Adaptación curricular

- Unidad 1
- Unidad 2
- Unidad 3
- Unidad 4
- Unidad 5
- Unidad 6
- Unidad 7
- Unidad 8
- Unidad 9
- Unidad 10
- Unidad 11
- Unidad 12
- Unidad 13
- Unidad 14
- Unidad 15

APRENDER ES CRECER EN CONEXIÓN es un proyecto educativo de Anaya Educación para el primer curso de la ESO.

En la realización de este libro han intervenido:

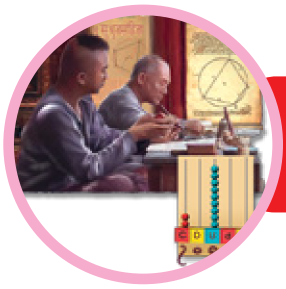
- **Coordinación editorial:** Mercedes García-Prieto
- **Edición:** Carlos Vallejo
- **Diseño:** Dirección de arte: Javier Serrano. Cubierta: Patricia Gómez Serrano. Interiores: Marta Gómez Peso y Paco Martín. Desarrollo gráfico de cubierta: Juan Carlos Quignon
- **Ilustraciones:** Pablo Espada, Carlos Moreno y Jesús Aguado
- **Maquetación:** José Luis Román
- **Gráficos:** José Luis Román
- **Corrección:** Miguel Ángel Alonso
- **Edición gráfica:** Olga Sayans
- **Fotografías:**
  Age Fotostock, Archivo Anaya (Candel, C., Cosano, P., García Pelayo, Á., Hernández Moya, B., Lezama, D., López Archilla, A., Martín, J. A., Padura, S., Ramón Ortega, P.-Fototeca España, R. Jove, V., Ruiz, J.B., Ruiz Pastor, L.), Barcelona Supercomputing Center (www.bsc.es), ESA, NASA, NASA/ESA/R. O'Connel/F. Paresce/E.Young/WFC3 Science Oversight Committee/The Hubble Heritage Team(STScI/AURA), NASA/JPL-Caltech/The Hubble Heritage Team(STScI/AURA), Thinkstock/Getty Images, 123RF.

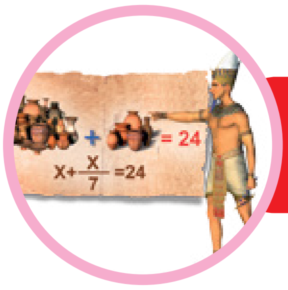
Las normas ortográficas seguidas en este libro son las establecidas por la Real Academia Española en la *Ortografía de la lengua española,* publicada en el año 2010.

Nuestras publicaciones mantienen el rigor en el uso y en la selección de los contenidos, en las imágenes y en el lenguaje, para cumplir con la **no discriminación** por razón de género, cultura u opinión.

IMPORTANTE. Las actividades propuestas en este libro deben ser realizadas en cuadernos u hojas sueltas; **nunca en el propio libro.**

ÍNDICE





X+$\frac{X}{7}$=24
= 24

1 Los números naturales

Todas las civilizaciones han tenido un sistema de numeración. Estos han pasado de unos pueblos a otros y han evolucionado a lo largo del tiempo.

Los sistemas de numeración sirven para escribir números y, así, recordarlos y transmitirlos. Pero deben servir, también, para operar con ellos. Piensa en el sistema romano (que ya conoces) y en cómo se las apañarían para efectuar sumas. Por ejemplo, MCCCXLVI + DCCCXXXIV. ¿Complicado? Pues imagina lo difícil que tendría que ser multiplicar.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Sistemas de numeración

Este hombre primitivo ha escrito el número 47. ¿Sabrías decir el valor de cada símbolo?

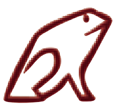
Los números naturales (1, 2, 3, …) surgieron de la necesidad de contar, y su representación evolucionó adaptándose a cada momento cultural e histórico.

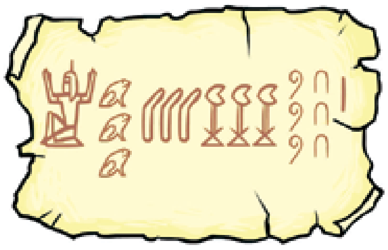
Los hombres prehistóricos ya utilizaban algunas técnicas para contar: comparaban con los dedos de sus manos, hacían muescas en un trozo de madera o arcilla, ensartaban cuentas en una cuerda, etc.

A medida que la sociedad evolucionaba se hizo necesario manejar cantidades grandes y representarlas de una forma práctica. Así, aparecieron en distintas culturas los sistemas de numeración.

> Los símbolos utilizados para representar los conteos, junto con sus normas de uso, forman un **sistema de numeración.**

Por ejemplo, los antiguos egipcios utilizaban los símbolos siguientes:

						
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
palo	asa	cuerda	flor	dedo	rana	hombre



Aquí aparece escrito el número 1 333 331.

La norma para escribir un número era sencilla: se iban añadiendo (sumando) los símbolos necesarios hasta completar la cantidad deseada. Estos símbolos, junto con la norma anterior, forman el sistema de numeración egipcio.

A los sistemas de numeración, como el egipcio, en que se van añadiendo símbolos y sumando su cantidad representada, los llamamos **sistemas aditivos.**

El sistema de numeración romano

Los romanos utilizaban como símbolos las siguientes letras:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Aquí se ve escrito el número 1 778.

Y estas eran sus normas:

NORMAS	EJEMPLOS	
Las letras I, X, C y M se pueden repetir hasta tres veces seguidas.	III → 3 CCC → 300	XX → 20 MM → 2 000
Las letras I, X, o C a la izquierda de otra de mayor valor, le restan a esta su valor.	IV → 4 XL → 40	IX → 9 XC → 90
El valor de un conjunto de letras queda multiplicado por 1 000 al colocar sobre ellas una barra.	$\overline{\text{IV}}$ → 4 000 $\overline{\text{M}}$ → 1 000 000	$\overline{\text{IX}}$CC → 9 200

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Recuerda

Un número se puede descomponer según sus órdenes de unidades y según el valor de posición de cada cifra:

27 473

2 DM → 20 000
7 UM → 7 000
4 C → 400
7 D → + 70
3 U → 3
27 473

El sistema de numeración decimal

El sistema de numeración que utilizamos actualmente es el **decimal.** Consta de diez símbolos o cifras:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Para leer y escribir números, se establecen estas normas:

- Se definen *órdenes de unidades*: unidades, decenas, centenas…
- Diez unidades de un orden hacen una unidad del orden inmediato superior.
- Cada cifra puede ocupar cualquiera de esos órdenes.
- El valor de una cifra depende del lugar que ocupe. Por eso, este sistema es de tipo **posicional.**

Veamos un ejemplo:

UNIDADES DE MILLÓN	CENTENAS DE MILLAR	DECENAS DE MILLAR	UNIDADES DE MILLAR	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
4	7	8	4	3	0	4
↓			↓			↓
4 000 000 U			4 000 U			4 U

Piensa y practica

1. Escribe en el sistema de numeración egipcio los números 19, 65, 34 120 y 2 523 083.

2. En un sistema aditivo se utilizan estos símbolos:

●	▬	▲	■
1	5	10	100

Escribe, basándote en él, los números 18, 382 y 509.

3. Escribe en el sistema de numeración romano estas cantidades:

18 43 98 3 456

4. Escribe en el sistema de numeración decimal el valor de estos números romanos:

CXLIX CCCXXVII $\overline{\text{V}}$CCCXXXI

5. ¿Qué valor tiene la cifra 0 si ocupa el lugar de las centenas? ¿Y si ocupa el lugar de los millones?

6. Si añades un 0 a la derecha de un número, ¿por cuánto multiplica su valor? ¿Y si lo añades a la izquierda?

7. ¿Qué orden de unidad ocupa en un número la cifra 5 si su valor es de 50 000 unidades?

8. Escribe el número que es 300 decenas de millar mayor que 23 456.

9. ¿Qué número natural tiene esta descomposición?:

2 000 000 + 300 000 + 7 000 + 30 + 7

10. Ordena estas matrículas de la más antigua a la más moderna (tienes que tener en cuenta primero las letras y luego los números):

3948 - FBG 3894 - FBG 4389 - GFB

11. Un número tiene cinco cifras que suman 5. Si intercambias las unidades con las unidades de millar, aumenta en 999. ¿Qué número es?

12. ¿Verdadero o falso?

a) En el sistema de numeración egipcio, si cambias el orden de los signos, cambia el valor del número.

b) En el sistema decimal, si cambias de lugar las cifras, cambia el valor del número.

c) Medio millar equivale a 5 centenas.

d) La cifra 6 tiene el mismo valor en el número 3 648 que en el número 3 468.

e) Mil millares hacen un millón.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Aproximación de números naturales

Cuando un número tiene muchas cifras, es difícil de recordar e incómodo para operar. Por eso, suele convenir sustituirlo por otro más manejable de valor aproximado, terminado en ceros.

Por ejemplo:

La forma más frecuente y práctica de realizar aproximaciones es el redondeo.

En la web

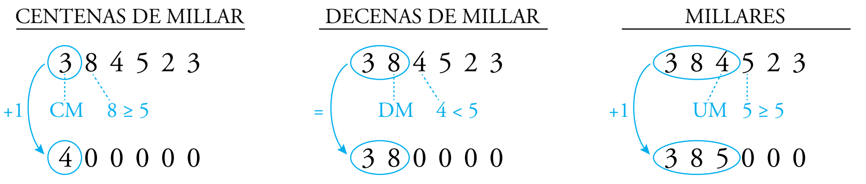
Actividades para practicar la aproximación.

Para **redondear** un número a un determinado orden de unidades:

- Se sustituyen por ceros todas las cifras a la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra sustituida es mayor o igual que cinco, se suma una unidad a la cifra anterior.

Ejercicio resuelto

Aproximar el número 384 523 a las centenas de millar, a las decenas de millar y a los millares.



Piensa y practica

1. Redondea a los millares estos números:

a) 24 963 b) 7 280

c) 40 274 d) 99 399

2. Aproxima a los millones por redondeo.

a) 24 356 000 b) 36 905 000

c) 274 825 048 d) 213 457 000

3. Haz una tabla como esta en tu cuaderno:

	APROXIMACIONES	
NÚMERO	A LAS CENTENAS DE MILLAR	A LAS DECENAS DE MILLAR

Complétala redondeando los siguientes números:

530 298 828 502 359 481 299 352 362

4. A continuación puedes ver varias aproximaciones al precio de un piso en venta:

SE VENDE

138 290 €

Tel.: 23987688

→

100 000 €
138 000 €
138 300 €
140 000 €

a) ¿Cuál es más cercana al precio real?

b) ¿Cuál te parece más adecuada para una información coloquial, si no se recuerda la cantidad exacta?

c) ¿Cuál identificas con un redondeo a las centenas de millar?

5. Un ayuntamiento ha presupuestado 149 637 € para rehabilitar un área deportiva.

¿Qué cifra darías para comunicar este dato en una conversación informal?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Operaciones básicas con números naturales

Aunque ya sabes operar con números naturales, conviene que hagamos un rápido repaso de algunos conceptos y de sus propiedades.

La suma y sus propiedades

Recuerda que **sumar** es unir, juntar, añadir.

AFORO: 25 342 localidades
Localidades ocupadas
Gradas este: 11 576
Gradas oeste: 9 006

Por ejemplo, si vemos este cartel y queremos saber el número de espectadores que hay en el campo de fútbol, deberemos hacer una suma:

$$11\,576 + 9\,006 = 20\,582$$

La suma cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad conmutativa:** La suma no varía al cambiar el orden de los sumandos.

$$a + b = b + a$$

- **Propiedad asociativa:** El resultado de la suma es independiente de la forma en que se agrupen los sumandos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Por ejemplo:

Propiedad conmutativa

$$\underbrace{34 + 16}_{50} = \underbrace{16 + 34}_{50}$$

Propiedad asociactiva

$$\underbrace{\underbrace{(18 + 3)}_{21} + 17}_{38} = \underbrace{18 + \underbrace{(3 + 17)}_{20}}_{38}$$

La resta y sus relaciones con la suma

Recuerda que **restar** es quitar, suprimir, hallar lo que falta o lo que sobra; es decir, calcular la diferencia.

Por ejemplo, para saber cuántas localidades vacías hay en el partido mencionado antes, tenemos que realizar una resta:

$$25\,342 - 20\,582 = 4\,760$$

Observa, además, que 25 342 = 20 582 + 4 760 y que 20 582 = 25 342 – 4 760.

Relaciones entre la suma y la resta: $M - S = D \rightarrow \begin{cases} M = S + D \\ S = M - D \end{cases}$

En la web

Actividades para practicar el cálculo mental con sumas y restas.

Recuerda

25 342 ← Minuendo (M)
– 20 582 ← Sustraendo (S)
4 760 ← Diferencia (D)

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente.

a) 20 + 6
b) 120 + 6
c) 68 + 10
d) 168 + 10
e) 64 + 54
f) 164 + 54
g) 73 + 71
h) 137 + 71
i) 37 + 20
j) 237 + 20
k) 61 + 16
l) 261 + 16
m) 48 + 7
n) 348 + 7
ñ) 98 + 29
o) 298 + 29

2. Calcula mentalmente.

a) 27 – 5
b) 27 + 10
c) 15 – 2
d) 15 – 10
e) 57 – 53
f) 57 – 53 – 3
g) 66 – 56
h) 66 – 56 – 5
i) 34 – 25
j) 34 – 25 – 5
k) 26 – 12
l) 26 – 12 – 7
m) 54 – 31
n) 54 – 31 – 10
ñ) 71 – 38
o) 71 – 38 – 10

3. Calcula.

a) 15 + 8 + 10
b) 15 + 8 + 20
c) 13 – 11 + 7
d) 13 – 11 + 17
e) 59 + 21 + 30
f) 59 + 21 + 40
g) 48 + 12 – 25
h) 48 + 12 – 35
i) 64 – 24 – 12
j) 64 – 24 – 22
k) 150 – 45 – 15
l) 150 – 45 – 5
m) 240 + 60 – 70
n) 240 + 60 – 60
ñ) 315 – 30 – 85
o) 315 – 30 – 75

4. Calcula con lápiz y papel.

a) 254 + 78 + 136
b) 1 480 + 237 + 48
c) 340 + 255 – 429
d) 1 526 – 831 + 63
e) 782 – 346 – 274
f) 1 350 – 1 107 – 58

5. Opera y compara los resultados en cada caso:

a) 13 – 9 + 3
13 – (9 + 3)
b) 13 + 3 – 9
(13 + 3) – 9
c) 15 – 8 + 4
15 – (8 + 4)
d) 15 + 4 – 8
(15 + 4) – 8
e) 18 – 16 + 2
18 – (16 + 2)
f) 18 + 2 – 16
(18 + 2) – 16
g) 11 – 5 – 3
11 – (5 – 3)
h) 11 – 3 – 5
(11 – 3) – 5
i) 23 – (15 + 6)
23 – 15 + 6
j) 23 + 6 – 15
(23 + 6) – 15
k) 35 – 20 – 5
35 – (20 – 5)
l) 35 – 5 – 20
(35 – 5) – 20

6. Jorge compra una camisa de 54 € y unos pantalones de 79 €. En la camisa le rebajan 6 €, y en los pantalones, 15 €.

¿Cuánto gasta?

7. ¿Cuánto pesa el elefante pequeño?

1 588 kg | ? | 845 kg | 1 107 kg

8. Teresa gana 1 670 € al mes. Paga una letra de 384 € y, además, tiene unos gastos de 950 €.

¿Cuánto ahorra cada mes?

9. Para comprar un sofá de 1 458 € y un sillón de 324 €, la familia Antúnez entrega 750 € en efectivo y deja el resto aplazado.

¿A cuánto asciende la deuda contraída?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

La multiplicación y sus propiedades

Recuerda que **multiplicar** es una forma abreviada de realizar una suma repetida de sumandos iguales.

Por ejemplo, si una entrada para el partido de fútbol de la página anterior costaba 35 €, la recaudación por las 20 582 entradas vendidas sería:

$$\underbrace{35 + 35 + 35 + \dots + 35}_{20\,582 \text{ veces}} = 35 \cdot 20\,582 = 720\,370 \text{ €}$$

La multiplicación cumple las siguientes propiedades:

Cálculo mental

16 × 55

8 × 2 × 5 × 11

88 × 10

880

La propiedad asociativa nos permite reagrupar los términos, y la conmutativa, cambiarlos de orden.

- **Propiedad conmutativa:** El producto no varía al cambiar el orden de los factores.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Propiedad asociativa:** El resultado de una multiplicación es independiente de la forma en que se agrupen los factores.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por ejemplo:

Propiedad conmutativa

$15 \cdot 4 = 4 \cdot 15$

60 60

Propiedad asociactiva

$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4)$

$15 \cdot 4$ $3 \cdot 20$

60 60

En la web

Actividades para practicar el cálculo mental con multiplicaciones.

- **Propiedad distributiva:** El producto de un número por una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de los productos del número por cada sumando.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Por ejemplo:

$35 \cdot 7 + 35 \cdot 3 = 35 \cdot (7 + 3)$

245 + 105 $35 \cdot 10$

350 350

El siguiente ejemplo te ayudará a comprender el significado de la propiedad distributiva:

En una peña de amigos, compraron el jueves 7 entradas para el partido, y el viernes, 3 entradas más para los rezagados. ¿Cuál fue el coste de las entradas?

Podemos calcular de dos formas el coste de las entradas:

GASTO DE 7 ENTRADAS + GASTO DE 3 ENTRADAS ↔ GASTO DE (7 + 3) ENTRADAS

$$35 \cdot 7 + 35 \cdot 3 = 35 \cdot 10$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

10. Expresa los productos siguientes como sumas de sumandos repetidos:

a) 4 · 6
b) 10 · 4
c) 32 · 3
d) 28 · 1
e) 150 · 2
f) 1 000 · 3

11. Opera mentalmente.

a) 8 · 7
b) 8 · 7 · 10
c) 36 · 3
d) 36 · 3 · 10
e) 70 · 7
f) 70 · 7 · 10
g) 34 · 4
h) 34 · 4 · 10
i) 60 · 2
j) 60 · 2 · 10
k) 16 · 5
l) 16 · 5 · 10
m) 15 · 3
n) 15 · 3 · 10
ñ) 87 · 8
o) 87 · 8 · 10

12. Copia y completa estas multiplicaciones:

☐ 5
× 2 ☐
☐ ☐ ☐
9 0
1 2 6 0

1 ☐ 8
× ☐ 2
☐ 9 ☐
☐ 4 ☐
1 ☐ 7 ☐

9 ☐ 8
× ☐ ☐
2 8 7 4
☐ ☐ ☐ ☐
6 9 9 3 4

☐ ☐ ☐ ☐
× 4 5
7 8 6 5
☐ ☐ ☐ ☐
☐ ☐ ☐ ☐ ☐

13. Multiplica mentalmente por 9 y por 11 como se hace en los ejemplos.

- **23 · 9 = 23 · 10 – 23 = 230 – 23 = 207**
- **23 · 11 = 23 · 10 + 23 = 230 + 23 = 253**

a) 12 · 9
b) 12 · 11
c) 15 · 9
d) 15 · 11
e) 18 · 9
f) 18 · 11
g) 25 · 9
h) 25 · 11
i) 27 · 9
j) 27 · 11
k) 33 · 9
l) 33 · 11

14. Calcula y recuerda que para multiplicar por 10, 100, 1000, … se añaden uno, dos, tres, … ceros.

a) 19 · 10
b) 12 · 100
c) 15 · 1 000
d) 35 · 10
e) 41 · 100
f) 57 · 1 000
g) 140 · 10
h) 230 · 100
i) 460 · 1 000

15. Copia, completa y comprueba que los resultados coinciden.

15 · (6 – 2)
15 · ☐
☐

15 · 6 – 15 · 2
☐ – ☐
☐

16. Resuelve mentalmente.

a) En un bidón de agua caben 5 litros. ¿Cuántos litros hay en 20 bidones?

b) Un kilo de almendras cuesta 12 €. ¿Cuánto cuesta una bolsa de 5 kilos?

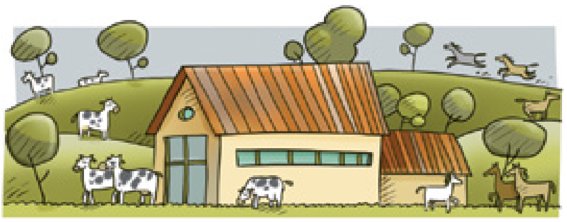
c) Una caja de refrescos contiene 24 botellas. ¿Cuántas botellas hay en 10 cajas?

d) ¿Cuánto cuesta cambiar las cubiertas de las cuatro ruedas de un coche a razón de 150 € cada una?

17. Un barco pesquero captura 240 kilos de merluza que se vende a 11 € el kilo. ¿Cuál es el valor total de la captura?

18. Un edificio tiene 27 plantas. En cada planta hay 12 viviendas, y en cada vivienda, 7 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en el edificio?

19. En una granja hay 38 vacas y 15 caballos. ¿Cuántas patas suman en total?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

La división

Recuerda dos de las situaciones que resuelve la división y que aparecen frecuentemente en los problemas aritméticos:

- *El riego de un parque supone un gasto diario de 375 metros cúbicos de agua. ¿Para cuántos días hay reservas en un depósito con 5 625 metros cúbicos?*

$$\begin{array}{r|l} 5\,6\,2\,5 & \underline{375} \\ 1\,8\,7\,5 & 15 \\ 0\,0\,0 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad 5\,675 : 375 = 15 \text{ días}$$

Como no sobra nada de agua, decimos que la división es exacta.

Pero si en el depósito hubiera 5 700 metros cúbicos, tendría reservas, igualmente, para 15 días, pero sobraría algo de agua.

$$\begin{array}{r|l} 5\,7\,0\,0 & \underline{375} \\ 1\,9\,5\,0 & 15 \\ 0\,7\,5 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad 5\,700 = 375 \cdot 15 + 75$$

Decimos que esta división es entera.

Una división puede ser exacta o entera dependiendo del valor del resto.

- **División exacta** (el resto es cero).

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ 0 & c \end{array} \quad \longrightarrow$$ El dividendo es igual al divisor por el cociente.

$$D = d \cdot c$$

- **División entera** (el resto es distinto de cero).

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ r & c \end{array} \quad \longrightarrow$$ El dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

$$D = d \cdot c + r$$

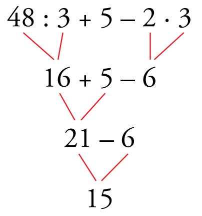
En la web

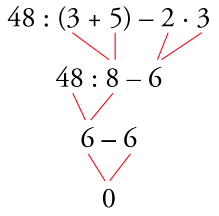
- Actividades para practicar el cálculo mental con divisiones.
- Actividades para practicar las divisiones.

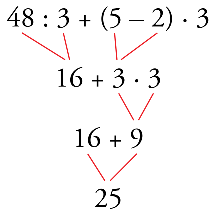
Orden en que han de hacerse las operaciones

Al resolver expresiones con operaciones combinadas, debes tener en cuenta las normas del lenguaje matemático. Estas normas aseguran que cada expresión tenga un significado y una solución únicos.

Observa el orden de actuación en las siguientes expresiones. Los resultados son diferentes a pesar de estar formadas por los mismos números y operaciones.







