S_1 = 183 \text{ m}^2 + 102 \text{ m}^2 = 285 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 386 \text{ dm}^2 - 47 \text{ dm}^2 = 339 \text{ dm}^2$$

Piensa y practica

1. Dibuja en tu cuaderno estas figuras. Complétalas construyendo el cuadrado que falta en cada una y di cuál es su área.



En la web

Actividad manipulativa para razonar sobre la demostración del teorema de Pitágoras.

Los lados determinan el tipo de triángulo

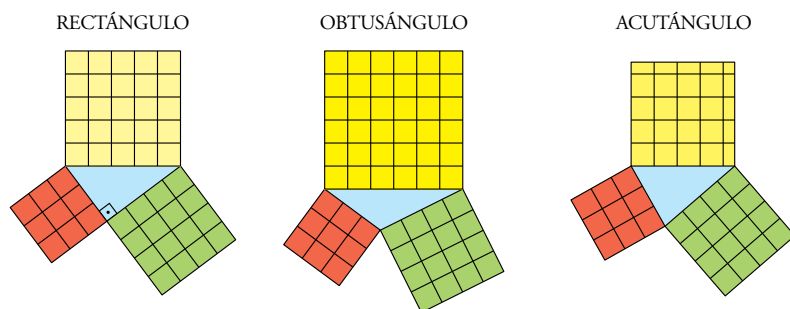
Si conocemos los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿ a^2 es igual que $b^2 + c^2$?

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es **rectángulo**.
- Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es **obtusángulo**.
- Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es **acutángulo**.

Justificación

Si en un triángulo rectángulo abrimos el ángulo que forman los dos catetos, el lado opuesto aumenta y, por tanto, su cuadrado también aumenta. Si cerramos dicho ángulo (lo hacemos agudo), el lado opuesto es menor de lo que era la hipotenusa.



5^2 es igual a $3^2 + 4^2$ 6^2 es mayor que $3^2 + 4^2$ $4,5^2$ es menor que $3^2 + 4^2$

Ejercicio resuelto

Indicar si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

- a) 70 cm, 240 cm, 245 cm
- b) 15 dm, 36 dm, 39 dm
- c) 18 m, 80 m, 83 m

- a) $70^2 + 240^2 = 4900 + 57600 = 62500$; $245^2 = 60025$
 245^2 es menor que $70^2 + 240^2$, por tanto, el triángulo es ACUTÁNGULO.
- b) $15^2 + 36^2 = 1521$; $39^2 = 1521$
 Como son iguales, el triángulo es RECTÁNGULO.
- c) $18^2 + 80^2 = 6724$; $83^2 = 6889$
 83^2 es mayor que $18^2 + 80^2$, por tanto, el triángulo es OBTUSÁNGULO.

Ternas pitagóricas

Si tres números naturales, c , b , a , cumplen $c^2 + b^2 = a^2$, es decir, si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, entonces decimos que forman una **terna pitagórica**. Aquí tienes algunas:

3, 4, 5	8, 15, 17	12, 35, 37
5, 12, 13	9, 40, 41	13, 84, 85
7, 24, 25	11, 60, 61	16, 63, 65

Fíjate que si c , b , a es una terna pitagórica, también lo es kc , kb y ka .

Por ejemplo, 6, 8, 10 (obtenidas al multiplicar por 2 cada uno de los componentes de la terna 3, 4, 5) es una terna pitagórica.

Piensa y practica

- 2. Comprueba que las nueve ternas de arriba son, efectivamente, pitagóricas.
 Por ejemplo, 3, 4 y 5 es pitagórica, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
- 3. Clasifica según sus ángulos estos triángulos:
 - a) 17 m, 6 m, 14 m
 - b) 64 cm, 84 cm, 57 cm
 - c) 45 dm, 28 dm, 53 dm
 - d) 5 mm, 5 mm, 8 mm

Si sabemos que un triángulo es rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del tercero.

Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, sus catetos miden 88 m y 105 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

$$a = \sqrt{88^2 + 105^2} = \sqrt{7744 + 11025} = \sqrt{18769} = 137$$

La hipotenusa mide 137 m.

- Halla la hipotenusa del triángulo del margen.

$$a = \sqrt{14^2 + 11^2} = \sqrt{196 + 121} = \sqrt{317} = 17,8$$

La hipotenusa mide 17,8 dm aproximadamente.

Cálculo de un cateto conociendo el otro y la hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

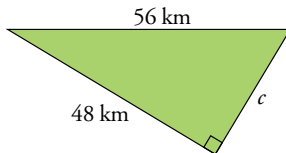
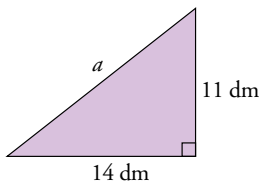
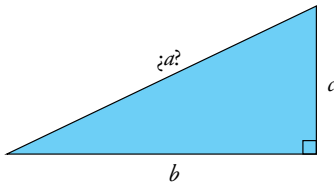
$$b = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{16900 - 1024} = \sqrt{15876} = 126$$

El otro cateto mide 126 cm.

- Halla la longitud del lado desconocido en el triángulo del margen.

$$c = \sqrt{56^2 - 48^2} = \sqrt{3136 - 2304} = \sqrt{832} = 28,84$$

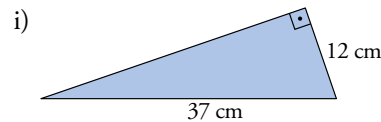
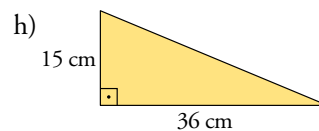
El lado desconocido mide 28,84 km aproximadamente.



Piensa y practica

1. Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos, donde a es la hipotenusa, aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| a) $c = 70$ mm | $a = 74$ mm |
| b) $b = 15$ cm | $a = 25$ cm |
| c) $b = 14$ m | $c = 48$ m |
| d) $b = 13$ pulgadas | $c = 84$ pulgadas |
| e) $b = 5,5$ cm | $a = 30,5$ cm |
| f) $c = 24$ km | $a = 26$ km |
| g) $b = 65$ m | $a = 425$ m |



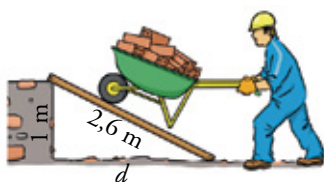
- j) Los catetos del triángulo rectángulo miden 3 dam y 5 dam respectivamente.

- k) La hipotenusa del triángulo rectángulo mide 10,7 m, y uno de los catetos, 7,6 m.

Ejercicios resueltos

1. Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?

En este triángulo rectángulo, conocemos la hipotenusa y un cateto. Hemos de calcular el otro cateto.



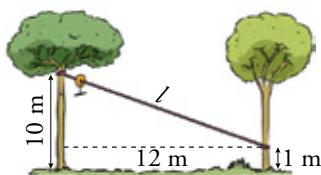
$$d^2 = 2,6^2 - 1^2 = 6,76 - 1 = 5,76$$

$$d = \sqrt{5,76} = 2,4 \text{ m}$$

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

2. Hay que hacer una tirolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura de un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál es la longitud del cable en tensión?

Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.



$$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

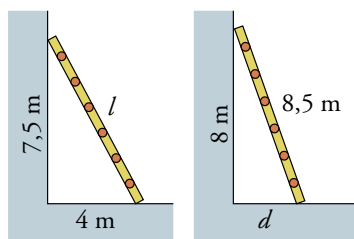
$$l = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

La longitud del cable tenso es de 15 m. Además, habrá que tener en cuenta la longitud necesaria para atarlo a cada árbol.

3. Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?

Calculamos primero la longitud de la escalera.

$$l^2 = 4^2 + 7,5^2 = 72,25 \rightarrow l = \sqrt{72,25} = 8,5 \text{ m}$$



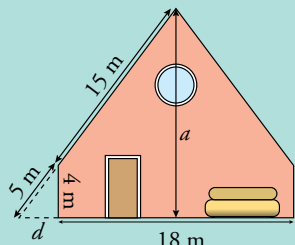
Ahora calculamos la distancia a la que debe estar para alcanzar 8 m de altura:

$$d^2 = 8,5^2 - 8^2 = 72,25 - 64 = 8,25$$

$$d = \sqrt{8,25} = 2,87 \text{ m}$$

El pie de la escalera debe situarse a 2,87 m de la pared.

4. Álvaro ha tomado estas medidas para hallar la altura, a, de la pared de su buhardilla. Calcular d y, luego, a.



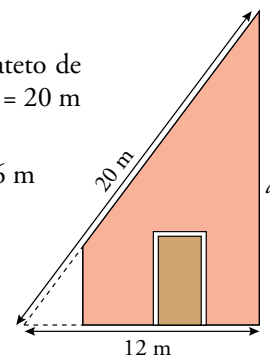
Calculamos la distancia d.

$$d^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

Ahora calculamos la altura, a, sabiendo que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 15 + 5 = 20 m y el otro cateto 3 + 9 = 12 m:

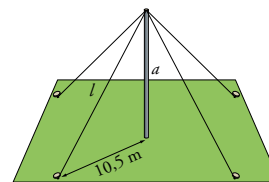
$$a^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \rightarrow a = \sqrt{256} = 16 \text{ m}$$

La altura de la buhardilla es de 16 m.



Piensa y practica

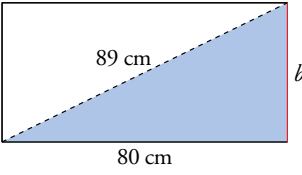
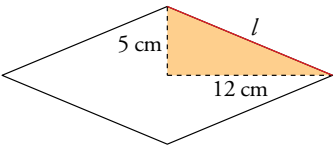
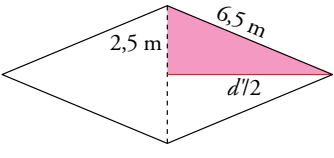
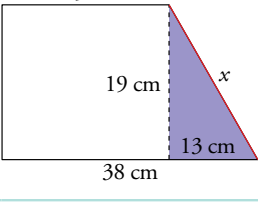
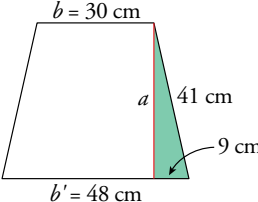
2. Para colocar un mástil, se han utilizado 64 m de cable. Se sujeta con cuatro cables y se necesita 1 m de longitud por cada amarre. Si todos los cables están atados al extremo de arriba y a un tornillo anclado en el suelo a 10,5 m de su pie, ¿qué altura alcanza el mástil?



Nombre y apellidos: Fecha:

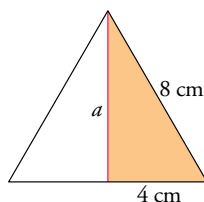
Hay multitud de polígonos en los que algunos de sus elementos son lados de un triángulo rectángulo. Eso permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras y calcular la longitud de uno de ellos conociendo los otros dos.

Ejercicios resueltos

<p>1. La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.</p>	<p>El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$</p> <p>Empezamos por calcular el otro lado:</p> $b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$ <p>El lado corto mide 39 cm.</p> <p>El área es:</p> $A = 80 \cdot 39 = 3120 \text{ cm}^2$ 
<p>2. Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.</p>	<p>Comenzamos por calcular la longitud de un lado:</p> $l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ <p>Cada lado mide 13 cm.</p> <p>El perímetro es:</p> $P = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$ 
<p>3. El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Hallar su área.</p>	<p>El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \frac{d \cdot d'}{2}$</p> <p>Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:</p> $\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$ <p>La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12 \text{ m}$. Por tanto, $A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.</p> 
<p>4. Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.</p>	<p>Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:</p> $x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$ <p>El lado oblicuo mide 23 cm aproximadamente.</p> <p>El perímetro es:</p> $P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105 \text{ cm}$ 
<p>5. Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.</p>	<p>Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$</p> <p>Hemos de empezar calculando su altura, a. En el triángulo verde, el lado pequeño mide $(48 - 30) : 2 = 9 \text{ cm}$.</p> $a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ <p>La altura del trapecio mide 40 cm.</p> $A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1560 \text{ cm}^2$ 

6. Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

Empezamos calculando la altura:



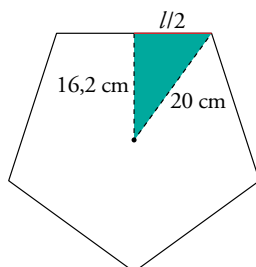
$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$$

La altura mide 6,9 cm aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$

7. Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.



Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16,2^2} = \sqrt{137,56} \approx 11,7$$

El lado del pentágono mide:

$$l = 11,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es:

$$P = 23,4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$$

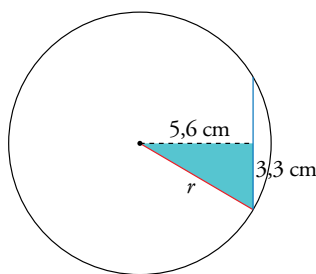
Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ cm}^2$$

8. Hallar el perímetro de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro.

Calcular el área del círculo correspondiente.

Comenzamos calculando el radio. En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide $6,6 : 2 = 3,3$ cm.



$$r = \sqrt{3,3^2 + 5,6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5$$


El radio mide 6,5 cm.

$$P = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6,5 \approx 40,8 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,5^2 \approx 132,7 \text{ cm}^2$$

Piensa y practica

1. El lado de un rombo mide 8,5 m, y una de sus diagonales, 15,4 m. Calcula su área.
2. Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.
3. Calcula el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 70 dm y 134 dm, y el lado oblicuo, 85 dm.
4. Halla el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.
5. Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado. (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).
6. En una circunferencia de radio 9,7 m, se traza una cuerda de 13 m. ¿A qué distancia de la cuerda se encuentra el centro de la circunferencia?
7. Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1 m. Su perímetro es 5,85 m. Calcula su área.

 **En la web** Practica la aplicación del teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Nombre y apellidos: Fecha:

Ejercicios y problemas

Teorema de Pitágoras

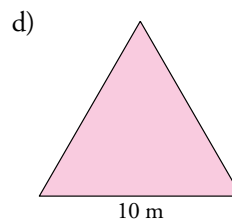
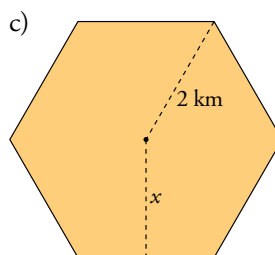
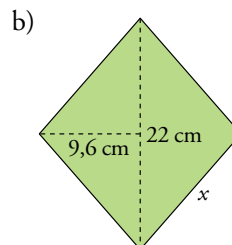
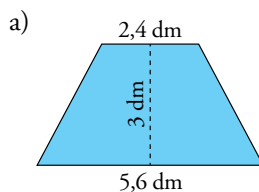
1. Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

 - a) 15 cm, 10 cm, 11 cm
 - b) 35 m, 12 m, 37 m
 - c) 23 dm, 30 dm, 21 dm
 - d) 15 km, 20 km, 25 km
 - e) 17 millas, 10 millas, 5 millas
 - f) 21 mm, 42 mm, 21 mm
 - g) 18 cm, 80 cm, 82 cm
2. Calcula el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:

 - a) 15 m , 20 m , x
 - b) 65 mm , 16 mm , x
3. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.
4. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dam.
5. Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.
6. Calcula los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide 5 m y la altura correspondiente, 6 m.
7. Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.
8. Halla la altura de un triángulo equilátero de 40 cm de lado. Aproxima hasta los milímetros.
9. Halla la apotema de un hexágono regular de 20 cm de lado. (Recuerda que en el hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio).
10. Un pentágono regular de 11,7 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. Calcula su apotema.
11. Una recta pasa a 10 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio. Halla, aproximando hasta las décimas, la longitud de la cuerda que se genera.

Áreas y perímetros utilizando el teorema de Pitágoras

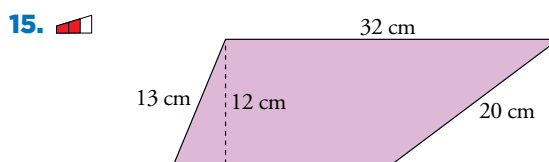
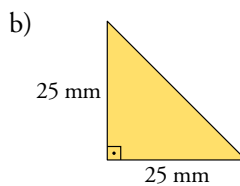
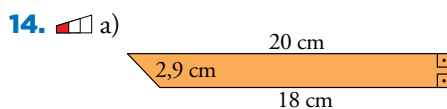
12. Halla el área y el perímetro en cada una de las siguientes figuras:



13. Halla el área y el perímetro de las figuras descritas en ...

- a) ... el ejercicio 5.
- b) ... el ejercicio 6.
- c) ... el ejercicio 7.
- d) ... el ejercicio 8.
- e) ... el ejercicio 9.
- f) ... el ejercicio 10.

En cada una de estas figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que calcular la medida de algún elemento (lado, diagonal, apotema, ángulo...). Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.



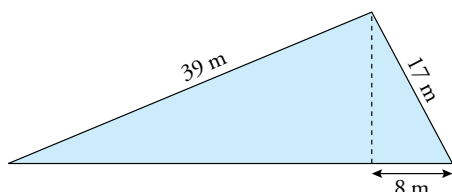
Resuelve problemas

16. Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?

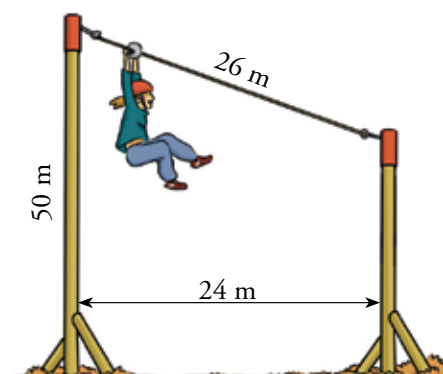


17. Un operario de la compañía eléctrica apoya su escalera de 6,5 m de largo en una pared a una altura de 6 m. Después de arreglar la avería, sin mover la base de la escalera, apoya esta en la pared de enfrente a una altura de 5,2 m. ¿A qué distancia se encuentran las paredes?

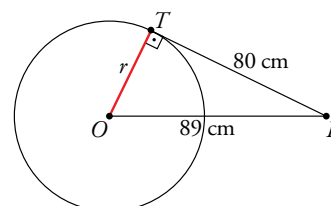
18. Clasifica el siguiente triángulo en rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Para ello, calcula la medida de alguno de sus elementos:



19. Una tirolina de 26 m de longitud está atada a dos postes que distan 24 m. Si Manuela sale desde el primer poste a una altura de 50 m, ¿a qué altura llegará en el segundo poste?



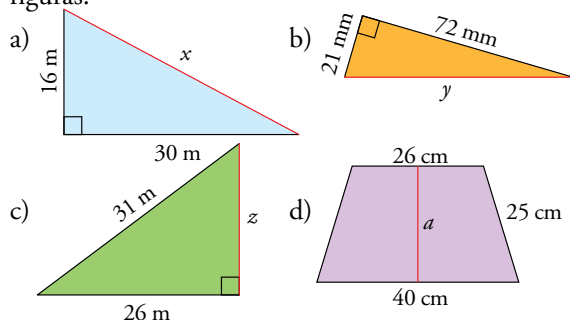
20. La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es de 89 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT tiene una longitud de 80 cm. Halla el perímetro de la circunferencia y el área del círculo.



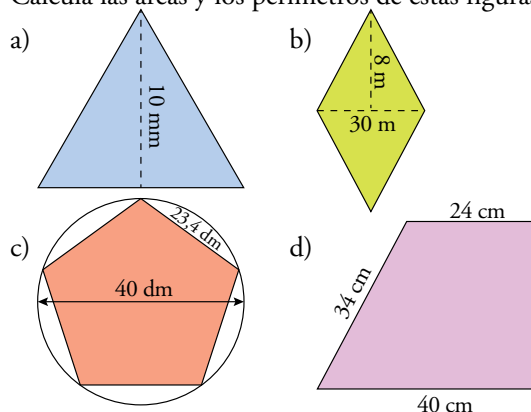
Autoevaluación

1. Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.
 a) 20 cm, 24 cm, 30 cm b) 5 m, 6 m, 10 m
 c) 10 mm, 24 mm, 26 mm d) 7 dm, 7 dm, 7 dm

2. Calcula el segmento desconocido en cada una de estas figuras:



3. Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras:



4. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio debe pasar una recta para que la cuerda mida 8 cm?

Nombre y apellidos: Fecha:

10

Semejanza



El saber geométrico de los antiguos egipcios y babilonios era muy extenso pero tenía un carácter exclusivamente práctico, utilitario. Los griegos lo recogieron y le dieron un sentido especulativo, cultural.



Tales de Mileto, el primero de los siete sabios de Grecia, impulsó el pensamiento griego y, junto con **Pitágoras** y sus discípulos, fue el creador de la matemática deductiva.

A raíz de sus numerosos viajes, aprendió las matemáticas egipcias y babilonias. Se cuenta que calculó la altura de una de las pirámides midiendo su sombra y comparándola con la sombra arrojada por su bastón. Se trata de una aplicación del teorema que lleva su nombre.

Sin embargo, no fue él quien demostró el teorema, sino que, una vez más, el mérito le corresponde a **Euclides**. La demostración, nada sencilla, se encuentra en el libro VI de sus *Elementos*.

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Figuras semejantes



Las dos figuras del margen son iguales, salvo en el tamaño. Tienen la *misma forma*; es decir, son **semejantes**.

¿Cómo se caracteriza matemáticamente esa sensación que es tan clara visualmente? La muñeca de la derecha es el doble de alta que la de la izquierda y el doble de ancha. Y la base tiene un diámetro doble... Cada longitud de la figura de la derecha se obtiene multiplicando por 2 la correspondiente longitud de la figura de la izquierda.

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza**.

En dos figuras semejantes se cumple que:

- Un ángulo medido en la primera = el ángulo correspondiente en la segunda.
- Una proporción en la primera = la proporción correspondiente en la segunda.

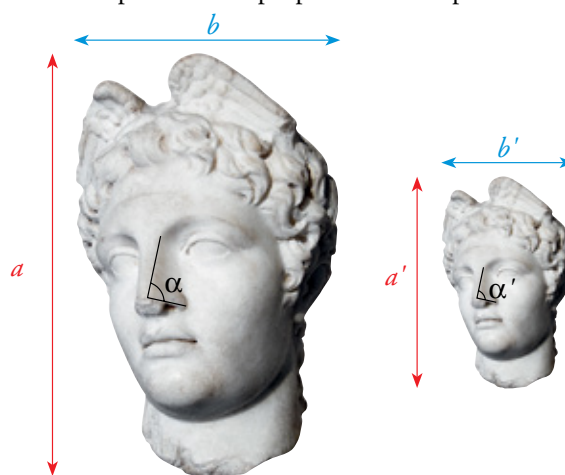
Razón de semejanza

Cuando decimos que la razón de semejanza entre dos figuras F y F' es 4, queremos decir que:

$$\frac{\text{long. de un segmento de } F}{\text{long. del correspondiente de } F'} = 4$$

Por tanto, cuando usamos la expresión *razón de semejanza*, es importante especificar el orden de las figuras.

Por ejemplo, si la razón de semejanza entre las figuras A y B es 2, la razón de semejanza entre B y A será $1/2$.



En la web

Practica los conceptos de figuras semejantes y de razón de semejanza.

Por ejemplo, en estas dos cabezas:

- Los ángulos α y α' coinciden.
- La relación, a/b , entre el largo y el ancho de la primera es la misma que a'/b' en la segunda.