En las expresiones con operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

20. Divide mentalmente:

a) 46 : 46 b) 62 : 31
c) 280 : 40 d) 640 : 80
e) 360 : 40 f) 476 : 68
g) 168 : 56 h) 138 : 69

21. Averigua el cociente y el resto en cada división:

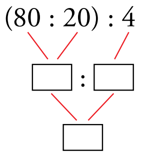
a) 96 : 13 b) 713 : 31
c) 5 309 : 7 d) 7 029 : 26
e) 49 896 : 162 f) 80 391 : 629

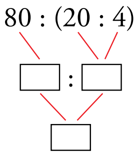
22. Calcula mentalmente, teniendo en cuenta que dividir entre 5 es igual que dividir entre 10 y, después, multiplicar por 2.

$$\begin{tikzcd} 90 \arrow[rr, ":5"] \arrow[dr, ":10"'] & & 18 \\ & 9 \arrow[ur, "\cdot 2"'] & \end{tikzcd}$$

a) 60 : 5 b) 80 : 5 c) 120 : 5
d) 140 : 5 e) 170 : 5 f) 200 : 5
g) 210 : 5 h) 340 : 5 i) 420 : 5

23. Completa los ejemplos y, después, calcula.





a) (50 : 10) : 5 b) 50 : (10 : 5)
c) (36 : 6) : 2 d) 36 : (6 : 2)
e) (30 : 5) · 2 f) 30 : (5 · 2)
g) (36 : 6) · 3 h) 36 : (6 · 3)

24. Resuelve mentalmente.

a) ¿Cuántas docenas salen de una bandeja de 60 pasteles?

b) Un grupo de 120 excursionistas se reparte en tres autobuses. ¿Cuántos suben a cada autobús?

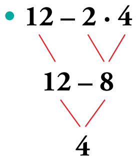
c) ¿Cuántas horas son 240 minutos?

d) Cincuenta caramelos pesan 450 gramos. ¿Cuánto pesa cada caramelo?

25. Un camión transporta 14 caballos que suponen una carga de 4 830 kilos. ¿Cuánto pesa, por término medio, cada caballo?

26. Cinco amigos ganan un premio de 13 285 € en las quinielas. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

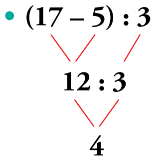
27. Calcula como en el ejemplo.



12 – 2 · 4 = 12 – 8 = 4

a) 8 + 5 · 2 b) 13 – 4 · 3
c) 5 + 6 : 3 d) 15 – 10 : 5
e) 4 · 2 + 7 f) 4 · 6 – 13
g) 15 : 3 + 10 h) 5 · 6 – 18

28. Opera como en el ejemplo.



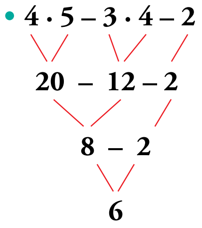
(17 – 5) : 3 = 12 : 3 = 4

a) (7 + 2) : 3 b) (8 – 5) · 2
c) (8 + 2) · 4 d) (13 – 5) : 4
e) 5 · (7 + 5) f) 3 · (15 – 10)
g) 36 : (2 + 7) h) 15 : (18 – 13)

29. Calcula mentalmente y compara los resultados.

a) 2 + 3 · 4 (2 + 3) · 4
b) 6 – 2 · 3 (6 – 2) · 3
c) 15 – 4 · 3 (15 – 4) · 3
d) 5 · 2 + 4 5 · (2 + 4)
e) 2 · 15 – 10 2 · (15 – 10)

30. Resuelve siguiendo los pasos del ejemplo.



4 · 5 – 3 · 4 – 2 =
= 20 – 12 – 2 =
= 8 – 2 = 6

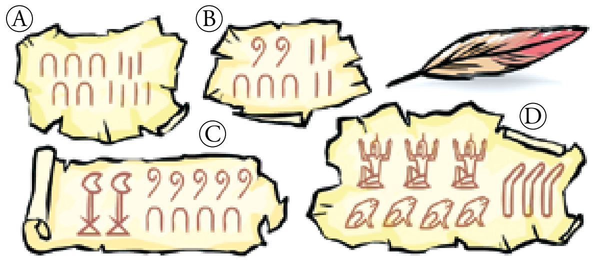
a) 4 · 6 + 3 · 6 – 25 b) 3 · 5 – 12 + 3 · 6
c) 6 · 3 – 4 – 7 d) 28 – 4 · 5 + 3
e) 6 · 5 – 10 + 8 : 4 f) 19 + 10 : 2 – 8 · 3
g) 15 : 3 + 4 · 2 + 3 · 4 h) 4 · 7 – 4 · 2 – 3 · 5

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Sistemas de numeración

1. Traduce al sistema decimal estos números del antiguo Egipto:



2. Traduce, al sistema decimal, estos números romanos:

a) XIV b) LXXIII c) LXIX
d) CCXVII e) DCXC f) MCMLVI

3. Expresa en números romanos.

a) 87 b) 425 c) 2 600 d) 54 528

Utilidades de los números

4. Esta es la matrícula de cierto coche: **9900-JMA**

a) ¿Cuál es la matrícula del coche que se matriculó inmediatamente después? ¿Y la del anterior?

b) ¿Cuántos coches se matricularon aún con las mismas letras?

c) Otro coche tiene esta matrícula: **0273-JMC**

¿Cuál de los dos es más antiguo?

¿Cuántos coches se matricularon entre ambos?

5. Estos son los números de varias habitaciones en un hotel de playa:

401 235 724 231

a) Una de ellas está al final del pasillo. ¿Cuál es?

b) Otra está en la última planta. ¿Qué número tiene?

c) ¿Cuáles de ellas están a la misma altura?

6. Lees, en un anuncio, que una vivienda se vende por 293 528 €. Unos días después lo comentas con un amigo, pero no te acuerdas exactamente del precio. ¿Cuál de las siguientes expresiones elegirías para transmitir la información? Explica por qué.

— Cuesta casi trescientos mil euros.
— Cuesta doscientos y pico mil.
— Cuesta doscientos noventa mil.

Operaciones

Sumas y restas

7. Calcula.

a) 6 070 + 893 + 527 b) 651 + 283 – 459
c) 831 – 392 – 76 d) 1 648 – 725 – 263

8. Calcula mentalmente.

a) 5 + 7 – 3 – 4 b) 18 – 4 – 5 – 6
c) 10 – 6 + 3 – 7 d) 8 + 5 – 4 – 3 – 5
e) 12 + 13 + 8 – 23 f) 40 – 18 – 12 – 6

Multiplicación y división

9. Multiplica.

a) 16 · 10 b) 128 · 10 c) 60 · 10
d) 17 · 100 e) 85 · 100 f) 120 · 100
g) 22 · 1 000 h) 134 · 1 000 i) 140 · 1 000

10. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) 2 647 : 8 b) 1 345 : 29
c) 9 045 : 45 d) 7 482 : 174
e) 7 971 : 2 657 f) 27 178 : 254

Operaciones combinadas

11. Opera.

a) 2 · (4 + 6) b) 2 · 4 + 6
c) 8 : (7 – 5) d) 5 · 7 – 5
e) (5 + 6) · 4 f) 5 + 6 : 3
g) (19 – 7) : 2 h) 18 – 7 · 2

Interpreta, describe, exprésate

12. ¿Cuál o cuáles de las expresiones aritméticas llevan a la solución de este problema?:

En el supermercado se han vendido esta mañana 24 kilos de manzanas a 2 €/kg, 12 melones a 4 euros la pieza, y 13 piñas a 2 euros cada una. ¿Cuánto se ha ingresado en caja por la venta de esas frutas?

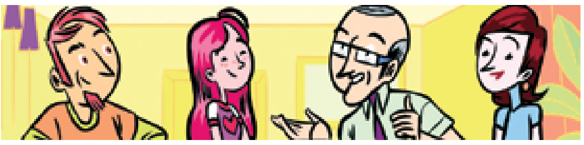
a) 24 · 12 + 4 · 13 + 2
b) 24 · 2 + 12 · 4 + 13 · 2
c) (24 + 13) · 2 + 12 · 4
d) (24 + 13 + 2) · (2 + 4)

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

13. Un camión de reparto transporta 15 cajas de refrescos de naranja y 12 cajas de limón. ¿Cuántas botellas lleva en total si cada caja contiene 24 unidades?

14. En la familia Smith, el padre, Jonathan, cobra 1 940 dólares al mes. Si gana 720 dólares más que Jon, el hijo mayor, 880 más que Cathy, la hija que sigue, más joven, y 280 menos que Catherine, su mujer, ¿cuáles son los ingresos mensuales de la familia?

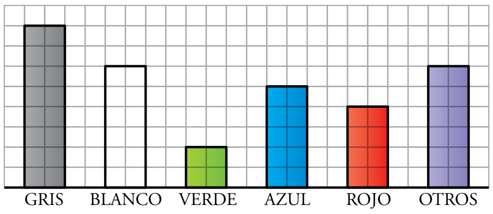


15. Un autobús con 54 turistas a bordo sufre una avería camino del aeropuerto. Como no hay tiempo, pues el avión no espera, el responsable del grupo decide acomodar a los viajeros en taxis de cuatro plazas. ¿Cuántos taxis necesitan?

16. Un mayorista de alimentación compra 150 sacos de patatas de 30 kg por 2 000 €. Después, al seleccionar la mercancía, desecha 300 kg y envasa el resto en bolsas de 5 kg, que vende a 4 € la bolsa. ¿Qué ganancia obtiene?

17. Cándido tiene una granja de patos y gansos. Hoy ha vendido 21 de sus animales por 350 euros. Entre los animales había el doble de patos que de gansos, y un ganso vale el triple que un pato. ¿Qué precio tiene un pato? ¿Y un ganso?

18. La gráfica informa de la distribución, por colores, de los 30 690 coches fabricados en un trimestre.



¿Cuántos coches rojos se han fabricado en ese periodo?

Autoevaluación

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

SISTEMAS DE NUMERACIÓN		
EGIPCIO	ROMANO	DECIMAL
		
	MMCDXLVIII	
		4 528

Di si cada uno de los sistemas es aditivo o posicional. ¿Cuál es la diferencia?

2. Observa estas cantidades:

- La extensión de Brasil es de 8 514 877 km^2.
- El caudal de este río es de 209 487 m^3/s.
- Luisa ha recibido un premio de seiscientos ochenta y cinco mil cuatrocientos veintisiete euros.
- La población de Australia es de veintidós millones seiscientos ochenta y siete mil cuatrocientos veintisiete habitantes.

a) Expresa con letras las cantidades que están dadas con cifras, y viceversa.

b) Redondea a las decenas de millar.

3. Calcula.

a) 1 528 + 35 + 482
b) 4 321 + 189 – 1 387
c) 324 · 28
d) 3 611 : 157

4. Copia en tu cuaderno y calcula los términos que faltan.

a) 154 · ☐ = 462
b) ☐ : 27 = 98
c) 30 275 : ☐ = 35
d) 1 508 = ☐ · 125 + 8

5. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 12 + 3 · 5 – 2
b) 7 · 3 – 4 · 2 + 2
c) 19 – 5 · (10 – 7) + 4 · 7
d) 10 · [7 · 5 – (4 + 6 · 3)]

6. Un hortelano tiene dos campos con 165 y 213 manzanos, respectivamente. Espera cosechar, por término medio, 35 kg de manzanas por árbol. Al recoger la cosecha, la empaquetará en cajas de 10 kg y la venderá a un almacén que le paga a 3 € la caja.

¿Qué cantidad espera ingresar por la venta de manzanas?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2

Potencias y raíces

Las matemáticas siempre fueron una herramienta para resolver problemas cotidianos. ¿Cuánto mide este terreno? ¿Cómo hemos de repartirnos la cosecha? ¿Cómo utilizar las estrellas para orientarnos?

Hasta el siglo VI a.C. no aparecen los primeros matemáticos teóricos, estudiosos interesados por la investigación y el desarrollo de la ciencia, independientemente de su utilidad práctica.

El primer gran teórico de las matemáticas fue **Pitágoras.** Este griego, gran viajero, acabó asentándose en el sur de Italia, donde fundó una secta místico-científica que rendía culto a la astronomía.

Tres siglos después aparece en escena **Arquímedes,** nacido en la colonia griega de Siracusa, en Sicilia (actual Italia). Además de gran matemático, fue un extraordinario calculista. Y gracias a esto, ideó un sistema para describir números enormes. Estaba basado en la potencias de base 10, que estudiarás en esta unidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Potencias

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

En las potencias, el factor repetido se llama **base,** y el número de veces que se repite, **exponente.**

$$\underset{\text{BASE}}{a}^{\,b\;\leftarrow\;\text{EXPONENTE}} \longrightarrow \text{Se lee: } a \text{ elevado a } b.$$

Ejemplos

- *Expresar cada producto en forma de potencia:*
  a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \rightarrow$ Tres elevado a cuatro o tres elevado a la cuarta.
  b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \rightarrow$ Dos elevado a cinco o dos elevado a la quinta.
- *Calcular estas potencias.*
  a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
  b) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

Dos potencias especiales: el cuadrado y el cubo

Elevar un número a la potencia de exponente 2 es **elevar al cuadrado.**

Por ejemplo: $7^2 = 7 \cdot 7 = 49 \rightarrow$ El cuadrado de 7 es 49.

Elevar un número a la potencia de exponente 3 es **elevar al cubo.**

Por ejemplo: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 \rightarrow$ El cubo de 7 es 343.

Las potencias en la calculadora

Las potencias, excepto en los casos más sencillos, arrojan como resultados números grandes.

Por ejemplo:

$$9^6 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = \ldots = 531\,441$$

Estos cálculos resultan rutinarios y molestos, por lo que suelen hacerse con una calculadora.

- En las calculadoras sencillas, utilizaremos las teclas $\boxed{\times}$ e $\boxed{=}$.

$$9^6 \longrightarrow 9 \;\; \boxed{\times} \;\; \boxed{\times} \;\; \underset{9^2}{\underset{\downarrow}{\boxed{=}}} \;\; \underset{9^3}{\underset{\downarrow}{\boxed{=}}} \;\; \underset{9^4}{\underset{\downarrow}{\boxed{=}}} \;\; \underset{9^5}{\underset{\downarrow}{\boxed{=}}} \;\; \underset{9^6}{\underset{\downarrow}{\boxed{=}}} \longrightarrow \boxed{531441}$$

- En una calculadora científica, utilizaremos la tecla $\boxed{x^y}$.

$$9^6 \longrightarrow 9 \; \boxed{x^y} \; 6 \; \boxed{=} \longrightarrow \boxed{531441}$$

Nota: Cuando el resultado es muy grande y no cabe en la pantalla, las calculadoras sencillas dan error mientras que las científicas lo dan en formatos como este:

$$45^8 \longrightarrow \boxed{1.681512539 \times 10^{13}}$$

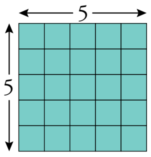
que significa que el número decimal de la pantalla hay que multiplicarlo 13 veces por 10 (esto es, desplazar la coma decimal 13 lugares a la derecha).

En la web

Concepto de potencia.

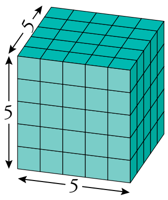
Números y geometría

EL CUADRADO



El cuadrado de 5 es
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
(25 cuadraditos).

EL CUBO



El cubo de 5 es
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
(125 cubitos).

¿Cómo representarías geométricamente los números 3^2 y 3^3? ¿Serías capaz de idear una forma de representar también 3^4?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

En la web Practica el concepto de potencia y algunos cálculos sencillos.

1. Expresa con una potencia.

a) $6 \cdot 6$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6$

c) $7 \cdot 7$ d) $5 \cdot 5$

e) $10 \cdot 10 \cdot 10$ f) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

g) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ h) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

2. Lee estas potencias y exprésalas como producto:

a) 3^4 b) 2^7 c) 9^3

d) 15^2 e) 10^6 f) 20^4

3. Completa la tabla en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE
2^6		
	5	3
a^4		
	m	5

4. Calcula mentalmente y ordena de mayor a menor.

a) 2^3 b) 5^2 c) 4^3

d) 20^3 e) 10^4 f) 11^2

5. Calcula con lápiz y papel.

a) 2^8 b) 3^5 c) 12^3

d) 9^4 e) 15^2 f) 85^2

g) 12^3 h) 30^4 i) 100^3

6. Obtén estas potencias con ayuda de la calculadora:

a) 11^5 b) 62^3 c) 37^4

d) 136^3 e) 101^4 f) 140^4

7. Escribe el valor de cada exponente:

a) $2^x = 64$ b) $3^y = 81$

c) $6^z = 36$ d) $8^m = 512$

e) $10^n = 10\,000$ f) $30^t = 810\,000$

8. Calcula el valor de la base, a, en cada caso:

a) $a^4 = 16$ b) $a^2 = 25$ c) $a^3 = 64$

d) $a^4 = 2\,401$ e) $a^3 = 1\,000$ f) $a^{10} = 1\,024$

9. Escribe los cuadrados de los veinte primeros números naturales.

1^2	2^2	3^2	…	20^2
↓	↓	↓	↓	↓
1	4	9	…	400

10. Calcula expresando el proceso paso a paso.

a) $8^2 + 8$ b) $3^3 - 3^2$

c) $5^3 - 5^2 + 5$ d) $(9^2 - 7^2) + 4^2$

e) $(26 - 24)^5 - 2^4$ f) $(8^2 - 7^2)^2 - 2 \cdot 10^2 - 25$

11. ¿Verdadero o falso?

a) Elevar un número al cubo es igual que multiplicarlo por sí mismo tres veces.

b) Elevar a la cuarta es como multiplicar por cuatro.

c) El cuadrado de 10 es 20.

d) El cubo de 10 es 1 000.

e) Trece a la quinta es igual que cinco elevado a trece.

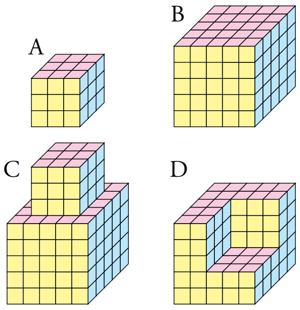
12. Álvaro dibuja tres cuadrados, uno de 5 cm de lado, otro de 12 cm de lado y el tercero de 13 cm de lado. Después colorea de rojo los dos primeros y de verde el último. ¿Qué superficie es mayor, la verde o la roja?

13. Recorta en papel cuadriculado dos cuadrados, uno de diez cuadrados de lado y otro de cinco.

¿Hay en el primero el doble de cuadrados que en el segundo? Explica tu respuesta.

14. Estos edificios tienen el mismo número de ventanas en todas sus caras. Expresa con una potencia de base cinco, y calcula, cuántas hay en total.

15. Expresa con potencias el número de cubos unitarios que hay en cada construcción *poli-cubo:*



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Potencias de base 10. Aplicaciones

Reflexiona

¿Qué es más cómodo de escribir y de interpretar?

1 000 000 000 000

↕

10^{12}

Ya sabes que para multiplicar por 10 basta añadir un cero. Así:

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

$10^5 = 100\,000$

$10^9 = 1\underbrace{000\,000\,000}_{9 \text{ ceros}}$

Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

Expresión abreviada de números grandes

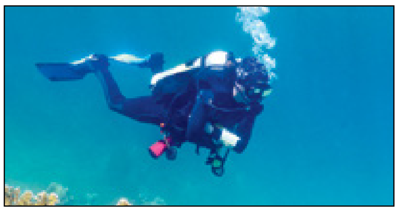
Los números terminados en ceros pueden expresarse como producto de un número por una potencia de base 10.

Por ejemplo: $400\,000 = 4 \cdot 100\,000 = 4 \cdot 10^5$

Este recurso facilita la expresión y la comprensión de números muy grandes.

Por ejemplo:

En un gramo de oxígeno hay...
37 638 383 060 000 000 000 000 átomos.



$\underbrace{37\,638\,383\,060\,000\,000\,000\,000}_{21 \text{ cifras}}$

Ejemplo

Un año luz: 9 460 800 000 000 km. Observa las transformaciones que hacemos para que esta cantidad sea más fácil de leer, de escribir y de recordar:

- Redondeamos, dejando dos cifras significativas → 9 500 000 000 000
- Descomponemos en producto → $95 \cdot 100\,000\,000\,000$
- Expresamos el segundo factor como una potencia de base 10 → $95 \cdot 10^{11}$

Un año luz equivale a $95 \cdot 10^{11}$ km.

Piensa y practica

1. Escribe como potencias de base 10.

a) Un millar.
b) Un millón.
c) Mil millones.
d) Un billón.

2. Expresa con todas sus cifras.

a) $4 \cdot 10^5$
b) $15 \cdot 10^9$
c) $86 \cdot 10^{14}$
d) $12 \cdot 10^3$
e) $10 \cdot 10^6$
f) $894 \cdot 10^{10}$

3. Escribe el valor de x en cada caso:

a) $2\,936\,428 \approx 29 \cdot 10^x$
b) $3\,601\,294\,835 \approx 36 \cdot 10^x$
c) $19\,570\,000\,000\,000 \approx 20 \cdot 10^x$

4. Escribe en notación abreviada los datos que siguen:

a) El número de moléculas elementales en un litro de agua es 334 326 000 000 000 000 000 000.

b) Las estrellas Alfa Centauri están a unos cuarenta billones de kilómetros del Sol.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Raíz cuadrada

Calcular la raíz cuadrada es hacer la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

Ejemplos

- $4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ La raíz cuadrada de 16 es 4.
- $15^2 = 225 \rightarrow \sqrt{225} = 15 \rightarrow$ La raíz cuadrada de 225 es 15.

$$\sqrt{\underset{\text{RADICANDO}}{a}} = \overset{\text{RAÍZ}}{b} \longrightarrow$$ Se lee: la raíz cuadrada de a es igual a b.

No lo olvides

Te conviene memorizar los primeros cuadrados perfectos.

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$
$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = \ldots$
$18^2 = \ldots$

Raíces exactas y raíces enteras

- Los cuadrados de los números naturales se llaman cuadrados perfectos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc} 1^2 & - & 2^2 & - & 3^2 & - & 4^2 & - & 5^2 & - & \ldots & - & 8^2 & - & \ldots & - & 11^2 & - & \ldots & - & 20^2 & - & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{9} & & \mathbf{16} & & \mathbf{25} & & & & \mathbf{64} & & & & \mathbf{121} & & & & \mathbf{400} & & \end{array}$$

La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es una **raíz exacta.**

Por ejemplo, son raíces exactas las siguientes:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{121} = 11 \qquad \sqrt{400} = 20$$

- Sin embargo, para la mayoría de los números, la raíz no coincide con una cantidad exacta de unidades enteras.

Busquemos, por ejemplo, la raíz de 40:

$$\left.\begin{array}{l} 6^2 = 36 < 40 \\ 7^2 = 49 > 40 \end{array}\right\} \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow$$ La raíz cuadrada de 40 es un número comprendido entre 6 y 7.

Al número natural que más se aproxima, por debajo, a la raíz, lo llamamos **raíz entera.**

$$\sqrt{40} \approx 6 \rightarrow$$ La raíz entera de 40 es 6.

Ejercicios resueltos

1. ***Calcular mentalmente $\sqrt{900}$.***

$x^2 = 900 \rightarrow 30^2 = 900 \rightarrow \sqrt{900} = 30 \rightarrow$ Raíz exacta

2. ***Teniendo en cuenta los datos del cuadro, calcular $\sqrt{1440}$, $\sqrt{1444}$ y $\sqrt{1580}$.***

$\sqrt{1440} \approx 37 \rightarrow$ Raíz entera

$\sqrt{1444} = 38 \rightarrow$ Raíz exacta

$\sqrt{1580} \approx 39 \rightarrow$ Raíz entera

$37^2 = 1369$
$38^2 = 1444$
$39^2 = 1521$
$40^2 = 1600$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Copia y completa, como en el ejemplo.

- **$\sqrt{25} = 5$ → La raíz de 25 es igual a 5.**

a) $\sqrt{49} = 7$ → …

b) $\sqrt{64} = …$ → …

c) $\sqrt{81} = …$ → …

d) $\sqrt{121} = …$ → …

2. Calcula mentalmente.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{36}$

d) $\sqrt{400}$ e) $\sqrt{900}$ f) $\sqrt{3\,600}$

g) $\sqrt{6\,400}$ h) $\sqrt{8\,100}$ i) $\sqrt{10\,000}$

3. Calcula la raíz entera en cada caso:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{24}$

d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{39}$ f) $\sqrt{50}$

g) $\sqrt{68}$ h) $\sqrt{92}$ i) $\sqrt{105}$

4. Escribe en tu cuaderno los cuadrados perfectos comprendidos entre 200 y 900.

15^2	16^2	17^2	18^2	…	30^2
$\boxed{225}$	$\boxed{256}$	$\boxed{289}$	$\boxed{324}$	…	$\boxed{900}$

5. Calcula, teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior.

a) $\sqrt{289}$ b) $\sqrt{361}$ c) $\sqrt{484}$

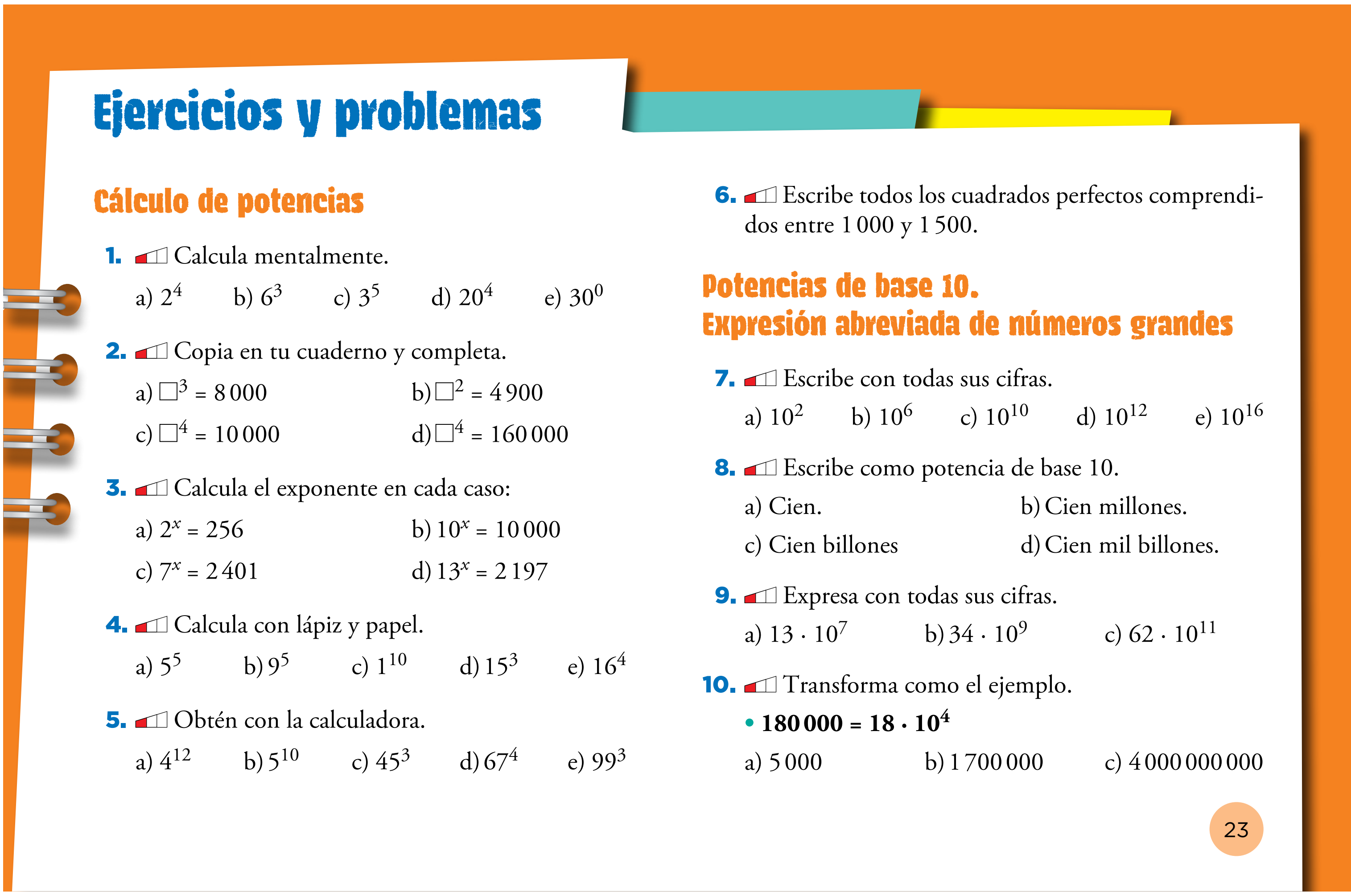
d) $\sqrt{576}$ e) $\sqrt{676}$ f) $\sqrt{841}$

6. Observa el cuadro y calcula indicando si la raíz es exacta o entera.

$50^2 = 2\,500$	$51^2 = 2\,601$	$52^2 = 2\,704$
$53^2 = 2\,809$	$54^2 = 2\,916$	$55^2 = 3\,025$

a) $\sqrt{2\,550}$ b) $\sqrt{2\,601}$ c) $\sqrt{2\,725}$

d) $\sqrt{2\,815}$ e) $\sqrt{2\,916}$ f) $\sqrt{2\,929}$



Ejercicios y problemas

Cálculo de potencias

1. Calcula mentalmente.

a) 2^4 b) 6^3 c) 3^5 d) 20^4 e) 30^0

2. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $\square^3 = 8\,000$ b) $\square^2 = 4\,900$

c) $\square^4 = 10\,000$ d) $\square^4 = 160\,000$

3. Calcula el exponente en cada caso:

a) $2^x = 256$ b) $10^x = 10\,000$

c) $7^x = 2\,401$ d) $13^x = 2\,197$

4. Calcula con lápiz y papel.

a) 5^5 b) 9^5 c) 1^{10} d) 15^3 e) 16^4

5. Obtén con la calculadora.

a) 4^{12} b) 5^{10} c) 45^3 d) 67^4 e) 99^3

6. Escribe todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 1 000 y 1 500.

Potencias de base 10. Expresión abreviada de números grandes

7. Escribe con todas sus cifras.

a) 10^2 b) 10^6 c) 10^{10} d) 10^{12} e) 10^{16}

8. Escribe como potencia de base 10.

a) Cien. b) Cien millones.

c) Cien billones d) Cien mil billones.

9. Expresa con todas sus cifras.

a) $13 \cdot 10^7$ b) $34 \cdot 10^9$ c) $62 \cdot 10^{11}$

10. Transforma como el ejemplo.

- **$180\,000 = 18 \cdot 10^4$**

a) 5 000 b) 1 700 000 c) 4 000 000 000

23

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Raíz cuadrada

11. De estos números, copia en tu cuaderno los que sean cuadrados perfectos y calcula su raíz cuadrada:

1 000	1 225	1 600	1 724	1 601	2 464
3 364	3 540	3 773	3 844	4 000	5 625

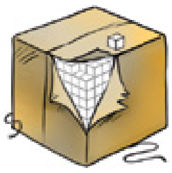
12. Calcula la raíz entera de los números que no son cuadrados perfectos de la actividad anterior.

13. Un hortelano planta lechugas en una parcela de su huerta. Las distribuye en 25 surcos y en cada surco pone 25 lechugas. ¿Cuántas plantas ha colocado?

14. Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

15. Para cubrir el suelo de una habitación cuadrangular, se han colocado 22 filas de 22 baldosas cada una. ¿Cuántas baldosas se han utilizado?

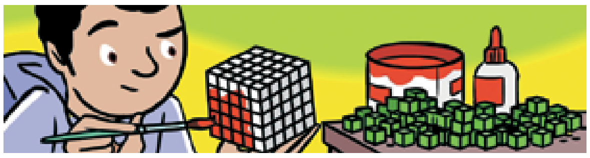
16. Marta ha construido un cubo grande, de 10 centímetros de arista juntando cubitos pequeños de madera, de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos ha empleado?



17. El número de glóbulos rojos que un ser humano tiene en la sangre es veinticinco mil millones (25 000 000 000). Expresa esa cantidad en forma abreviada.

18. Una finca cuadrada tiene 900 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?

19. Observa el cubo de la ilustración formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos unitarios.



a) Supón que lo pintamos de rojo. ¿Cuántos cubitos unitarios habrían quedado parcialmente pintados?

b) Supón que lo queremos hacer mas grande, recubriéndolo completamente con una capa de cubitos verdes. ¿Cuántos cubitos verdes necesitaríamos?

Autoevaluación

1. Expresa en forma de potencia

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $10 \cdot 10 \cdot 10$

c) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ d) $m \cdot m$

2. Calcula.

a) 2^6 b) 5^3 c) 7^2 c) 10^6

3. Copia y completa en tu cuaderno.

a) $2^{\square} = 8$ b) $\square^2 = 81$

4. Calcula:

a) 10^3 b) 10^7

5. Escribe en la notación abreviada el número 45 000 000.

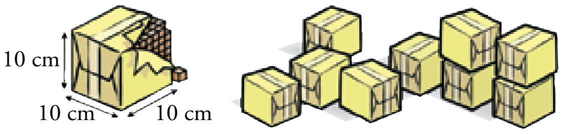
6. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $\sqrt{36} = \square$ b) $\sqrt{400} = \square$ c) $\sqrt{10\,000} = \square$

d) $\sqrt{\square} = 3$ e) $\sqrt{\square} = 8$ f) $\sqrt{\square} = 30$

7. Calcula con lápiz y papel la raíz cuadrada entera de 2 920. Después, comprueba con la calculadora si el resultado es correcto.

8. ¿Cuántos dados de madera, de 1 cm de arista, hay en 10 paquetes como el que ves en la ilustración?



9. ¿Cuántos cuadros de moqueta, de un metro de lado, necesitas para cubrir el suelo de una nave cuadrada de 30 metros de lado? (haz un dibujo antes de resolverlo.)

10. Héctor quiere dibujar una cuadrícula, igual de ancha que de alta, que contenga 225 cuadros. ¿Cuántas filas y cuántas columnas debe poner?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3

Divisibilidad

Alejandría, fundada por Alejandro Magno en el siglo IV a.C., pasó a ser el centro cultural (científico, artístico) de la civilización griega.

El sabio griego **Euclides** vivió en Alejandría en el siglo III a.C., donde fundó una gran escuela de matemáticas. Recopiló y sistematizó todo el conocimiento matemático de su época y plasmó su obra en una colección de trece libros que se denominaron *Elementos.* La mayor parte de estos libros estaban dedicados a la geometría, y solo cuatro de ellos, a la aritmética. En estos últimos desarrolló, entre otras cosas, la teoría de la divisibilidad: números primos y compuestos, divisores, múltiplos, etc.

Los *Elementos* de Euclides han sido estudiados y admirados en todas las épocas.

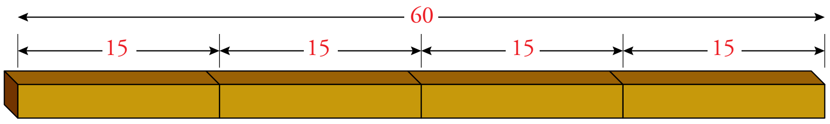
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 La relación de divisibilidad

Dos números están emparentados por la **relación de divisibilidad** cuando uno contiene al otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando su **cociente es exacto.**

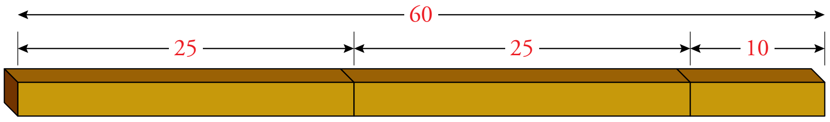
Ejemplos

- Un listón de 60 cm se puede partir, exactamente, en trozos de 15 cm.



$$\begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \cline{2-2} 00 & 4 \end{array} \rightarrow \text{La división es exacta.} \rightarrow \text{60 es divisible entre 15.}$$

- Sin embargo, un liston de 60 cm no se puede partir, exactamente, en trozos de 25 cm.



$$\begin{array}{r|l} 60 & 25 \\ \cline{2-2} 10 & 2 \end{array} \rightarrow \text{La división no es exacta.} \rightarrow \text{60 no es divisible entre 25.}$$

En la web

Practica la relación de divisibilidad.

Ser múltiplo de..., ser divisor de...

Cuando dos números están emparejados por la relación de divisibilidad, decimos que:

- El mayor es **múltiplo** del menor.
- El menor es **divisor** del mayor.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \rightarrow 40 = 8 \cdot 5 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{40 es múltiplo de 8.} \\ \text{8 es divisor de 40.} \end{array} \right.$$

división exacta

- ***a* es múltiplo de *b***

  o lo que es igual
- ***b* es divisor de *a***

→ **si la división *a* : *b* es exacta.**

Relación de divisibilidad

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array}$$

↓

división exacta

↓

a es divisible entre *b*.

↙ ↘

a es múltiplo de *b*.

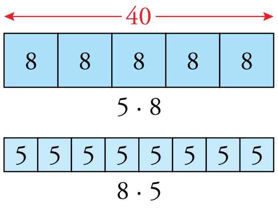
b es divisor de *a*.

Los divisores van por parejas

Cada divisor de un número lleva otro divisor emparejado.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$$

8 es divisor de 40. 5 es divisor de 40.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Piensa y contesta, justificando tus respuestas.

a) ¿Se puede dividir una clase de 30 alumnos en equipos de 7, sin que sobre ninguno?

b) Marta da pasos de 60 cm. ¿Puede recorrer 100 metros en un número exacto de pasos?

c) ¿Puede vaciarse una tina de aceite, de 1 500 litros, en un número exacto de garrafas de 5 litros?

d) ¿Tiene algún mes un número exacto de semanas?

2. Observa estas divisiones y completa en tu cuaderno:

36 |9 0 4	15 |6 3 2	55 |5 05 11 0
126 |12 006 10	225 |15 75 15 0	575 |23 115 25 00

— 36 es divisible por …

— 15 no es divisible por …

— …

3. Di si los números de cada pareja están emparentados por la relación de divisibilidad:

a) 224 y 16 b) 420 y 35 c) 613 y 13

d) 513 y 19 e) 688 y 44 f) 2 070 y 46

4. Copia estos números y une con flechas los que están emparentados por la relación de divisibilidad:

12	108	75	20	13
57	3	100	99	260

5. ¿Verdadero o falso?

a) 15 está contenido exactamente 4 veces en 60.

b) 75 está contenido exactamente 3 veces en 225.

c) 42 es divisible entre 7.

d) 54 es divisible entre 8.

e) 65 contiene a 13 un número exacto de veces.

6. Busca todos los números que están contenidos en 24 una cantidad exacta de veces.

7. Explica con claridad.

a) ¿Por qué 522 es múltiplo de 29?

b) ¿Por qué 17 es divisor de 544?

8. Calcula y responde, justificando tu respuesta.

a) ¿Es 35 divisor de 728?

b) ¿Es 1 800 múltiplo de 90?

9. Busca:

a) Tres números que sean divisores de 40.

b) Tres números que sean múltiplos de 7.

c) Tres números que sean divisores de 770.

d) Tres números que sean múltiplos de 50.

10. Busca entre estos números:

5	10	15	20	30
35	45	60	75	90

a) Todos los que sean divisores de 90.

b) Todos los que sean múltiplos de 3.

11. Considera estos números:

8	10	20	24	30
45	60	75	95	120

a) ¿Cuáles son múltiplos de 4?

b) ¿Cuáles son múltiplos de 10?

c) ¿Cuáles son múltiplos de 15?

12. Observa el ejemplo, copia en tu cuaderno y completa.

- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{20 : 5 = 4}\\ \mathbf{20 : 4 = 5}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\textbf{20 es múltiplo de 4 y de 5.}\\ \textbf{4 y 5 son divisores de 20.}\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l}12 : 4 = 3\\ 12 : 3 = 4\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{12 es … de 3 y de 4.}\\ \text{3 y 4 son … de 12.}\end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{l}30 : 5 = 6\\ 30 : 6 = 5\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dots\\ \dots\end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l}56 : 7 = 8\\ 56 : 8 = 7\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dots\\ \dots\end{array}\right.$

13. ¿Verdadero o falso?

a) Si m es divisible entre n, n es divisible entre m.

b) Si a es distinto de b y divisible entre b, a es mayor que b.

c) Si u es múltiplo de v, v es divisor de u.

d) Si b cabe una cantidad exacta de veces en a, b es múltiplo de a.

e) Si $m \cdot n = k$, m y n son divisores de k.

En la web
- Encuentra múltiplos de un número.
- Encuentra divisores de un número.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número son otros números, de igual o mayor tamaño, que lo contienen una cantidad exacta de veces. Por ejemplo, observa la longitud recorrida por la rana en sucesivos saltos de 20 centímetros:

Múltiplos de 20

$20 \cdot 1 = 20$

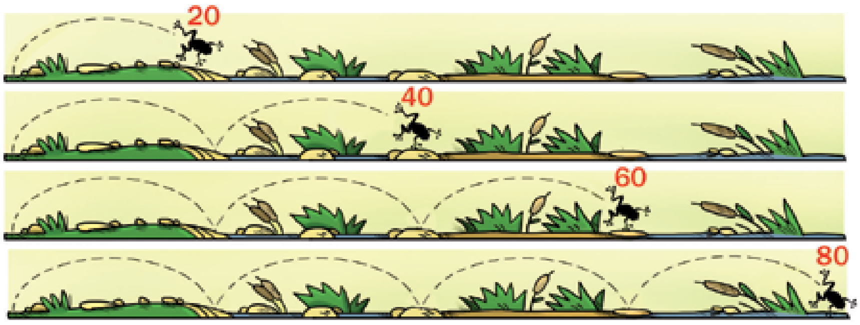
$20 \cdot 2 = 40$

$20 \cdot 3 = 60$

$20 \cdot 4 = 80$

↓

$20 \cdot k$



Los números 20, 40, 60, 80, … contienen a 20 una cantidad exacta de veces; es decir, todos ellos son múltiplos de 20.

Observa, también, que se obtienen multiplicando 20 por un número natural, y que la serie puede continuar indefinidamente.

$20 \cdot 5$	$20 \cdot 6$	$20 \cdot 7$	$20 \cdot 8$ …
↓	↓	↓	↓
100	120	140	160 …

Notación

Cuando nos referimos a un múltiplo de un número, podemos escribirlo con un punto encima, así:

$\dot{7}$ → múltiplo de 7

$\dot{a}$ → múltiplo de a

$18 = \dot{3}$ → 18 es múltiplo de 3.

- Los múltiplos de un número natural, a, se obtienen al multiplicar a por cualquier otro número natural k. $a \cdot k$ → **múltiplo de a**
- Todo número natural, a, es múltiplo de sí mismo y de la unidad. → $a \cdot 1 = a$
- Un número distinto de cero tiene infinitos múltiplos.

Piensa y practica

1. Escribe.

a) Tres múltiplos de 5.

b) Tres múltiplos de 12.

c) Tres múltiplos de 19.

d) Tres múltiplos de 30.

2. Añade cuatro términos a cada una de estas series:

a) Múltiplos de 6 → 6, 12, 18, 24, …

b) Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, …

c) Múltiplos de 53 → 53, 106, 159, 212, …

3. Busca, entre estos números, los que sean múltiplos de 6:

10 12 16 30 42 54 60 76 90 148 174

4. Escribe los diez primeros múltiplos de 25.

5. Escribe los veinte primeros múltiplos de 5.

Fíjate en la última cifra. ¿Qué observas?

¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 5?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

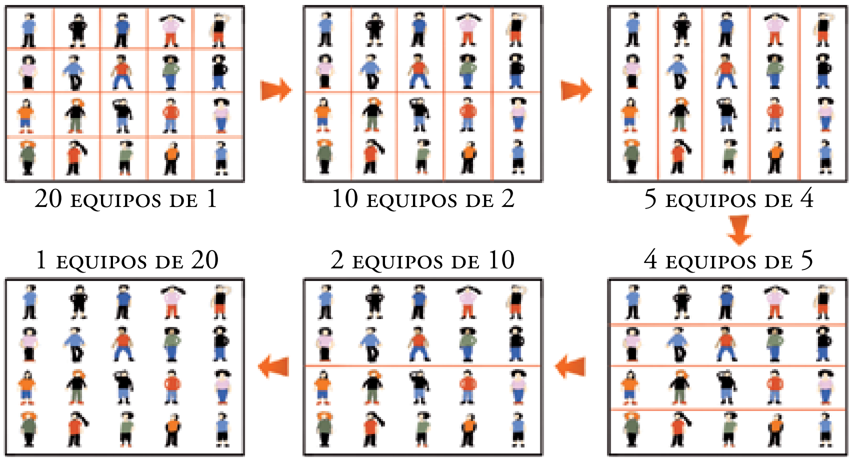
3 Divisores de un número

Los divisores de un número son otros números, de igual o menor tamaño, que están contenidos en él una cantidad exacta de veces.

Observa, por ejemplo, las distintas formas de dividir un grupo de 20 chicos y chicas en equipos iguales:

Divisores de 20

20 : 1 = 20
20 : 2 = 10
20 : 4 = 5
20 : 5 = 4
20 : 10 = 2
20 : 20 = 1



Cada uno de los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 está contenido en 20 una cantidad exacta de veces. Por tanto, todos ellos son divisores de 20.

Como puedes comprobar, forman parejas cuyo producto es 20:

$$1 \cdot 20 = 20 \qquad 2 \cdot 10 = 20 \qquad 4 \cdot 5 = 20$$

Divisores de 30

Búsqueda de los divisores de 30:

30 : 1 = 30 → SÍ
: 2 = 15 → SÍ
: 3 = 10 → SÍ
: 4 → NO
: 5 = 6 → SÍ

Los divisores de 30 son:

1	2	3	5
↕	↕	↕	↕
30	15	10	6

- Para obtener todos los divisores de un número, *a*, buscamos las divisiones exactas:

$$\left.\begin{matrix} a : b = c \\ a : c = b \end{matrix}\right\} \rightarrow a = b \cdot c \rightarrow \text{Entonces } b \text{ y } c \text{ son } \textbf{divisores} \text{ de } a.$$

- Todo número es divisor de sí mismo. → $a : a = 1$
- El 1 es divisor de cualquier número. → $a : 1 = a$

Piensa y practica

1. Encuentra todos los divisores de cada uno de los números siguientes:

a) 8 b) 12
c) 15 d) 28
e) 36 f) 55
g) 60 h) 80

2. Encuentra todos los divisores de:

a) 7 b) 13 c) 17 d) 29

¿Qué observas?

3. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir en equipos iguales los 24 alumnos y alumnas de una clase? ¿Cuántos equipos salen en cada caso? (Por ejemplo, 3 equipos de 8 alumnos).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas prácticas que sirven para descubrir si un número es divisible por 2, 3, 5 u otros números sencillos.

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 2

Ejemplos

- 37⑧ → cifra par
  378 es múltiplo de 2.
- 45① → cifra impar
  451 no es múltiplo de 2.

Observa que todos los múltiplos de 2, y solo ellos, terminan en cifra par:

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
…	…	…	…	…

Un número es múltiplo de 2 si termina en cifra par:

0 - 2 - 4 - 6 - 8

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 3

Ejemplos

- $359 \rightarrow 3 + 5 + 9 = 17 \neq \dot{3}$
  359 no es múltiplo de 3.
- $252 \rightarrow 2 + 5 + 2 = 9 = \dot{3}$
  252 es múltiplo de 3.

Toma cualquier múltiplo de 3 y suma sus cifras. Verás que la suma es un múltiplo de 3.

Múltiplo de 3 ⇩ Suma de las cifras ⇩

$$3 \cdot 11 = 33 \rightarrow 3 + 3 = 6 \rightarrow \dot{3}$$
$$3 \cdot 24 = 72 \rightarrow 7 + 2 = 9 \rightarrow \dot{3}$$
$$3 \cdot 136 = 408 \rightarrow 4 + 0 + 8 = 12 \rightarrow \dot{3}$$

Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 5

Ejemplos

- 28⓪ → es múltiplo de 5.
- 55⑦ → no es múltiplo de 5.

Contempla, ahora, los múltiplos de 5 y fíjate en que todos, y solo ellos, terminan en 0 o en 5:

5	10
15	20
25	30
35	40
…	…

Un número es múltiplo de 5 si su última cifra es un cero o un cinco.

Piensa y practica

1. Copia y rodea los múltiplos de 2.

57 66 71 90 99
111 162 228 483 805

2. De los números siguientes, ¿cuáles son múltiplos de 3? Justifica tu respuesta.

$\boxed{173}$ $\boxed{186}$ $\boxed{390}$ $\boxed{510}$ $\boxed{555}$ $\boxed{679}$ $\boxed{754}$ $\boxed{1\,023}$

3. Copia y rodea los múltiplos de 5.

328 155 207 735
420 553 815

4. Escribe la sucesión de los veinte primeros múltiplos de 10. Obsérvalos. ¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 10?