Ejercicio resuelto

La razón de semejanza entre dos triángulos semejantes es 0,4. Si el mayor tiene 3 cm de base y 5 cm de altura, ¿cuánto miden la base y la altura del menor?

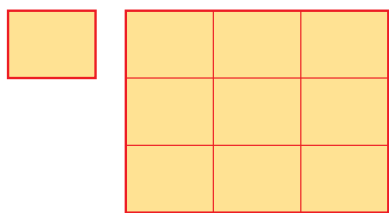
Llamamos a y b a la altura y a la base del triángulo menor:

- $\frac{a}{5} = 0,4 \rightarrow a = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ cm}$
- $\frac{b}{3} = 0,4 \rightarrow b = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ cm}$

Por tanto, el triángulo menor tiene 1,2 cm de base y 2 cm de altura.

Piensa y practica

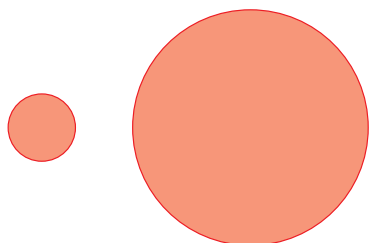
1. Dos rectángulos semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. Las dimensiones del menor son 4 cm de ancho por 12 cm de alto. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo mayor?



Relación entre las áreas de dos figuras semejantes

Estos dos rectángulos son semejantes. La razón de semejanza es 3; es decir, cada longitud del rectángulo grande es triple de la correspondiente longitud en el pequeño. Por tanto, el área del grande es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ veces el área del pequeño.

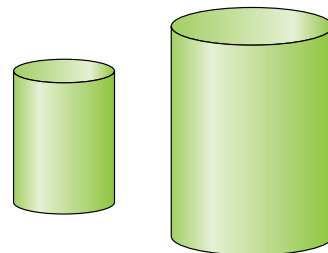
Si la razón de semejanza de dos figuras es k , entonces la razón de sus áreas es k^2 .



Dos círculos siempre son semejantes. La razón de semejanza es el cociente de sus radios.

Ejemplos

- Si el radio de un círculo es 3,5 veces el de otro, el área del grande es $3,5^2 = 12,25$ veces el área del pequeño.
 - Para pintar un depósito cilíndrico, se han gastado 12,5 kg de pintura. Otro depósito es semejante al anterior, con razón de semejanza 1,6. ¿Cuánta pintura se necesitará para pintarlo?
- El área del segundo cilindro es $1,6^2 = 2,56$ veces la del primero. Por lo tanto, se necesitará $12,5 \cdot 2,56 = 32$ kg de pintura.



Relación entre los volúmenes de dos figuras semejantes

Estos dos ortoedros son semejantes. La razón de semejanza es 2; es decir, cada longitud del grande es doble de la correspondiente en el pequeño. Por tanto, el volumen del grande es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ veces el volumen del pequeño.

Si la razón de semejanza de dos cuerpos es k , entonces la razón de sus volúmenes es k^3 .

Ejemplos

- Si el radio de una esfera es 3,5 veces el de otra, el volumen de la grande es $3,5^3 = 42,875$ veces el volumen de la pequeña.
- Si un depósito cilíndrico es semejante a otro, con razón de semejanza 1,6, y el valor del petróleo que cabe en el pequeño es 3750 €, entonces el valor del petróleo que cabe en el segundo es:

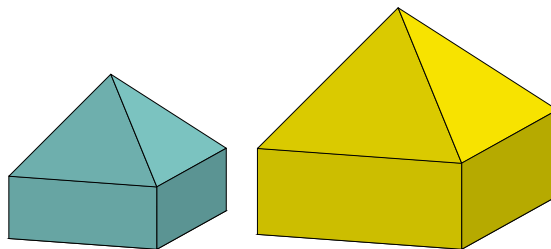
$$3750 \cdot 1,6^3 = 3750 \cdot 4,096 = 15\,360 \text{ €}$$

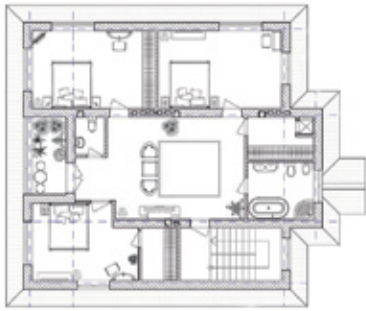
En la web

Practica la semejanza de áreas.

Piensa y practica

2. Estas dos casitas de cartulina son semejantes. La razón de semejanza es 1,5. Para fabricar la pequeña, se han necesitado $7,2 \text{ dm}^2$ de cartulina, y su volumen es $6,4 \text{ l}$. ¿Cuánta cartulina lleva la grande y qué volumen tiene?





Muchachas tocando el piano, de Renoir.

Quien se dispone a comprar o a alquilar una casa, la estudia con todo cuidado. Gran parte de este estudio se suele hacer sobre el plano.

El **plano** de una casa es (debe ser) una imagen fiel de la realidad. Tiene la misma distribución, la misma forma que la casa real, y sus dimensiones están reducidas según una escala. Es decir, la planta de la casa y el plano son **figuras semejantes**.

Por lo mismo, un **mapa** es una figura semejante a la porción de territorio que representa.

Cuando consultamos un plano o un mapa, cuando contemplamos una fotografía, lo hacemos sabiendo que son figuras semejantes a la realidad que representan.

Si de la realidad solo nos interesa la forma, la composición, el colorido..., contemplamos la reproducción como si fuera la auténtica. Sin embargo, al consultar un plano o un mapa, además de la forma, importan los tamaños y las distancias en la realidad. Por eso, un plano o un mapa siempre va acompañado de la escala con la que está construido.

- Los planos y los mapas son semejantes a la realidad que representan. En ellos, además de la distribución de lugares, importan los tamaños y las distancias. Por eso llevan una escala.
- La **escala** es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano o maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Ejemplo

En este mapa de la costa del Levante y las islas Baleares, la escala 1:5 000 000 significa que cada distancia de la realidad se obtiene multiplicando por 5 000 000 la correspondiente en el mapa.



Vamos a comprobar que efectivamente las distancias correspondientes a la realidad son 5 000 000 de veces sus medidas sobre el mapa.

Distancia entre Valencia y Palma de Mallorca:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el mapa}} = \frac{260 \text{ km}}{52 \text{ mm}} = \frac{260\,000\,000 \text{ mm}}{52 \text{ mm}} = 5\,000\,000$$

- Comprueba tú el resto de las medidas.

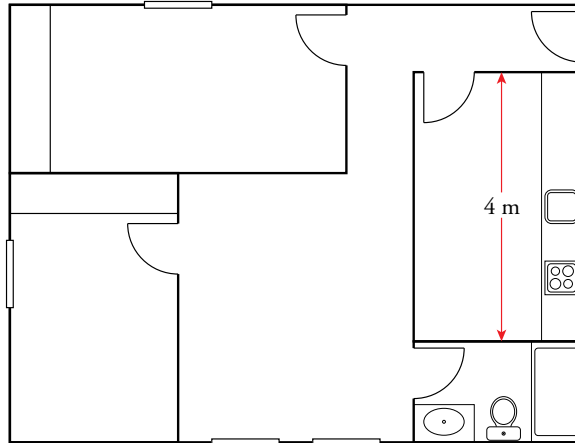


Obtención de la escala

Cuando se nos da una reproducción (plano, mapa o maqueta) sin indicar su escala, podemos averiguarla si conocemos la distancia real entre dos de sus puntos. Por ejemplo, si en el camping que hay en el plano de la izquierda conocemos la distancia real de la fuente al embarcadero, podremos averiguar la escala y, con ella, calcular otras distancias reales a partir del plano.

Ejemplo

Tenemos el plano de nuestra casa, pero nos lo han dado sin escala. En lugar de medir todas las paredes, optamos por medir el largo de la cocina tanto en la realidad como en el plano.



En la web

Practica el concepto de escala.

Cálculo de la escala

$$\frac{4 \text{ cm}}{4 \text{ m}} = \frac{4 \text{ cm}}{400 \text{ cm}} = \frac{1}{100}$$

Las medidas que obtenemos son:

En el plano: 4 cm

En la realidad: 4 m

Por tanto, la escala es 1:100.

Ahora podemos obtener cualquier otra distancia midiendo únicamente sobre el plano y multiplicando los resultados por 100.

Piensa y practica



1. Tomando medidas sobre el mapa de la página anterior y teniendo en cuenta la escala:

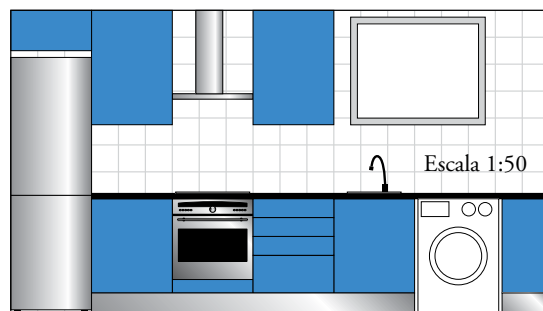
- Calcula la distancia entre Barcelona y Valencia.
- ¿Cuánto tarda un ferry que va de Tarragona a Palma de Mallorca a 20 nudos?

📍 Cada nudo equivale a 1,852 km/h.

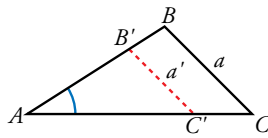
2. Sabiendo que la distancia que separa en la realidad el embarcadero de la fuente es 136 m, halla su escala y calcula las siguientes distancias:

- Camping - playa.
- Playa - fuente.
- Fuente - barbacoa.
- Fuente - camping.

3. Este es el plano de la pared de una cocina:



Halla sus dimensiones (largo y ancho); la superficie de la ventana y la distancia entre los fogones y la campana.

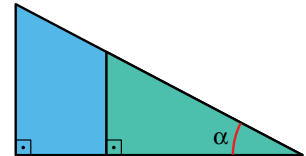


Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el \hat{A} . Es decir, el triángulo pequeño está “encajado” en el grande. Además, los lados opuestos a \hat{A} son paralelos. Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales**.

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales.



Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra

Para calcular la altura de un árbol, \overline{AB} , procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, \overline{AC} y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

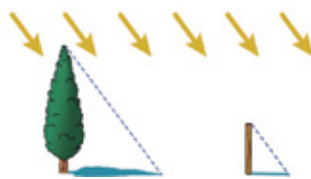
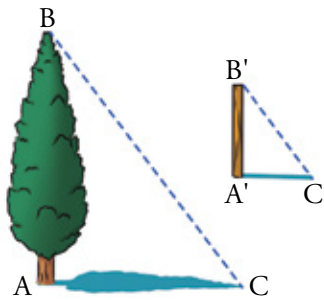
$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ porque los dos son rectos.}$$

$$\hat{C} = \hat{C}' \text{ porque los rayos del sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo.}$$

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos \overline{AC} , $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, \overline{AB} .



Los rayos del sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que: longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

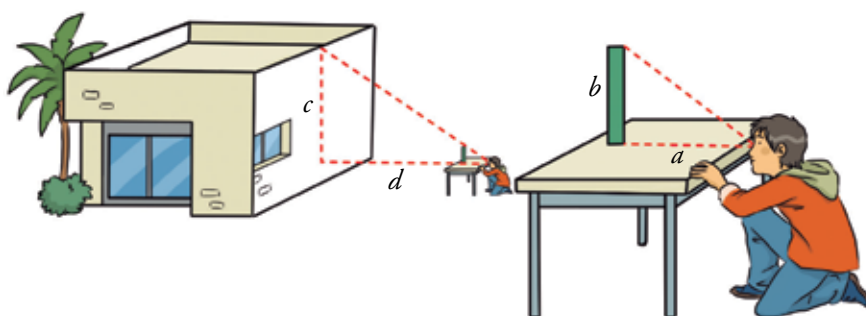
$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra

En la web

Calcula la altura de un árbol por medio de un espejo.



El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).

Los triángulos rectángulos, de catetos a , b y d , c , son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a , b y d , se calcula c . La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.

Problema resuelto

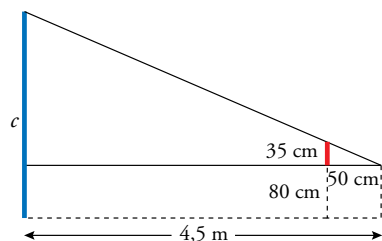
En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que: longitud de la regla, $b = 35$ cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, $a = 50$ cm; distancia del borde de la mesa a la casa, $d = 4,5$ m; altura de la mesa = 80 cm.

Expresamos todas las distancias en metros.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

$$3,15 + 0,8 = 3,95 \text{ m}$$

Solución: La altura de la casa es de $3,95$ m.

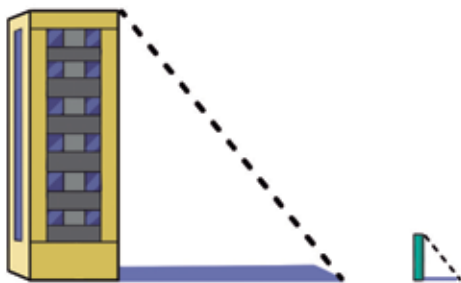


En la web

Problemas en los que hay que calcular medidas inaccesibles utilizando la semejanza de triángulos.

Piensa y practica

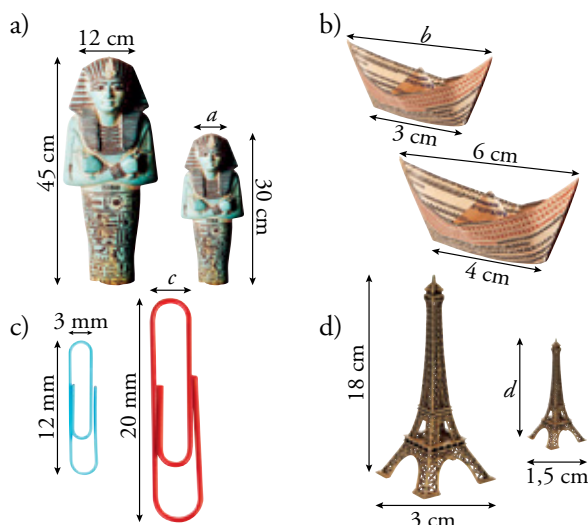
- Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una valla de 2 m proyecta una sombra de $1,25$ m.
- Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide $2,5$ m, ¿cuánto miden los demás?



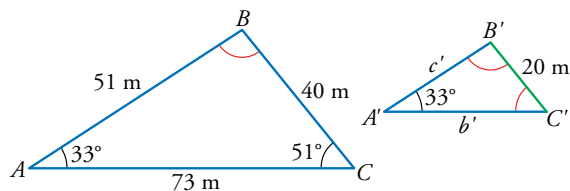
Ejercicios y problemas

Figuras semejantes

1. Suponiendo que en cada apartado hay dos figuras semejantes, calcula la razón de semejanza entre la primera y la segunda, y halla las longitudes que faltan.



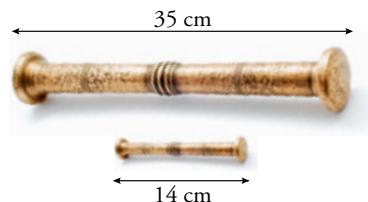
2. Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.



3. Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm.

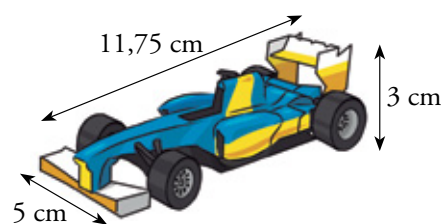
- ¿Cuál es la razón de semejanza al pasar del primero al segundo?
- ¿Cuánto medirán los otros dos lados del segundo triángulo?

4. Estos dos cetros de oro son semejantes, si el más grande tiene una superficie de 260 cm^2 y un volumen de 350 cm^3 , ¿qué superficie y qué volumen tiene el pequeño?

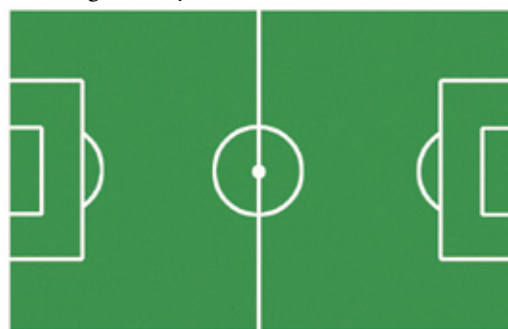


Escalas

5. Una pareja que va a comprar una casa consulta un callejero a escala 1:30 000. Miden sobre el plano la distancia de esta al metro y resulta ser de 2,3 cm. ¿Cuál es la distancia real?
Por otro lado, saben que la distancia de esa casa a la guardería es de 1,5 km. ¿A qué distancia se encontrarán en el callejero?
6. El coche teledirigido de Pablo es una reproducción a escala 1:40 de los de "Fórmula 1". Observa sobre el dibujo las dimensiones del coche de juguete y halla las dimensiones del coche real.

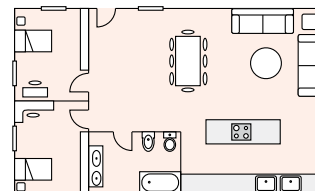


7. Averigua cuáles son las dimensiones reales de este campo de fútbol. Calcula la superficie del área de penalti (área grande) y la del círculo central.



1:1 400

8. Ana ha dibujado el plano de su nueva casa. Sabemos que cada sofá mide 3 m de largo.
- ¿Qué dimensiones reales tienen las camas?
 - Ana quiere pintar el techo. Si le cuesta 2 € por metro cuadrado, ¿cuánto se gastará en pintarlo?
 - Ana quiere poner una mesa de ping-pong de $2,70 \text{ m} \times 1,50 \text{ m}$. Halla sus dimensiones en el plano.



Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

9. La altura de la puerta de la casa mide 3 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más pequeño?

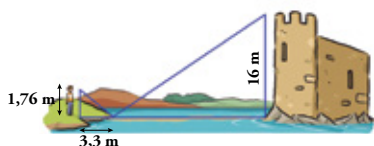


10. Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el Sol a la misma hora. ¿Cuánto mide Carlos?

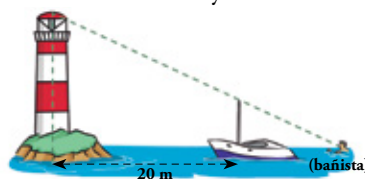
11. Sobre la pantalla del sonar de un submarino se ve que un objeto se acerca a 1 cm por minuto. Si la imagen en la pantalla tiene una escala de 1:1 000 000, ¿a cuántos kilómetros por hora se mueve el objeto?



12. Halla la distancia de Marcos a la base de la torre a partir de los datos del dibujo.

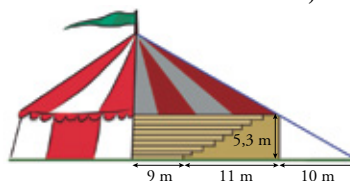


13. El bañista se encuentra a 5 m del barco. La borda del barco está a 1 m sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro.



¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra el foco del faro?

14. ¿Qué altura tiene el circo del dibujo?

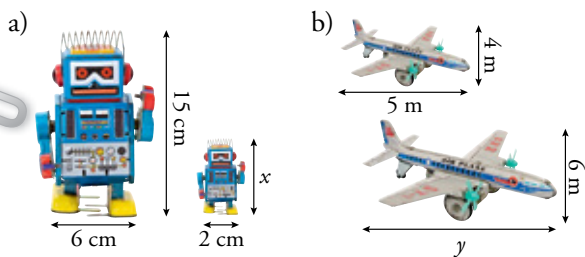


15. El Titanic fue un barco británico que se hundió en 1912 durante su viaje inaugural. James Cameron construyó, para rodar la película *Titanic*, una réplica de unos 15 m de largo. El Titanic medía, unos 270 m de largo, 30 m de ancho y 53 m de alto. Además, pesaba unas 46 000 toneladas.

- a) ¿A qué escala construyó James Cameron el barco?
 b) ¿Cuánto medían el ancho y alto de la maqueta?
 c) Si la maqueta se hubiera construido con los mismos materiales que el barco, ¿cuánto pesaría?

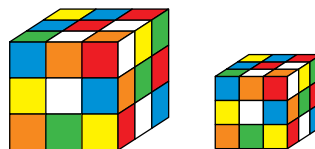
Autoevaluación

1. Calcula las longitudes que faltan en estas figuras semejantes y halla la razón entre ellas:



2. Un avión quiere viajar, en línea recta, entre Las Palmas de Gran Canaria y Palma de Mallorca. En un plano a escala 1:9 000 000, la distancia que medimos es de 24 cm. ¿Cuántos kilómetros recorrerá el avión?

3. La razón de semejanza entre estas dos figuras es 1,5. Para colorear la grande, se han necesitado 216 cm² de pegatina, y su volumen es 216 cm³. ¿Qué superficie de pegatina se necesita para construir la pequeña? ¿Qué volumen tiene?



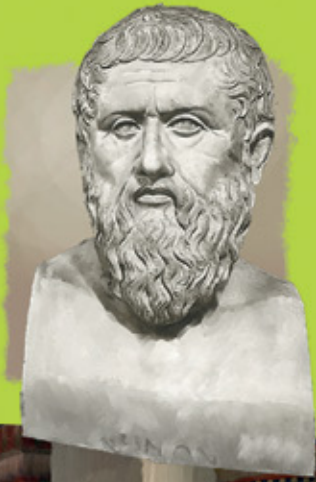
4. La regla mide 20 cm y está a 38 cm del borde de la mesa más cercano a Silvia. Halla la altura de la casa sabiendo que la mesa mide 75 cm de altura y que Silvia está a 7,6 m de la casa.



11

Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos más sencillos eran conocidos y manejados por las antiguas civilizaciones.



Para el cálculo de áreas y volúmenes, los egipcios poseían procedimientos a los que, probablemente, llegaron de forma experimental. Unos producían resultados exactos, y otros, aproximados, aunque ellos no distinguían entre unos y otros, y les daban a todos la misma validez.

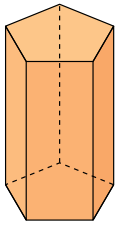
El mundo griego recogió estos conocimientos y los enriqueció teóricamente.

Platón, filósofo griego, fundador de *La Academia de Atenas* en el siglo IV a. C., prestó gran atención a los poliedros regulares (*sólidos platónicos*), les atribuyó propiedades místicas y los relacionó con la composición del universo.

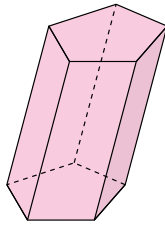
Posteriormente, **Euclides** y **Arquímedes** dieron un enfoque matemáticamente más serio a estas figuras.

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Prismas



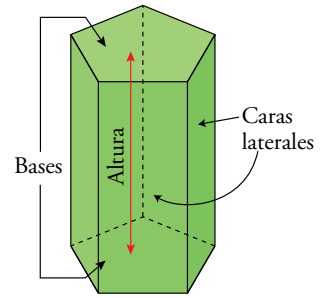
PRISMA RECTO



PRISMA OBLICUO

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos llamados **bases** y varios paralelogramos llamados **caras laterales**.

- La **altura** de un prisma es la distancia entre las bases.