10 - 20 - 30 - 40 - …

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

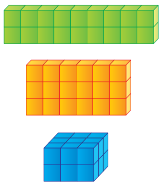
5 Números primos y compuestos

Los divisores de un número permiten expresarlo en forma de producto.

Ejemplo

$$18 \rightarrow \left(\begin{matrix}\text{DIVISORES}\\ 1-2-3-6-9-18\end{matrix}\right) \rightarrow \begin{cases}18 = 2 \cdot 9\\ 18 = 3 \cdot 6\\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3\end{cases}$$

Descomposiciones de 18



→ 18 = 2 · 9

→ 18 = 3 · 6

→ 18 = 2 · 3 · 3

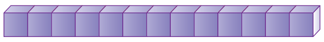
> Los números, como 18, que se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números compuestos.**

Sin embargo, hay números que solo tienen dos divisores (el mismo número y la unidad), lo cual impide su descomposición.

Ejemplo

$$13 \rightarrow \left(\begin{matrix}\text{DIVISORES}\\ 1-13\end{matrix}\right) \rightarrow 13 = 13 \cdot 1$$

El 13 no se puede descomponer



13 = 13 · 1

> Los números, como 13, que no se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números primos.**
>
> Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

En la web

Marca números primos en una tabla numérica.

En la tabla se han marcado:

— los múltiplos de 2, 🔵, excepto el 2.

— los múltiplos de 3, 🔴, excepto el 3.

— los múltiplos de 5, 🟢, excepto el 5.

— … y así, sucesivamente, con los múltiplos de 7, ⊕; de 11, ∗; de 13, ▲; …

1	②	③	4 🔵	⑤	6 🔵🔴
⑦	8 🔵	9 🔴	10 🔵🟢	⑪	12 🔵🔴
⑬	14 🔵⊕	15 🔴🟢	16 🔵	⑰	18 🔵🔴
⑲	20 🔵🟢	21 🔴⊕	22 🔵∗	㉓	24 🔵🔴
25 🟢	26 🔵▲	27 🔴	28 🔵⊕	㉙	30 🔵🔴🟢

Los números sin marcar, rodeados con un círculo, son los primos menores que 30. Comprueba que ninguno de ellos se puede descomponer en factores.

En la web

Clasifica en primos y compuestos.

> El número 1, como solo tiene un divisor, no se considera primo. Cualquier otro número, o es primo o es compuesto.

Piensa y practica

1. Clasifica en primos y compuestos.

5 8 11 15 21 28 31 33 45 49

2. Entre estos números hay dos primos. Búscalos.

$\boxed{47}$ $\boxed{57}$
$\boxed{67}$
$\boxed{77}$ $\boxed{87}$

Expresa cada uno de los compuestos como un producto de dos factores.

3. Busca todos los números primos menores que 60.

Son diecisiete en total.

4. ¿Verdadero o falso?

a) El número uno (1) no es primo ni compuesto.

b) No hay números primos mayores que 100.

c) Un número, si es impar, es primo.

d) Todos los números primos, excepto el 2, son impares.

5. Descompón el número 100.

a) En dos factores.

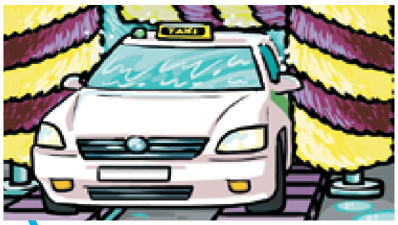
b) En tres factores.

c) En el máximo número de factores que sea posible.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Mínimo común múltiplo de dos números

La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:



Ejemplo

En una compañía de taxis, tienen por norma lavar los coches cada cuatro días y revisar el nivel de aceite cada 6 días.

¿Cada cuántos días coinciden en un coche ambas tareas de mantenimiento?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	
	↕																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	

Ambas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

$$12 \xrightarrow{+12} 24 \xrightarrow{+12} 36 \xrightarrow{+12} 48 \xrightarrow{+12} \dots$$

El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

> El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a*, *b*, *c*, … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:
>
> mín.c.m. (*a*, *b*, *c*, …)

Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4 → 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24

múltiplos de 6 → 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36

múltiplos comunes → 12 - 24 - 36 - 48

mín.c.m. (4, 6) = 12

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 …

Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 …

Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …

El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. } → mín.c.m. (10, 15) = 30

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Copia, observa y completa a simple vista.

a) $\dot{6} \rightarrow 6\ \ 12\ \ 18\ \ \textcircled{24}\ \ 30\ \ 36\ \ 42\ \ \textcircled{48}\ \ 54 \ldots$

$\dot{8} \rightarrow 8\ \ 16\ \ \textcircled{24}\ \ 32\ \ 40\ \ \textcircled{48}\ \ 56 \ldots$

mín.c.m. (6, 8) = ☐

b) $\dot{9} \rightarrow 9\ \ 18\ \ 27\ \ \textcircled{36}\ \ 45\ \ 54\ \ 63\ \ \textcircled{72} \ldots$

$\dot{12} \rightarrow 12\ \ 24\ \ \textcircled{36}\ \ 48\ \ 60\ \ \textcircled{72}\ \ 84 \ldots$

mín.c.m. (9, 12) = ☐

c) $\dot{15} \rightarrow 15\ \ 30\ \ 45\ \ 60\ \ 75\ \ 90\ \ 105 \ldots$

$\dot{25} \rightarrow 25\ \ 50\ \ 75\ \ 100\ \ 125\ \ 150 \ldots$

mín.c.m. (15, 25) = ☐

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

a) mín.c.m. (5, 8)
b) mín.c.m. (8, 12)
c) mín.c.m. (12, 24)
d) mín.c.m. (30, 40)
e) mín.c.m. (50, 75)
f) mín.c.m. (200, 300)

3. Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (6, 9)
b) mín.c.m. (6, 12)
c) mín.c.m. (5, 10)
d) mín.c.m. (15, 20)

4. Observa, completa en tu cuaderno y calcula.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & \square \\ 20 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = \ldots \\ 54 = \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mín.c.m.}\,(30, 40) = \ldots \\ \text{mín.c.m.}\,(40, 54) = \ldots \end{array}$$

5. Calcula.

a) mín.c.m. (20, 24)
b) mín.c.m. (24, 36)
c) mín.c.m. (54, 60)
d) mín.c.m. (56, 70)
e) mín.c.m. (120, 144)
f) mín.c.m. (140, 180)
g) mín.c.m. (168, 196)
h) mín.c.m. (180, 270)

6. ¿Verdadero o falso?

a) El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.

b) El mín.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.

c) mín.c.m (1, k) = k

d) Si a es múltiplo de b, mín.c.m. (a, b) = a.

e) El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.

7. Julio cuenta de cuatro en cuatro; Adela, de seis en seis, y Virginia, de diez en diez. ¿Cuáles son los tres primeros números en los que coinciden?

4 — 8 — 12 — 16 — ☐ — ☐ …

6 — 12 — 18 — 24 — ☐ — ☐ …

10 — 20 — 30 — 40 — ☐ — ☐ …

8. Victoria tiene fichas de colores que puede apilar en montones de 8 y, también, en montones de 10 sin que sobre ninguna. Explica cuántas fichas puede tener Victoria y justifica tu respuesta.

9. Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuándo volverán a coincidir?

10. Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?

11. El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?

En la web Resuelve los problemas: “Las balizas”, “Los coches”.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7

Máximo común divisor de dos números

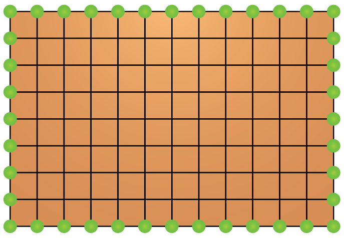
También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

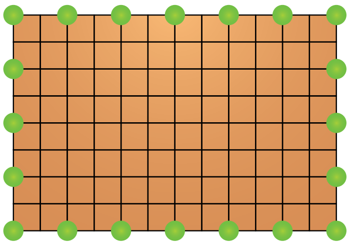
Se van a colocar maceteros, a intervalos iguales, en las esquinas y bordes de un patio interior de 8 × 12 metros.

¿A qué distancia se debe colocar un macetero del siguiente?

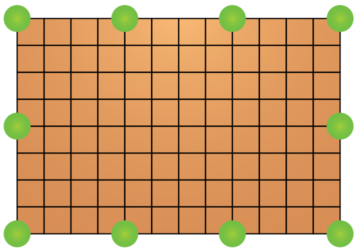
Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:



A 1 metro de distancia.



A 2 metros de distancia.



A 4 metros de distancia.

Cálculo del máx.c.d. (8, 12)

divisores de 8 → ①-②-④- 8

divisores de 12 → ①-②- 3 -④- 6 - 12

divisores comunes → 1 - 2 - 4

máx.c.d. (8, 12) = 4

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

1 - 2 - 4

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

> El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, … se llama **máximo común divisor,** y se expresa así:
>
> máx.c.d. (a, b, c, …)

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30)

Divisores de 20 → ① ② 4 ⑤ ⑩ 20

Divisores de 30 → ① ② 3 ⑤ 6 ⑩ 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno, observa y completa.

a) Div. de 12 → ① ② 3 ④ 6 12

Div. de 16 → ① ② ④ 8 16

máx.c.d. (12, 16) = ☐

b) Div. de 15 → ① 3 ⑤ 15

Div. de 20 → ① 2 4 ⑤ 10 20

máx.c.d. (15, 20) = ☐

c) Div. de 24 → ① ② ③ 4 ⑥ 8 12 24

Div. de 30 → ① ② ③ 5 ⑥ 10 15 30

máx.c.d. (24, 30) = ☐

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

a) máx.c.d. (6, 8)

b) máx.c.d. (8, 20)

c) máx.c.d. (10, 15)

d) máx.c.d. (12, 24)

e) máx.c.d. (18, 24)

f) máx.c.d. (40, 50)

3. Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (2, 3)

b) máx.c.d. (4, 5)

c) máx.c.d. (3, 9)

d) máx.c.d. (6, 9)

e) máx.c.d. (30, 40)

f) máx.c.d. (50, 75)

4. Completa en tu cuaderno y calcula.

6 0	2
3 0	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

9 0	2
4 5	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

1 0 0	2
5 0	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

$$\left.\begin{array}{r} 60 = 2 \cdot \ldots \\ 90 = 2 \cdot \ldots \\ 100 = 2 \cdot \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d.}\,(60, 90) = \ldots \\ \text{máx.c.d.}\,(60, 100) = \ldots \\ \text{máx.c.d.}\,(90, 100) = \ldots \end{array}$$

5. Calcula.

a) máx.c.d. (20, 24)

b) máx.c.d. (24, 36)

c) máx.c.d. (54, 60)

d) máx.c.d. (56, 70)

e) máx.c.d. (120, 144)

f) máx.c.d. (140, 180)

g) máx.c.d. (168, 196)

h) máx.c.d. (180, 270)

6. ¿Verdadero o falso?

a) El máximo común divisor de dos números es igual al menor de ellos.

b) El máx.c.d. de dos números contiene solo los factores primos comunes a ambos números.

c) máx.c.d. (1, k) = k

d) El máx.c.d. de dos números primos es uno.

e) Si a es divisible entre b, máx.c.d. (a, b) = b.

7. Supón que tienes una hoja de papel de 30 cm × 21 cm, y quieres dibujar sobre ella una cuadrícula lo más grande que sea posible en la que no haya cuadros fraccionados. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadros?

8. Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un lapicero de 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos. ¿Cuál puede ser el valor de cada una de esas monedas si siempre ha dado el precio exacto? (Busca todas las soluciones posibles).

9. Alberto tiene 45 fichas rojas y 36 fichas verdes, y quiere apilarlas en columnas iguales, lo más altas que sea posible, y sin mezclar colores en la misma pila. ¿Cuántas fichas pondrá en cada montón?

10. El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

11. Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

La relación de divisibilidad

1. Reflexiona, contesta "Sí" o "No" y justifícalo.

a) ¿Se pueden guardar 300 litros de aceite en bidones de 15 litros sin que sobre nada?

b) Si sacas del horno 100 magdalenas, y las empaquetas por docenas, ¿queda alguna suelta?

c) ¿Se puede cortar un listón de 1,80 m en un número exacto de trozos de 20 cm?

d) ¿Hacen 100 minutos un número exacto de cuartos de hora?

2. Razona si existe relación de divisibilidad entre:

a) 20 y 300 b) 13 y 195 c) 38 y 138

d) 15 y 75 e) 23 y 203 f) 117 y 702

Múltiplos y divisores

3. Calcula mentalmente.

a) Tres números contenidos una cantidad exacta de veces en 180.

b) Tres números que contengan a 15 una cantidad exacta de veces.

c) Tres divisores de 180.

d) Tres múltiplos de 15.

4. Escribe.

a) Los múltiplos de 20 comprendidos entre 150 y 210.

b) Un múltiplo de 13 comprendido entre 190 y 200.

c) Todos los pares de números cuyo producto es 80.

5. Busca todos los divisores de:

a) 10 b) 18 c) 20 d) 24 e) 28

f) 30 g) 39 h) 45 i) 50 j) 80

6. ¿De cuántas formas diferentes se pueden envasar 60 bombones en cajas con el mismo número de unidades en cada una sin que sobre ninguno?

7. ¿Cuáles de estas cantidades de dinero puedes obtener juntando billetes de cinco euros?:

15 €	22 €	37 €	45 €	80 €	94 €	120 €	1 000 €

¿Y juntando billetes de 10 euros?

8. Escribe.

a) Todos los pares de números cuyo producto es 80.

b) Todos los divisores de 80.

9. Busca todas las formas posibles de hacer montones iguales con 72 terrones de azúcar.

Criterios de divisibilidad

10. Escribe.

a) Un número de tres cifras que sea divisible por 3.

b) Un número de cuatro cifras que sea divisible por 5.

11. Sustituye cada letra por una cifra, para que el número resultante sea divisible entre 3.

A51	2B8	31C	52D	1E8

12. Busca, en cada caso, todos los valores posibles de *a* para que el número resultante sea, a la vez, múltiplo de 2 y de 3:

4	*a*	3	2	*a*	2	4	*a*

Números primos y compuestos

13. Separa los números primos de los compuestos.

14	17	28	29	47	53
57	63	71	79	91	99

14. Busca el primer número, mayor que 500, que no se pueda expresar como el producto de dos factores diferentes de él mismo y de la unidad.

15. Averigua si el número 521 es primo o compuesto. Justifica tu respuesta.

Mínimo común múltiplo y máximo común denominador

16. Calcula.

a) mín.c.m. (4, 8) b) máx.c.d. (4, 8)

c) mín.c.m. (10, 20) d) máx.c.d. (10, 20)

e) mín.c.m. (20, 30) f) máx.c.d. (20, 30)

17. El mínimo común múltiplo de dos números es 15. ¿Cuáles pueden ser esos números?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

18. Los miembros de un club social se pueden agrupar, sin que ninguno quede suelto, por parejas, por tríos y por grupos de 7.

¿Cuántos miembros tiene el club, sabiendo que son más de 80 pero menos de 90?

19. Ramón tiene un montón de monedas de 10 céntimos, que puede agrupar en montones de 80 céntimos y también en montones de un euro.

¿Cuánto dinero tiene, sabiendo que en total hay más de 5 € pero menos de 10 €?

20. Los trenes a Miramar salen cada 18 min, y los de Arandilla, cada 24 min. Si son las 15 h 45 min, y salen a la vez, ¿cuándo volverán a coincidir?

21. Se desea partir una cartulina de 48 cm × 60 cm en tarjetas cuadradas que tengan entre cinco y diez centímetros de lado. ¿Cuál debe ser el tamaño de las tarjetas para no desperdiciar recortes de cartulina?

22. Antonio tiene entre 40 y 50 años, justo el triple que su hijo Julio, que tiene menos de 15. ¿Cuántos años tiene cada uno?

23. Una bodega comercializa sus vinos en cajas con el mismo número de botellas.

¿Cuántas botellas van en cada caja, si un comercio ha comprado 60 botellas de vino tinto, 57 de blanco y 45 de rosado?

24. Un vaso pesa 75 gramos, y una taza, 60 gramos.

¿Cuántos vasos hay que colocar en uno de los platillos de una balanza, y cuántas tazas en el otro, para que la balanza quede equilibrada?

25. En un almacén de maderas se han apilado tablones de pino, de un grosor de 35 mm, hasta alcanzar la misma altura que otra pila de tablones de roble, de 20 mm de gruesos.

¿Cuál será la altura de ambas pilas?

Busca, al menos, tres soluciones.

26. Un comerciante, en un mercadillo, intercambia con un compañero un lote de camisetas que cuestan 24 € la unidad por un lote de zapatillas de 30 € la unidad.

¿Cuántas camisetas entrega el comerciante y cuántas zapatillas recibe?

Autoevaluación

1. Busca pares de números emparentados por la relación de divisibilidad:

6 10 30 80

2. Contesta sí o no y justifica tu respuesta.

a) ¿Es 60 divisible entre 15?

b) ¿Es 5 múltiplo de 15?

c) ¿Es 6 divisor de 30?

d) ¿Es 162 múltiplo de 8?

3. Escribe.

a) Los múltiplos de 6 comprendidos entre 50 y 70.

b) Todos los divisores de 30.

4. Completa:

a) Un número es múltiplo de 3 cuando …

b) Un número es divisible entre 5 cuando …

5. Separa los primos de los compuestos:

14 - 23 - 65 - 67 - 87 - 97 - 101 - 111

6. Calcula.

a) mín.c.m. (10, 15)

b) máx.c.d. (10, 15)

c) mín.c.m. (30, 40)

d) máx.c.d. (30, 40)

7. ¿De cuántas formas distintas se puede dividir una clase de 28 alumnos, en equipos con el mismo número de miembros, sin que sobre ninguno?

8. En un edificio de oficinas, el vigilante nocturno completa su ronda cada 30 minutos, y su compañero, que vigila el parque exterior, cada 40 minutos. Ambos inician su jornada a las diez de la noche. ¿A qué hora volverán a coincidir en el punto de partida?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Los números enteros

"Si a 9 le añadimos 6 y restamos 7, obtenemos 8". Esta afirmación la podemos escribir así: 9 + 6 – 7 = 8. Para llegar a una expresión tan sencilla, las matemáticas han tenido que recorrer un largo camino.

En el siglo III a. C., los chinos trabajaron con cantidades negativas. Para ello, utilizaban dos conjuntos de varillas, unas rojas para las positivas y otras negras para las negativas.

Tuvieron que pasar todavía unos mil años, hasta que en el siglo VII, en India, se sistematizara el uso de los números negativos, del cero y de la regla de los signos.

De India, y gracias a los árabes, estos conceptos llegaron a Europa hacia el siglo IX. Sin embargo, hasta el siglo XV no aparecieron los signos + y –; primero, para designar cantidades positivas y negativas, y después, para las operaciones de suma y resta. El signo = se inventó en 1560.

Ya ves, lo que tú puedes escribir en unos segundos, a la matemática le costó miles de años.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Números positivos y negativos

Los números naturales se utilizan para cuantificar multitud de situaciones cotidianas. Sin embargo, a veces no sirven para diferenciar las situaciones opuestas asociadas. En esos casos, es necesaria la utilización de los números negativos. Por ejemplo:

- Vivo en el segundo piso ⟶ $\boxed{+2}$ ⟶ N.º natural
- Tengo el coche en el segundo sótano ⟶ $\boxed{-2}$ ⟶ N.º negativo
- El termómetro marca 30 grados ⟶ $\boxed{+30}$ ⟶ N.º natural
- El termómetro marca 30 grados bajo cero ⟶ $\boxed{-30}$ ⟶ N.º negativo


30 °C


–30 °C

- Los números negativos se escriben precedidos del signo menos:

  $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$

- Cuando un número no lleva signo, entendemos que es positivo:

  $3 = +3 \qquad +15 = 15$

- Los números negativos, en las operaciones, se escriben entre paréntesis. Así se evita que vayan dos signos seguidos:

  $5 + (-2) \rightarrow$ El número positivo 5 se suma con el negativo –2.

  $(-4) \cdot (-3) \rightarrow$ El número negativo –4 se multiplica por el negativo –3.

Utilidad de los números positivos y negativos

- Los números positivos y los números negativos sirven para expresar cantidades o posiciones fijas. Por ejemplo:
  - En un edificio, podemos estar en un piso sobre la calle o en un sótano:

    Sexto piso ⟶ +6

    Segundo sótano ⟶ –2
  - Nuestro saldo en una cuenta bancaria puede ser positivo o estar en números rojos (negativo):

    Rosa tiene ciento cincuenta euros. ⟶ +150

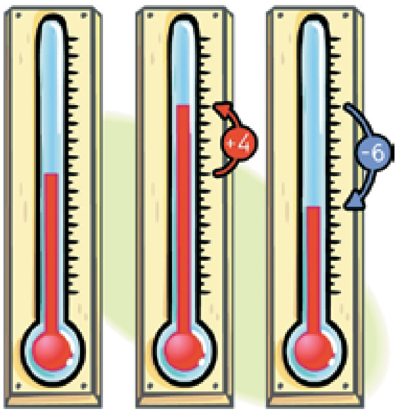
    Francisco debe ochenta y cinco euros. ⟶ –85
- Los números positivos y los negativos sirven para expresar variaciones de cantidad. Por ejemplo:
  - Con el ascensor del edificio puedes subir o bajar a otra planta:

    Subes del segundo al quinto (tres plantas). ⟶ +3

    Bajas del tercer piso al segundo sótano (cinco plantas). ⟶ –5
  - La temperatura que marca el termómetro sufre variaciones:

    Hace más calor. El termómetro ha subido cuatro grados. ⟶ +4

    Está refrescando. El termómetro ha bajado seis grados. ⟶ –6



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Describe tres situaciones en las que se hace necesario el uso de números negativos.

Por ejemplo, para expresar las lecturas del termómetro de ambiente.

2. Escribe tres elementos más en cada una de las siguientes series numéricas:

a) 0, 1, –1, 2, –2, …

b) 6, 4, 2, 0, –2, …

c) 20, 15, 10, 5, 0, …

d) –21, –20, –18, –15, –11, …

e) 8, 7, 5, 2, –2, …

3. Asocia un número positivo o negativo a cada uno de los enunciados siguientes:

a) Mercedes tiene en el banco 2 500 euros.

b) Miguel debe 150 euros.

c) El termómetro marca 18 °C.

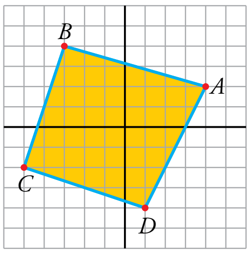
d) El termómetro marca tres grados bajo cero.

e) La avioneta vuela a 800 metros sobre el nivel del mar.

f) El submarino navega a 40 metros bajo la superficie.

4. Observa los ejes de coordenadas en el plano cuadriculado. El punto A se define mediante sus coordenadas:

$$A \rightarrow (+4, +2)$$



¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices del cuadrilátero?

5. Expresa numéricamente cada enunciado:

a) El termómetro ha subido cinco grados.

b) El termómetro ha bajado cinco grados.

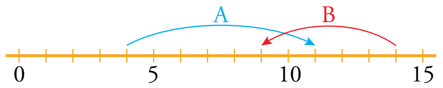
c) He perdido una moneda de 2 €.

d) Me he encontrado una moneda de 2 €.

e) He gastado 150 € en el supermercado.

f) He cobrado 150 € por un trabajo realizado.

6. Escribe un número para cada movimiento en la recta:



7. Asocia un número a cada enunciado:

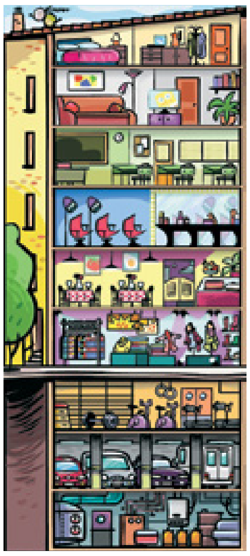
a) La temperatura ha bajado de 21 °C a 18 °C.

b) La semana pasada tenía 37 € en la hucha y ahora solo tengo 34 €.

c) Ha amanecido a dos grados bajo cero y ahora, a mediodía, tenemos 3 °C.

d) Llegué a casa de los abuelos con 6 € en mi monedero, me dieron la paga y ahora salgo con 16 €.

8. Cuantifica con un número positivo o negativo cada situación:



a) Carmen vive en la quinta planta.

b) En el tercer sótano está la caldera de la calefacción.

c) En la planta baja hay un comercio de ropa.

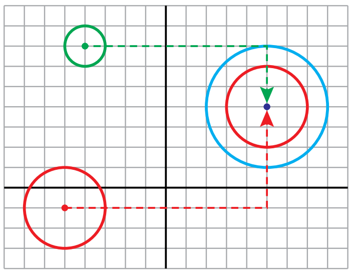
d) Victoria aparca en el segundo sótano y sube a la peluquería, en el segundo piso.

e) Mario entra por el portal y baja al gimnasio.

f) El conserje baja en el ascensor desde el último piso al cuarto de calderas.

9. Para trasladar la circunferencia roja y colocar su centro sobre el de la circunferencia azul, definimos este movimiento:

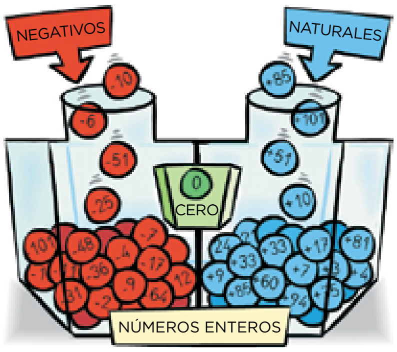
HORIZONTAL → +10 VERTICAL → +5



Define, de la misma forma, el movimiento que llevaría el centro de la circunferencia verde sobre el centro de la azul.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 El conjunto de los números enteros



El conjunto $\mathbb{Z}$

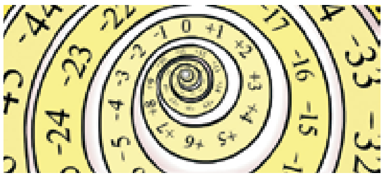
Si al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales le añadimos los correspondientes números negativos, obtenemos un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como conjunto de los números enteros y se designa por la letra $\mathbb{Z}$.

El **conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros** está formado por:

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \text{Los naturales, que son los positivos} & \rightarrow & +1, +2, +3, +4, \dots \\ \bullet\ \text{El cero} & \longrightarrow & 0 \\ \bullet\ \text{Los correspondientes negativos} & \longrightarrow & -1, -2, -3, -4, \dots \end{array}\right\} \mathbb{Z}$$

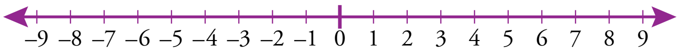
Observa

El conjunto $\mathbb{Z}$ no tiene ni principio ni fin. Siempre se pueden encontrar más positivos a la derecha y más negativos a la izquierda.



Ordenación y comparación de números enteros

Los números enteros se representan, ordenados, en la recta numérica:



En la recta puedes ver que cualquier número es mayor que otro que esté a su izquierda y menor que otro que esté a su derecha. Por tanto:

- Cualquier número positivo es mayor que el cero, y este es mayor que cualquier número negativo.

  $+5 > 0 \qquad 0 > -5$

- Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

  $+5 > -2 \qquad +5 > -5 \qquad +5 > -13$

- Los números negativos se ordenan *al revés* que los positivos. Es decir, cuanto mayor sea la cifra, sin considerar el signo, menor es el número.

  $-1 > -2 \qquad -2 > -7 \qquad -7 > -15$

En la web

Practica ordenando números enteros.

Ejemplo

Como puedes ver:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Quien más tiene es la chica que tiene 15 €.} \\ \bullet\ \text{Quien no tiene nada tiene más que los que deben.} \\ \bullet\ \text{Quien menos tiene es la chica que debe 20 €.} \end{array}\right\} -20 < -8 < 0 < +8 < +15$$

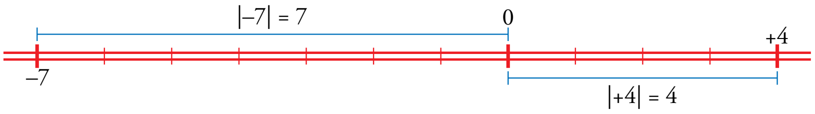
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero es la longitud del segmento que lo separa del cero en la recta numérica. Se expresa escribiéndolo entre barras:

El valor absoluto de –7 es 7. → |–7| = 7

El valor absoluto de +4 es 4. → |+4| = 4



El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta al quitarle el signo.

|*a*| → valor absoluto de *a*

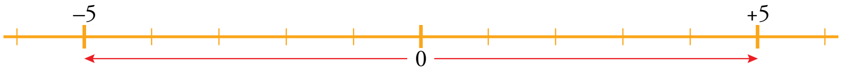
Así se escribe

Valor absoluto:
- De (+5) → |+5| = 5
- De (–5) → |–5| = 5

Opuesto:
- De (+5) → (–5)
- De (–5) → (+5)

Opuesto de un entero

El opuesto de un número entero es su simétrico respecto del cero en la recta. Es decir, el que está a la misma distancia del cero, pero del lado contrario.



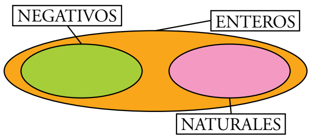
Los números 5 y –5 son opuestos el uno del otro.

El **opuesto** de un entero es otro entero del mismo valor absoluto, pero de signo contrario.

Piensa y practica

1. Clasifica estos números en un gráfico como el que ves debajo:

–9	+1	–1	+45
+7	0	+13	–2
+1	–12	–11	+150



2. Representa en la recta y ordena de menor a mayor.

–7, +4, –1, +7, +6, –4, –5, +3, –11

3. Copia en tu cuaderno y coloca los signos < o > según corresponda.

a) (+8) … (+3) b) (–8) … (+3) c) (+8) … (–3)

d) (–2) … (–5) e) (+2) … (–5) f) (–2) … (+5)

4. Ordena de menor a mayor.

a) +5, –3, –7, 0, +1, +6, –12, –5

b) –6, –3, –9, 0, –1, –5, –12, –4

5. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada número:

a) +8 b) –7 c) +11 d) –13

6. Completa en tu cuaderno.

a) |–6| = … b) |+6| = … c) |–2| = …

d) |+9| = … e) |–11| = … f) |+10| = …

7. ¿Qué número entero es opuesto de sí mismo?

8. Dos números enteros opuestos distan en la recta 12 unidades. ¿Qué números son?

9. ¿Verdadero o falso?

a) Todos los números enteros son también naturales.

b) Todos los números naturales son también enteros.

c) Un número positivo es siempre mayor que su opuesto.

d) Entre dos números enteros, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

e) El valor absoluto de cero es cero.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Sumas y restas de números enteros

Empecemos aprendiendo a resolver las expresiones más sencillas, que son las que no tienen paréntesis.

Sumas y restas de dos números

Los dos números llevan el mismo signo

- Si me dan 5 y me dan 3, gano 8. ⟶ 5 + 3 = +8
- Si me quitan 4 y me quitan 8, pierdo 12. ⟶ –4 – 8 = –12

Cuando los dos números llevan el **mismo signo:**

- Se suman los valores absolutos.
- Se pone el mismo signo que tenían los números.

Los dos números tienen distinto signo

- Si me quitan 3 y me dan 10, gano 7. ⟶ –3 + 10 = +7
- Si me dan 5 y me quitan 8, pierdo 3. ⟶ +5 – 8 = –3

Cuando los dos números llevan **distinto signo:**

- Se restan los valores absolutos.
- Se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

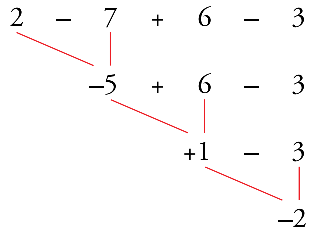
Sumas y restas de más de dos números

Para resolver estas expresiones, puedes actuar de dos formas diferentes.

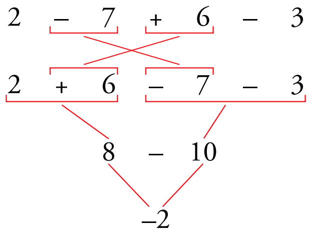
Ejemplo

Vamos a calcular 2 – 7 + 6 – 3:

Puedes ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen los números en la expresión.



O puedes sumar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, se restan los resultados.



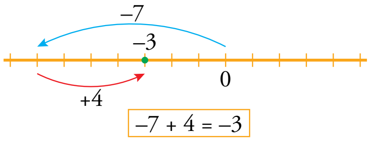
Ejercicio resuelto

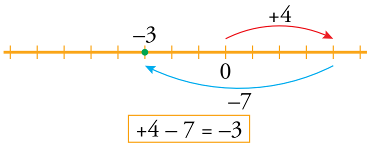
a) 8 – 2 – 10 – 5 + 3 =
- 6 – 10 – 5 + 3 = –4 – 5 + 3 = –9 + 3 = –6
- 8 + 3 – 2 – 10 – 5 = 11 – 17 = –6

b) –6 + 19 – 15 + 23 – 12 =
- 13 – 15 + 23 – 12 = –2 + 23 – 12 = 21 – 12 = 9
- 19 + 23 – 6 – 15 – 12 = 42 – 33 = 9

Ten en cuenta

El orden no cuenta mientras cada número conserve su signo:





En la web

Practica la suma y la resta de números positivos y negativos.

En la web

Practica la suma y la resta de números enteros.

Piensa y practica

1. Escribe cada enunciado junto a la expresión que le corresponde.

a) Gano 15 y gano 12.
b) Gano 25 y gasto 28.
c) Gasto 25 y gano 28.
d) Gasto 15 y gasto 12.

–25 + 28 = +3 → Gano 3.
–15 – 12 = –27 → Pierdo 27.
+15 + 12 = +27 → Gano 27.
+25 – 28 = –3 → Pierdo 3.

2. Copia en tu cuaderno y completa.

a) Si me dan 4 y me dan 8, gano 12. → +4 + 8 = …
b) Si me dan 5 y me quitan 9, pierdo … → +5 – 9 = …
c) Si me quitan 9 y me dan 2, … → –9 + 2 = …
d) Si me quitan 5 y me quitan 7, … → –5 – 7 = …

3. Calcula, teniendo en cuenta que ambos números tienen el mismo signo en cada caso.

a) 6 + 5 b) 4 + 8 c) 10 + 7
d) –6 – 2 e) –4 – 6 f) –5 – 9
g) 8 + 7 h) –8 – 7 i) –12 – 4

4. Opera, teniendo en cuenta que los dos números llevan signos diferentes en cada caso.

a) 9 – 5 b) 3 – 7 c) 6 – 10
d) –2 + 7 e) –15 + 5 f) –11 + 8
g) 7 – 12 h) 11 – 4 i) –18 + 10

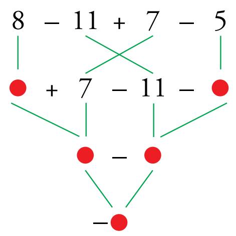
5. Calcula.

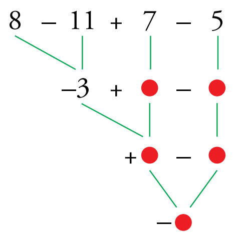
a) 6 – 7 b) –8 + 7 c) –5 – 1
d) 8 + 2 e) 10 – 12 f) –16 + 20
g) 11 + 21 h) –13 – 12 i) –18 + 11

6. Obtén el resultado de las expresiones siguientes:

a) 51 – 28 b) –32 + 49 c) –22 – 36
d) 18 + 27 e) –92 + 49 f) –62 – 31

7. Copia en tu cuaderno sustituyendo cada punto por un número.





8. Resuelve como en el ejemplo.

- **–6 + 8 – 10 +13 = +2 – 10 + 13 = –8 + 13 = +5**

a) 10 – 3 – 5 b) 15 – 9 – 6 c) 9 – 3 + 5
d) –2 + 2 + 7 e) –10 – 3 + 8 f) –4 – 3 – 2

9. Opera como en el ejemplo.

- **–12 + 19 – 14 = 19 – 12 – 14 = 19 – 26 = –7**

a) 9 – 2 – 3 b) 12 – 4 – 6 c) 5 – 9 + 8
d) –13 + 6 + 4 e) –11 – 4 + 8 f) –5 – 3 – 4

10. Resuelve paso a paso, igual que en el modelo resuelto.

- **7 – 5 – 8 – 4 = 2 – 8 – 4 = –6 – 4 = –10**

a) 2 – 4 – 5 + 8 b) 6 – 7 + 4 – 3
c) 5 + 8 – 9 – 6 d) –4 – 9 + 6 + 2
e) –3 – 5 + 7 + 7 f) –4 – 8 – 2 – 5

11. Opera agrupando por signos, como en el ejemplo.

- **–4 + 6 – 8 + 7 = 6 + 7 – 4 – 8 = 13 – 12 = 1**

a) 5 + 7 – 2 – 4 b) 2 – 6 + 4 – 9
c) 9 – 6 – 7 + 2 d) –4 – 5 + 3 + 8
e) –8 + 2 – 7 + 6 f) –1 + 5 + 6 – 7

12. Copia en tu cuaderno y completa.

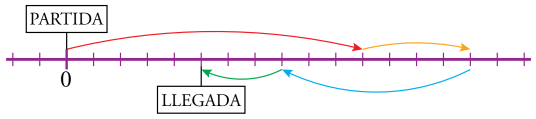
a) 2 – 7 – 5 + 8 = ☐ – 5 + 8 = ☐ + 8 = ☐
b) 15 – 21 + 13 – 10 = ☐ + 13 – 10 = ☐ – 10 = ☐
c) –6 + 11 – 8 + 4 = 11 + ☐ – 6 – ☐ = ☐ – ☐ = ☐

13. Resuelve.

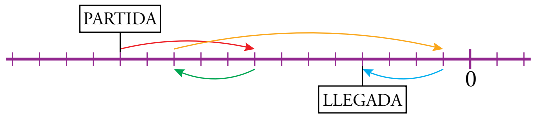
a) 6 – 9 – 7 – 5 + 2 + 11
b) 15 + 18 – 11 – 7 – 21 + 27
c) –9 + 12 – 16 + 25 – 18 – 4
d) –44 – 16 + 8 + 33 + 23 – 5
e) –3 – 17 – 21 – 9 – 17 + 57

14. Escribe una expresión para los movimientos reflejados en cada recta numérica, y resuélvela:

a)



b)



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Sumas y restas con paréntesis

Ya sabes que los números enteros, en las operaciones, se suelen escribir entre paréntesis. Ahora vas a aprender a suprimir esos paréntesis en las expresiones con sumas y restas. Así, se reducen a lo que ya sabes. Se presentan cuatro casos:

SUMAR UN NÚMERO POSITIVO

Ingreso un talón de 5 €.

Gano. Tengo cinco euros **MÁS.**

$+(+5) = +5$

SUMAR UN NÚMERO NEGATIVO

Me llega una factura de 5 €.

Pierdo. Tengo cinco euros **MENOS.**

$+(-5) = -5$

Para **sumar un número entero,** se quita el paréntesis y se deja el signo propio del número.

$+(+a) = +a \qquad +(-a) = -a$

Ten en cuenta

Atendiendo a los dos signos, de fuera y dentro del paréntesis:

- Si son **iguales,** el resultado es **positivo.**

$$\left.\begin{array}{l}+(+)\\-(-)\end{array}\right\} \rightarrow +$$

- Si son **distintos,** el resultado es **negativo.**

$$\left.\begin{array}{l}+(-)\\-(+)\end{array}\right\} \rightarrow -$$

RESTAR UN NÚMERO POSITIVO

Entrego un talón de 5 €.

Pierdo. Tengo cinco euros **MENOS.**

$-(+5) = -5$

RESTAR UN NÚMERO NEGATIVO

Me perdonan una factura de 5 €.

Gano. Tengo cinco euros **MÁS.**

$-(-5) = +5$

Para **restar un número entero,** se quita el paréntesis y se le pone al número el signo contrario al que tenía.

$-(+a) = -a \qquad -(-a) = +a$

Ejercicio resuelto

a) $7 + (+3) = 7 + 3 = 10$
b) $7 + (-9) = 7 - 9 = -2$
c) $12 - (+4) = 12 - 4 = 8$
d) $12 - (-4) = 12 + 4 = 16$
e) $(-9) + (-11) = -9 - 11 = -20$
f) $(-14) - (-8) = -14 + 8 = -6$

Piensa y practica

1. Quita paréntesis.

a) $+(-1)$
b) $-(+4)$
c) $+(+8)$
d) $-(+7)$
e) $+(-10)$
f) $-(-6)$
g) $+(-11)$
h) $-(-13)$
i) $+(-15)$
j) $-(+16)$
k) $+(-9)$
l) $-(-7)$

2. Opera y comprueba los resultados.

a) $+(+8) - (+5)$
b) $-(+6) - (-2)$
c) $+(-2) + (-6)$
d) $+(+7) - (-3)$
e) $+(-9) - (+2)$
f) $-(+6) + (+4)$

Soluciones: a) 3; b) –4; c) –8; d) 10; e) –11; f) –2

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Sumas y restas dentro de paréntesis

El paréntesis empaqueta, en un solo bloque, todo lo que va en él. Por eso, el signo que lo precede afecta a todos los sumandos (o restandos) que haya en el interior. Se dan dos casos.

■ **PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO POSITIVO**

$$+(5-8+6)\left\{\begin{matrix}\text{me dan }(+5)\\ \text{me dan }(-8)\\ \text{me dan }(+6)\end{matrix}\right\}\rightarrow +(+5)+(-8)+(+6)=5-8+6$$

Los signos finales son los que tenían los sumandos dentro del paréntesis.

> Al quitar un paréntesis precedido del signo +, los signos de los sumandos (restandos) interiores quedan como estaban.

En la web

Rellena los cuadrados mágicos.

■ **PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO NEGATIVO**

$$-(5-8+6)\left\{\begin{matrix}\text{me quitan }(+5)\\ \text{me quitan }(-8)\\ \text{me quitan }(+6)\end{matrix}\right\}\rightarrow -(+5)-(-8)-(+6)=-5+8-6$$

Los signos finales son los contrarios a los que había dentro del paréntesis.

> Al quitar un paréntesis precedido del signo –, cada uno de los signos de los sumandos (restandos) interiores se cambia por su opuesto.

Ejercicio resuelto

Resolver la expresión siguiente:

$15-[12-(6-11)+(3-9)]$

Podemos operar de dos formas:

a) Operar dentro de los paréntesis, empezando por los más pequeños.

$15-[12-(6-11)+(3-9)]$

$15-[12-(-5)+(-6)]$

$15-[12+5-6]$

$15-11$

4

b) Quitar paréntesis, empezando por los más pequeños, y después operar.

$15-[12-(6-11)+(3-9)]$

$15-[12-6+11+3-9]$

$15-12+6-11-3+9$

$15+6+9-12-11-3$

$30-26$

4

Piensa y practica

3. Quita paréntesis, calcula, y comprueba el resultado.

a) $+(5+3)$ b) $-(-6-3)$ c) $-(8+15)$

d) $-(-2-4)$ e) $+(9-7-2)$ f) $-(1-8+3)$

g) $-(-6+5-7)$ h) $-(7-5+4)$ i) $-(-3-1-4)$

Soluciones: a) 8; b) 9; c) –23; d) 6; e) 0; f) 4; g) 8; h) –6; i) 8

4. Resuelve por dos métodos diferentes.

a) $5-(9-3)$ b) $7+(2-8)$

c) $12+(-3+10)$ d) $15-(8+11)$

e) $+(9-10)-2$ f) $-(7+4)+14$

g) $(5+8)-(7+6)$ h) $(16-9)-(10-7)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

5. Quita los paréntesis.

a) +(+2) b) +(–8) c) –(+ 4) d) –(–9)

6. Quita el paréntesis y calcula igual que en el ejemplo.

- **–16 – (–5) = –16 + 5 = –11**

a) 12 + (+4) b) 10 – (+8) c) 15 – (–6)
d) 10 – (+16) e) –2 + (+8) f) –3 – (–5)

7. Opera, como en el ejemplo, suprimiendo paréntesis.

- **–(+14) – (–12) = –14 + 12 = –2**

a) +(+7) + (+6) b) +(–5) + (–3)
c) +(–6) – (+8) d) –(–7) + (–10)
e) –(–3) – (–5) f) –(–2) – (+6)
g) +(–7) – (–3) h) –(–5) + (+4)
i) +(–12) + (+10) j) –(+6) – (+8)

8. ¿Verdadero o falso?

a) La suma de dos números positivos es mayor que cero.

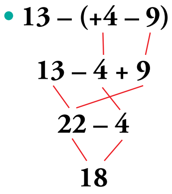
b) La suma de un número positivo y otro negativo es un número negativo.

c) El resultado de restar dos números negativos puede ser mayor que cero.

d) Restar un número, positivo o negativo, es lo mismo que sumar su opuesto.

9. Resuelve, como en el modelo, quitando primero el paréntesis.

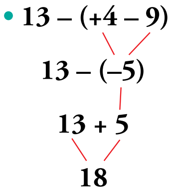
a) 12 + (+3 – 5)
b) 14 – (+12 – 10)
c) 8 – (–5 + 13)



10. Quita primero el paréntesis y, después, calcula.

a) 4 + (9 – 7) b) 15 – (2 – 9)
c) 11 – (–6 + 3) d) 10 – (–7 – 5)
e) 13 + (–8 + 2) f) 17 + (–5 – 9)
g) 8 + (–8 + 8) h) 9 – (–3 – 10)

11. Repite los ejercicios de la actividad anterior, operando en primer lugar dentro del paréntesis, como se hace en el modelo.



12. Calcula, quitando primero los paréntesis, como en el ejemplo.

- **(5 – 12) – (8 – 6) = 5 – 12 – 8 + 6 = 11 – 20 = –9**

a) (7 – 4) + (9 – 5) b) (2 + 6) + (5 – 8)
c) (5 – 9) + (2 – 12) d) (7 + 3) – (5 + 4)
e) (8 – 12) – (2 – 5) f) (10 – 7) – (–2 – 6)
g) –(8 + 4) + (5 – 9) h) –(6 – 2) – (7 – 9)

13. Repite los ejercicios de la actividad anterior, operando en primer lugar dentro de los paréntesis, como se hace en este ejemplo:

- **(5 – 12) – (8 – 6) = (–7) – (2) = –7 – 2 = –9**

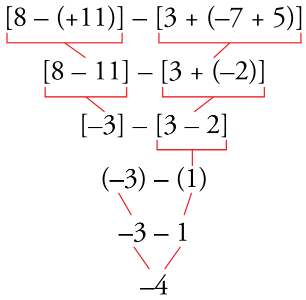
14. Calcula como en el ejemplo:

- **4 – [5 – (8 + 3)] = 4 – [5 – (11)] =**
  = 4 – [5 – 11] = 4 – [– 6] = 4 + 6 = 10

a) 6 + [5 + (7 + 2)] b) 8 + [4 – (3 + 5)]
c) 10 – [6 + (2 + 7)] d) 15 – [2 – (6 – 10)]
e) 15 – [10 – (8 + 4)] f) 12 – [7 – (2 – 10)]
g) (–6) + [5 + (2 – 12)] h) (–7) – [3 – (4 – 9)]

15. **Ejercicio resuelto**

Operar: [8 – (+11)] – [3 + (–7 + 5)]



[8 – (+11)] – [3 + (–7 + 5)] = [8 – 11] – [3 + (–2)] =
= [–3] – [3 – 2] = (–3) – (1) = –3 – 1 = –4

16. Calcula.

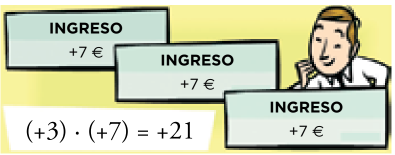
a) (2 – 10) + [5 – (8 + 2)]
b) (12 – 3) – [1 – (2 – 6)]
c) [9 – (+5)] + [7 + (–10)]
d) [10 – (–2)] – [5 – (+12)]
e) [8 – (6 + 4)] – (5 – 7)
f) [1 + (6 – 9)] – (8 – 12)

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación de números enteros

Ya sabes que multiplicar es hacer una suma repetida de sumandos iguales. Teniendo esto en cuenta, multiplicaremos números enteros igual que multiplicamos números naturales, solo que ahora tendremos que atender a los signos.