Etimología

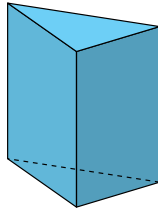
Prisma. Viene del griego. Significa “lo que ha sido serrado”, porque las caras laterales del prisma están como serradas.

En la web

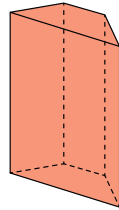
Prisma: definiciones y desarrollo.



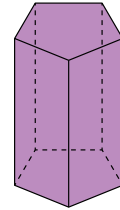
- Los prismas se clasifican según los polígonos de sus bases:



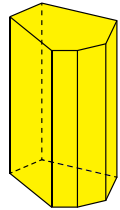
TRIANGULAR



CUADRANGULAR

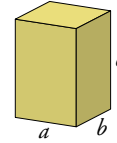


PENTAGONAL

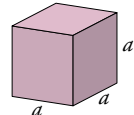


HEXAGONAL

- Un prisma recto cuya base es un rectángulo se llama **ortoadro**. El ortoadro de dimensiones iguales es el **cubo**.

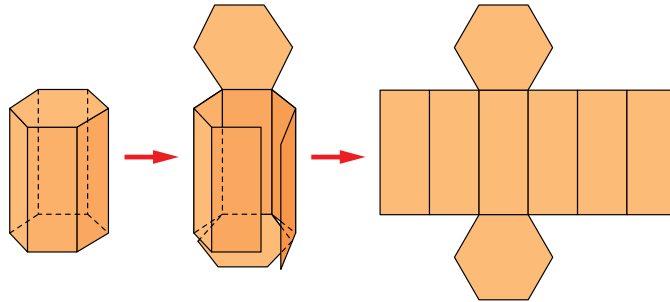


ORTOEDRO



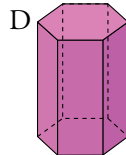
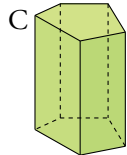
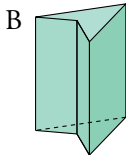
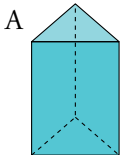
CUBO

- Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se denominan **prismas regulares**.
- Si cortamos un prisma recto a lo largo de algunas de sus aristas, lo abrimos y ponemos las caras sobre un plano, se obtiene su **desarrollo plano**.



Piensa y practica

1. Observa los siguientes prismas:



- a) ¿Qué tipo de prisma es cada uno?
- b) Indica cuáles son regulares.
- c) Dibuja el desarrollo plano del prisma A.

Superficie de un prisma

El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo. La longitud de su base es el perímetro de la base del prisma, y su altura, la altura del prisma.

En la web

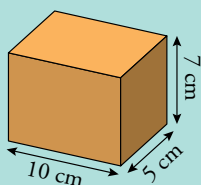
Practica el cálculo de la superficie de un prisma.

$$\text{ÁREA LATERAL} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{ÁREA TOTAL} = \text{ÁREA LATERAL} + 2 \cdot \text{ÁREA DE LA BASE}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área total del siguiente ortoedro:



Las áreas de las tres caras del ortoedro son, respectivamente:

$$10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

$$10 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2$$

$$5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2$$

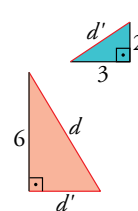
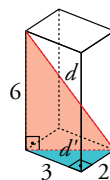
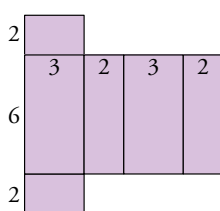
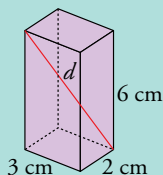
Como son tres parejas de caras iguales:

$$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (50 + 70 + 35) = 2 \cdot 155 = 310 \text{ cm}^2$$

En general, el área de un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ es:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

2. Hallar el área total y la longitud de la diagonal (d) de este ortoedro:



$$(d')^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$d^2 = 6^2 + (d')^2 = 36 + 13 = 49$$

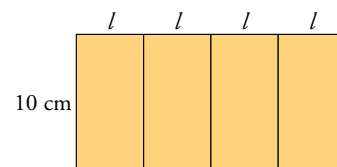
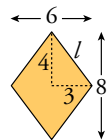
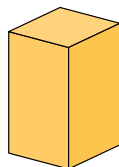
$$d = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 2(6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 72 \text{ cm}^2$$

En general, la longitud de la diagonal de un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ es:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3. Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Hallar su área total.



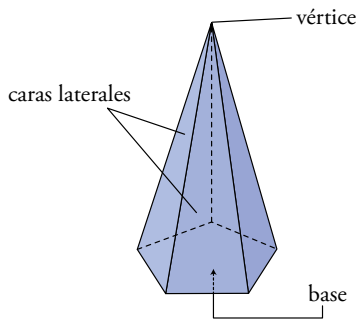
$$\text{Lado de la base: } l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{BASE}} &= \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LAT}} &= 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right\} A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + 2A_{\text{BASE}} = 200 + 2 \cdot 24 = 248 \text{ cm}^2$$

Piensa y practica

- La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos tales que las bases del trapecio miden 11 cm y 16 cm, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.
- Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.
- Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total y la longitud de la diagonal.
- La base de un ortoedro es un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm. La diagonal del ortoedro mide 17 cm. Calcula la altura del ortoedro y su área total.

2 Pirámides



Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales, triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.

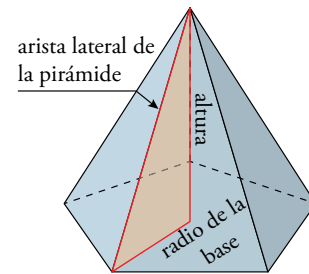
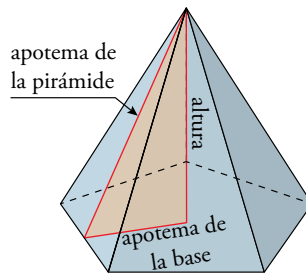
- La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.
- Una **pirámide regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.
- En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de cada uno de ellos se llama **apotema** de la pirámide.

Etimología

Pirámide. Viene del griego *pyros*, “fuego”, por ser piramidal la forma de la llama. Y también por tener esta forma las piras (cosas apiladas para ser quemadas).

La apotema de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la apotema del polígono de la base.

La arista lateral de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y el radio de la base.



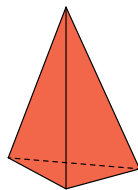
Nota histórica



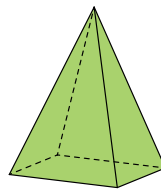
Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace varios miles de años.

Son regulares y cuadrangulares. La mayor de ellas, la de Keops, tiene 146 m de altura y el lado de su base mide 230 m.

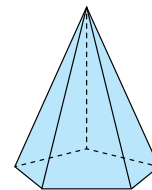
- Las pirámides se clasifican según los polígonos de sus bases:



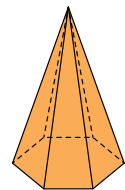
TRIANGULAR



CUADRANGULAR

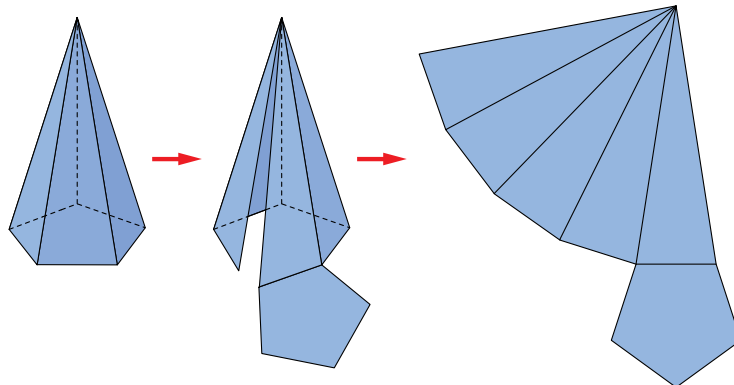


PENTAGONAL



HEXAGONAL

- Si cortamos a lo largo de algunas aristas de una pirámide regular, la abrimos y extendemos sus caras sobre el plano, obtenemos su desarrollo plano:



En la web

Pirámide: definiciones y desarrollo.

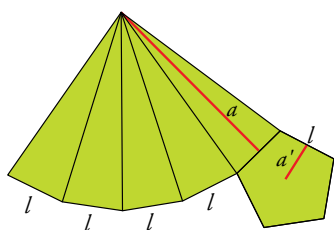
Superficie de una pirámide

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de los n triángulos iguales (n es el número de lados de la base):

$$A_{\text{LAT}} = n \cdot \frac{1}{2} l a = \frac{1}{2} (nl) \cdot a = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2}$$

Puesto que la base es un polígono regular, su área es $\frac{\text{perímetro} \cdot a'}{2}$. Por tanto:

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} + \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a'}{2}$$

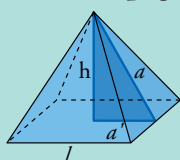


En la web

Practica el cálculo de la superficie de una pirámide regular.

Ejercicios resueltos

1. Hallar la superficie lateral de la pirámide de Keops descrita en la página anterior.



$$\begin{aligned} h &= 146 \text{ m} \\ l &= 230 \text{ m} \\ a' &= 230 : 2 = 115 \text{ m} \end{aligned}$$

Empecemos por calcular la apotema, a :

$$a = \sqrt{h^2 + (a')^2} = \sqrt{146^2 + 115^2} = \sqrt{34541} \approx 186 \text{ m}$$

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} = \frac{(4 \cdot 230) \cdot 186}{2} \approx 85560 \text{ m}^2$$

Solución: La superficie lateral de la pirámide de Keops es de 85 560 m², aproximadamente.

2. Calcular las superficies lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 13 cm de altura sabiendo que el radio de su base mide 6 cm.

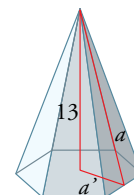
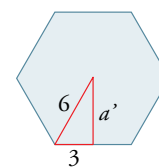
Necesitamos calcular la apotema de la pirámide, a ; para ello, tenemos que hallar la apotema de la base, a' . Recuerda que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:

$$a' = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{(\sqrt{27})^2 + 13^2} = \sqrt{27 + 169} = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$$

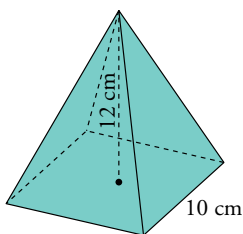
$$A_{\text{LAT}} = \frac{(6 \cdot 6) \cdot 14}{2} = 252 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 252 + \frac{(6 \cdot 6) \cdot \sqrt{27}}{2} \approx 346 \text{ cm}^2$$

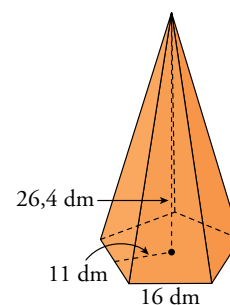


Piensa y practica

1. Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.



2. La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm. Halla su área total.



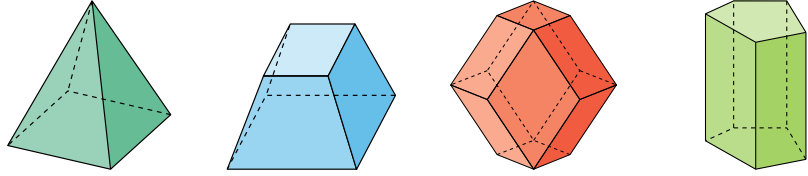
3 Poliedros regulares

Etimología

Poliedro. En griego, *poli*, “muchos” y *edro*, “cara”.

Icosaedro. En griego, *eikós*, “veinte”.

Los prismas y las pirámides, así como otros cuerpos geométricos limitados por caras poligonales se llaman, como ya sabes, **poliedros**.

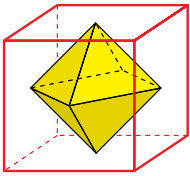


El área total de un poliedro es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman. Algunos poliedros con ciertas características se llaman **regulares**.

Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple estas dos condiciones:

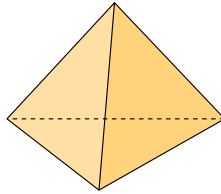
- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

¿Qué curioso!

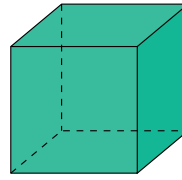


Si unimos los puntos medios de las caras de un cubo se obtiene un octaedro y si hacemos lo mismo con el icosaedro se obtiene un dodecaedro.

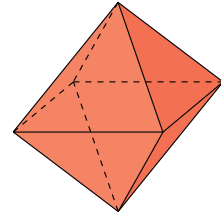
Solo hay cinco poliedros regulares:



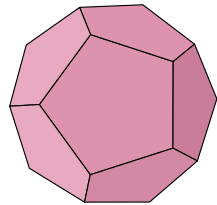
TETRAEDRO
(Cuatro caras triángulos)



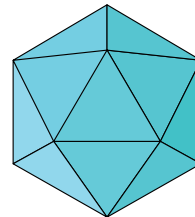
CUBO
(Seis caras cuadrados)



OCTAEDRO
(Ocho caras triángulos)



DODECAEDRO
(Doce caras pentágonos)



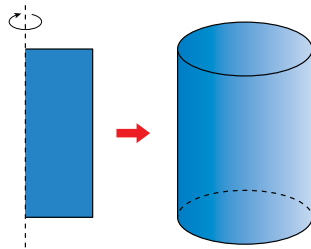
ICOSAEDRO
(Veinte caras triángulos)

Piensa y practica

1. Cuenta el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A) de cada uno de estos cinco poliedros. Comprueba que en todos ellos se cumple:

$$C + V - A = 2$$

Comprueba que también se cumple esta relación en los demás poliedros que has manejado.

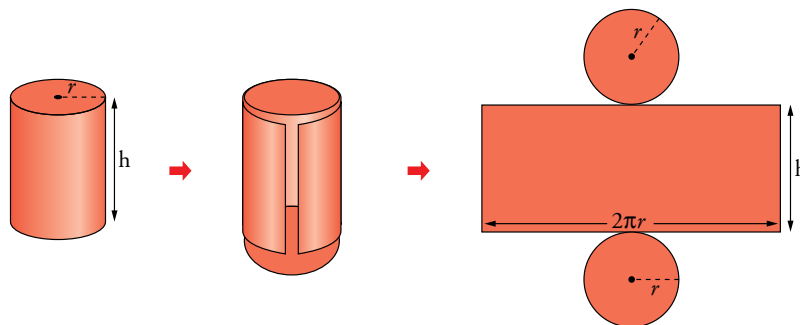


Haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un **cilindro recto**. Es, pues, un cuerpo de revolución.

Las **bases** de un cilindro recto son círculos. La distancia entre las bases se llama **altura**.

Superficie de un cilindro recto

Al cortar un cilindro como ves, se obtiene su desarrollo plano:



Etimología

Cilindro. Del griego *kulindo*, que significa “enrollado”, pues el cilindro tiene forma de rollo o cosa enrollada.

En la web

Cilindro: definiciones y desarrollo.

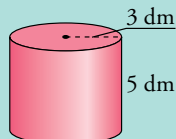
Se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h , es la del cilindro. Por tanto:

$$\text{ÁREA LATERAL} = 2\pi r \cdot h$$

$$\text{ÁREA TOTAL} = \text{ÁREA LATERAL} + \text{ÁREA DE LAS DOS BASES} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área lateral y el área total de este cilindro:



$$A_{\text{LAT}} = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi = 94,2 \text{ dm}^2$$

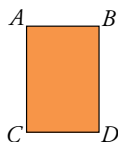
$$A_{\text{TOTAL}} = 94,2 + 2\pi \cdot 3^2 = 94,2 + 56,52 = 150,72 \text{ dm}^2$$

Piensa y practica

1. Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo alrededor de:

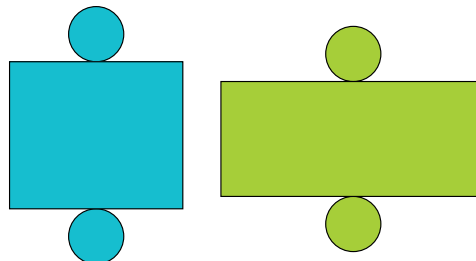
a) CD

b) BD



4. Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.

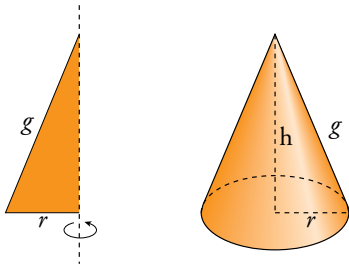
5. Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.



2. ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?

3. Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m², ¿cuál es el coste de toda la obra?

5 Conos

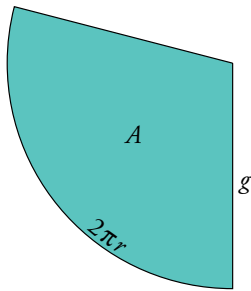


h , r y g cumplen la relación:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Etimología

Cono. Viene del latín, y significa piña. Te extraña, ¿verdad? Sin embargo, te resultará menos raro si recuerdas que los pinos son *coníferas* (que producen *conos*).



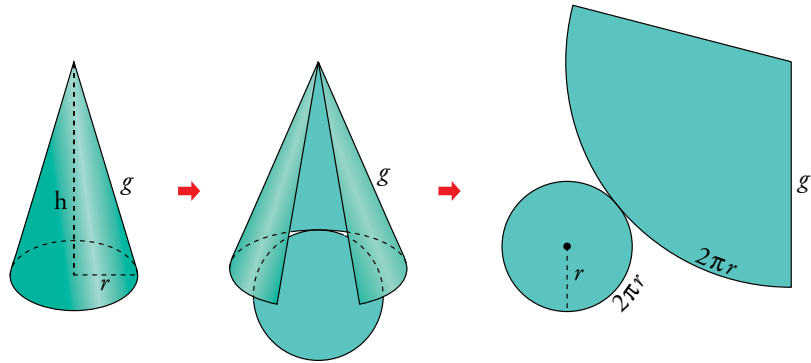
En la web

Cono: definiciones y desarrollo.

Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto**. Es, pues, un cuerpo de revolución.

La **altura** es la distancia del vértice a la base. El segmento g (hipotenusa del triángulo rectángulo) recibe el nombre de **generatriz**.

Superficie de un cono recto



El desarrollo de la superficie lateral de un cono recto es un sector circular de radio g . ¿Qué porción de círculo tiene ese sector? Vamos a averiguarlo:

- La circunferencia completa tiene una longitud de $2\pi r$.
- El sector tiene una longitud de $2\pi g$.

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{superficie del círculo}} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{superficie del sector}}$$

$$\frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2\pi g}{A} \rightarrow A = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$$

Por tanto:

$$\text{ÁREA LATERAL} = \pi r g$$

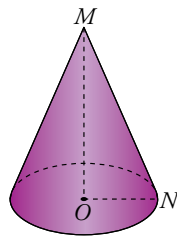
$$\text{ÁREA TOTAL} = \text{ÁREA LATERAL} + \text{ÁREA DE LA BASE} = \pi r g + \pi r^2$$

Piensa y practica

1. Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:

$$\overline{MO} = 84 \text{ cm}$$

$$\overline{MN} = 85 \text{ cm}$$

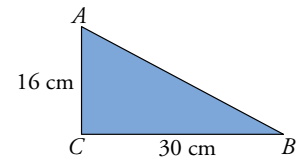


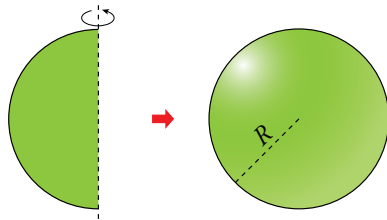
2. Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:

a) Alrededor de AC .

b) Alrededor de BC .

Calcula el área total de ambos.





La **esfera** se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Es, pues, un cuerpo de revolución.

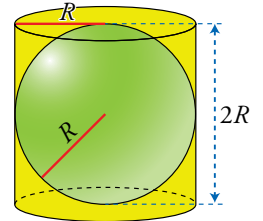
La esfera queda determinada por su radio, R .

Superficie de la esfera

La superficie de la esfera se llama superficie esférica. Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente. Sin embargo, sí podemos medir su área mediante una sencilla fórmula.

Imaginemos la esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella. Pues bien, el área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro.

$$A_{\text{LATERAL DEL CILINDRO}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

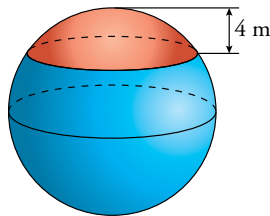


Etimología

En griego, *sphaira* significa “pelota”.

Observa

¿Qué superficie tiene la parte coloreada de rojo?

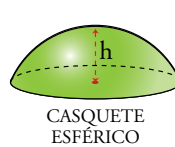


Radio de la esfera = 9 m

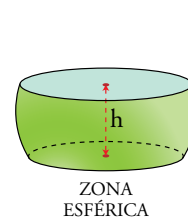
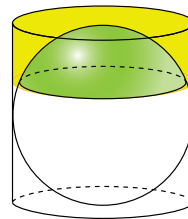
$$A = 2\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 226 \text{ m}^2$$

El área de la superficie esférica de radio R es $A = 4\pi R^2$.

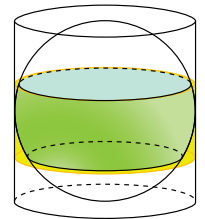
Esta relación entre la esfera y el cilindro que la envuelve es muy interesante, porque vale también para proporciones de esfera limitadas por planos paralelos.



CASQUETE ESFÉRICO



ZONA ESFÉRICA



Área del casquete esférico = Área lateral de la porción de cilindro correspondiente = $2\pi R h$

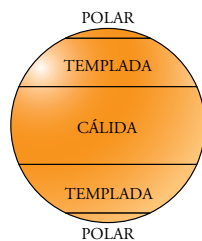
Área de la zona esférica = Área lateral de la porción de cilindro correspondiente = $2\pi R h$

En la web

Practica el cálculo de superficies de figuras esféricas.

Piensa y practica

- En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas. Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura.



Halla la superficie de cada zona climática.

- Se ha caído un balón de fútbol en un barreño lleno de pintura verde. Sabemos que la superficie del balón es de 6079 cm^2 . Si se ha hundido unos 15 cm en la pintura, ¿qué proporción de balón se ha manchado de verde?



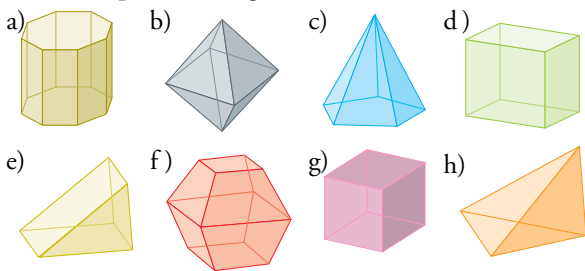
🧠 Toma el valor de π como 3,14.

Nombre y apellidos: Fecha:

Ejercicios y problemas

Tipos de cuerpos geométricos

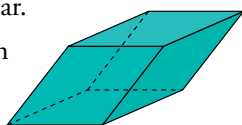
1. Indica cuáles de estos poliedros son prismas, pirámides y poliedros regulares.



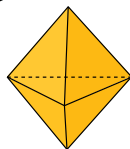
2. Explica por qué estos poliedros no son regulares.

a) Pirámide cuadrangular regular.