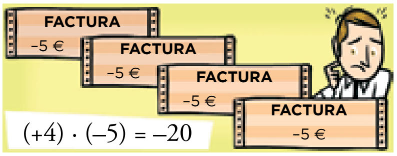


PRODUCTO DE DOS NÚMEROS POSITIVOS

Sumamos tres veces (+7):

$(+7) + (+7) + (+7) = 7 + 7 + 7 = +21$

$\mathbf{(+3) \cdot (+7) = +21}$

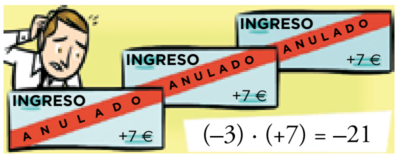


PRODUCTO DE UN NÚMERO POSITIVO POR OTRO NEGATIVO

Sumamos cuatro veces (–5):

$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -5 -5 -5 - 5 = -20$

$\mathbf{(+4) \cdot (-5) = -20}$

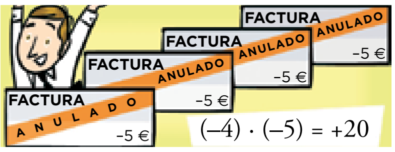


PRODUCTO DE UN NÚMERO NEGATIVO POR OTRO POSITIVO

Restamos tres veces (+7):

$-(+7) - (+7) - (+7) = -7 - 7 - 7 = -21$

$\mathbf{(-3) \cdot (+7) = -21}$



PRODUCTO DE DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Restamos cuatro veces (–5):

$-(-5) - (-5) - (-5) - (-5) = 5 +5 +5 +5 = 20$

$\mathbf{(-4) \cdot (-5) = +20}$

Para automatizar la multiplicación de enteros, aplica la siguiente regla, que te permite obtener el signo del producto sin necesidad de pararte a reflexionar.

En la web

Practica la regla de los signos.

REGLA DE LOS SIGNOS

Al multiplicar dos números enteros:

- Si los dos factores tienen el **mismo signo,** el **resultado** final es **positivo.** $\left\{\begin{array}{l}(+) \cdot (+) = +\\(-) \cdot (-) = +\end{array}\right.$
- Si los dos factores tienen **distinto signo,** el **resultado** final es **negativo.** $\left\{\begin{array}{l}(+) \cdot (-) = -\\(-) \cdot (+) = -\end{array}\right.$

Para multiplicar tres o más números enteros, tendremos en cuenta las propiedades de la multiplicación:

- **Conmutativa:** Cambiar el orden de los factores no influye en el resultado.
- **Asociativa:** La forma en que se agrupen los factores no cambia el resultado.

$$\overbrace{(-3) \cdot (+5)} \cdot (-2) \quad = \quad (-3) \cdot \overbrace{(+5) \cdot (-2)} \quad = \quad \overbrace{(-2) \cdot (-3)} \cdot (+5)$$

$$(-15) \cdot (-2) \qquad\qquad (-3) \cdot (-10) \qquad\qquad (+6) \cdot (+5)$$

$$+30 \qquad\qquad\qquad +30 \qquad\qquad\qquad +30$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

División de números enteros

Igual que en la multiplicación, lo único nuevo que necesitas aprender para dividir enteros es la forma de calcular el signo del cociente. Con lo que ya sabes del producto, es fácil averiguar ese signo:

(+4) · (+5) = +20 → (+20) : (+4) = +5 → *Más entre más, más.*

(–4) · (–5) = +20 → (+20) : (–4) = –5 → *Más entre menos, menos.*

(+4) · (–5) = –20 ↗ (–20) : (+4) = –5 → *Menos entre más, menos.*

(+4) · (–5) = –20 ↘ (–20) : (–5) = +4 → *Menos entre menos, más.*

La **regla de los signos** para la división coincide con la del producto.

SIGNOS IGUALES	**(+) : (+) = +** **(–) : (–) = +**
SIGNOS DIFERENTES	**(+) : (–) = –** **(–) : (+) = –**

Ejemplos

(–12) : (+4) = –3 (+30) : (–5) = –6 (+18) : (+9) = +2 (–15) : (–3) = +5

Ten en cuenta

No es lo mismo…

[(–60) : (+6)] : (–2)

[–10] : (–2)

+5

que…

(–60) : [(+6) : (–2)]

[–60] : (–3)

+20

La división de enteros **no es asociativa.**

Operaciones combinadas

En las expresiones con números enteros hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Ejemplo

15 – 3 · [6 – (–12) : (+4)]

15 – 3 · [6 – (–3)]

15 – 3 · [+9]

15 – 27

–12

15 – 3 · [6 – (–12) : (+4)] = 15 – 3 · [6 – (–3)] =

= 15 – 3 · [6 + 3] =

= 15 – 3 · [+9] = 15 – 27 = –12

Piensa y practica

1. Calcula estos productos:

a) 3 · (–2) b) 4 · (+5) c) 8 · (–6)

d) –5 · (+3) e) –2 · (–4) f) –6 · (+3)

g) (–4) · (+7) h) (+2) · (+6) i) (–5) · (–7)

j) (+3) · (–8) k) (–9) · (–3) l) (–6) · (+4)

2. Calcula el cociente entero, si existe.

a) (–8) : (+2) b) (+20) : (–10) c) (–12) : (–4)

d) (–4) : (+3) e) (+20) : (–7) f) (–1) : (+6)

g) (–15) : (–3) h) (+32) : (+8) i) (–36) : (+9)

j) (+42) : (–7) k) (–48) : (–8) l) (+54) : (+6)

3. Calcula.

a) (–3) · [(–9) – (–7)] b) 28 : [(–4) + (–3)]

c) [(–9) – (+6)] : (–5) d) (–11) – (–2) · [15 – (+11)]

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

El conjunto $\mathbb{Z}$. Orden y representación

1. Expresa con la notación de los números enteros, como se hace en el ejemplo:

- **Me llega una factura de 84 €. → $+(-84) = -84$**

a) Cobro 155 € por un trabajo realizado.

b) Le pago a Juana los 10 euros que le debía.

c) Mi hermano me perdona los 10 € que me prestó.

2. Escribe, en cada caso, todos los números enteros comprendidos entre:

a) $+5$ y -5 b) -10 y -2 c) -8 y 0

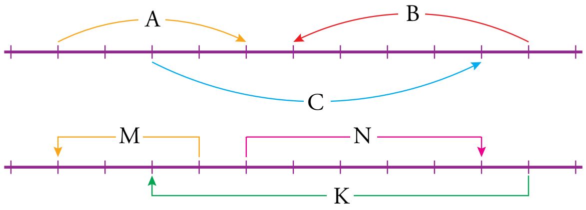
3. Ordena de menor a mayor.

a) $+6, +2, 0, +4, -7, +3$

b) $-7, -2, 0, -1, -5, -9$

c) $-4, 0, +6, -8, +3, -5$

4. Escribe un número entero para cada movimiento en la recta:



Suma y resta

5. Calcula.

a) $13 - 9 + 5 - 7$

b) $6 - 8 - 6 + 5 + 4 - 6$

c) $-3 - 5 + 2 - 1 - 7 + 4$

d) $-8 - 7 + 2 + 9 - 10 + 18$

6. Quita paréntesis y opera.

a) $(+3) - (+8)$

b) $(-9) + (-6)$

c) $(-7) - (-7) - (+7)$

d) $(-11) + (+8) - (-6)$

e) $(+15) - (-12) - (+11) + (-16)$

f) $(-3) - (-2) - (+4) + (-7) + (+8)$

7. Ejercicio resuelto

Calcular: $11 - (5 - 8 - 6 + 3)$

Podemos operar antes o después de quitar paréntesis:

- $11 - (5 - 8 - 6 + 3) = 11 - (5 + 3 - 8 - 6) =$
  $= 11 - (8 - 14) = 11 - (-6) = 11 + 6 = 17$
- $11 - (5 - 8 - 6 + 3) = 11 - 5 + 8 + 6 - 3 =$
  $= 11 + 8 + 6 - 5 - 3 = 25 - 8 = 17$

8. Calcula.

a) $(4 + 8) - (3 - 9)$

b) $10 + (8 - 15 + 2 - 6)$

c) $12 - (7 + 11 - 14 - 8)$

d) $(6 - 12 + 2) - (11 - 4 + 2 - 5)$

9. Ejercicio resuelto

$[(+2) + (-12)] - [(3 - 7) - (7 - 2)] =$

$= [2 - 12] - [(-4) - (+5)] = [-10] - [-4 - 5] =$

$= [-10] - [-9] = -10 + 9 = -1$

10. Calcula.

a) $(5 - 7) - [(-3) + (-6)]$

b) $(-8) + [(+7) - (-4) + (-5)]$

c) $(+9) - [(+3) - (3 - 12) - (+8)]$

d) $[(+6) - (-8)] - [(-4) - (-10)]$

e) $[(2 - 8) + (5 - 7)] - [(-9 + 6) - (-5 + 7)]$

Multiplicación y división

11. Opera como en el ejemplo y compara lo obtenido.

- **$(+48) : [(-6) \cdot (+4)] = (+48) : [-24] = -2$**
  $[(+48) : (-6)] \cdot (+4) = [-8] \cdot (+4) = -32$

a) $(-18) : [(+6) \cdot (-3)]$ $[(-18) : (+6)] \cdot (-3)$

b) $(+54) : [(-6) : (+3)]$ $[(+54) : (-6)] : (+3)$

12. Observa el ejemplo y resuelve.

- **$6 \cdot 5 - 4 \cdot 7 - 28 : 4 + 36 : 9 =$**
  $= 30 - 28 - 7 + 4 = 34 - 35 = -1$

a) $2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3$

b) $30 : 6 - 42 : 7 - 27 : 9$

c) $3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5$

d) $5 \cdot 4 - 28 : 4 - 3 \cdot 3$

Resuelve problemas

13. En una industria de congelados, la nave de envasado está a 12 °C, y el interior del almacén frigorífico, a 15 °C bajo cero. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la nave y la cámara?

14. Un día de invierno amaneció a dos grados bajo cero. A las doce del mediodía, la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cinco de la tarde subió 3 grados más. Desde las cinco a medianoche bajó 5 grados, y de medianoche al alba bajó 6 grados más. ¿A qué temperatura amaneció el segundo día?

15. Un buzo se encuentra en la plataforma base a 6 m sobre el nivel del mar y realiza estos desplazamientos:

a) Baja 20 metros para dejar material.

b) Baja 12 metros más para hacer una soldadura.

c) Sube 8 metros para reparar una tubería.

d) Finalmente, vuelve a subir a la plataforma.

¿Cuánto ha subido en su último desplazamiento?

16. Una estación de montaña emite este resumen de la evolución de sus finanzas a lo largo de un año:

MARZO-JUNIO: Pérdidas de 5 675 €/mes.

JULIO-AGOSTO: Ganancias de 4 280 €/mes.

SEPTIEMBRE-NOVIEMBRE: Pérdidas de 3 240 €/mes.

DICIEMBRE-FEBRERO: Ganancias de 9 720 €/mes.

¿Cuál fue el balance final del año?

17. Un depósito se abastece de agua mediante un grifo que se abre cada día, automáticamente, durante un cuarto de hora, y aporta un caudal de 15 litros por minuto. Después, se conecta, durante hora y media, a un sistema de riego que demanda un caudal de 3 litros por minuto.

a) Calcula cuánta agua gana o pierde el depósito al día.

b) Calcula la cantidad de agua que debe contener hoy, al iniciar el día, para que el riego se mantenga durante un mes.

Autoevaluación

1. Escribe un número entero para cada enunciado:

a) Jorge ha gastado 35 euros en el supermercado.

b) Adela ha recibido 6 euros de paga.

c) Hace frío. Estamos a dos grados bajo cero.

d) Mi casa está en la cuarta planta.

e) La temperatura ha subido de –2 °C a 2 °C.

f) La fiebre le ha bajado de 39 °C a 37 °C.

2. ¿Verdadero o falso?

a) Todos los números enteros son naturales.

b) Todos los números naturales son enteros.

c) Algunos números negativos son enteros.

d) Todos los números positivos son enteros.

e) Cualquier número entero es mayor que cero.

3. Representa estos números en una recta numérica:

$(+3), (-4), (+1), (-6), (-1), (+5), (-5)$

4. Ordena de menor a mayor.

$(+4), (-3), (+5), (-5), (+1), (-6), (+2), (-1)$

5. Calcula.

a) $4 - 9$ b) $3 - 8 + 1$

c) $-5 - 7 + 4 + 2$ d) $10 - 12 + 15 - 9 - 7$

6. Opera.

a) $(-7) + (+4)$ b) $(+2) - (-3) + (-5)$

c) $(-8) - (5 - 9)$ d) $20 - [(15 - 9) - (7 + 3)]$

7. Resuelve.

a) $5 \cdot (-2)$ b) $(-3) \cdot (-4)$ c) $(-1) \cdot (+3) \cdot (-5)$

d) $15 : (-3)$ e) $(-18) : (-6)$ f) $(-20) : [(+12) : (-3)]$

8. Resuelve.

a) $4 \cdot 5 - 2 \cdot 8 - 3 \cdot 2$ b) $(-2) \cdot (6 - 8)$

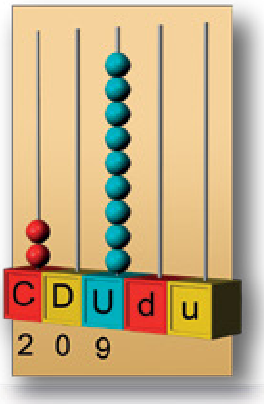
c) $(-3) \cdot (+5) - [(8 - 12) - (5 - 2)]$

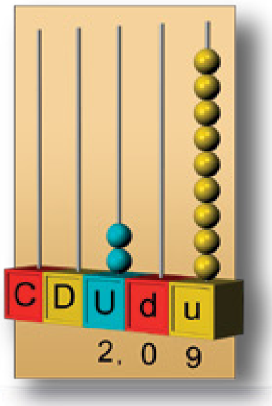
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Los números decimales

La mayor parte de los sistemas de numeración de las antiguas civilizaciones son de base decimal, que proviene, sin duda, de contar con los dedos de las manos.

Los indios, en el siglo VII, añadieron a la base decimal la notación posicional: el valor de un signo (cifra), depende de la posición que ocupa. Este grandioso avance vino unido a la invención del cero para ocupar las posiciones vacías.

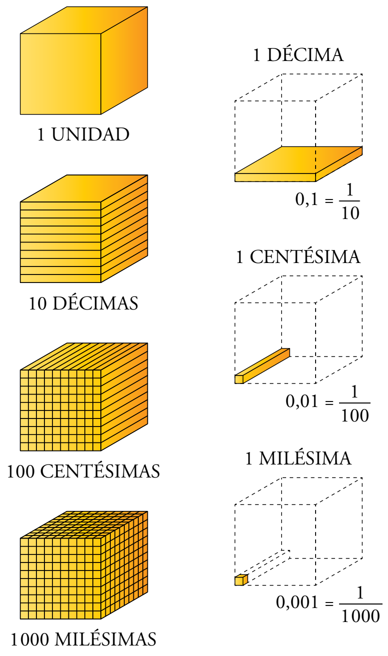




El sistema de numeración decimal-posicional se usó inicialmente en Europa solo para designar números enteros. Fue en el siglo XVI cuando se hizo extensivo, también, para cuantificar partes de la unidad (números decimales).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

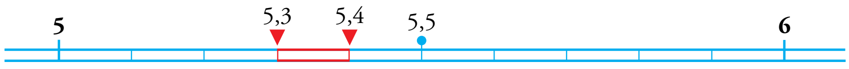
1 Estructura de los números decimales



Los órdenes de unidades decimales

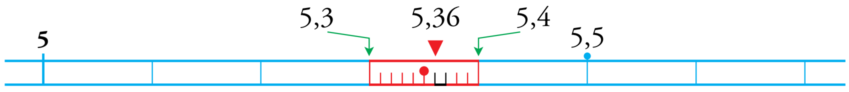
Para expresar cantidades más pequeñas que la unidad, utilizamos los órdenes de unidades decimales.

- Al dividir una unidad en diez partes iguales, cada parte es una **décima.**



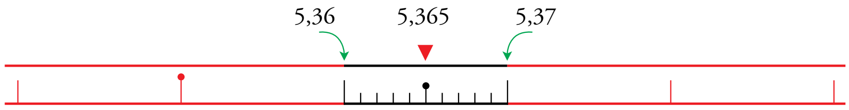
5,3 → Cinco unidades y tres décimas

- Al dividir una décima en diez partes iguales, cada parte es una **centésima.**



5,36 → Cinco unidades y treinta y seis centésimas

- Al dividir una centésima en diez partes iguales, cada parte es una **milésima.**



5,365 → Cinco unidades y trescientas sesenta y cinco milésimas

- En el sistema de numeración decimal, una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

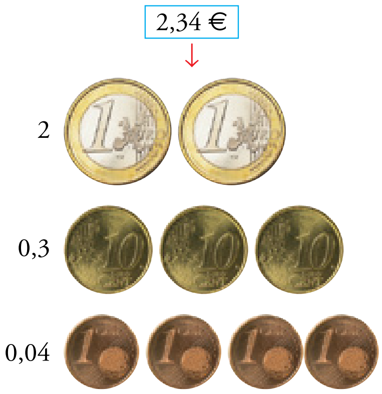
10 U = 10 d = 100 c = 1 000 m = …

DÉCIMAS
CENTÉSIMAS
MILÉSIMAS
DIEZMILÉSIMAS
UNIDADES
CIENMILÉSIMAS
DECENAS
MILLONÉSIMAS

...	D	U,	d	c	m	dm	cm	mm	...
	1	3,	0	5	7	4			

Trece unidades y quinientas setenta y cuatro diezmilésimas

- Para leer un número decimal:
  - — Se nombra la parte entera expresada en unidades.
  - — Se nombra la parte decimal expresada en el orden de unidades de la cifra decimal que queda a la derecha.



Dos unidades y treinta y cuatro centésimas

En la web

Practica la lectura de números decimales.

Ten en cuenta

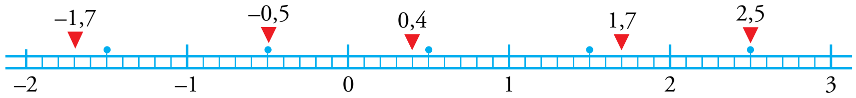
Los ceros a la derecha de un número decimal no modifican el valor del número.

U,	d	c	m
2,	5		
2,	5	0	
2,	5	0	0

2,5 = 2,50 = 2,500

Orden en los números decimales

Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.



–1,7 < –0,5 < 0,4 < 1,7 < 2,5

Pero también puedes comparar números sin acudir a la representación en la recta, observando las cifras y el lugar que ocupan:

- Para comparar dos números decimales, se compara la parte entera.

  Por ejemplo:

  5,375 < 6,1 → porque 5 U < 6 U

U,	d	c	m
5,	3	7	5
6,	1	0	0

- Si tienen la misma parte entera, se iguala la cantidad de cifras decimales poniendo ceros a la derecha y se compara la parte decimal.

  Por ejemplo:

  $$\begin{array}{ccc} 3{,}25 & & 3{,}4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3{,}25 & < & 3{,}40 \end{array} \rightarrow \text{porque } 25 \text{ c} < 40 \text{ c}$$

U,	d	c	m
3,	2	5	
3,	4	0	

Piensa y practica

1. Escribe con cifras.

a) Ocho décimas. b) Dos centésimas.

c) Tres milésimas. d) Trece milésimas.

2. Escribe cómo se leen.

a) 1,2 b) 12,56 c) 5,184

d) 1,06 e) 5,004 f) 2,018

3. Escribe con cifras.

a) Once unidades y quince centésimas.

b) Ocho unidades y ocho centésimas.

c) Una unidad y trescientas once milésimas.

d) Cinco unidades y catorce milésimas.

4. Escribe cómo se leen.

a) 0,0007 b) 0,0042 c) 0,0583

d) 0,00008 e) 0,00046 f) 0,00853

g) 0,000001 h) 0,000055 i) 0,000856

5. Escribe con cifras.

a) Quince diezmilésimas.

b) Ciento ochenta y tres cienmilésimas.

c) Cincuenta y ocho millonésimas.

6. Observa la tabla y contesta.

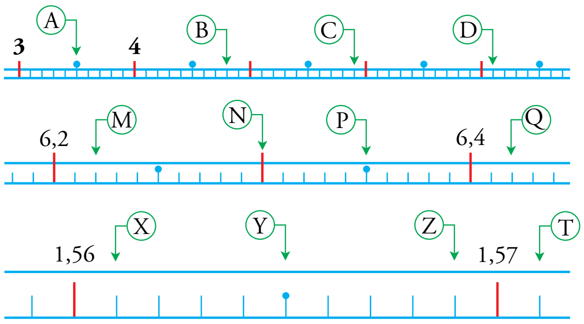
U,	d	c	m			
		4	0			
		2	0	0		
			3	0	0	0

a) ¿Cuántas centésimas hay en 40 milésimas?

b) ¿Cuántas centésimas hacen 200 diezmilésimas?

c) ¿Cuántas millonésimas hay en 3 milésimas?

7. Indica el valor que representa cada letra:



8. Ordena de menor a mayor.

a) 5,83 5,51 5,09 5,511 5,47

b) 0,1 0,09 0,099 0,12 0,029

c) 0,5 –0,8 –0,2 1,03 –1,1

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

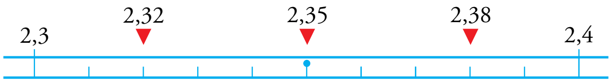
Entre dos decimales siempre hay otros decimales

- Elijamos dos números cualesquiera; por ejemplo, 2,3 y 2,6. Es evidente que entre ellos hay otros decimales:

$$2{,}3 < 2{,}4 < 2{,}5 < 2{,}6$$

- Busquemos, ahora, un número decimal comprendido entre 2,3 y 2,4.

  Estos dos números se diferencian en una décima, y esa décima se puede dividir en diez centésimas.



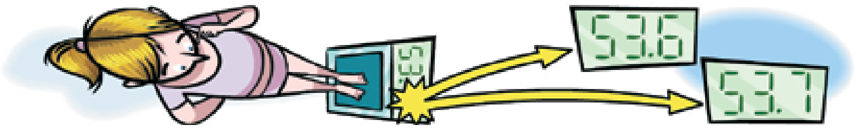
Añadiendo alguna de esas centésimas a 2,3, obtenemos decimales comprendidos entre 2,3 y 2,4.

$$2{,}3 = 2{,}30 < 2{,}32 < 2{,}35 < 2{,}38 < 2{,}40 = 2{,}4$$

El proceso puede continuar indefinidamente o repetirse para cualquier otro par de números.

Problema resuelto

Lola tiene una báscula en el cuarto de aseo que aprecia hasta las décimas de kilo. Si el peso no coincide con un número exacto de décimas, parpadea entre la décima anterior y la siguiente. ¿Qué peso te atribuirías si la báscula parpadeara entre 53,6 kg y 53,7 kg?



Intercalamos un número decimal que ocupe la posición intermedia ente 53,6 y 53,7:

53,6 = 53,60 → 53,65 ← 53,70 = **53,7**

Solución: Podemos decir que el peso asciende a 53,65 kilos, aproximadamente.