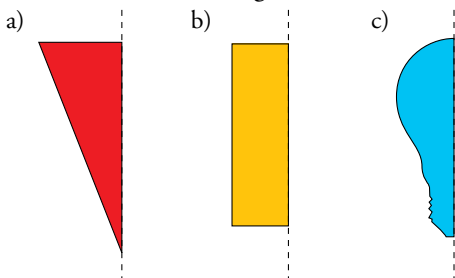
b) Este poliedro cuyas caras son rombos iguales:



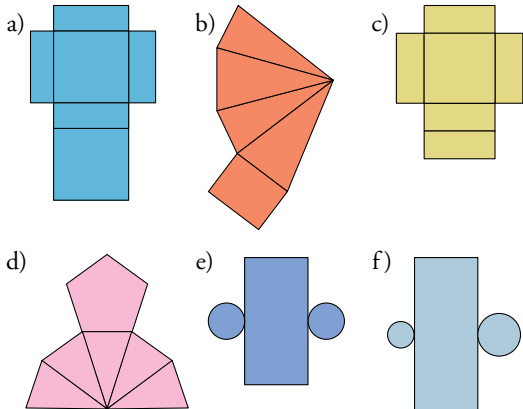
c) Este poliedro formado por seis triángulos equiláteros:



3. Dibuja los cuerpos de revolución generados al girar cada una de estas figuras alrededor del eje.

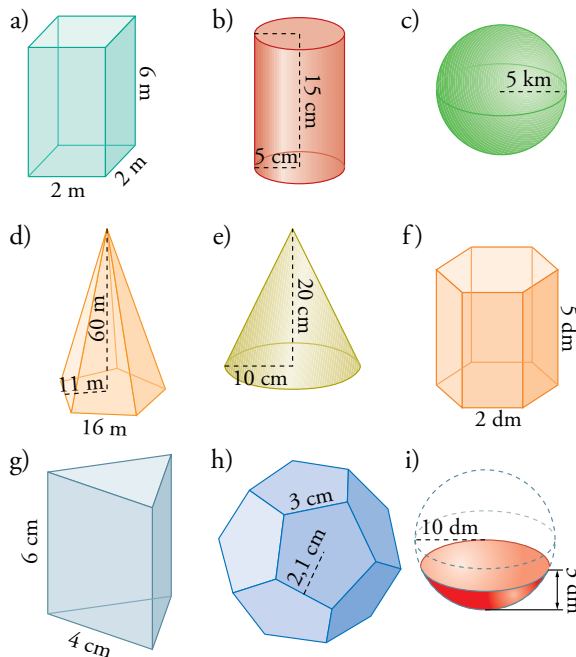


4. ¿Con cuáles de estos desarrollos se pueden completar un poliedro o un cuerpo de revolución?



Áreas de cuerpos geométricos

5. Calcula el área de cada cuerpo geométrico:



6. Halla el área total de una pirámide hexagonal regular con aristas laterales de 13 cm y aristas de la base de 10 cm.

7. Calcula el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.

8. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Calcula su área total.

9. Halla el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm, y las aristas de la base, 2 cm.


10. Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m de lado. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?

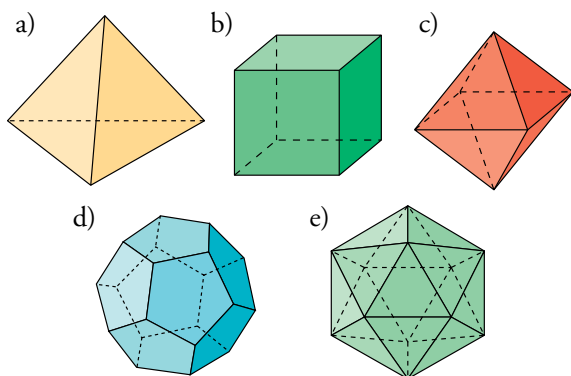
11. Calcula las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.


Resuelve problemas


12. Queremos forrar un cajón de embalaje de dimensiones $0,6 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$ con una chapa metálica.

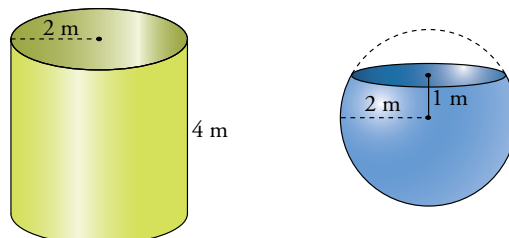
- a) ¿Cuánto costará hacerlo si la chapa está a 18 €/m²?
- b) Si queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m, ¿cuánto dinero hemos de pagar?


13.  Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?



14.  Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1,6 m de diámetro han sido enfoscadas con cemento. El precio del trabajo es de 40 € el metro cuadrado. ¿Cuál ha sido el coste?

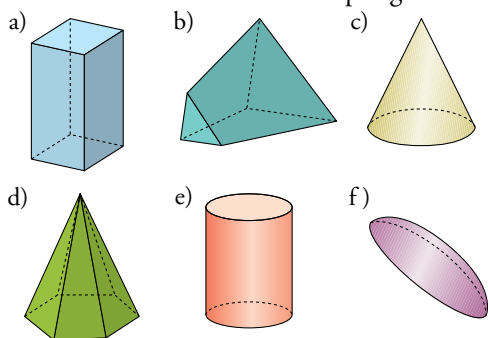
15.  Un pintor ha cobrado 1000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el de la derecha, también sin tapa?



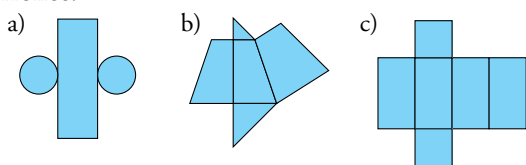
16.  Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m². ¿Cuál es el coste?

Autoevaluación

1. Escribe el nombre de estos cuerpos geométricos:



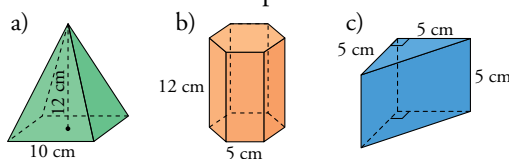
2. Indica a cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior corresponde cada uno de los siguientes desarrollos:



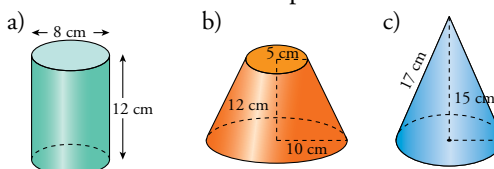
Dibuja en tu cuaderno el desarrollo del poliedro del apartado d) del ejercicio 1.

3. Dibuja en tu cuaderno la figura plana, y el eje sobre el cual gira, que genera cada uno de los cuerpos de revolución del ejercicio 1.

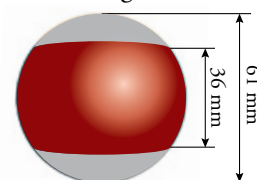
4. Calcula el área de cada poliedro:



5. Halla el área de estos cuerpos de revolución:



6. Esther quiere pintar 15 bolas blancas de 61 mm de diámetro para hacerlas de billar. Hay 7 bolas lisas (totalmente pintadas), una negra y 7 bolas rayadas que las pintará como muestra la figura.



Si la pintura vale 100 €/m², ¿cuánto le costará pintar todas las bolas?

12


Medida del volumen

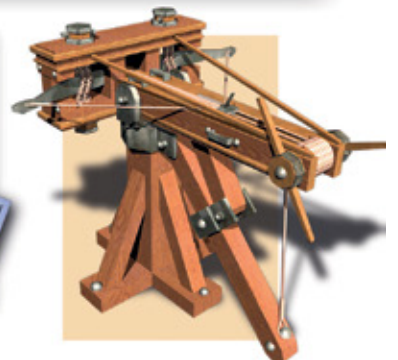
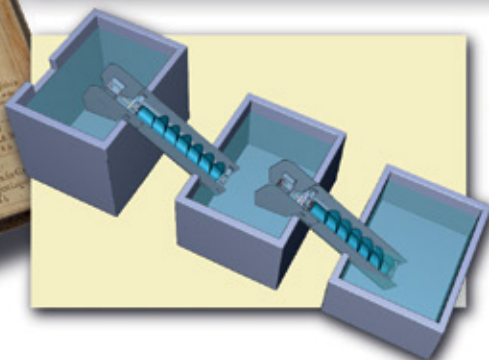
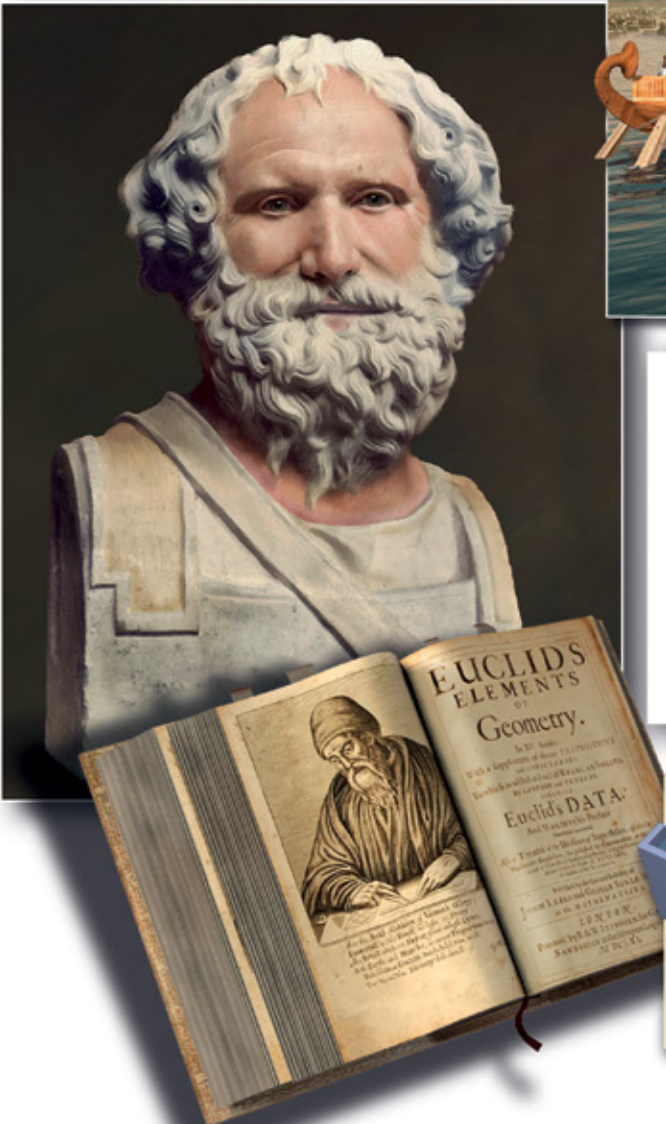
Euclides y Arquímedes fueron los máximos exponentes de la geometría en la antigua Grecia. La relevancia de su obra se mantuvo vigente durante más de 20 siglos.

Euclides vivió en Alejandría hacia el año 300 a. C. Se sabe poco de su vida (ni siquiera dónde y cuándo nació y murió), pero su obra se conserva y se conoce perfectamente. Sistematizó y dotó de estructura lógica el saber matemático de su época en los 13 tomos de que constan sus *Elementos*. En varios de ellos se trabajan los cuerpos geométricos.



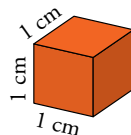
Arquímedes (siglo III a. C.), además de matemático, fue físico y un gran inventor. A diferencia de la línea tradicional del pensamiento griego, especulativo, él se valió de la experimentación para obtener resultados matemáticos que, después, demostraba rigurosamente.

Para hallar áreas y volúmenes de cuerpos complicados, Arquímedes imaginaba la figura descompuesta en infinidad de trozos pequeñísimos que, después, reagrupaba convenientemente. Este procedimiento supuso un gran avance a las matemáticas de su época. 

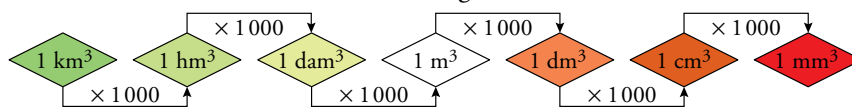


Nombre y apellidos: Fecha:

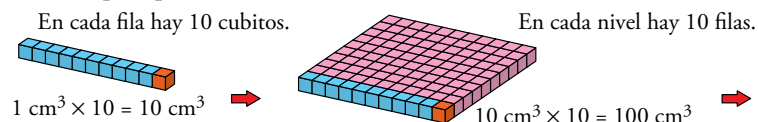
1 Unidades de volumen



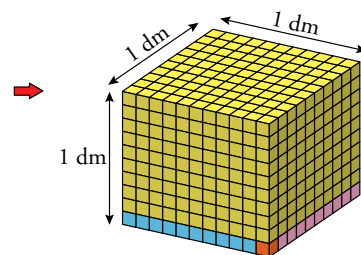
En el margen aparece un centímetro cúbico (1 cm³). Es un cubo de 1 cm de lado. De forma análoga, se definen el decímetro cúbico (dm³), el metro cúbico (m³) y las demás unidades de volumen. Son las siguientes:



Veamos por qué cada unidad cúbica contiene 1 000 unidades inferiores:



En el cubo (1 dm³) hay 10 niveles.



$100 \text{ cm}^3 \times 10 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$

Por tanto, en 1 dm³ hay 1 000 cm³.

Y por lo mismo:

- $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$
- $1 \text{ dam}^3 = 1000 \text{ m}^3$
- ...

Cada unidad de volumen es 1 000 veces la unidad de orden inferior y la milésima parte (0,001) de la unidad de orden superior.

Formas compleja e incompleja

La cantidad 438 m³ 12 dm³ está expresada en forma **compleja**.

Esa misma cantidad la podemos expresar usando una sola unidad, en forma **incompleja**: 438 012 000 cm³.

Veamos unos ejemplos de transformación de unidades:

- $14 \text{ dam}^3 \ 38 \text{ m}^3 = 14 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 + 38 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = 14\,038\,000 \text{ dm}^3$
- $481,03 \text{ hm}^3 = 481,03 \cdot 10^3 \text{ dam}^3 = 481\,030 \text{ dam}^3$
- $0,001831 \text{ dam}^3 = 0,001831 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 = 1\,831\,000 \text{ cm}^3$

La siguiente disposición facilita el paso de una unidad a otra:

	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	
a)		14	038	000		→ 14 038 000 dm ³
b)	481	030				→ 481 030 dam ³
c)			001	831	000	→ 1 831 000 cm ³

Piensa y practica

1. Expresa en metros cúbicos:

- $2 \text{ dam}^3 \ 123 \text{ m}^3 \ 52 \text{ dm}^3$
- $29\,320\,000 \text{ cm}^3$
- $(435 \text{ cm}^3 \ 425 \text{ mm}^3) \cdot 500\,000$
- $37 \text{ hm}^3 \ 12 \text{ dam}^3 \ 325 \text{ m}^3 \ 402 \text{ dm}^3$

2. Pasa a forma compleja.

- $35\,297\,853 \text{ cm}^3$
- $(4\,253 \text{ hm}^3) \cdot 2\,000$
- $0,00030124 \text{ dm}^3$
- $34,5832 \text{ hm}^3$

En la web

Practica la equivalencia entre las distintas unidades de volumen.

Cómo se mide la lluvia



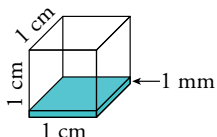
La cantidad de lluvia que cae en un cierto lugar durante un periodo de tiempo se suele medir en *litros por m²*.

Si llueve mucho, como el agua no se queda donde cae, se forman grandes riadas e inundaciones en las zonas bajas. ¿Qué pasaría si el agua se quedara donde cae?

Si un litro de agua cae en una superficie de un metro cuadrado, ¿qué altura alcanzaría?

- 1 m² tiene 10 000 cm³
- 1 l tiene 1 000 cm³

A cada cm³ le corresponde 0,1 cm³. Es decir, alcanzará una altura de 0,1 cm = 1 mm.



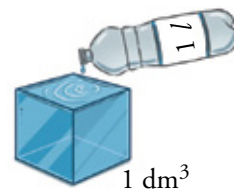
Por eso, la cantidad de lluvia caída se expresa, también, en *mm de altura*:

$$\frac{1 \text{ l}}{\text{m}^2} = 1 \text{ mm}$$

El litro, sus múltiplos y sus submúltiplos

Un **litro** (1 l) equivale a 1 dm³.

Si se llena de agua una botella de 1 l y esta se vierte, después, en un cubo de 1 dm³, observamos que lo llena por completo y no sobra nada.



El litro tiene múltiplos y submúltiplos:

- | | | | | | |
|-----------------|---|---------|-----------------|---|---------|
| kilolitro (kl) | → | 1 000 l | decilitro (dl) | → | 0,1 l |
| hectolitro (hl) | → | 100 l | centilitro (cl) | → | 0,01 l |
| decalitro (dal) | → | 10 l | mililitro (ml) | → | 0,001 l |

Vamos a incluirlos en la tabla junto con las unidades cúbicas:

m ³			dm ³				cm ³			mm ³		
			kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			

Capacidad y volumen

La palabra **volumen** se suele utilizar para designar lo que ocupa un cuerpo en el espacio, y **capacidad**, para designar lo que cabe dentro de un recipiente. Pero son magnitudes idénticas y, por tanto, para medirlas se utilizan las mismas unidades.

Tanto las unidades cúbicas como los múltiplos y los divisores del litro se utilizan para medir volúmenes y capacidades. Sin embargo, se deben escoger las unidades según el tamaño de lo que se mide.

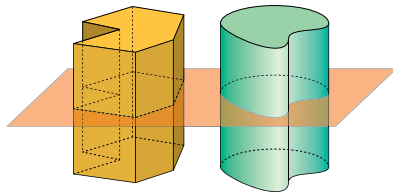
Ejemplos

- El volumen de un vaso o una botella, en l, en cl o en cm³.
- El volumen de pequeños recipientes, en cm³.
- El gasto mensual de agua en una casa, en m³.
- La capacidad de un pantano, en hm³ o, acaso, en km³.

Piensa y practica



- Copia en tu cuaderno y añade la unidad en la que se expresa cada uno de los siguientes volúmenes:
 - Capacidad de un vaso: 1/4 , o bien 250 .
 - Una cucharadita: 6 .
 - Consumo bimensual de agua en una casa: 63,834 .
 - Agua en un pantano: 680 .
- Si ayer cayeron 120 l por m², ¿a cuántos mm de altura corresponden? ¿Cuántos l por m² habrán caído si se alcanzan 48 mm de altura?
- Expresa en litros.
 - 45 dam³ 125 m³ 705 dm³ 500 cm³
 - 590 000 mm³
 - 0,000317 dam³
 - 2753 ml
- Expresa en unidades de volumen (forma compleja).
 - (457 210 dal) · 30
 - (12 845 235 cl) · 0,03
 - (42 753 ml) · 75



Los dos cuerpos geométricos del margen son **figuras prismáticas** porque tienen dos bases iguales y paralelas. Además, cortando cada una por planos paralelos a las bases, se obtienen secciones idénticas a ellas.

Las dos *figuras prismáticas* tienen la misma altura y, al cortarlas por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con la misma área. Por tanto, sus volúmenes coinciden (principio de Cavalieri).

Volumen de la figura prismática = Área de su base · Altura

Los prismas y los cilindros son figuras prismáticas. Sus volúmenes son:

En la web



- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de prismas y cilindros.
- Resuelve los problemas “Recipientes 1” y “Recipientes 3”.

No lo olvides

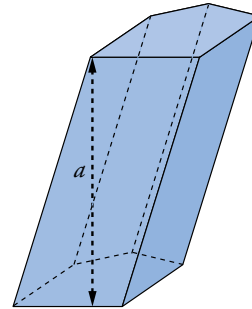
VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$

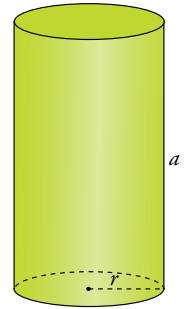


PRISMA RECTO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$



PRISMA OBLICUO



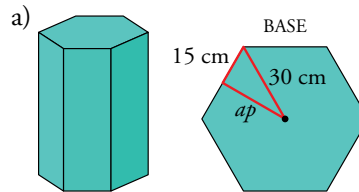
CILINDRO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a$$

Ejercicio resuelto

Hallar el volumen de:

- Un prisma hexagonal regular de lado de la base 30 cm y 1 m de altura.
- Un cilindro de 30 cm de radio y 1 m de altura.



En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales. Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.

$$\text{apotema} = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26 \text{ cm}$$

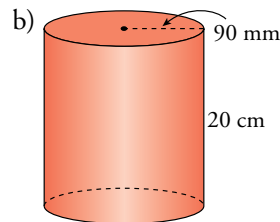
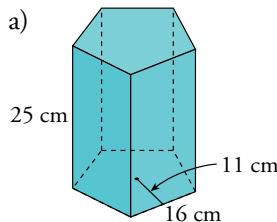
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2340 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2340 \cdot 100 = 234000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

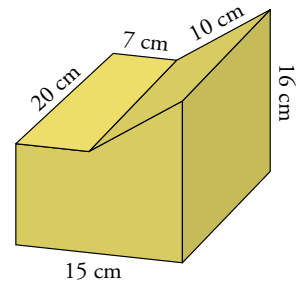
$$\text{b) } V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \approx 282600 \text{ cm}^3 = 282,6 \text{ l}$$

Piensa y practica

1. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

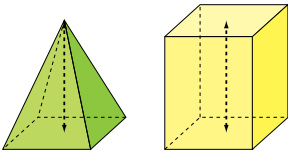


2. Calcula el volumen de un trozo de madera con la siguiente forma:



3

Volumen de la pirámide y del cono



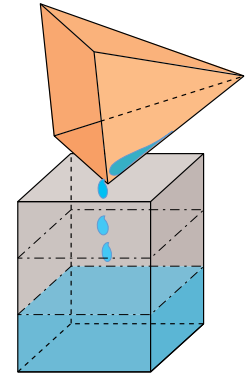
Tenemos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura. Vamos a comparar sus volúmenes.

Si llenamos de agua la pirámide y la vertemos dentro del prisma, ocupará una tercera parte de este.

Es decir, se necesitan tres pirámides para completar el volumen del prisma.

El **volumen** de una **pirámide** es:

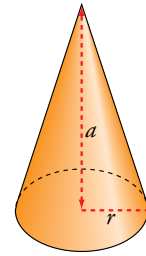
$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{Altura}$$



Al igual que en la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del área de la base por la altura. Es decir:

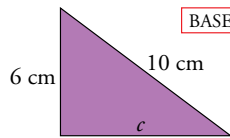
El **volumen** de un **cono** es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot a$$



Ejercicios resueltos

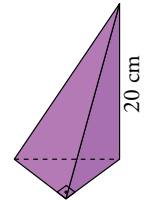
1. La altura de una pirámide es de 20 cm. Su base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 10 cm y un cateto de 6 cm. Hallar su volumen.



$$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

El otro cateto de la base mide 8 cm.

$$A_{\text{BASE}} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2 \quad V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 20 = 160 \text{ cm}^3$$



2. Hallar el volumen de un cono de 4 dm de altura y el radio de cuya base es 20 cm.

Radio de la base = 20 cm = 2 dm

Área de la base = $\pi \cdot 2^2 = 12,5664$

Volumen = $\frac{1}{3} 12,5664 \cdot 4 \approx 8,4 \text{ dm}^3 = 8,4 \text{ litros}$

Piensa y practica

- La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de la base mide 230 m, y la altura, 146 m.
Calcula cuántos hectómetros cúbicos tiene de volumen.
- Halla el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 8 cm y cuya altura es 2 dm.