Piensa y practica

9. Copia en tu cuaderno y escribe un número en cada casilla.

2,6 < ☐ < 2,8 7 < ☐ < 8 0,3 < ☐ < 0,5
0,4 < ☐ < 0,5 1,25 < ☐ < 1,27 3,42 < ☐ < 3,43

10. Intercala un número decimal entre cada par de números:

a) 2,99 y 3 b) 4 y 4,1 c) 3,1 y 3,11
d) 0,5 y 0,51 e) 0,523 y 0,524 f) 1,999 y 2

11. Escribe, en cada caso, un número decimal que esté a la misma distancia de los dos números dados:

a) 4 y 5 b) 1,8 y 1,9 c) 2,04y2,05

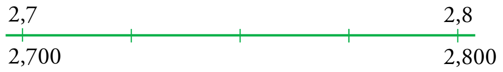
12. En un encuentro internacional de atletismo se disputa la prueba de los 100 metros lisos.

Dos jueces se encargan de tomar el tiempo del ganador, pero obtienen una ligera diferencia en sus mediciones:

- Juez A → 9 segundos y 92 centésimas
- Juez B → 9 segundos y 93 centésimas

¿Qué tiempo le asignarías al ganador de la prueba?

13. Intercala, a intervalos iguales, tres números entre 2,7 y 2,8.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Aproximación por redondeo

En algunas ocasiones se nos presentan números con demasiadas cifras decimales y preferimos, o nos vemos obligados, a sustituirlos por otros más manejables de valor aproximado.

Ejemplo

En el banco me han calculado los intereses de dos cuentas bancarias:

A → 18,2733 € *B → 35,3682 €*

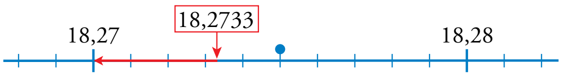
Sin embargo, las cantidades ingresadas han sido:

A → 18,27 € *B → 35,37 €*

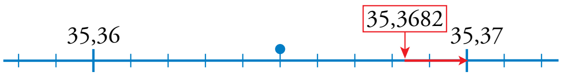
¿Por qué las cantidades aplicadas no coinciden con las que se habían calculado?

La unidad monetaria más pequeña es el céntimo. Por eso, los resultados con muchas cifras decimales se han de concretar con redondeos a los céntimos.

- En el primer caso, cuenta A, la cantidad 18,2733 está más cerca de 18,27 que de 18,28. Por eso se toman 27 céntimos (observa que la cifra de las centésimas no cambia).



- En el segundo caso, cuenta B, la cantidad 35,3682 está más cerca de 35,37 que de 35,36. Ahora se toman 37 céntimos (observa que se ha sumado uno a la cifra de las centésimas).



Observa

En las transacciones bancarias y comerciales, se aplican los redondeos considerando que los que van a la baja se compensan con los que van al alza.

Como ves, en cada caso se toma el céntimo completo más cercano.

Para **redondear** un número a un determinado orden de unidades:

- Se suprimen todas las cifras a la derecha de dicho orden.
- Si la primera cifra suprimida es igual o mayor que cinco, se suma uno a la cifra anterior. Y si no lo es, se deja como está.

Ejercicio resuelto

Aproxima a los gramos el peso de cada caja. Recuerda que un gramo es una milésima de kilo.

4 : 3 = 1,333333…
Cada caja pesa 1,333 kg.

5 : 3 = 1,666666…
Cada caja pesa 1,667 kg.

Piensa y practica

14. Redondea a las décimas.

a) 6,27 b) 3,84 c) 2,99
d) 0,094 e) 0,341 f) 0,856

15. Redondea a las centésimas.

a) 0,574 b) 1,278 c) 5,099
d) 3,0051 e) 8,0417 f) 2,99

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Suma, resta y multiplicación de números decimales

Ya conoces la suma, la resta y la multiplicación de decimales. Por eso, nos limitaremos a repasarlas incorporando el manejo de los números negativos.

Suma y resta

Problema resuelto

En el depósito de frío de una granja, que estaba vacío, han vertido dos cántaras de leche, con 12,35 litros y 7,65 litros. Después, se han extraído dos bidones para hacer queso, uno de 8,9 litros y otro de 5,45 litros. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

$$\begin{array}{rr} \text{ENTRAN} & \text{SALEN} \\ 12,35 & 8,9 \\ +\ 7,65 & +\ 5,45 \\ \hline 20,00 & 14,35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{QUEDAN} \\ 20,00 \\ -\ 14,35 \\ \hline 5,65 \end{array}$$

(12,35 + 7,65) – (8,9 + 5,45) = 20 – 14,35 = 5,65

Solución: En el depósito quedan 5,65 litros de leche.

En la web
Practica sumando números decimales.

En la web
Practica restando números decimales.

Para sumar o restar números decimales:

- Se colocan en columna haciendo corresponder las comas.
- Se suman (o se restan) unidades con unidades, décimas con décimas, etc.

Todo lo que se dijo sobre los números negativos en las operaciones con enteros sirve también para las operaciones con decimales.

Multiplicación

Problema resuelto

Si una hora de aparcamiento cuesta 2,50 €, ¿cuánto pagaremos por una estancia de tres horas y cuarto (3,25 h)?

$$\begin{array}{rl} 3,\ 2\ 5 & \leftarrow \text{2 cifras decimales} \\ \times\ 2,\ 5 & \leftarrow \text{1 cifra decimal} \\ \hline 1\ 6\ 2\ 5 & \downarrow \\ 6\ 5\ 0\ \ & \\ \hline 8,\ 1\ 2\ 5 & \leftarrow 2 + 1 = \text{3 cifras decimales} \end{array}$$

Solución: 8,125 € $\xrightarrow{\text{REDONDEO}}$ 8,13 € pagaremos por la estancia.

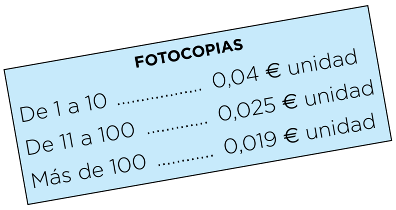
Para multiplicar números decimales:

- Se multiplican como si fueran enteros.
- Se coloca la coma en el producto, apartando tantas cifras decimales como las que reúnan entre todos los factores.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Multiplicación por 10, 100, 1000, …

Recuerda que para multiplicar un número decimal por 10, por 100, por 1 000, …, solo hay que mover la coma hacia la derecha uno, dos, tres, … lugares.



FOTOCOPIAS

De 1 a 10	0,04 € unidad
De 11 a 100	0,025 € unidad
Más de 100	0,019 € unidad

En la web

Practica multiplicando números decimales.

Ejemplo

Teniendo en cuenta los precios que anuncia el cartel de la izquierda, calculamos:

- Coste de 10 fotocopias → $0,04 \cdot 10 = 0,40$ €
- Coste de 100 fotocopias → $0,025 \cdot 100 = 2,50$ €
- Coste de 1 000 fotocopias → $0,019 \cdot 1\,000 = 19,00$ €

> Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente.

a) $0,8 + 0,4$
b) $1 - 0,3$
c) $1,2 + 1,8$
d) $2,4 - 0,6$
e) $3,25 + 1,75$
f) $2,5 - 0,75$

2. Calcula con lápiz y papel.

a) $6,12 + 0,87 + 1,342$
b) $124,75 + 86,287 + 5,3408$
c) $132 - 26,53$
d) $12,8 - 1,937$
e) $175,4 - 86,9207$

3. Recuerda las operaciones con números positivos y negativos y calcula mentalmente.

a) $0,5 - 0,75$
b) $1,2 - 1,5$
c) $0,25 - 1$
d) $2 - 1,95$
e) $0,4 + 0,8 - 1,6$
f) $2,7 - 0,95 - 1,04$

4. Añade tres términos a estas series:

a) 3,25 - 4 - 4,75 - 5,5 - …
b) 8,65 - 8,5 - 8,35 - 8,2 - …
c) 1,5 - 1,62 - 1,74 - 1,86 - …

5. Resuelve en tu cuaderno.

a) $17,28 - 12,54 - 4,665$
b) $17,28 - (12,54 - 4,665)$
c) $12,4 - 18,365 + 7,62$
d) $12,4 - (18,365 + 7,62)$

6. Copia en tu cuaderno y coloca la coma decimal que falta en cada producto:

a) $2,7 \cdot 1,5 \rightarrow 405$
b) $3,8 \cdot 12 \rightarrow 456$
c) $0,3 \cdot 0,02 \rightarrow 0006$
d) $11,7 \cdot 0,45 \rightarrow 5265$

7. Multiplica.

a) $3,26 \cdot 100$
b) $35,29 \cdot 10$
c) $4,7 \cdot 1\,000$
d) $9,48 \cdot 1\,000$
e) $-6,24 \cdot 100$
f) $0,475 \cdot (-10)$

8. Calcula en tu cuaderno.

a) $3,25 \cdot 16$
b) $2,6 \cdot 5,8$
c) $27,5 \cdot 10,4$
d) $3,70 \cdot 1,20$
e) $4,03 \cdot 2,7$
f) $5,14 \cdot 0,08$

9. Calcula.

a) $8 \cdot 0,3$
b) $5 \cdot 0,5$
c) $0,4 \cdot 0,3$
d) $0,75 \cdot 2$
e) $0,25 \cdot 4$
f) $0,25 \cdot 5$
g) $(-0,1) \cdot (+6)$
h) $0,2 \cdot (-0,4)$
i) $(-0,1) \cdot (-0,2)$
j) $(-0,2) \cdot (-0,2)$

10. Opera como en el ejemplo.

- **$5,6 - 2,1 \cdot (0,5 - 1,2) = 5,6 - 2,1 \cdot (-0,7) =$**
  $= 5,6 + 1,47 = 7,07$

a) $8,3 + 0,5 \cdot (3 - 4,2)$
b) $3,5 - 0,2 \cdot (2,6 - 1,8)$
c) $(5,2 - 6,8) \cdot (3,6 - 4,1)$
d) $(1,5 - 2,25) \cdot (3,6 - 2,8)$

11. En la ferretería se vende el cable blanco a 0,80 € el metro, y el negro, más grueso, a 2,25 € el metro. ¿Cuánto pagaremos por 3,5 m del blanco y 2,25 m del negro ?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 División de números decimales

Ahora vas a profundizar en lo que sabes sobre la división de números decimales. Empezaremos con las divisiones de divisor entero.

Divisor entero. Aproximación del cociente

Vamos a repasar la forma de obtener las cifras decimales del cociente hasta conseguir la aproximación deseada.

Ejercicios resueltos

1. ***Queremos repartir un bidón de 15 litros de aceite en cuatro garrafas iguales. ¿Cuántos litros pondremos en cada garrafa?***

$$\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array} \rightarrow$$

El cociente entero deja un resto de 3 unidades.

$$\begin{array}{r|l} 15{,}0 & 4 \\ \cline{2-2} 3\ 0 & 3{,}7 \\ 2 & \end{array} \rightarrow$$

Transformamos las tres unidades del resto en 30 décimas y las dividimos entre 4. Por eso ponemos la coma en el cociente. Sobran 2 décimas.

$$\begin{array}{r|l} 15{,}0 & 4 \\ \cline{2-2} 3\ 0 & 3{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \rightarrow$$

Continuamos la división transformando las 2 décimas en 20 centésimas.

Solución: Pondremos 3,75 litros en cada garrafa.

2. ***Doña Emilia compra un queso de un kilo y setecientos veinticinco gramos, para repartirlo con sus dos hermanas. ¿Qué cantidad de queso apartará para cada una?***

$$\begin{array}{r|l} 1{,}725 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 1{,}725 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 0{,}5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 1{,}725 & 3 \\ \cline{2-2} 22 & 0{,}575 \\ 15 & \\ 0 & \end{array}$$

Solución: Cada hermana se llevará 0,575 kg de queso (575 gramos).

Para obtener el cociente decimal:

- Al bajar la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para lograr la aproximación deseada.

En la web

Practica dividiendo números decimales.

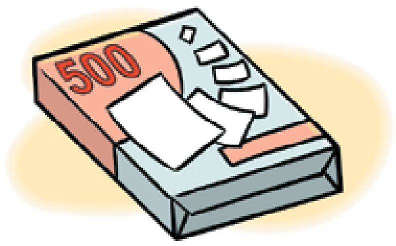
Dividir por 10, 100, 1000, ...

Recuerda que para dividir un número por 10, por 100, por 1 000, …, solo hay que mover la coma hacia la izquierda uno, dos, tres, … lugares.

Ejemplos

Teniendo en cuenta el peso del paquete de 500 folios, calculamos:

- Peso de 100 folios → 2 331 : 5 = 466,2 gramos
- Peso de 10 folios → 466,2 : 10 = 46,62 gramos
- Peso de 1 folio → 466,2 : 100 = 4,662 gramos



2 331 gramos

Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Divide mentalmente.

a) 1 : 2 b) 5 : 2

c) 7 : 2 d) 1 : 4

e) 2 : 4 f) 5 : 4

g) 1,2 : 2 h) 1,2 : 3

i) 1,2 : 4 j) 0,6 : 3

k) 0,8 : 4 l) 0,9 : 9

2. Copia y completa.

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 2 & 4 & & 7 \\ \cline{5-5} & \square & \square & & 46,\square\square \\ & & \square & \square & \\ & & & \square\square & \\ & & & \square & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} 1 & 4, & 3 & 4 & 6 \\ \cline{5-5} & \square & \square & & 2,\square\square \\ & & \square & \square & \\ & & & \square & \end{array}$$

3. Calcula con dos cifras decimales, si las hay.

a) 28 : 5 b) 53 : 4

c) 35 : 8 d) 7,5 : 3

e) 6,2 : 5 f) 12,5 : 4

g) 47 : 3 h) 9 : 7

i) 169 : 11 j) 7,7 : 6

k) 14,3 : 9 l) 96,7 : 22

4. Calcula el cociente sacando, como máximo, dos cifras decimales.

a) 526 : 23 b) 6 321 : 145

c) 82,93 : 36 d) 1 245,4 : 263

5. Calcula y aproxima a las décimas, como en el ejemplo.

- **86 : 7 = 12,28...** $\xrightarrow{\text{REDONDEO}}$ **12,3**

a) 10 : 3 b) 16 : 9

c) 25 : 7 d) 9,2 : 8

e) 15,9 : 12 f) 45,52 : 17

6. Divide.

a) 5 : 10 b) 8 : 100

c) 2 : 1 000 d) 3,6 : 10

e) 5,7 : 100 f) 2,8 : 1 000

g) 2,54 : 10 h) 57,25 : 100

i) 0,3 : 1 000 j) 43,02 : 100

7. Observa el ejemplo y calcula el cociente con dos cifras decimales.

- **5 : 9** $\rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{5,0} & \mathbf{9} \\ \cline{2-2} \mathbf{5} & \mathbf{0,5} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{5,00} & \mathbf{9} \\ \cline{2-2} \mathbf{50} & \mathbf{0,55} \\ \mathbf{5} & \end{array}$

a) 1 : 4 b) 3 : 5

c) 30 : 8 d) 2 : 9

e) 6 : 11 f) 5 : 234

8. Calcula con tres cifras decimales, si las hay.

a) 0,9 : 5 b) 0,5 : 4

c) 0,3 : 9 d) 1,2 : 7

e) 0,08 : 2 f) 0,02 : 5

9. Observa el ejemplo y calcula el cociente con dos cifras decimales.

- **0,8 : 6** $\rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{\overset{\frown}{0},8} & \mathbf{6} \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{\overparen{0,8}} & \mathbf{6} \\ \cline{2-2} \mathbf{2} & \mathbf{0,1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} \mathbf{\overparen{0,80}} & \mathbf{6} \\ \cline{2-2} \mathbf{20} & \mathbf{0,13} \\ \mathbf{2} & \end{array}$

a) 0,9 : 5 b) 0,5 : 4

c) 0,3 : 9 d) 1,2 : 7

e) 0,08 : 2 f) 0,02 : 5

10. Arancha ha gastado 51,60 € en los diez días que ha estado de vacaciones en la playa.

¿Cuánto ha gastado, por término medio, al día?

11. Tres botes de refresco hacen un litro. Expresa en litros la capacidad de un bote.

12. Una empresa de mantenimiento de carreteras se compromete a señalizar 15 kilómetros de una nueva autopista en ocho días. ¿Cuántos kilómetros debe señalizar por término medio cada día?

13. Un paquete con seis yogures pesa 0,678 kg. Expresa en kilos el peso de un yogur.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

El sistema de numeración decimal

1. Escribe cómo se leen.

a) 13,4 b) 0,23 c) 0,145
d) 0,0017 e) 0,0006 f) 0,000148

2. Escribe con cifras.

a) Ocho unidades y seis décimas.
b) Tres centésimas.
c) Dos unidades y cincuenta y tres milésimas.
d) Doscientas trece cienmilésimas.
e) Ciento ochenta millonésimas.

3. Escribe con cifras.

a) Media unidad. b) Media décima.
c) Media centésima. d) Un cuarto de unidad.

4. Expresa en décimas.

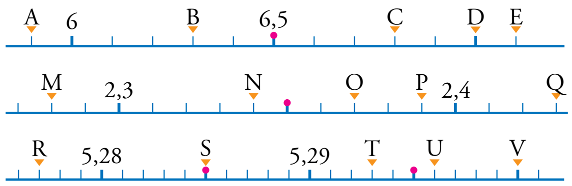
a) 6 decenas. b) 27 unidades.
c) 200 centésimas. d) 800 milésimas.

Orden. Representación. Redondeo

5. Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 1,4 1,390 $1{,}3\overset{\frown}{9}$ 1,399 1,41
b) –0,6 0,9 –0,8 2,07 –1,03

6. Asocia un número a cada letra:



7. Intercala un número decimal entre:

a) 0,5 y 0,6 b) 1,1 y 1,2 c) 0,24 y 0,25
d) 6,16 y 6,17 e) 1 y 1,1 f) 3,2 y 3,01

8. **Ejercicio resuelto**

Aproximar 3,70965 a las…
Unidades → 4 Décimas → 3,7
Centésimas → 3,71 Milésimas → 3,710

9. Aproxima, en cada caso, a las unidades, a las décimas y a las centésimas:

a) 2,499 b) 1,992 c) 0,999

Operaciones

Sumas y restas

10. Calcula mentalmente.

a) ¿Cuánto le falta a 4,7 para valer 5?
b) ¿Cuánto le falta a 1,95 para valer 2?
c) ¿Cuánto le falta a 7,999 para llegar a 8?

11. Realiza estas operaciones:

a) 13,04 + 6,528 b) 2,75 + 6,028 + 0,157
c) 4,32 + 0,185 – 1,03 d) 6 – 2,48 – 1,263

12. Opera las expresiones siguientes:

a) 5 – (0,8 + 0,6)
b) 2,7 – (1,6 – 0,85)
c) (3,21 + 2,4) – (2,8 – 1,75)
d) (5,2 – 3,17) – (0,48 + 0,6)

Multiplicación y división

13. Multiplica.

a) 0,6 · 0,4 b) 0,03 · 0,005
c) 1,3 · 0,08 d) 15 · 0,007
e) 2,65 · 1,24 f) 0,25 · 0,16

14. Haz estas divisiones, sacando como máximo dos cifras decimales:

a) 4 : 7 b) 15 : 23
c) 7,5 : 4 d) 13,2 : 354

15. Multiplica y divide mentalmente.

a) 0,12 · 10 b) 0,12 : 10
c) 0,002 · 100 d) 0,002 : 100
e) 0,125 · 1 000 f) 0,125 : 1 000

16. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 72 : … = 7,2 b) 3,8 : … = 0,038
c) … : 1 000 = 0,05 d) … : 100 = 2,3

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

17. Patricia colecciona monedas de 10 y de 20 céntimos. Tiene 87 de las primeras y 52 de las segundas. ¿Cuál es el valor de su colección?

18. Tras consultar con su dietista, el señor Horondo se ha puesto a régimen. En la tabla ha recogido los resultados de la báscula tomados el primer día de cada uno de los seis últimos meses:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°
91,38	90,16	88,815	87,801	86,9	86,15

a) ¿En qué mes ha adelgazado más?

b) ¿Cuánto ha adelgazado en total?

19. Con una cinta de 20 metros se han confeccionado 5 lazos iguales.

¿Cuánto mide el trozo de cinta que lleva un lazo?

20. Con 15 kilos de miel se han llenado 25 frascos. ¿Cuál es el peso de cada frasco, teniendo en cuenta que el casco y la tapa pesan 0,12 kg?

21. Cuatro tazas pesan lo mismo que cinco vasos. Si cada taza pesa 0,115 kg, ¿cuánto pesa cada vaso?

22. Una empresa de productos lácteos vende los yogures a 1,20 € la unidad. De esa cantidad, la tercera parte corresponde al envase; la mitad, a costes de producción, comercialización y ganancias, y el resto, al contenido.

¿Cuánto cuesta el contenido?

23. Raquel ha hecho este trimestre tres exámenes de matemáticas y ha sacado un 5,5, un 7 y un 2,40. ¿Cuál es su nota media?

24. Rosa y Javier compran en el supermercado:

— Cinco litros de leche a 1,05 € el litro.

— Una bolsa de bacalao que pesa 0,92 kg a un precio de 13,25 €/kg.

— Un paquete de galletas que cuesta 2,85 €.

— Un cuarto de kilo de jamón a 38,40 €/kg.

¿Cuánto pagan en caja por la compra?

Autoevaluación

1. Escribe con cifras.

a) Veintiocho milésimas.

b) Dos unidades y siete centésimas.

c) Ciento treinta y dos diezmilésimas.

d) Nueve millonésimas.

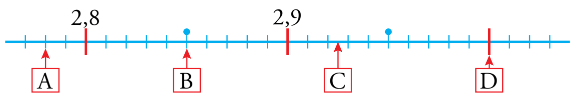
2. Ordena de menor a mayor y representa en la recta.

2,07 - 0,27 - 2,71 - 2,7 - 2,17

3. Copia y completa con un número decimal.

a) 4,5 < … < 4,6 b) 0,1 < … < 0,11

4. ¿Qué número señala cada letra?:



5. Calcula.

a) 2,8 – 3,75 + 1,245 b) 2,8 · 3,75

c) 6,8 · 100 d) 2,6 : 100

6. Calcula.

a) 4,2 – 0,2 · 5 – 0,6 b) 4,2 – 0,2 · (5 – 0,6)

c) (4,2 – 0,2) · 5 – 0,6 d) 4,2 – (0,2 · 5 – 0,6)

7. Calcula con dos cifras decimales.

a) 7 : 13 b) 54,5 : 12

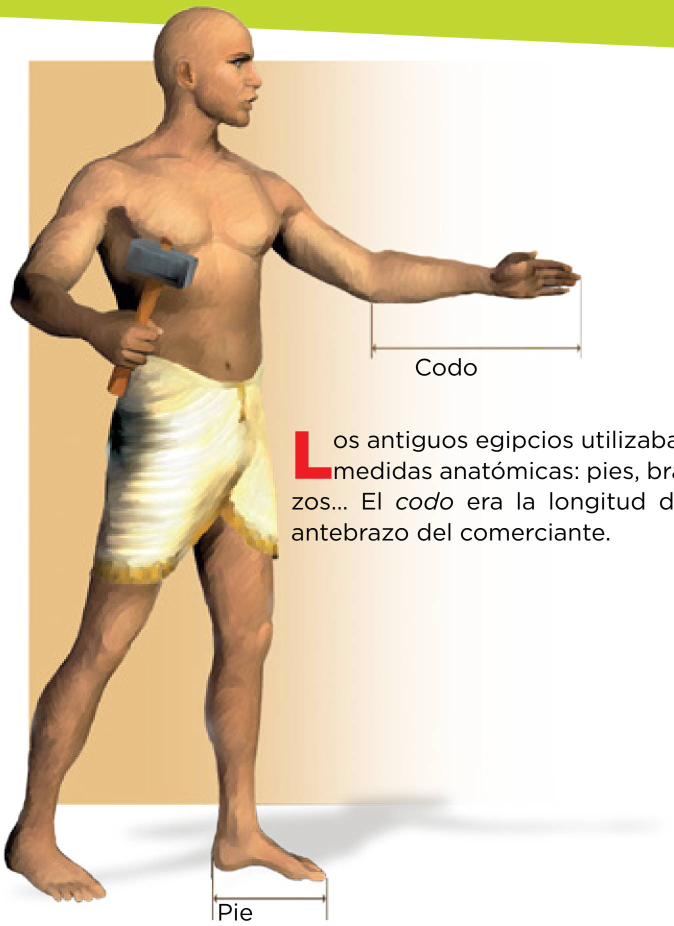
8. El melón se vende a 1,75 €/kg. ¿Cuánto costará un melón de 2,800 kilos?