- ¿Cuánto acero hará falta para fabricar la cama de un faquir compuesta por 1 800 puntas en forma de cono cuyo diámetro de la base mide 2 cm, y la altura, 7 cm?

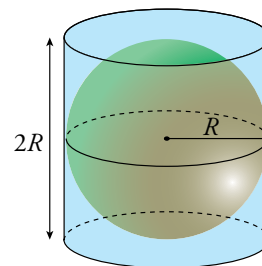


4 Volumen de la esfera

El volumen de la esfera es igual a los $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro en el cual está inscrita.

Como el radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, R , y la altura del cilindro es $2R$, entonces el volumen del cilindro es:

$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$



El **volumen** de una **esfera** de radio R es:

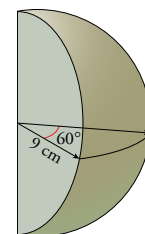
$$V = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{CILINDRO}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.

$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$. El volumen del sector será, pues, la sexta parte del volumen de la esfera.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 162\pi \approx 509 \text{ cm}^3$$



2. El radio de un balón es 25 cm, y sabemos que el grosor de la goma es de 3 mm. ¿Cuántos litros de goma son necesarios para fabricar un balón como el descrito?

$$V_{\text{BALÓN}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 65417 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA INTERIOR}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24,7^3 \approx 63090 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{GOMA}} = 65417 - 63090 = 2327 \text{ cm}^3 \approx 2,327 \text{ litros}$$

Solución: Se necesitan 2,33 litros de goma, aproximadamente.

Piensa y practica

1. Metemos en una caja ortoédrica de base 25 cm por 20 cm y una altura de 16 cm sesenta bolas de radio 2,5 cm. ¿Cuántos litros de aceite caben todavía en la caja?
2. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m^3 , calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.
3. ¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?

4. Calcula el volumen de cada uno de los 10 gajos de una naranja cuyo diámetro es de 12 cm, sabiendo que su cáscara tiene 0,8 cm de grosor.



5. Tenemos un cajón cúbico de 40 cm de arista lleno en sus tres cuartas partes de serrín. Queremos ocultar en su interior un balón de 32 cm de diámetro. ¿Qué volumen de serrín sobra?

Ejercicios y problemas

Unidades de volumen. Operaciones

- Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:

a) $0,025 \text{ hm}^3$ b) 459 hm^3
 c) $45\,214 \text{ dm}^3$ d) $0,015 \text{ km}^3$
 e) 23 dam^3 f) $58\,000 \text{ l}$
- Transforma en litros.

a) $400\,000 \text{ hm}^3$ b) $0,000047 \text{ hm}^3$
 c) $6 \text{ dam}^3 \ 318 \text{ m}^3$ d) $8\,562 \text{ m}^3 \ 1\,749 \text{ cm}^3$
 e) $14\,350 \text{ dl}$ f) $0,32 \text{ hl}$
- Copia y completa en tu cuaderno las igualdades siguientes:

a) $0,0037 \text{ km}^3 = \dots \text{ m}^3$
 b) $0,36 \text{ hm}^3 = \dots \text{ dm}^3$
 c) $1,8342 \text{ dam}^3 = \dots \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$
 d) $0,0007 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$
 e) $15 \text{ hm}^3 \ 13 \text{ dam}^3 \ 432 \text{ m}^3 = \dots \text{ m}^3$
 f) $15 \text{ hm}^3 \ 13 \text{ dam}^3 \ 432 \text{ m}^3 = \dots \text{ l}$
- Expresa estas cantidades en forma compleja:

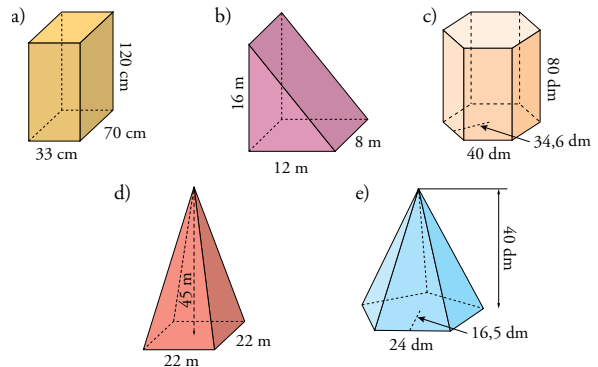
a) $45\,125\,145 \text{ dm}^3$ b) $0,45124568 \text{ km}^3$
 c) $451,14521 \text{ dm}^3$ d) $183\,000 \text{ dam}^3$
 e) $527\,002\,045 \text{ m}^3$ f) $183\,070\,693\,002 \text{ cm}^3$
- Copia y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades:

a) $1 \text{ hm}^3 = \dots \text{ hl}$ b) $1 \text{ dam}^3 = \dots \text{ dal}$
 c) $1 \text{ m}^3 = \dots \text{ l}$ d) $1 \text{ dm}^3 = \dots \text{ dl}$
 e) $1 \text{ cm}^3 = \dots \text{ cl}$ f) $1 \text{ mm}^3 = \dots \text{ ml}$
- Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros. Para ello, pasa a forma incompleja, expresa todas las cantidades en las mismas unidades y realiza los cálculos.

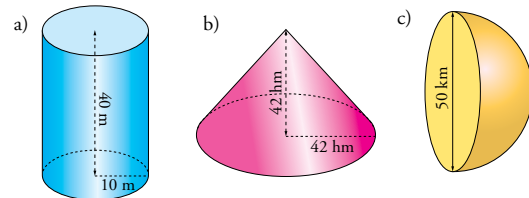
a) $0,34 \text{ dam}^3 + 84 \text{ m}^3 + 1\,284 \text{ m}^3$
 b) $0,00035 \text{ km}^3 + 0,45 \text{ hm}^3 + 65 \text{ dam}^3$
 c) $0,541 \text{ dam}^3 - 421 \text{ m}^3 \ 300 \text{ dm}^3$
 d) $4\,500 \text{ m}^3 : 25$
 e) $24 \text{ hm}^3 \ 123 \text{ dam}^3 \ 128 \text{ m}^3 : 40$
 f) $568 \text{ kl} - 0,508 \text{ dam}^3$

Cálculo de volúmenes

- Calcula el volumen de cada uno de estos poliedros. Expresa todos los volúmenes en litros.



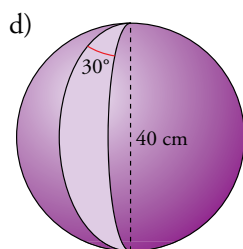
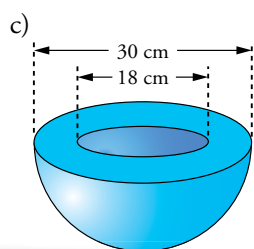
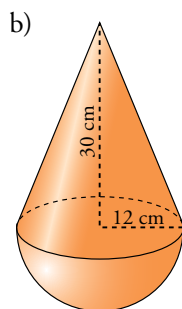
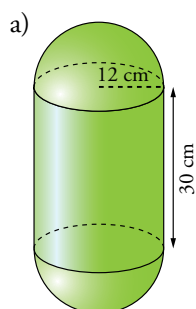
- Calcula, y expresa en litros, el volumen de los siguientes cuerpos de revolución:



- Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son $9 \text{ dm} \times 15 \text{ dm} \times 8 \text{ dm}$.
- ¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?
- La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm . La altura del prisma es de 2 dm . Halla su volumen.
- Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm . Su altura es $1,2 \text{ m}$. Halla su volumen.
- Halla el volumen de un cilindro de 10 cm de radio y 20 cm de altura.
- Halla el volumen de una esfera de 12 cm de diámetro.
- Halla el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

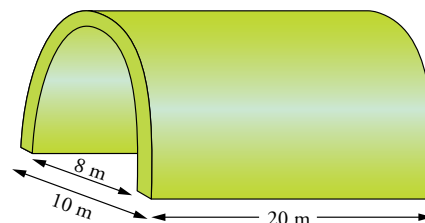
Aplica lo aprendido

16. Calcula el volumen, en litros, de los siguientes cuerpos geométricos:



Resuelve problemas

17. Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:



18. Halla el volumen de una habitación con forma de ortoedro de dimensiones $6\text{ m} \times 3,8\text{ m} \times 2,6\text{ m}$. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 80 l de agua en cada ducha?

19. Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de $1/4\text{ mm}$ de diámetro. ¿Cuál es la longitud del hilo?

Autoevaluación

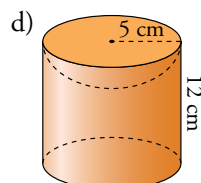
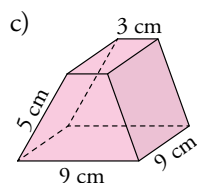
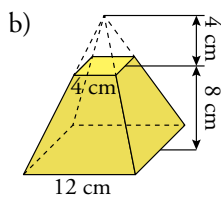
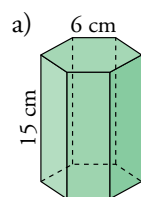
1. Transforma en metros cúbicos estas cantidades:

- a) 450 dam^3
- b) $1,2\text{ dam}^3$ $1\ 253\text{ dm}^3$
- c) $0,11\text{ km}^3$
- d) $35\ 840\text{ dm}^3$
- e) 500 hl
- f) $30\ 000\text{ l}$

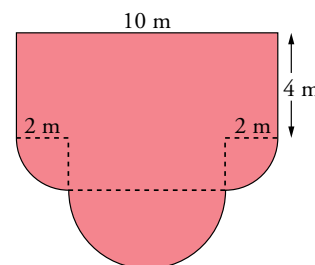
2. Expresa en forma compleja.

- a) $75\ 427\ 038\text{ m}^3$
- b) $32,14962\text{ dm}^3$
- c) $0,0000084\text{ km}^3$
- d) $832\ 000\text{ dam}^3$

3. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

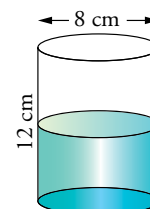


4. Halla el volumen de una habitación de $2,8\text{ m}$ de altura, cuya planta tiene esta forma y dimensiones:



5. El interior de este vaso mide 8 cm de diámetro y 12 cm de altura. Está medio lleno de agua. Se echan dentro 20 canicas de 3 cm de diámetro.

- a) ¿Se derramará el agua? Si no, ¿a qué altura llegará?
- b) ¿Y si echamos 22 canicas?



13

Funciones

Las funciones nacen de la necesidad de describir cuantitativamente algunos fenómenos físicos con el fin de darles explicación.

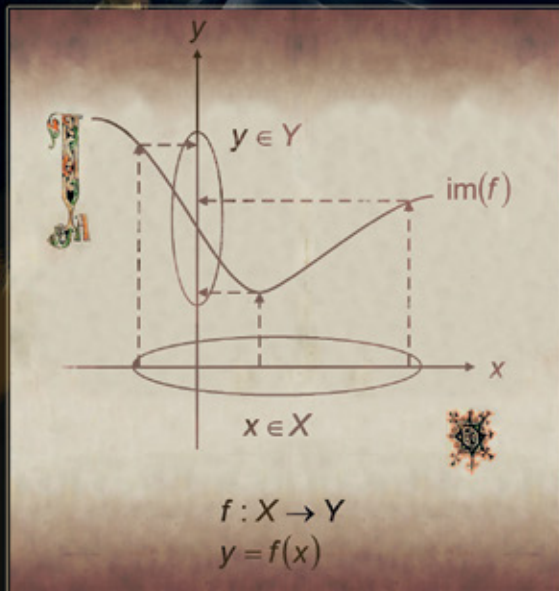


- L**as leyes de la naturaleza relacionan variables. Por ejemplo:
- La distancia recorrida por un vehículo en una hora depende de la velocidad a la que se desplaza.
 - La cantidad de masa forestal de un bosque depende del tiempo que haya transcurrido desde que empezó a formarse.

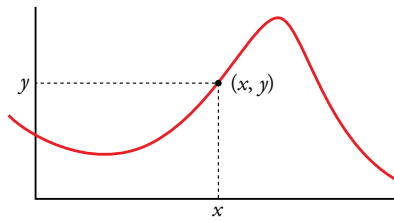
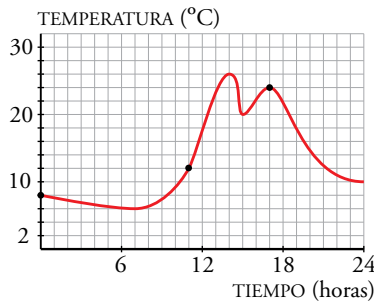
Aunque esa relación había sido advertida desde mucho tiempo atrás, fue **Galileo**, a mediados del siglo xvii, el primero que, experimentando, intentó relacionar numéricamente las variables que intervienen en el fenómeno. Estas relaciones numéricas permitieron dar forma algebraica a las funciones.

Descartes, filósofo y matemático francés del siglo xvii, concibió la manera de plasmar gráficamente las funciones sobre unos ejes cartesianos. (Recuerda: “cartesiano” viene de *Cartesius*, la expresión latina de Descartes).

La palabra “función” para designar estas relaciones, así como su definición precisa, llegaron en siglos posteriores. 🌐📐



Nombre y apellidos: Fecha:



La gráfica del margen describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura: °C):

- A las 0 h (12 de la noche), la temperatura era de 8 °C.
- A las 11 h, la temperatura era de 12 °C.
- A las 17 h (5 de la tarde), la temperatura era de 24 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.

Una **función** relaciona **dos variables**. En general se designan por x e y :

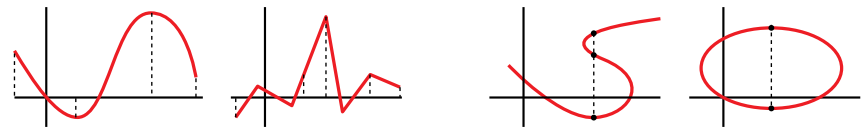
- x es la **variable independiente**.
- y es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de x).

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y .

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Representar dos gráficas que sean funciones y otras dos que no lo sean. Explicar por qué cada una es o no función.



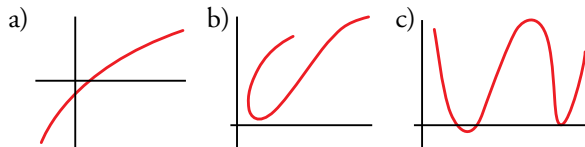
SON FUNCIONES

NO SON FUNCIONES

- Las dos primeras gráficas son funciones porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- Las dos siguientes no son funciones, ya que a algunos valores de x les corresponden varios valores de y .

Piensa y practica

1. Di cuáles de las gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:



2. Dibuja en tu cuaderno dos gráficas que correspondan a funciones y otras dos que no correspondan.

3. En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

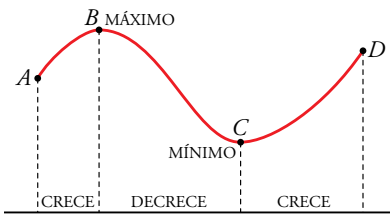
- a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 7 de la mañana? ¿Cuál fue?
- b) ¿Cuándo se dio la máxima temperatura? ¿Cuál fue?
- c) ¿En qué momentos la temperatura fue de 18 °C?
- d) Durante 1 h, aproximadamente, el sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora crees que fue?
- e) Indica una temperatura que se haya repetido en cuatro momentos distintos.

En la web

Practica el concepto de función, así como su interpretación.

2

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. La función del margen es *creciente* desde A hasta B, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de B a C, porque, recorriendo ese tramo de izquierda a derecha, los valores de la y son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser creciente en el tramo de C a D.

El valor *máximo* lo toma en el punto B, y el *mínimo*, en el C.

Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la y .

Es **decreciente** si, al aumentar la x , disminuye la y .

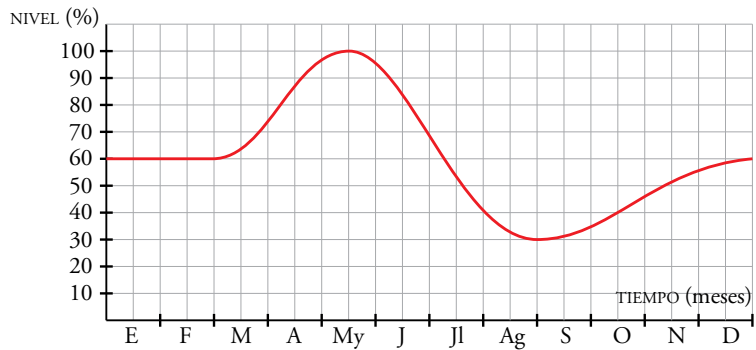
Si mantiene el mismo valor en todo el tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.

El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo**.

Veamos esto con un ejemplo de la evolución del nivel de agua (en porcentaje) en un determinado embalse a lo largo de un año:

Evolución del nivel del embalse

- Enero y febrero: constante, 60 %.
- Principios de marzo hasta mediados de mayo: crece de 60 % a 100 %.
- Medios de mayo hasta final de agosto: decrece de 100 % a 30 %.
- Principios de septiembre hasta final de año: crece desde 30 % hasta 60 %.




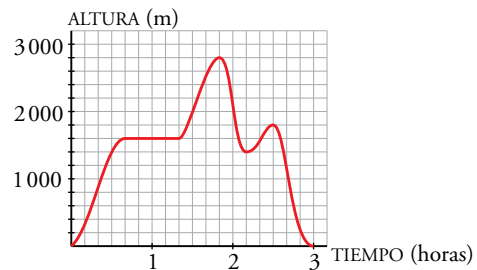
En la web

Practica los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función.

- En los dos primeros meses se mantiene estable (constante).
- Tiene un tramo creciente desde principios de marzo hasta mediados de mayo, que es cuando alcanza su máximo.
- Decrece hasta final de agosto, cuando llega a su mínimo.
- A partir de entonces, vuelve a crecer hasta final de año.

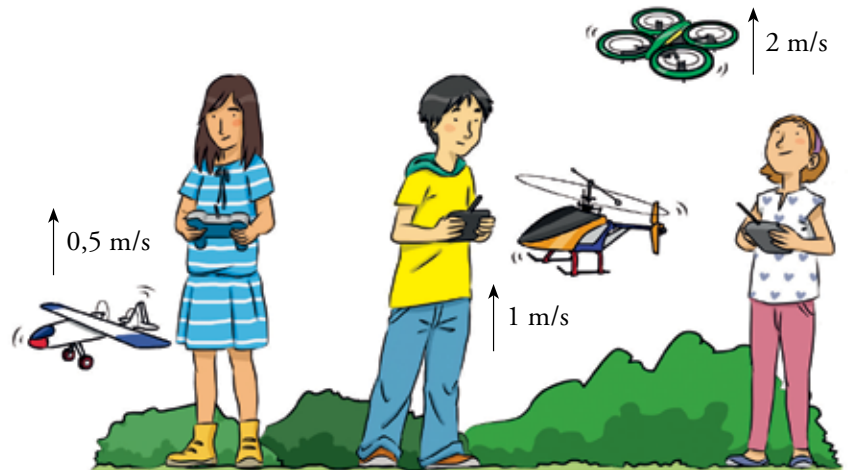
Piensa y practica

-  En la gráfica de la derecha puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.
 - ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?
 - ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?
 - ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?
 - Haz un breve resumen de la evolución de la altura de la avioneta desde que despegue hasta su aterrizaje.



Andrea tiene un avión teledirigido; Helio, un helicóptero teledirigido, y Diana, un dron para grabar imágenes desde las alturas. El avión asciende medio metro por segundo; el helicóptero, un metro cada segundo, y el dron, dos metros por segundo.

Hoy, los tres amigos, han salido al campo a volar sus aparatos.



Veamos cuáles son las alturas de estos en función del tiempo que ascienden.

- AVIÓN: 0,5 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	0,5	1	1,5	2	...	$0,5x$

La altura a la que sube el avión se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 0,5x$$

- HELICÓPTERO: 1 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	1	2	3	4	...	x

La altura que alcanza el helicóptero se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

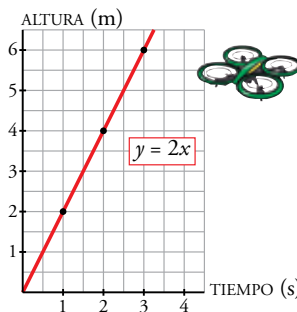
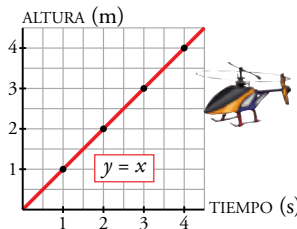
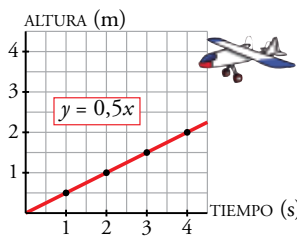
$$y = x$$

- DRON: 2 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	2	4	6	8	...	$2x$

La altura a la que sube el dron se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

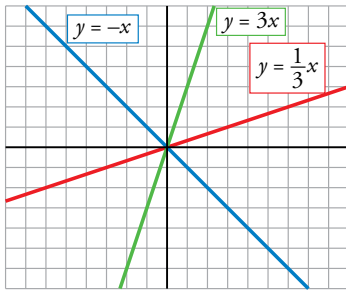
$$y = 2x$$



La altura que alcanza el helicóptero de Helio es **proporcional** al tiempo que está ascendiendo. Lo mismo ocurre con la altura del avión y la del dron. Por eso, estas funciones que relacionan las alturas con el tiempo:

$$y = 0,5x \qquad y = x \qquad y = 2x$$

se llaman *funciones de proporcionalidad*.



Se llama **función de proporcionalidad** a la que relaciona dos valores directamente proporcionales.

Tiene la ecuación $y = mx$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por el punto $(0, 0)$.

La constante de proporcionalidad, m , puede ser positiva o negativa. Se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Ejercicio resuelto

Representar las funciones de proporcionalidad cuyas ecuaciones son:

a) $y = -2x$

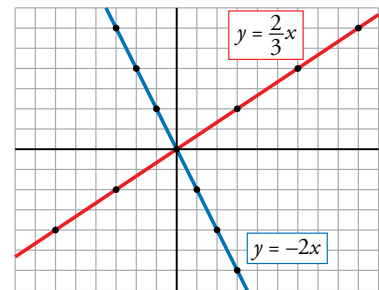
b) $y = \frac{2}{3}x$

a)

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	-2	-4	-6	2	4

b) Para obtener ordenadas (y) enteras, daremos a las abscisas (x) valores múltiplos de 3:

x	0	3	6	9	-3	-6
y	0	2	4	6	-2	-4



Piensa y practica

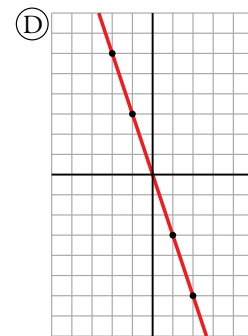
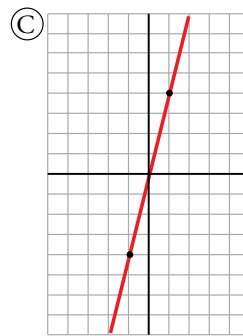
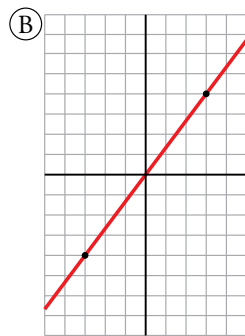
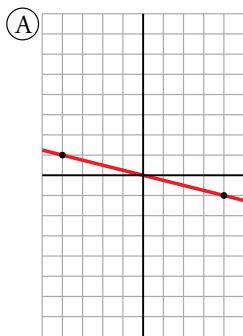
1. Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$

b) $y = \frac{4}{3}x$

c) $y = \frac{-1}{4}x$

d) $y = -3x$



2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad dadas por su ecuación. Completa en cada caso la tabla correspondiente en tu cuaderno.

a) $y = -\frac{1}{2}x$

x	0	2	4	6	-2	-4
y						

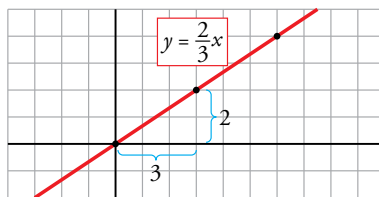
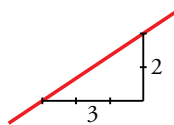
b) $y = \frac{2}{5}x$

x	0	5	10	15	-5	-10
y						

En la web Practica el concepto de función de proporcionalidad.

4 Pendiente de una recta

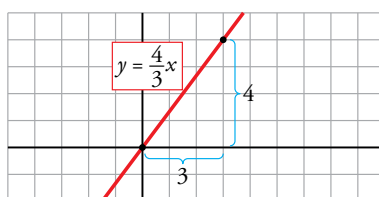
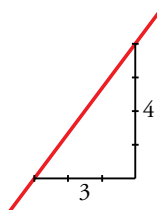
- La ecuación de esta recta es $y = \frac{2}{3}x$:



Su pendiente es $\frac{2}{3}$.

Por cada 3 unidades que avanza la x , la y sube 2 unidades.

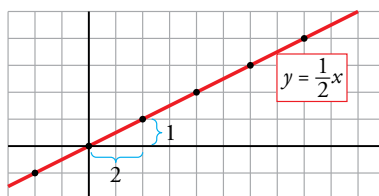
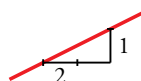
- La ecuación de esta recta es $y = \frac{4}{3}x$:



Su pendiente es $\frac{4}{3}$.

Cada vez que la x avanza 3 unidades, la y sube 4 unidades.

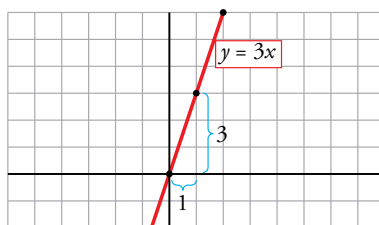
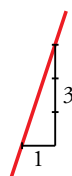
- La ecuación de esta recta es $y = \frac{1}{2}x$:



Su pendiente es $\frac{1}{2}$.

Cuando la x avanza 2 unidades, la y sube 1 unidad.

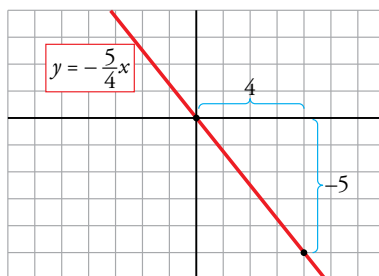
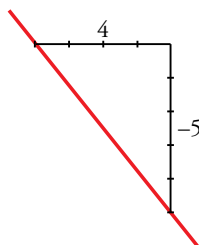
- La ecuación de esta recta es $y = 3x$:



Su pendiente es $3 = \frac{3}{1}$.

Cuando la x avanza 1 unidad, la y sube 3 unidades.

- La ecuación de esta recta es $y = -\frac{5}{4}x$:



Su pendiente es $-\frac{5}{4} = \frac{-5}{4}$.

Cuando la x avanza 4 unidades, la y baja 5 unidades.

En la web

Practica el concepto de pendiente de una recta.

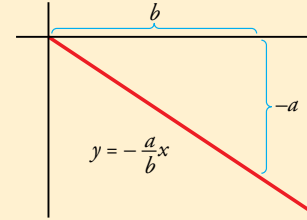
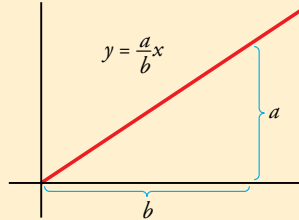
En la web

Concepto de pendiente de una recta.

La **pendiente** m de una recta $y = mx$ es la medida de su crecimiento:

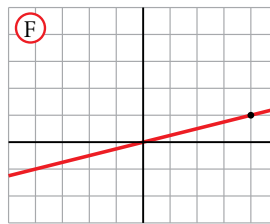
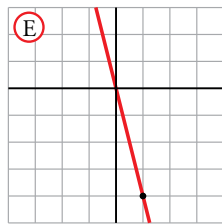
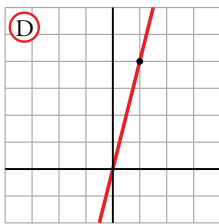
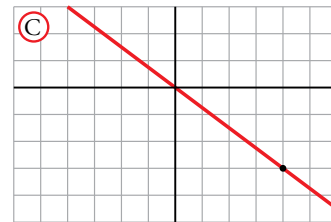
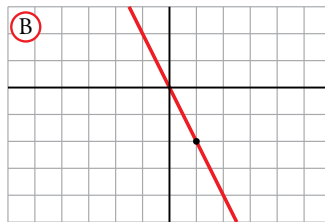
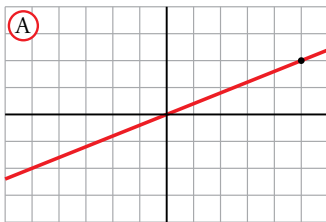
- Si m es positiva, la recta es creciente.
- Si m es negativa, la recta es decreciente.

Las rectas $y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$, siendo a y b números naturales, se representan del siguiente modo:



Piensa y practica

1. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:



2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad basándote en sus pendientes:

a) $y = x$

b) $y = 2x$

c) $y = 3x$

d) $y = -5x$

e) $y = -2x$

f) $y = \frac{2}{5}x$

g) $y = -\frac{1}{3}x$

h) $y = -\frac{5}{2}x$

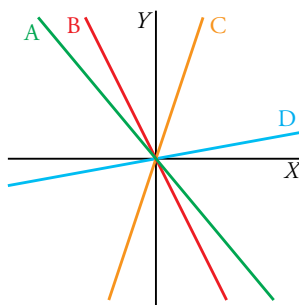
3. Indica cuál de estas puede ser la pendiente de cada una de las rectas representadas a la derecha.

a) $m = 3$

b) $m = 1/4$

c) $m = -1$

d) $m = -7/3$



Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines**.

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

lineales $\rightarrow y = mx + n$

de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

En la web

Practica el concepto de función lineal.

En la web

Practica el concepto de función lineal.

En la web

Practica con funciones $y = mx + n$.

Ten en cuenta

Las funciones representadas mediante rectas tienen por ecuación:

$$y = mx + n$$

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$



Diana quiere hacer volar su dron desde su terraza, que está a 3 metros de altura. El dron sube a una velocidad de 2 metros cada segundo. Por tanto, la altura del dron en función del tiempo que esté subiendo es:

$$0 \text{ segundos} \rightarrow 3 \text{ m}$$

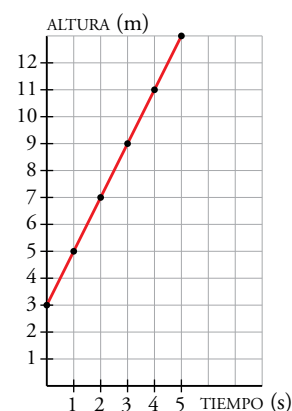
$$1 \text{ segundo} \rightarrow 3 + 1 \cdot 2 = 5 \text{ m}$$

$$2 \text{ segundos} \rightarrow 3 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ m}$$

$$3 \text{ segundos} \rightarrow 3 + 3 \cdot 2 = 9 \text{ m}$$

$$4 \text{ segundos} \rightarrow 3 + 4 \cdot 2 = 11 \text{ m}$$

$$5 \text{ segundos} \rightarrow 3 + 5 \cdot 2 = 13 \text{ m}$$



TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	...	x
ALTURA (m)	3	5	7	9	11	13	...	$3 + 2x$

La altura se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación:

$$y = 3 + 2x$$

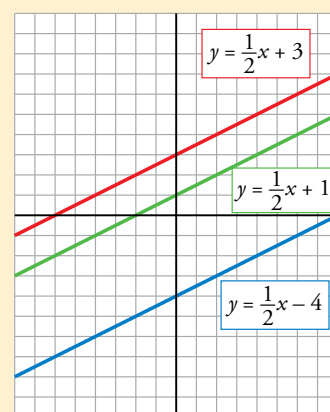
La ecuación $y = mx + n$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen**.

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales**.

Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



Ejercicios resueltos



1. Representar estas funciones:

a) $y = 2x - 5$

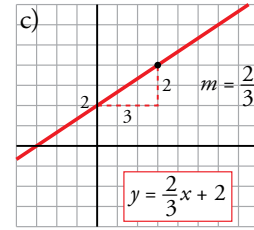
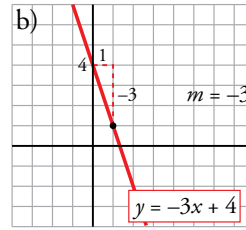
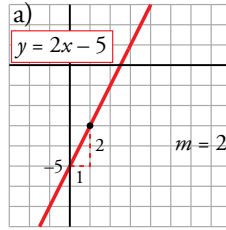
b) $y = -3x + 4$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

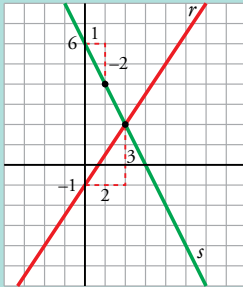
a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Por tanto, dibujaremos una recta que pase por $(0, -5)$ y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).

b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta que pase por $(0, 4)$ y cuya pendiente sea -3 (avanza 1, baja 3).

c) La recta pasará por $(0, 2)$ y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).



2. Deducir las ecuaciones de las dos rectas representadas.



Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

• Ecuación de r :

Pasa por $(0, -1)$. Por tanto, $n = -1$.

Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

• Ecuación de s :

Pasa por $(0, 6)$. Por tanto, $n = 6$.

Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.

Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

3. Escribir la ecuación de la recta, r , que tiene ordenada en el origen 3 y pendiente $-0,4$.

Podemos escribir la ecuación con esa pendiente:

$$y = 3 - 0,4x$$

O expresar la pendiente mediante una fracción para poder representarla más fácilmente:

$$y = 3 - \frac{2}{5}x$$

Piensa y practica

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

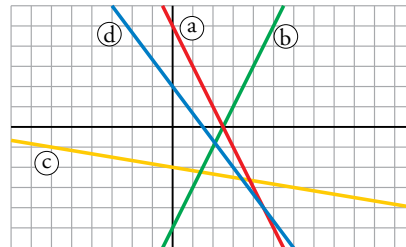
e) $y = -x - 1$

f) $y = 0,8x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

h) $y = -0,625x + 1$

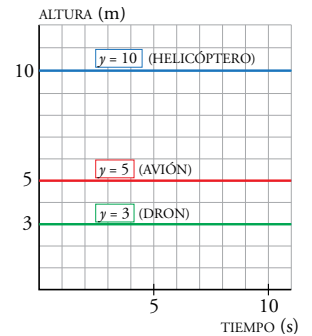
2. Escribe las ecuaciones de estas funciones:



En la web

Practica la asociación entre funciones lineales y sus correspondientes representaciones gráficas.

Andrea, Helio y Diana han vuelto a hacer volar sus artefactos, pero esta vez cada uno lo mueve solo en horizontal, siempre a la misma altura. Helio pasea su helicóptero desde su terraza, a 10 m de altura; Andrea ha lanzado su avión por la ventana a 5 m del suelo, y Diana se ha subido a una escalera para que su dron se mantenga a 3 m de altura.



Avión de Andrea:

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...
ALTURA (m)	5	5	5	5	5	...

La altura, en función del tiempo, es $y = 5$ para el avión de Andrea.

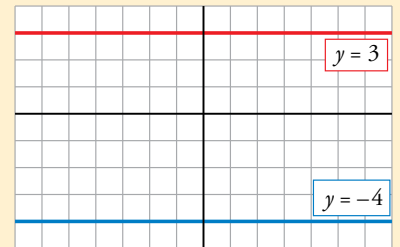
Ten en cuenta

La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

La función $y = k$, en la que el valor de y no depende de x , se llama **función constante**.

Se representa por una recta paralela al eje X , a una distancia k de este.

La pendiente de una función constante es 0.



Ejercicio resuelto

El London Eye es una noria mirador de 136 m de altura que está en el centro de Londres.

Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo que gira la noria y la distancia a la que se encuentra del centro una determinada cabina.

Como la altura es de 136 m, la distancia de una cabina al centro es:

$$136 : 2 = 68 \text{ m}$$

Por tanto, la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia de una cabina al centro de la noria es una función constante de ecuación:

$$y = 68$$



Piensa y practica

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 7$ b) $y = -3$ c) $y = 0$

2. a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(-2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

3. ¿Cuál es la ecuación del eje X ?

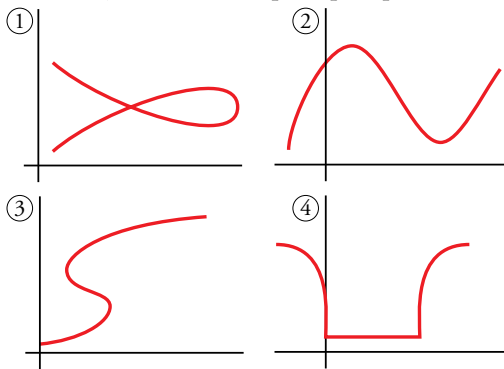
4. Escribe la ecuación de las siguientes funciones:



Ejercicios y problemas

Concepto de función

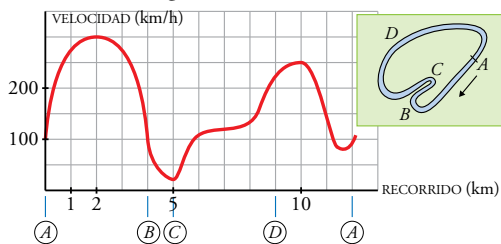
1. ¿Cuáles de estas gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.



2. a) ¿Puede una recta vertical, paralela al eje Y , ser la representación gráfica de una función?
 b) ¿Y una recta horizontal?
 c) ¿Y una circunferencia?

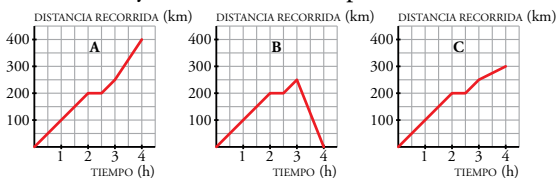
Interpretación de gráficas

3. Esta gráfica describe la velocidad de un coche de carreras en cada lugar de ese circuito:



- a) Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente.
 b) ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad?
 c) Señala el máximo y el mínimo de esta función.

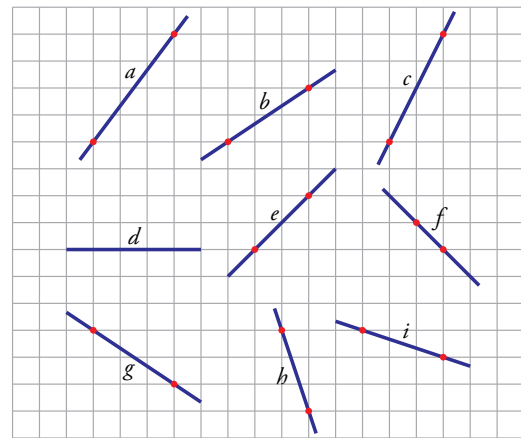
4. Indica cuál de estas gráficas representa la distancia recorrida por un vehículo a lo largo de 4 h de viaje, sabiendo que a las 2 h para a descansar durante media hora y a las 3 h sube un puerto:



¿Cuánto ha durado el viaje? ¿Cuánto ha recorrido?

Funciones lineales

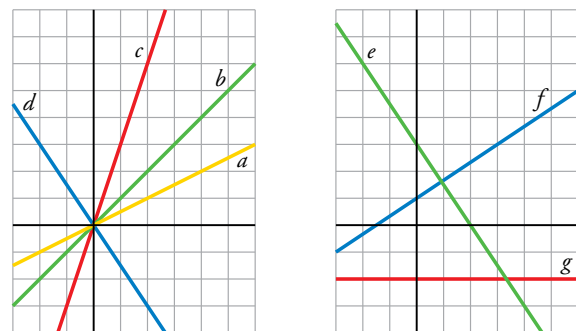
5. Calcula la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



6. Representa las siguientes funciones sin la ayuda de una tabla de valores:

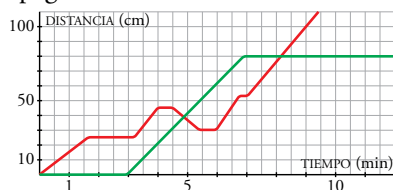
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $y = 2x$ | b) $y = \frac{1}{2}x$ |
| c) $y = -3x$ | d) $y = \frac{4}{3}x$ |
| e) $y = -\frac{2}{5}x$ | f) $y = \frac{3}{4}x$ |
| g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ | h) $y = -3x + 5$ |
| i) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ | j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ |
| k) $y = -1$ | l) $y = 4$ |
| m) $y = 3$ | n) $y = x$ |

7. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones, fijándote en la pendiente y la ordenada en el origen de cada una:



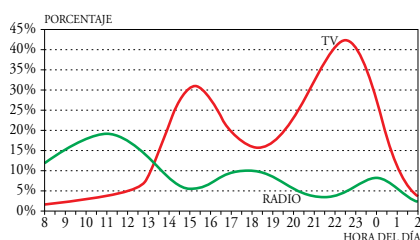
Resuelve problemas

8. Sara y Daniel ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.



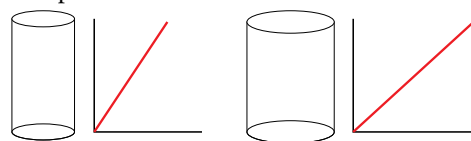
El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

- ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?
 - ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?
 - Describe la carrera.
9. Estas gráficas corresponden a los porcentajes de personas que ven la televisión o escuchan la radio a ciertas horas del día.

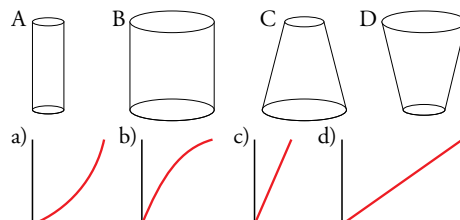


- Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos... Relacionala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena...
- Haz lo mismo con la curva de la radio.
- Compara las dos curvas y relaciónalas.

10. Un grifo tiene un caudal constante. Estas son las gráficas de la función nivel de agua-tiempo y los vasos correspondientes.



Ahora asocia tú cada gráfica a su vaso:



11. En un parque hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatines, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.

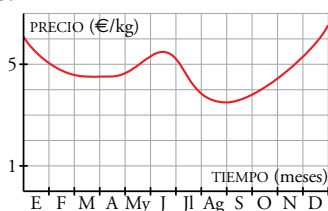


El coste del monopatín, y , en función del tiempo que se utilice, x , viene dado por la ecuación $y = x$.

- Calcula la ecuación que relaciona el coste de los patines en función del tiempo que se utilice.
- Halla la ecuación que relaciona el coste de la bicicleta en función del tiempo.
- Representa en los mismos ejes coordenados las tres funciones de proporcionalidad.
- ¿Cuáles son las pendientes de las tres rectas? ¿Qué representan en este contexto?

Autoevaluación

1. a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.

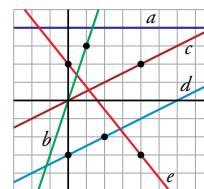


- ¿En qué tramos la función es creciente y en cuáles es decreciente?
- ¿Cuándo es mínimo el precio y cuál es?

2. Representa estas funciones:

a) $y = -\frac{5}{3}x$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = 4$

3. Escribe la ecuación de cada una de estas funciones:




14

Estadística



Los censos y recuentos estadísticos se hallan presentes en todas las civilizaciones desde tiempos antiquísimos, pero se limitaban a la recogida de datos y, a lo sumo, a su exposición clara y ordenada.



La estadística como ciencia comienza a des-
puntar en el siglo XVII con los estudios de-
mográficos del inglés **John Graunt**. En ellos, los
datos se analizaban para obtener conclusiones
bien fundamentadas. 

Existen papiros egipcios de hace más de 5000 años
donde hay constancia de censos de población y de
bienes. Tal era su dedicación a estos asuntos que con-
cibieron una divinidad llamada *Safnkit*, “Señora de los
libros”.

También los babilonios guardaban en tablillas de arcilla
los recuentos estadísticos que realizaban hasta el punto
de que en el siglo VIII a.C. se construyó una biblioteca
donde se recopilaban estos documentos.

En distintos pasajes de la Biblia se recogen censos hechos
por los judíos. Especialmente en el libro Números, del Pen-
tateuco, donde se describe con detalle el censo realizado
por Moisés a la salida de Egipto en el siglo XIV a.C.

Nombre y apellidos: Fecha:

BOC → bocadillo o sándwich
 FRU → pieza de fruta o frutos secos
 BOL → bollo dulce o chuchería
 OTRO → cualquier otra comida
 NADA → no toma nada

BOC	
FRU	
BOL	
OTRO	
NADA	

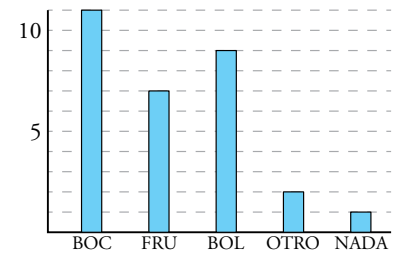
Los dueños de un local próximo a un centro de estudios, con el fin de montar un puesto de bocadillos y otros alimentos, han preguntado a 30 estudiantes del centro qué suelen comer a mitad de mañana. Los resultados son estos:

OTRO, BOC, BOC, BOL, FRU
 FRU, BOL, FRU, BOC, BOC
 FRU, FRU, BOC, BOL, BOC

NADA, BOC, BOL, BOL, BOL
 BOC, BOL, FRU, BOL, BOC
 BOC, OTRO, FRU, BOC, BOL

Con estos datos, confeccionamos una tabla de frecuencias y su gráfica.

ALMUERZO	FRECUENCIA
BOC	11
FRU	7
BOL	9
OTRO	2
NADA	1



En tablas y gráficas estadísticas se recoge la información que se ha ido obteniendo durante un proceso estadístico. Recordemos los pasos que se siguen:

1. Toma de decisiones sobre lo que se quiere estudiar y para qué se necesita.

Los estudios estadísticos en general se realizan por algún motivo: aumentar las ventas de un producto, ganar en competitividad, aumentar la audiencia, mejorar los servicios públicos... En el ejemplo anterior, se quiere estudiar la viabilidad que tiene un puesto de bocadillos junto a un centro de estudios.

2. Enumeración adecuada de los valores que puede tomar la variable.

En este caso, la preferencia mostrada por un estudiante cualquiera siempre encaja en una de las opciones que se le dan (BOC, FRU, BOL, OTRO, NADA).

3. Recogida de datos.

Los datos pueden venir a partir de una encuesta, mediante observación o experimentación, a través de anuarios o páginas oficiales... En nuestro ejemplo, se realiza una encuesta escogiendo aleatoriamente 30 estudiantes del centro.

4. Tabulación y representación gráfica.

Confección de una tabla a partir de los datos recogidos. Habitualmente, puede ser ventajoso acompañarla de una gráfica adecuada.

5. Análisis de los resultados. Conclusiones.

En el ejemplo anterior, los dueños del local posiblemente, a partir de los resultados, ven claro que sí les conviene montar el negocio.

Piensa y practica

1. Los dueños de un cine han preguntado a 30 espectadores por lo que suelen comer durante la película. Las opciones son palomitas (PA); chucherías (CH); nachos o patatas (NCH); otras cosas (OT) y nada (ND).

Se han obtenido estos datos:

PA, PA, CH, NCH, ND
 CH, PA, CH, PA, PA
 PA, ND, PA, NCH, PA

PA, ND, CH, OT, PA
 NCH, ND, PA, CH, ND
 OT, ND, CH, CH, PA

Construye una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama de barras.



1. En una clase de 30 estudiantes, la profesora de Lengua ha recomendado 5 libros para leer en verano. A la vuelta de vacaciones, se les ha preguntado cuántos de esos libros han leído. Estos son los resultados:

0 2 2 3 1 1 2 2 1 5
 2 1 2 4 1 1 2 1 5 2
 2 3 4 2 1 2 4 2 1 3

a) Realizar un recuento y confeccionar una tabla de frecuencias.

b) Realizar una representación adecuada de los resultados.

a) Hacemos un recuento y, a partir de él, confeccionamos una tabla de frecuencias donde incluimos la frecuencia relativa y la porcentual:

N.º DE LIBROS LEÍDOS	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
0	1	1/30 = 0,03	3 %
1	9	9/30 = 0,30	30 %
2	12	12/30 = 0,40	40 %
3	3	3/30 = 0,10	10 %
4	3	3/30 = 0,10	10 %
5	2	2/30 = 0,07	7 %
TOTAL	30	1,00	100 %

Mirando las frecuencias porcentuales, podemos decir que el 67% de los estudiantes (40 + 10 + 10 + 7 = 67) ha leído 2 o más libros y que únicamente el 3% no ha leído ninguno.

b) Diagrama de barras.

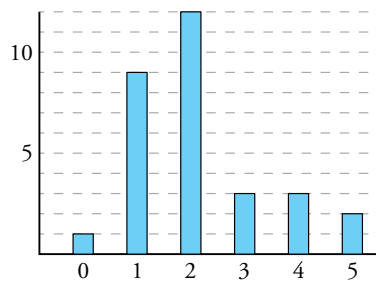
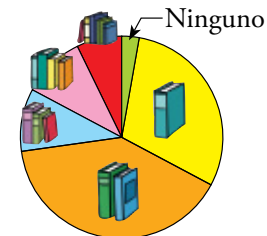


Diagrama de sectores.



2. En la clase de Educación Física se ha pedido a los estudiantes que lancen el balón medicinal lo más lejos que puedan. Estas son las distancias (en cm):

387 355 432 483
 348 497 410 427
 365 392 455 373
 383 413 459 392

a) Confeccionar una tabla de frecuencias agrupando los datos en estos intervalos:

340 - 380 380 - 420
 420 - 460 460 - 500

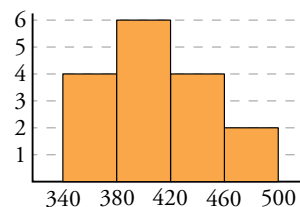
b) Dibujar los resultados en un histograma.

a) Repartiremos los 16 valores en cada uno de los cuatro tramos designados. Por ejemplo, el 387 va al segundo tramo; el 355, al primero; el 432, al tercero... así sucesivamente. Cada vez que ponemos un valor en su correspondiente intervalo, anotamos una rayita. De este modo construimos la siguiente tabla:

INTERVALO	VALOR DEL INTERVALO (MARCA DE CLASE)	RECUESTO	FRECUENCIA
340 - 380	360		4
380 - 420	400		6
420 - 460	440		4
460 - 500	480		2

¿Qué es una marca de clase? Veámoslo: en el primer intervalo hay cuatro individuos cuyos valores son 355, 348, 365 y 373, pero a partir del momento en que construimos la tabla, a los cuatro se le asigna el valor central del intervalo, 360, que se llama marca de clase; y lo mismo diríamos de los demás intervalos.

b) Dibujamos el histograma:



Los parámetros estadísticos son valores que se obtienen a partir de la distribución y que resumen alguna de sus características globales.

La media, la mediana y la moda se llaman **parámetros de centralización** porque son valores alrededor de los cuales se distribuyen los datos.

Recordemos en qué consisten y cómo se calculan.

Ejemplo

A 10 estudiantes les han preguntado por el número de tíos y tías que tienen. Las respuestas han sido las siguientes: 3, 5, 4, 3, 5, 6, 8, 2, 1, 3.

$$\text{Su media es } \bar{x} = \frac{3+5+4+3+5+6+8+2+1+3}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

Para hallar la **mediana**, se ordenan los datos de menor a mayor. La mediana es el dato que está en el lugar central. En este caso, 1, 2, 3, 3, **3, 4**, 5, 5, 6, 8, como hay un número par de datos, dos de ellos (3 y 4) ocupan el lugar central. La mediana es el promedio de ellos, $Me = 3,5$.

Su **moda** es $Mo = 3$, porque es el dato más frecuente (está 3 veces).

- La **media** de varias cantidades es la suma de todas ellas dividida por el número de las que hay.
- Se llama **mediana** de un conjunto de datos numéricos al que, colocándolos en orden, ocupa el lugar central. Si hay un número par de datos, se asigna la mediana al valor intermedio entre los dos centrales.
- La **moda** es el dato con mayor frecuencia.

Recuerda

Las **variables cuantitativas** solo toman valores numéricos y las **cualitativas** no toman valores numéricos.

La media y la mediana solo pueden hallarse para variables cuantitativas. La moda puede asignarse a cualquier tipo de variable.

Ejercicio resuelto

Hallar \bar{x} , Me y Mo en estas distribuciones:

a) *N.º de mascotas que tienen 13 estudiantes de una clase.*

3, 2, 0, 0, 3, 2, 0, 2, 0, 1, 4, 6, 3

b) *Estación del año en la que nacieron 10 personas:*

P, V, V, O, P, I, I, V, O, V

a) Media: $\bar{x} = \frac{3+2+0+0+3+2+0+2+0+1+4+6+3}{13} = \frac{26}{13} = 2$

Mediana: Se ordenan los datos: $\underbrace{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6}_{13}$ $\rightarrow Me = 2$

Moda: $Mo = 0$ (el dato que está más veces).

b) Es una variable cualitativa y no se le puede asignar ni media ni mediana. Su moda es $Mo = V$ (pues el número de personas nacidas en verano, 4, es mayor que en las demás estaciones).

Piensa y practica

1. Halla \bar{x} , Me y Mo de cada una de las siguientes distribuciones:

a) Grupo sanguíneo de 15 personas:

A, A, B, AB, AB, A, A, B, A, 0, AB, A, A, B, AB

b) Edades de varios estudiantes:

12, 15, 12, 16, 10, 11, 12, 10, 11, 12, 9, 9, 10, 8

c) Número de asignaturas suspensas en la evaluación:

0, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 0, 0, 1

Los parámetros de centralización dan una visión muy parcial de la distribución. Deben ser complementados con otros parámetros que informan sobre el grado de dispersión de los datos. Veamos algunos de ellos:

Recorrido o rango

El **recorrido** o **rango** de una distribución es la diferencia entre los valores extremos.

$$\text{RECORRIDO} = \text{valor mayor} - \text{valor menor}$$

En las distribuciones de la página anterior, sus recorridos son:

$$\text{RECORRIDO DE } \textcircled{\text{I}} = 10 - 1 = 9$$

$$\text{RECORRIDO DE } \textcircled{\text{II}} = 30 - 1 = 29$$

Desviación media: un parámetro de dispersión ligado a la media

La **desviación media**, DM, de una distribución es un parámetro asociado a su media; es el promedio de las distancias a la media de los valores de todos los individuos.

Por ejemplo, consideremos la distribución 5, 8, 10, 11, 15, 17 cuya media es 11. Observa que las distancias de los datos a la media son positivas.

DATOS	5	8	10	11	15	17
DISTANCIA A LA MEDIA	6	3	1	0	4	6

De 5 a $\bar{x} = 11$ es $11 - 5 = 6$.

De 15 a $\bar{x} = 11$ es $15 - 11 = 4$.

El promedio de las distancias a la media se calcula así:

$$\text{DM} = \frac{6 + 3 + 1 + 0 + 4 + 6}{6} = \frac{20}{6} = 3,33$$

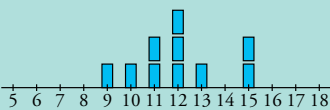
Ejercicio resuelto

Hallar la desviación media de las siguientes distribuciones:

$\textcircled{\text{III}}$ 5, 7, 8, 9, 11, 13, 13, 15, 16, 18



$\textcircled{\text{IV}}$ 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15



$\textcircled{\text{III}}$ Su media es $\bar{x} = 11,5$.

DATOS	5	7	8	9	11	13	13	15	16	18	
DISTANCIA A 11,5	6,5	4,5	3,5	2,5	0,5	1,5	1,5	3,5	4,5	6,5	SUMA → 35

$$\text{Desviación media: DM} = \frac{\text{suma de las distancias a } \bar{x}}{10} = \frac{35}{10} = 3,5$$

$\textcircled{\text{IV}}$ Su media es $\bar{x} = 12$.

DATOS	9	10	11	11	12	12	12	13	15	15	
DISTANCIA A 12	3	2	1	1	0	0	0	1	3	3	SUMA → 14

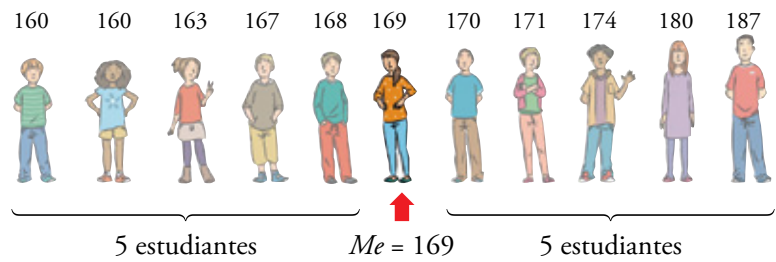
$$\text{Desviación media: DM} = \frac{14}{10} = 1,4$$

Los datos de $\textcircled{\text{III}}$ (DM = 3,5) están más dispersos que los de $\textcircled{\text{IV}}$ (DM = 1,4).

Piensa y practica

- Halla el recorrido, la DM y la desviación típica en las distribuciones A, B y C de la actividad 2 de la página anterior.

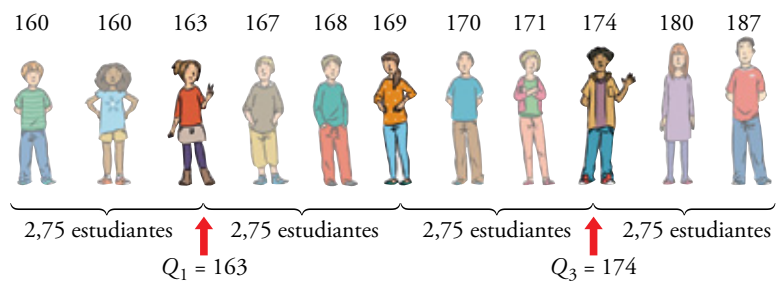
Los 11 componentes de un grupo se han colocado en fila ordenados según sus estaturas. Como ya sabes, la mediana es la medida del que ocupa el lugar central; en este caso, el sexto lugar.



¿Qué tiene que ver el **sexto lugar** con el número de individuos, 11? La mitad de 11 es 5,5, y por tanto, la mediana correspondería a la medida de la persona que ocupa el lugar 5,5. Como las personas no se pueden partir, será la persona que va después de la quinta, es decir, la sexta.

Si en lugar de dividir este grupo en 2 partes lo hacemos en 4 partes iguales, ¿dónde quedarían las particiones? Como hay 11 personas, la cuarta parte es $11 : 4 = 2,75$.

Q_1 deja a su izquierda “2,75 personas”, Q_3 deja a su izquierda “8,25 personas” (3 · 2,75 = 8,25), por tanto, lo situamos en el valor correspondiente a la tercera persona, es decir, en 163. Q_3 deja a su izquierda “8,25 personas” (3 · 2,75 = 8,25), por tanto, lo situamos en el valor correspondiente a la novena persona, es decir, en 174.



Recorrido intercuartílico

El **recorrido intercuartílico** es la distancia entre los cuartiles primero y tercero:

$$\text{Recorrido intercuartílico} = Q_3 - Q_1$$

La mediana juega el papel de parámetro de centralización. El recorrido intercuartílico es un parámetro de dispersión asociado a ella.

Estos dos nuevos puntos se llaman **cuartiles**: Q_1 es el primer cuartil y Q_3 es el tercer cuartil. El segundo es la mediana: $Q_2 = Me$. Los cuartiles dividen la población en 4 partes iguales. La mediana y los cuartiles son **medidas de posición**.

Ejercicio resuelto

Calcular la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución de notas de 13 estudiantes:

1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 10

Es claro que la mediana es $Me = 5$: 1, 1, 2, 3, 4, 4, **5**, 6, 7, 7, 7, 8, 10

Como hay 13 estudiantes, la cuarta parte es 3,25.

El primer cuartil tiene 3,25 estudiantes por debajo de él, por tanto corresponde a la nota del cuarto estudiante, $Q_1 = 3$; el tercer cuartil tiene 9,75 estudiantes por debajo de él, por lo que corresponde a la nota del décimo, $Q_3 = 7$.

Piensa y practica

1. Calcula la mediana y los cuartiles de: 13, 12, 15, 19, 12, 12, 13, 14, 15, 14, 13, 18, 17, 9, 8.

En la web Actividades guiadas para practicar los parámetros de posición.

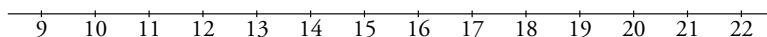
Diagrama de caja

Una forma de representar los parámetros de posición, mediana y cuartiles es lo que se denomina **diagrama de caja**, también conocido por diagrama de caja y bigotes.

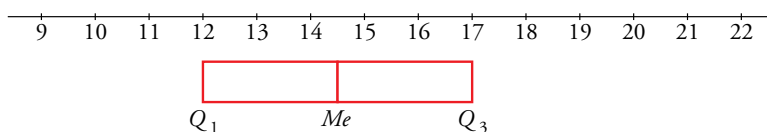
Ejemplo

En el banquete de una boda han juntado a todos los primos en una mesa. Sus edades ordenadas son las siguientes: 9, 9, 10, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 22. Observamos que $Me = 14,5$, $Q_1 = 12$ y $Q_3 = 17$. Para representar estos datos en un diagrama de caja, damos estos pasos:

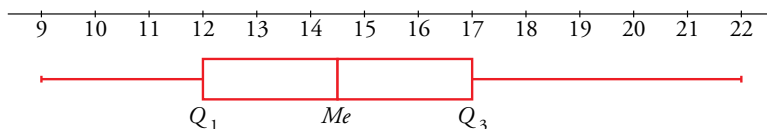
1. Trazamos una recta numérica que comprenda todos los valores que aparecen, del 9 al 22.



2. Dibujamos una caja que vaya de $Q_1 = 12$ a $Q_3 = 17$. Dividimos la caja en dos partes por el valor $Me = 14,5$.



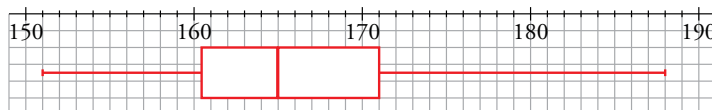
3. Desde el lateral izquierdo de la caja trazamos una recta horizontal hacia la izquierda que llegue hasta el menor valor, 9, y desde el derecho trazamos otra recta horizontal hacia la derecha que llegue hasta el mayor valor, 22.



Ejercicio resuelto

Las estaturas de un grupo de jóvenes se representan mediante el diagrama de caja de la derecha.

Interpretar e indicar cuáles son los parámetros de posición.



A la vista del diagrama podemos decir que $Q_1 = 160,5$, $Me = 165$ y $Q_3 = 171$. Además, el más bajo mide 151 cm, y el más alto, 188 cm.

Por tanto, un 25% de los jóvenes mide entre 151 cm y 160,5 cm; otro 25%, entre 160,5 y 165 cm; otro 25%, entre 165 cm y 171 cm, y el último 25% (los más altos) miden entre 171 cm y 188 cm.

Piensa y practica

2. Representa mediante un diagrama de caja y bigotes las siguientes calificaciones de 35 individuos:

0 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6
6 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 10 10

3. El siguiente diagrama de caja representa la distribución de las notas de una clase de 30 estudiantes.



Interpétalo e indica los parámetros de posición.

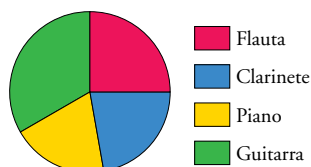
Ejercicios y problemas

Tablas y gráficas estadísticas

1. Este diagrama de sectores representa los 24 estudiantes de una clase de 2.º de ESO, según se queden o no a comer en el colegio:



- a) ¿Qué fracción de los estudiantes se queda a comer?
 b) ¿Qué porcentaje no se queda nunca?
 c) ¿Qué tanto por ciento se queda a veces?
2. En clase de Música, cada alumno tiene que elegir un instrumento entre cuatro posibles. La distribución de los alumnos según el instrumento elegido viene dada por este diagrama de sectores:



- a) ¿Cuál es el instrumento más elegido? ¿Y el menos?
 b) ¿Hay algún instrumento que lo hayan elegido exactamente el 25% de la clase?
 c) Sabiendo que los alumnos que han elegido cada instrumento son 7, 8, 9 y 12, ¿qué número corresponde a cada uno de ellos?
3. Los miembros de la sección de infantiles de un club de atletismo han anotado sus pesos en un cuaderno:

48, 52, 36, 53, 44 39, 40, 53, 55, 47
 54, 49, 57, 44, 54 41, 54, 48, 48, 52
 51, 47, 58, 53, 50 46, 45, 38, 39, 49

- a) Confecciona una tabla de frecuencias en la que los datos se repartan en los siguientes intervalos:

35,5 - 42,5; 42,5 - 49,5; 49,5 - 56,5; 56,5 - 63,5

Recuerda que la marca de clase de cada intervalo es su valor central, es decir, la suma de sus extremos dividida entre dos.

- b) Representa los resultados en un histograma.

4. En un festival de música han tocado cinco grupos. A la salida del recinto, se ha pasado una pequeña encuesta en la que se pregunta el número de conciertos a los que se ha asistido. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:

N.º DE CONCIERTOS	N.º DE PERSONAS
1	63
2	185
3	167
4	32
5	13

- a) ¿A cuánta gente le han preguntado?
 b) Copia la tabla en tu cuaderno y añade la columna de frecuencias porcentuales.
 c) ¿Qué porcentaje de gente ha estado en menos de 4 conciertos? ¿Y en más de 3 conciertos?
 d) ¿Qué porcentaje de gente ha asistido al menos a 2 conciertos?

5. Una pequeña pensión ha anotado cada día de un determinado mes el número de habitaciones que tienen ocupadas. Estos son los resultados:

3, 4, 2, 3, 5 5, 4, 3, 3, 4 2, 2, 3, 5, 4
 4, 4, 3, 4, 5 4, 5, 3, 1, 3 2, 4, 2, 4, 5

- a) Confecciona una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.
 b) Representa los datos en un diagrama de barras.
 c) Dibuja el correspondiente diagrama de sectores.

Parámetros estadísticos

6. Halla la media, la mediana, la moda, el recorrido y la desviación media de las siguientes distribuciones:

- a) 1, 1, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 10
 b) 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10
 c) 4, 2, 2, 4, 3, 10, 3, 4, 4, 5, 2, 5

7. Halla la media, la mediana, el recorrido, la desviación media y los cuartiles de las siguientes distribuciones:

- a) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10
 b) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6

Ejercicios y problemas

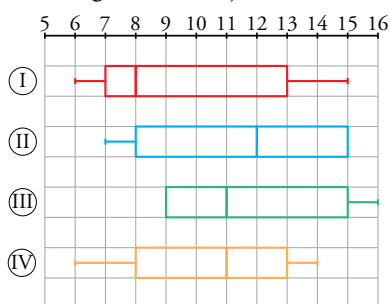
8. El número de errores que tuvieron en un test un grupo de estudiantes fueron:

1, 1, 2, 2, 4, 5, 5, 8, 8, 9

Halla la mediana y los cuartiles primero y tercero, y haz un diagrama de caja con esos datos.

9. Los tiempos que un grupo de personas han empleado en hacer un test se distribuyen entre 0 y 50 minutos. Construye el diagrama de caja sabiendo que $Q_1 = 23$, $Me = 34$ y $Q_3 = 39$.

10. Indica la mediana y los cuartiles en cada uno de los siguientes diagramas de caja:



11. Calcula los cuartiles de las distribuciones del ejercicio 6 y representa cada una de ellas mediante un diagrama de caja.

12. Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados:

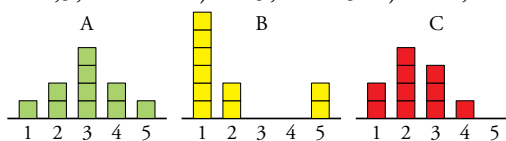
3	5	1	2	5	5	3	4	6	2
4	3	6	4	1	6	4	2	6	1
4	3	5	6	2	1	5	6	6	2
4	2	3	2	6	5	4	1	6	1

Calcula la media y la moda de la distribución.

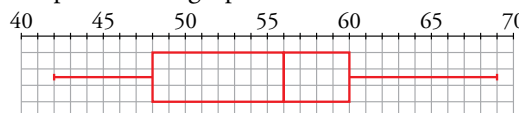
Resuelve problemas

13. Asocia cada par de parámetros con su correspondiente gráfica.

a) $\bar{x} = 2,3$; $Me = 2$ b) $\bar{x} = 3$; $Me = 3$ c) $\bar{x} = 2$; $Me = 1$



14. Este diagrama de caja representa la distribución de los pesos de un grupo de estudiantes de una clase.



Completa estas frases observando el diagrama:

- El 50% de los estudiantes de esta clase pesa ... o menos.
 - El 25% de los estudiantes pesa ... o menos.
 - El 25% de los estudiantes pesa ... o más.
 - El 50% de los pesos centrales varía entre ... y ...
 - El 75% de los estudiantes pesa ... o más.
 - El ... de los estudiantes de esta clase pesa 60 kg o menos.
15. La edad media de un grupo de diez personas es 13 años.
- ¿Es posible que al incorporarse una persona al grupo haga que la edad media sea 10 años? Explica por qué.
 - Bruno, el profesor, se ha incorporado al grupo y la media ahora es de 15 años. ¿Qué edad tiene Bruno?
 - ¿Qué edad debe tener una persona para aumentar en 1 año la media del grupo inicial?

Autoevaluación

1. En un club de jugadores de videojuegos se ha anotado el número de partidas ganadas por cada uno de sus miembros. Estos son los resultados:

4, 4, 5, 3, 3	2, 1, 4, 2, 3
4, 3, 5, 5, 1	2, 0, 1, 0, 3
4, 2, 5, 3, 2	3, 2, 4, 1, 0

- Confecciona con estos datos una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.
- Representalos en un diagrama de barras.

2. Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación media de las siguientes distribuciones:

- 10, 12, 19, 15, 8, 10, 10
- 0, 3, 3, 3, 3, 4, 5
- 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 5, 7

3. Halla la mediana y los cuartiles de esta distribución: 23, 25, 26, 28, 31, 31, 34, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40. Representa los datos obtenidos en un diagrama de caja y bigotes.

15

Azar y probabilidad




Las nociones de azar y de probabilidad vienen desde antiguo y siempre relacionadas con los juegos. ¿Te suena la frase *Alea jacta est*? La pronunció Julio César en el siglo I a.C., y significa “La suerte está echada”. La palabra *alea* en latín significa “suerte” y también “dado”. *Alea* da lugar a la palabra castellana “aleatorio”, relativo al azar.



En las antiguas civilizaciones babilonia y egipcia se jugaba a las tabas. Una taba es un hueso del talón de una oveja (el astrágalo) que, al lanzarlo, puede caer en cuatro posiciones. Las tabas dieron origen a los dados, y tanto en Grecia como en la Roma imperial se practicaban ambos juegos, las tabas y los dados.

En el siglo XVI, el italiano **Cardano** (gran matemático y gran jugador) escribió un libro sobre los juegos de azar en el que, además de consejos para hacer fulleras y evitar que te las hicieran, teorizaba sobre el comportamiento del azar. Fue la primera vez que se trató el azar de forma científica.

Pero el origen de la teoría de la probabilidad se suele situar en 1654, cuando un jugador profesional, el caballero de Meré, propuso a su amigo **Pascal** algunos problemas de probabilidad relacionados con juegos. Este pensó en ellos y se los comunicó, por carta, a otro matemático, **Fermat**. Compartiendo sus conclusiones le fueron dando forma y sistematizaron el cálculo de probabilidades. 

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Sucesos aleatorios

¿Dependen del azar?

¿Encestar un balón depende del azar?
Pues sí, por bueno que sea el jugador, siempre hay algo de suerte en el resultado.

¿Y la nota de un examen?

Bien lo sabes, por mucho que se haya estudiado, siempre hay un punto de suerte.

Los resultados de las siguientes experiencias dependen del azar:

- Echar un dado sobre la mesa.
- Lanzar un balón a canasta.
- Comprobar si lloverá a lo largo del día.
- Realizar un examen y ver qué nota se saca.

Estos acontecimientos que dependen del azar se llaman *sucesos aleatorios*.

Para analizar cómo se comporta el azar, podemos realizar *experiencias aleatorias*; es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo:

- Lanzar una moneda.
- Lanzar tres monedas y observar cuántas caras salen.



- Arrojar un dado y anotar el número que sale.
- En qué color para la aguja en esta ruleta.



- ¿Lloverá mañana?
- ¿Cuántos días lloverá la próxima semana?



- **Suceso aleatorio** es un acontecimiento en cuya realización influye el azar.
- **Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado depende del azar.

Piensa y practica

1. En cada una de las experiencias descritas arriba, di cuáles son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

Por ejemplo:

a) Lanzar una moneda: **C y +**

b) ¿Cuántas caras al lanzar tres monedas? **0, 1, 2, 3**

Sigue tú:

c) Resultado al lanzar un dado.

d) Color del sector que señala la flecha en la ruleta de colores.

e) ¿Lloverá mañana?

f) ¿Cuántos días lloverá la semana que viene?

Espacio muestral

Cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso**.

La experiencia aleatoria “tirar una moneda” consta de dos casos: C y +.

El “número de caras al tirar 3 monedas” tiene 4 casos: 0, 1, 2 y 3.

En el “lanzamiento de un dado normal”, los casos son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

El conjunto de todos los casos de una experiencia aleatoria se llama **espacio muestral**. Se suele designar con la letra *E*.

“Lanzamiento de una moneda” $\rightarrow E = \{C, +\}$

“Número de caras al tirar 3 monedas” $\rightarrow E = \{0, 1, 2, 3\}$

“Lanzamiento de un dado normal” $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Un **suceso** es un subconjunto extraído del espacio muestral.

Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos individuales**.

El propio espacio muestral es el suceso total o **suceso seguro**.

Por ejemplo, al lanzar un dado podemos considerar, entre otros, los siguientes sucesos:

$$\text{PAR} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{IMPAR} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{MENOR QUE 3} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{MAYOR QUE 5} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

Ejercicio resuelto

En la experiencia de la ruleta, decir cuál es el espacio muestral y decir algunos sucesos.



La flecha puede caer en rojo (R), azul (Az), amarillo (Am) o verde (V). Esos son los casos en esta experiencia.

El espacio muestral es: $E = \{R, Az, Am, V\}$

Algunos sucesos:

— Ni ROJO ni AZUL = $\{V, Am\}$

— No AMARILLO = $\{R, Az, V\}$

— Colores de la bandera de España = $\{R, Am\}$

— El suceso seguro es $E = \{R, Az, Am, V\}$.

Piensa y practica

2. En una caja echamos 10 fichas numeradas:



La experiencia consiste en extraer, al azar, una ficha y anotar el número obtenido.

a) ¿Cuáles son los casos?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Escribe los siguientes sucesos:

— “Mayor que 1”

— “Impar”

— “Par”

— Suceso seguro

2 Probabilidad de un suceso

El azar no es tan caprichoso como parece. Los sucesos que dependen del azar (sucesos aleatorios) ocurren con mayor o menor facilidad, es decir, con mayor o menor probabilidad. Y esta probabilidad se puede medir.

La **probabilidad de un suceso aleatorio** es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

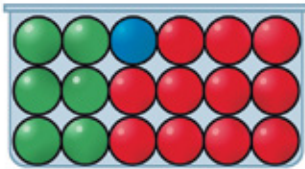
Para designar la probabilidad de un suceso, S , ponemos $P[S]$.

- Si $P[S]$ es **próxima a cero**, el suceso es **poco probable**.
- Si $P[S]$ es **próxima a uno**, el suceso es **muy probable**.

Cuando decimos que la probabilidad de un suceso S es $1/2$, $P[S] = 1/2$, queremos decir que, por término medio, ocurre la mitad de las veces que se realiza la experiencia.

Por ejemplo, si extraemos al azar una bola de la urna del margen, podemos decir...

- ... que la bola sea roja es muy probable.
- ... que la bola sea azul es muy poco probable.
- ... que la bola sea amarilla es imposible (en este caso, la probabilidad es 0).
- ... que la bola sea esférica es seguro (en este caso, la probabilidad es 1).



Ejercicio resuelto

Indicar con IMPOSIBLE, POCO PROBABLE, MUY PROBABLE o SEGURO lo que corresponda en cada uno de los siguientes sucesos:

- Sacar el as de copas de una baraja.*
- Obtener un número mayor que uno al lanzar un dado.*
- Obtener cara o cruz al tirar una moneda.*
- Que te salga un 0 en el dado.*

- Al extraer una carta de una baraja, es POCO PROBABLE sacar el as de copas, ya que hay muchas cartas y solo una de ellas es el as de copas.
- Si lanzas un dado, puedes obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por tanto, es MUY PROBABLE que salga un número mayor que 1; es decir, 2, 3, 4, 5 o 6.
- Si tiras una moneda, sale cara o cruz; por tanto, es SEGURO que sale una de las dos.
- Ya sabemos que en un dado nunca puede salir un 0; por tanto, el suceso es IMPOSIBLE.

Piensa y practica

- En la ruleta de la derecha, hacemos girar la flecha y nos fijamos en qué color señala.



Responde a las probabilidades pedidas con las palabras SEGURO, MUY PROBABLE, POCO PROBABLE o IMPOSIBLE:

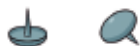
- ¿Cómo de probable es sacar rojo? ¿Y azul?
- ¿Cómo de probable es que no sea amarillo?
- ¿Cómo de probable es sacar verde?

Medir probabilidades

- Las dos caras de la moneda tienen la misma probabilidad de salir.





- Ignoramos cuál es la probabilidad de cada una de estas dos posiciones. Solo podemos averiguarlas experimentando.



Dos formas de medir la probabilidad

Al lanzar una moneda, sabemos que, por ser igual por ambos lados, es igual de probable que ocurra CARA que CRUZ. Por eso, podemos asignar probabilidades sin necesidad de experimentar, y decimos que:



$$P[C] = \frac{1}{2} \qquad P[+] = \frac{1}{2}$$



Sin embargo, si se trata de una chincheta, desconocemos cómo de probable es que caiga así  o así . ¿Cómo evaluar la probabilidad de estas dos posturas? Es imposible hacerlo si no experimentamos. Es decir, solo la experiencia nos puede informar sobre la probabilidad de que la chincheta caiga de un modo u otro.

Hay dos formas de medir la probabilidad de un suceso:

- Si la **experiencia** es **regular**, como en el caso de la moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará asignando la misma probabilidad a todos los casos que puedan darse.
- Si la **experiencia** es **irregular**, para asignar probabilidades es necesario experimentar.

Asignación de probabilidades en experiencias irregulares

- Para asignar probabilidades a las dos posiciones en que puede caer una chincheta,  y , solo podemos proceder mediante experimentación: la lanzamos muchas veces y obtenemos la frecuencia relativa de cada caso.

Supongamos que la hemos lanzado 100 veces obteniendo 21  y 79 . Diremos que:

$$P[\text{heads}] \approx \frac{21}{100} = 0,21 \qquad P[\text{tails}] \approx \frac{79}{100} = 0,79$$

Los resultados solo son aproximados. Si queremos que la estimación sea mejor, debemos aumentar el número de experiencias.

- Probabilidad de “tener un accidente”. Aquí no se puede experimentar, pero sí observar, recoger datos y, así, obtener frecuencias relativas. Es lo que hacen las compañías de seguros.

Por ejemplo, si de un total de 87 540 asegurados ha habido 2 123 que han tenido un accidente este año, la compañía deduce que:

$$P[\text{ACCIDENTE}] \approx \frac{2123}{87540} = 0,024$$

Piensa y practica

- Explica por qué se puede asignar probabilidades a las seis caras de un dado correcto sin necesidad de probarlo.



- Explica por qué es indispensable experimentar para conocer la probabilidad de cada una de las cuatro caras de la taba.



Si lanzamos un dado perfecto, todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Por tanto, esperamos que cada una de ellas salga, por término medio, *una de cada seis veces*. Esto se expresa diciendo que su probabilidad es $\frac{1}{6}$.

Espacio muestral = $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\} \right\}$

Si el dado es perfecto:

$$P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}; P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}; \dots; P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}$$

Cuando una experiencia aleatoria se realiza con un **instrumento regular** (como un dado correcto), si el espacio muestral tiene n casos, la **probabilidad** de cada uno de esos casos es $\frac{1}{n}$.

¿Y si el dado es imperfecto?

Como hemos visto en la página anterior, si el dado es irregular, solo experimentando podremos averiguar algo de las probabilidades de sus caras.

Ejercicio resuelto

Calcular la probabilidad de cada uno de los casos que se pueden dar en las siguientes experiencias aleatorias:

- Extraer una bola de una bolsa que contiene 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y observar su número.
- Elegir a un asegurado de una compañía de seguros de coches.
- Elegir un día cualquiera de un año.

a) El espacio muestral es el siguiente:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser extraídas.

Como son 10, la probabilidad buscada es:

$$P[0] = P[1] = \dots = P[9] = \frac{1}{10} = 0,1$$

b) Si la compañía tiene, por ejemplo, 20 000 asegurados, la probabilidad de escoger a cada uno de ellos es $\frac{1}{20\,000}$.

c) Si el año es normal, la probabilidad de elegir un día concreto es $\frac{1}{365}$.

$$P[27 \text{ de junio}] = \frac{1}{365}$$

Si el año es bisiesto: $P[27 \text{ de junio}] = \frac{1}{366}$

Piensa y practica

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer el 5 DE BASTOS de una baraja española? ¿Y el REY DE COPAS?



- Si elegimos al azar una ficha de dominó, ¿cuál es la probabilidad de que sea el 6 DOBLE? (Recuerda que el dominó tiene 28 fichas).

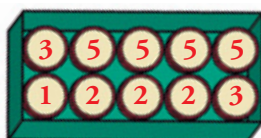
- Giramos la flecha en esta ruleta de colores:



¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el rojo?

Ley de Laplace

En un ejercicio propuesto del primer epígrafe de esta unidad, aparecía una caja con 10 fichas numeradas. Al sacar una de ellas al azar, parece lógico razonar así:



Por término medio...


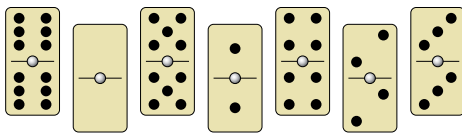
- El **1** saldrá 1 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{1}] = \frac{1}{10}$.
- El **2** saldrá 3 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{2}] = \frac{3}{10}$.
- El **3** saldrá 2 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{3}] = \frac{2}{10}$.
- El **5** saldrá 4 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{5}] = \frac{4}{10}$.

Estos resultados se pueden generalizar así:

En una experiencia aleatoria con un instrumento regular, la probabilidad de un suceso, S , se obtiene así:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Ejercicios resueltos

<p>1. De una baraja de 40 naipes se extrae uno al azar.</p> <p>a) Hallar la probabilidad de sacar REY.</p> <p>b) Hallar la probabilidad de obtener COPAS.</p>	<p>a) En la baraja hay 4 reyes de un total de 40 cartas. Por tanto:</p> $P[\text{REY}] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ <p>b) Como hay 10 copas:</p> $P[\text{COPAS}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
<p>2. Hallar la probabilidad de que la flecha señale cada uno de los colores en la ruleta de la derecha.</p>	 <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div> $P[\text{VERDE}] = \frac{3}{8}$ $P[\text{ROJO}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ </div> <div> $P[\text{AMARILLO}] = \frac{1}{8}$ $P[\text{AZUL}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ </div> </div>
<p>3. De una caja de fichas de dominó, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea "doble"?</p>	<p>En el juego del dominó hay 28 fichas, de las cuales 7 son "dobles". Por tanto:</p> $P[\text{DOBLE}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ 

Piensa y practica

4. Extraemos al azar una bola de esta urna. Calcula la probabilidad de que sea de cada uno de los colores.



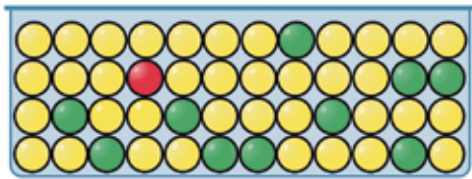
5. Extraemos una carta de una baraja de 40. Halla la probabilidad de que sea:

- a) Un AS. b) Una SOTA. c) Un ORO.
- d) Un número menor que 5.
- e) Una FIGURA (las figuras son SOTA, CABALLO y REY).

Ejercicios y problemas

Muy probable, poco probable

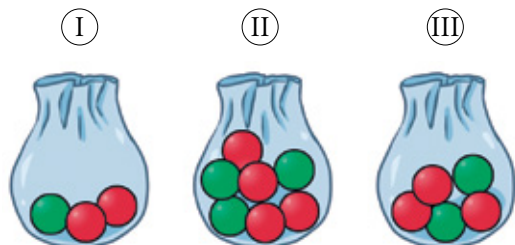
1. Tenemos una urna como esta:



Removemos y extraemos una bola al azar. Copia y asocia con flechas en tu cuaderno:

$P[\text{ROJO}]$	Imposible
$P[\text{VERDE}]$	Muy poco probable
$P[\text{AMARILLO}]$	Poco probable
$P[\text{NEGRO}]$	Muy probable

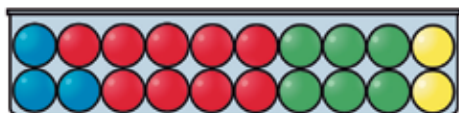
2. ¿En cuál de las siguientes bolsas es más probable sacar bola roja?



3. ¿En cuál de las ruletas es más difícil obtener color azul?



4. Al extraer una bola al azar de esta urna, ordena los colores de más probable a menos probable de obtener:



5. Imagina que extraes una carta de una baraja de 40 naipes. Escribe un suceso que sea IMPOSIBLE; otro que sea POCO PROBABLE; otro, MUY PROBABLE, y uno que sea SEGURO.

Espacio muestral. Sucesos

6. Indica el espacio muestral correspondiente a cada una de estas experiencias aleatorias:

- Lanzar dos monedas y contar el número de cruces.
- Sacar una bola de esta urna y ver qué número se obtiene:



- Sacar una moneda del bolsillo y observar su valor.
- Tirar un dado con forma de tetraedro y ver el número que has obtenido.



¿En cuáles de las experiencias de los apartados anteriores los casos no tienen la misma probabilidad?

7. Extraemos una ficha al azar de la siguiente urna y anotamos su número:




- Describe el espacio muestral. ¿Cuántos casos tiene?
- Describe los siguientes sucesos:

- A = ficha roja
- B = ficha verde
- C = ficha azul
- D = ficha roja con número impar
- E = ficha con número par


8. Una experiencia consiste en lanzar un dado y, después, lanzar una moneda. Los casos son: 1 y C; 1 y +; 2 y C; 2 y +; ...; 6 y C; 6 y +.

- Escribe el espacio muestral (son 12 casos).
- El suceso NÚMERO MAYOR QUE 5 Y CARA solo tiene un caso: 6 y C. Describe el suceso NÚMERO PAR Y CARA enumerando todos sus casos.
- Enumera los casos del suceso CUALQUIER NÚMERO Y CRUZ.

Cálculo de probabilidades en experiencias regulares




9.  ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los colores? Razónalo.




10.  Se extrae una bola al azar de una urna como la siguiente:




Indica la probabilidad de que:

- a) Sea roja.
b) No sea negra.
11.  Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Calcula la probabilidad de:
- a) Que la carta sea BASTOS.
b) Que la carta no sea AS.
c) Que la carta no sea FIGURA.
d) Que la carta sea AS O FIGURA.
12.  Calcula las siguientes probabilidades asociadas al lanzamiento de un dado correcto:
- a) El resultado es múltiplo de 3.
b) El resultado es múltiplo de 2.
c) El resultado es mayor que 1.
d) El resultado es menor que 5.
e) El resultado es menor que 1.
13.  Les doy vueltas, sin mirar, a las manecillas de un reloj. Calcula la probabilidad de que la hora que haya puesto sea:
- a) Entre las 3 y las 4. b) Antes de las 3.
c) Más tarde de las 10. d) Antes de las 6.

14.  Para un examen de Geografía, hay que saber situar sobre un mapa mudo las 17 comunidades autónomas de España. Ricardo solo sabe dónde se encuentran 10 de ellas.




- a) Si en el examen le piden situar una, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de las que sabe?
- b) Supongamos que le piden que sitúe una de las que no sabe y, en vez de no contestar, lo hace a boleo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte?

Cálculo de probabilidades en experiencias irregulares

15.  De las 823 veces que he lanzado la taba que ves en la foto, en 185 ocasiones ha caído de esta forma:



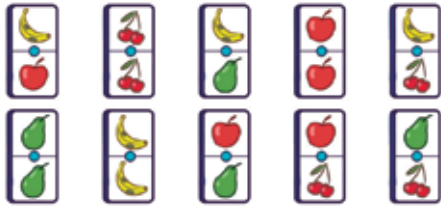
¿Qué probabilidad puede asignarse a que en el próximo lanzamiento la taba vuelva a caer de esta forma?

16.  En una cierta región, el 15% de los habitantes padecen una alergia, y de estos, el 60% tienen alergia al polen. ¿Qué probabilidad podemos asignar a que tomando una persona al azar no tenga alergia al polen?
17.  Lanzamos 1 000 veces una chincheta, obteniendo en 368 ocasiones la punta hacia arriba. ¿Qué probabilidad se puede asignar a que al volver a lanzarla caiga tumbada?
18.  Observando a un jugador de baloncesto, hemos contado 187 canastas y 85 fallos. ¿Qué probabilidad le asignaremos al suceso ACERTARÁ EL PRÓXIMO LANZAMIENTO?



Ejercicios y problemas

19. Un juego parecido al dominó está formado por las siguientes piezas:



Las echamos a una bolsa y sacamos una al azar.

- a) ¿Es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?
 - b) Escribe el espacio muestral.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar PERA/MANZANA?
20. Dos fichas de la actividad anterior pueden encadenarse cuando alguna de sus dos figuras coincide. Ponemos sobre la mesa la ficha PLÁTANO/PERA y las demás quedan en la bolsa. Extraemos otra ficha al azar.
- a) Describe, dando todos sus casos, el suceso LA NUEVA FICHA PUEDE ENCADENARSE CON LA QUE HAY SOBRE LA MESA.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad del suceso anterior?

21. El juego del dominó consta de 28 fichas. Si elegimos una al azar, indica la probabilidad de que:

- a) Tenga un 3.
- b) No sea “doble”.
- c) Sus puntos sumen 7.
- d) Enlace con el 6-4 (¡Atención! Para este caso hemos de escoger una de las otras 27 fichas).

22. En un restaurante hay:

Sopa, puré o ensalada de primero.

Carne, pescado o arroz de segundo.

Para finalizar, café o postre.

- a) ¿Cuántos menús distintos podemos elegir?
- b) Si nos sirven un menú elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea ENSALADA Y CARNE?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el menú lleve ARROZ?

Autoevaluación

1. Indica qué sucesos son aleatorios:
 - a) Que tu equipo gane el siguiente partido.
 - b) Obtener un 3 al lanzar un dado.
 - c) Que no llueva el día que te vas de excursión al campo.
 - d) Que se haga de noche donde vives.
2. Escribe el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias:
 - a) Número de reyes que te tocan si te dan 5 cartas.
 - b) Número de veces que aciertas en el centro al tirar tres dardos a la diana.
 - c) Color de pelo de un compañero de clase elegido al azar.
3. He lanzado un dado defectuoso 1 000 veces y he obtenido 6 en 580 ocasiones. ¿Cuál puedes suponer que es la probabilidad de obtener un 6 en la siguiente tirada?

4. Calcula las siguientes probabilidades:
 - a) Extraer un REY en una baraja de 40 cartas.
 - b) Sacar una COPA en una baraja de 40 naipes.
 - c) Obtener un número MAYOR QUE DOS al lanzar un dado.

5. Calcula la probabilidad de obtener cada uno de los colores que componen la ruleta al girar la flecha.



6. Tiramos dos dados y vemos los números obtenidos (1-1, 1-2, 1-3, ...). Elabora una tabla.
 - a) Escribe el espacio muestral. (Consideramos que 1-2 es distinto de 2-1).
 - b) Calcula la probabilidad de cada caso.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad del suceso EN ALGUNO DE LOS DADOS HA SALIDO UN 5? (El 5-5 también vale).