9. Manuel trabaja de forma eventual, en una tienda, envolviendo paquetes de regalo. Por cada paquete le dan ochenta céntimos. Ayer hizo 30 paquetes. ¿Cuánto ganó?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 El Sistema Métrico Decimal

El intercambio de mercancías, el comercio, obliga a disponer de un sistema de medidas que sirva de referencia. Desde siempre, cualquier grupo humano de cierto nivel de civilización tuvo un sistema de medidas.



Los antiguos egipcios utilizaban medidas anatómicas: pies, brazos… El *codo* era la longitud del antebrazo del comerciante.

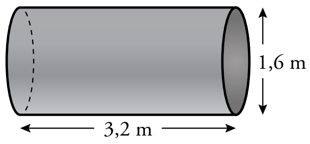
Al proliferar el negocio entre países y mejorar las comunicaciones, se hizo necesario crear un sistema de medidas universal. El *Sistema Métrico Decimal* (S.M.D.) se creó en Francia a finales del siglo XVIII y fue pronto adoptado por muchos países.

Actualmente, el 95% de la población mundial se rige por él.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Las magnitudes y su medida

Para recopilar y transmitir información relativa a los objetos, atendemos a sus cualidades y propiedades características.



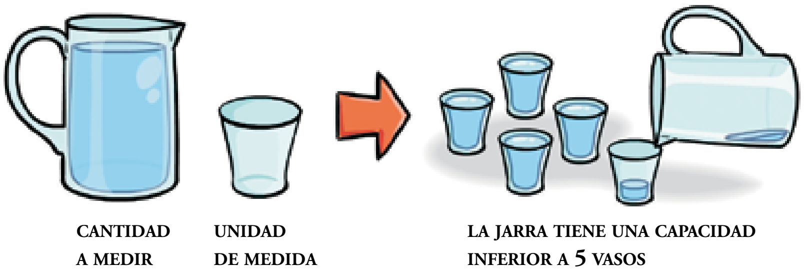
MATERIA: Acero inoxidable
COLOR: Gris metálico
FORMA: Cilíndrica
PESO: 483 kg
CAPACIDAD: 6,43 m^3

Algunas de esas cualidades se pueden medir y cuantificar de forma numérica. Son las **magnitudes.**

Ejemplos de magnitudes: peso, longitud, superficie, temperatura, voltaje, intensidad del sonido, potencia de un motor, …

Qué es medir una magnitud

Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad fija y predeterminada llamada **unidad de medida.**



Una magnitud se puede medir en distintas unidades. Para que la información que aporta una medida sea significativa, la unidad utilizada ha de ser conocida y aceptada por toda la comunidad. Es decir, debe ser **convencional** y estandarizada.

Piensa y practica

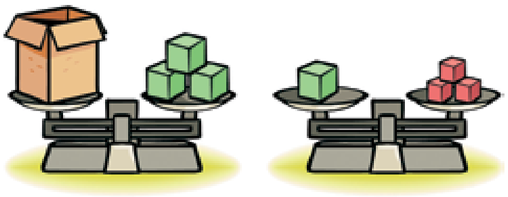
1. ¿Verdadero o falso?

a) El kilómetro es una magnitud.
b) El palmo es una unidad de longitud.
c) La capacidad de memoria de un ordenador es una magnitud.
d) La cinta métrica es una unidad de medida.
e) La balanza es un instrumento de medida.
f) El decibelio es una unidad que se utiliza para medir la intensidad del sonido.

2. El color y la forma son cualidades, pero no magnitudes. ¿Por qué?

3. Expresa el peso de la caja, tomando como unidad:

a) Un cubito verde. b) Un cubito rojo.



4. ¿Qué magnitudes se miden con estas unidades?:

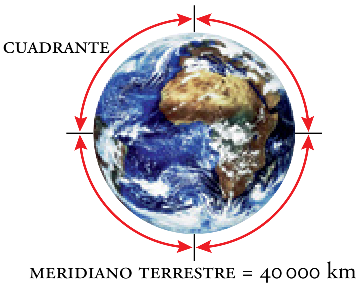
a) Segundo. b) Bit. c) Grado centígrado.
d) Gramo. e) Voltio. f) Metro cuadrado.

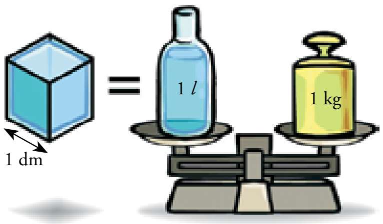
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 El Sistema Métrico Decimal

A lo largo de la historia, cada región, cada país, cada grupo cultural ha adoptado sus propias unidades de medida, diferentes en cada caso.

La diversidad de unidades dificultaba la comunicación entre las distintas comunidades. Así surgió la necesidad de crear un sistema de medidas que fuera conocido y adoptado por todos los países. A finales del siglo XVIII (en 1792), la Academia de Ciencias de París propuso para tal fin el Sistema Métrico Decimal.





El **Sistema Métrico Decimal** (S.M.D.) es un conjunto de unidades de medida para las magnitudes básicas. Y está dotado de una estructura:

- Las unidades fundamentales están relacionadas entre sí.

MAGNITUD		UNIDAD FUDAMENTAL		
LONGITUD	→	EL METRO	→	Es la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre.
CAPACIDAD	→	EL LITRO	→	Es la capacidad de un cubo de un decímetro de arista.
PESO	→	EL GRAMO	→	Es el peso de un centímetro cúbico de agua.

- Además, cada unidad posee un juego de múltiplos y submúltiplos, relacionados por potencias de base 10, que se designan por los prefijos siguientes:

MÚLTIPLOS						SUBMÚLTIPLOS		
KILO	HECTO	DECA	←	UNIDAD	→	DECI	CENTI	MILI
1 000 U	100 U	10 U		1 U		0,1 U	0,01 U	0,001U

Piensa y practica

1. Investiga.

La **arroba** es una antigua unidad de peso que se usaba en muchas regiones de España. Desafortunadamente, no valía lo mismo en todas.

a) Averigua el valor, en kilos, de una arroba castellana y una arroba aragonesa.

b) Describe alguno de los inconvenientes que ocasionaban esas diferencias.

2. Nombra:

a) Los múltiplos del metro.

b) Los múltiplos del gramo.

c) Los submúltiplos del litro.

d) Los submúltiplos del gramo.

3. Teniendo en cuenta que un cuadrante del meridiano terrestre es la cuarta parte del mismo:

a) ¿Cuántos metros mide un cuadrante de meridiano?

b) ¿Cuántos metros mide el meridiano completo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Unidades de medida en las magnitudes básicas

Medida de la longitud

Como sabes, la unidad fundamental en el S.M.D. para medir longitudes es el **metro.** Recuerda sus múltiplos y submúltiplos:

10 10 10 10 10 10

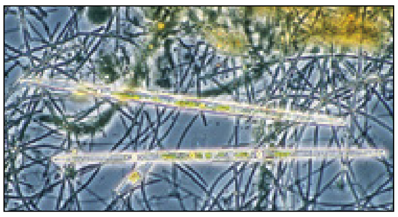
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m		0,1 m	0,01 m	0,001 m

Diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad del orden inmediato superior. Por eso, decimos que las unidades de longitud *van de diez en diez.*

Al manejar cantidades de longitud, conviene elegir la unidad adecuada. Así:

— Para expresar el grosor de este libro, diremos 14 milímetros o 1,4 centímetros, pero no 0,014 metros.

— Para expresar la distancia de Oviedo a Sevilla, diremos 665 kilómetros y no 66 500 000 centímetros.

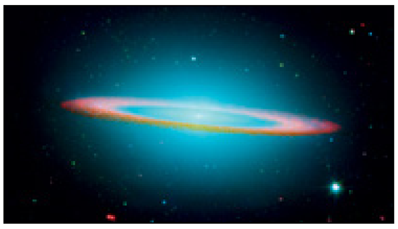


Algas diatomeas al microscopio óptico.

■ UNIDADES PARA MEDIR LONGITUDES MUY PEQUEÑAS

Con el avance de la ciencia y de la tecnología, se ha entrado en el mundo de lo microscópico, donde se necesitan unidades mucho más pequeñas que el milímetro. Estas son algunas:

- La **micra** → 1 μm = 0,001 mm (milésima de milímetro)
  Se utiliza para medir microorganismos (microbios, bacterias, etc.).
- El **nanómetro** → 1 nm = 0,000001 mm (millonésima de milímetro)
- El **ángstrom** → 1 Å = 0,000000001 mm.
  Se usa para medir distancias atómicas.



Galaxia del Sombrero, en la constelación de Virgo.

■ UNIDADES PARA MEDIR LONGITUDES MUY GRANDES

Y para medir longitudes muy grandes, como distancias entre los astros, se utilizan unidades de enorme tamaño:

- La **unidad astronómica** → 1 UA ≈ 150 millones de kilómetros → Es la distancia media de la Tierra al Sol y se usa para medir distancias entre planetas.
- El **año luz** → 1 año luz ≈ 9,5 billones de kilómetros → Es la distancia que recorre la luz en un año. Se usa para medir distancias entre galaxias.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) La distancia de la Tierra al Sol es de 1 UA.

b) La distancia de Marte al Sol es mayor que un año luz.

c) El radio de un átomo se mide en ángstroms.

d) Diez mil micras hacen un milímetro.

2. ¿Con qué unidad medirías estas longitudes?:

a) La anchura de una carretera.

b) La longitud de un río.

c) El grosor de un tablero de madera.

d) El diámetro de un tornillo.

e) El diámetro del Sistema Solar.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Medida de la capacidad

La unidad fundamental del S.M.D. para medir capacidades es el **litro,** que coincide con la capacidad de un recipiente cúbico de un decímetro de arista.

Recuerda los múltiplos y los submúltiplos del litro:

kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*
1 000 *l*	100 *l*	10 *l*		0,1 *l*	0,01 *l*	0,001 *l*

Igual que en la longitud, cada unidad de capacidad del S.M.D. equivale a diez unidades del orden inmediato inferior. Es decir, las unidades de capacidad *van de diez en diez.*

Ejemplos

— La capacidad de una barrica es de 2,5 hectolitros, o 250 litros.

— Un bote de refresco tiene una capacidad de 33 centilitros.

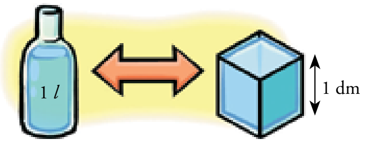
Unidades tradicionales

CELEMÍN (castellano) → 4,625 *l*

FANEGA → 12 celemines

Fanega, antigua medida de capacidad.

Ten en cuenta



1 litro → 1 dm^3

1 *kl* = 1 000 litros → 1 m^3

1 *ml* = 0,001 litros → 1 dm^3

Medida del peso

La unidad principal del S.M.D. para medir pesos es el **gramo,** que coincide con el peso del agua que cabe en un cubo de un centímetro de arista. Como es una unidad muy pequeña, en el peso de los objetos cotidianos se utiliza fundamentalmente el kilogramo.

Igual que en las unidades de longitud y de capacidad, los múltiplos y los submúltiplos del gramo *aumentan y disminuyen de diez en diez.*

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 g	100 g	10 g		0,1 g	0,01 g	0,001 g

Además, para medir pesos grandes, se añaden dos múltiplos del kilogramo:

- El **quintal métrico** (q) → 1 q = 100 kg
- La **tonelada métrica** (t) → 1 t = 1 000 kg

Ejemplos

— La cápsula para la gripe lleva 15 miligramos de principio activo.

— La pescadilla ha pesado 1,6 kilogramos.

— El camión carga 3,4 toneladas.

Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) Diez centilitros hacen un mililitro.

b) Diez decagramos hacen un hectogramo.

c) Un kilo de aceite pesa menos que un kilo de agua.

d) Un kilo de aceite ocupa más que un kilo de agua.

e) Un metro cúbico de agua pesa una tonelada.

f) Un cuarto de litro de agua pesa 500 gramos.

4. ¿Con qué unidad medirías en cada caso?:

a) La capacidad de un bote de champú.

b) El peso de una bolsa de naranjas.

c) El agua de un embalse.

d) La producción anual de mejillón en Galicia.

e) La cantidad de azafrán que se echa a la paella.

f) La cantidad de perfume en una muestra publicitaria.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Cambios de unidad

Para cambiar de unidad cantidades de longitud, capacidad o peso, conviene que te apoyes en una tabla de múltiplos y submúltiplos. En ella, el cambio de unidad se reduce a un movimiento de la coma decimal.

Ejemplos

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	
3,5 km →	3,	5	0	0,				→ 3 500 m
27,4 cm →				0,	2	7,	4	→ 0,274 m

Observa que:

— Para pasar de una unidad a otra menor, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como saltos hay entre ambas en la tabla.

3,5 km → 3,5 · 1 000 = 3 500 m

TRES SALTOS
km - hm - dam - m

— Para pasar de una unidad a otra mayor, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como saltos hay entre ambas en la tabla.

27,4 cm → 27,4 : 100 = 0,274 m

DOS SALTOS
m - dm - cm

En la web

- Practica transformaciones con unidades de longitud.
- Practica transformaciones con unidades de capacidad y peso.

Piensa y practica

1. La altura del canguro está en la tabla. Exprésala…

m	dm	cm	mm
1	2	7	

a) … en metros. b) … en decímetros.

c) … en centímetros. d) … en milímetros.

2. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 0,2 kg → 0,2 · 1 000 = … g

b) 5,3 hg → 5,3 · … = … g

c) 3,7 dg → 3,7 : 10 = … g

d) 280 cg → 280 : … = … g

3. Expresa en litros.

a) 2,75 *kl* b) 42,6 *dl* c) 74,86 *hl*

d) 350 *cl* e) 1,46 *dal* f) 3 800 *ml*

4. Pasa a hectómetros.

a) 6 km b) 0,54 km c) 80 dam d) 28 m

5. Convierte a miligramos.

a) 1,4 g b) 0,6 g c) 5 dg d) 62 cg

6. Copia y completa en tu cuaderno.

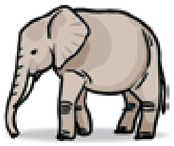
a) 3 kg = ... g b) 420 g = ... kg

c) 1,4 hg = ... dag d) 28,7 dg = ... g

e) 39 dg = ... mg f) 470 mg = ... cg

7. Expresa el peso del elefante en kilos, en gramos y en toneladas.

t	q		kg	hg	dag	g
4	6	0	0	0	0	0



¿Cuáles son las unidades más adecuadas para expresar el peso del elefante?

8. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 4 q = ... kg b) 280 kg = ... q

c) 3,7 t = ... kg d) 9 700 kg = ... t

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

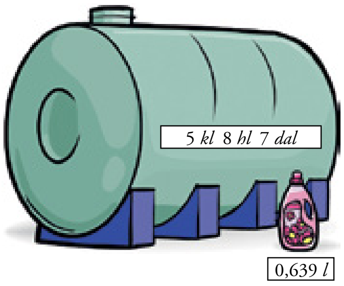
5 Cantidades complejas e incomplejas

Cuando una medida viene expresada en varias unidades, decimos que está expresada en **forma compleja.**

Cuando viene en una sola unidad, decimos que está en **forma incompleja.**

FORMA COMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA
2 m 5 dm	⟷	2,5 m	⟷	250 cm

Observa cómo pasamos de una forma a la otra.



Ejercicio resuelto

a) ***Expresar en litros la capacidad del depósito.***

b) ***Pasar a decilitros, centilitros y mililitros el contenido del bote de suavizante.***

	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	
5 *kl* 8 *hl* 7 *dal* →	5	8	7	0				→ 5 870 *l*
0,639 *l* →				0,	6	3	9	→ 6 *dl* 3 *cl* 9 *ml*

Operaciones con cantidades complejas

Para operar con cantidades en forma compleja, recurrimos también a la tabla de múltiplos y submúltiplos de la unidad principal.

Ejercicios resueltos

1. *Un camión cisterna que transportaba 3 kl 5 hl 2 dal de gasóleo ha servido un pedido de 9 hl 7 dal 5 l. ¿Cuántos litros le quedan?*

	kl	hl	dal	l
	3	5	2	0
−		9	7	5
	2	5	4	5

(3 *kl* 5 *hl* 2 *dal*) – (9 *hl* 7 *dal* 5 *l*) = 2 545 *l*

Solución: En el depósito quedan 2 545 litros de gasóleo.

2. *Cada frasco de cierto medicamento lleva 3 g 2 dg 4 cg de principio activo. ¿Cuántos gramos de principio activo se necesitan para fabricar 75 frascos?*

hg	dag	g	dg	cg
		3	2	4
		×	7	5
	1	6	2	0
2	2	6	8	
2	4	3,	0	0

3,24 g · 75 = 243 g

Solución: Se necesitan 243 gramos de principio activo.

Piensa y practica

1. Expresa en metros.

a) 6 km 4 hm 8 dam
b) 5 hm 3 m 6 dm
c) 5 m 4 dm 7 cm
d) 3 dam 7 cm 1 mm

2. Expresa en forma compleja.

a) 3,68 *kl*
b) 7,42 *dl*
c) 22,36 *hl*
d) 365 *cl*
e) 2 364 *l*
f) 2 408 *ml*

3. Fernando compra un pollo de 2 kg 200 g y un conejo de 0,760 kg.

¿Cuánto pesa la compra de Fernando?

4. Marta ha ido al supermercado a por cinco garrafas de aceite de dos litros. Pero se ha encontrado que cada garrafa llevaba 20 *cl* extra de regalo.

¿Cuánto aceite se lleva Marta en las cinco garrafas?

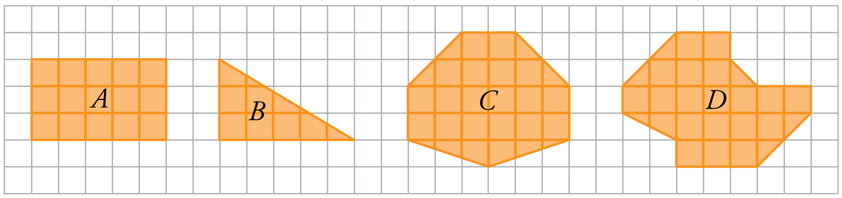
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Medida de la superficie

Para medir superficies, tomaremos como unidad la superficie encerrada dentro de un cuadrado (unidad cuadrada). Así, medir una superficie será averiguar cuántas unidades cuadradas contiene.

Ejemplos

🟧 → UNIDAD CUADRADA → 1 u.c.



S_A = 15 u.c. S_B = 7,5 u.c. S_C = 23 u.c. S_D = 22,5 u.c.

Las unidades cuadradas se suelen definir a partir de las correspondientes unidades lineales.

Unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal

La unidad principal de medida de superficie es el **metro cuadrado,** que se complementa con sus correspondientes múltiplos y submúltiplos.

100 100 100 100 100 100

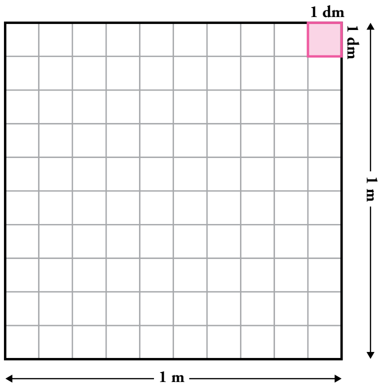
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2		0,01m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2
	ha	a	ca			

Unidades agrarias

Se utilizan para medir campos (*agro* = = campo).

- **Hectárea** (ha)
  1 ha = 10 000 m^2 = 1 hm^2
- **Área** (a)
  1 a = 100 m^2 = 1 dam^2
- **Centiárea** (ca)
  1 ca = 1 m^2

Para comprender las equivalencias entre estas unidades, observa la figura siguiente, que representa un metro cuadrado y su descomposición en decímetros cuadrados:

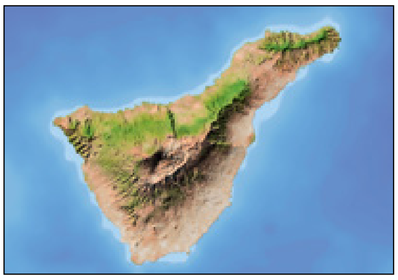


- El metro cuadrado se divide en 10 filas de 10 decímetros cuadrados.

  Por tanto:

  1 m^2 = 10 × 10 dm^2 = 100 dm^2

- Lo mismo pasa con cada unidad respecto de la siguiente. Por eso decimos que las unidades de superficie *aumentan y disminuyen de cien en cien.*



La isla de Tenerife tiene una superficie de 2 034 km^2 = 203 400 ha.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Cambios de unidad

Para pasar cantidades de superficie de una unidad a otra, también utilizaremos una tabla, pero tendremos en cuenta que las unidades de superficie *aumentan y disminuyen de cien en cien.*

En la web Practica transformaciones con unidades de superficie.

Ejercicio resuelto

Pasar estas medidas a las unidades indicadas:

a) ***47 200 m^2 = … hm^2***

b) ***6,2 dm^2 = … cm^2***

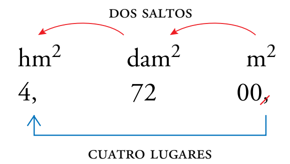
c) ***1,25 a = … m^2***

d) ***252 800 m^2 = … ha***

		km²	hm² ha	dam² a	m² ca	dm²	cm²	mm²		
47 200 m²	→		4,	7 2	0 0$\cancel{,}$				→	4,72 hm²
6,2 dm²	→					6$\cancel{,}$	2 0,		→	620 cm²
1,25 a	→			1$\cancel{,}$	2 5,				→	125 m²
252 800 m²	→		2 5,	2 8	0 0$\cancel{,}$				→	25,28 ha

Observa que por cada salto de unidad en la tabla, la coma decimal se desplaza **dos lugares.** (Cada salto equivale a multiplicar o dividir por 100).

Observa

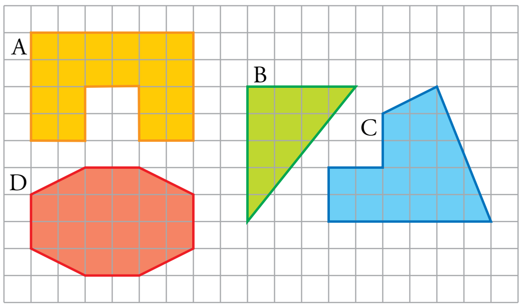


47 200 m^2 = 47 200 : 10 000 =

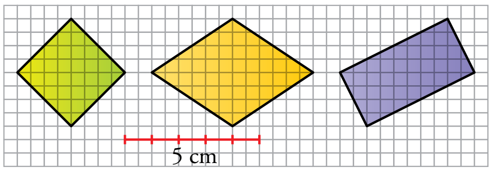
= 4,72 hm^2

Piensa y practica

1. Calcula la superficie de estas figuras tomando como unidad el cuadrado de la cuadrícula:



2. Calcula, en centímetros cuadrados, la superficie del cuadrado, la del rombo y la del rectángulo.



3. Indica la unidad más apropiada para expresar las superficies siguientes:

a) La extensión de Portugal.

b) La extensión de un pantano.

c) La superficie de una vivienda.

d) La superficie de una hoja de papel.

4. Expresa en metros cuadrados.

a) 0,006 km^2 b) 5,2 hm^2 c) 38 dam^2

d) 70 dm^2 e) 12 800 cm^2 f) 8 530 000 mm^2

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,1 km^2 = … hm^2 b) 825 hm^2 = … km^2

c) 0,03 hm^2 = … m^2 d) 53 000 m^2 = … dam^2

e) 420 cm^2 = … mm^2 f) 52 800 mm^2 = … dm^2

6. Pasa a forma compleja.

a) 587,24 hm^2 b) 587 209,5 m^2 c) 7 042,674 dm^2

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Magnitudes y unidades

1. ¿Verdadero o falso?

a) El radio de la Luna se mide en unidades astronómicas.

b) El radio de una célula se expresa en micras.

c) La cantidad de aire de una habitación se mide en metros cuadrados.

d) Para expresar el peso de una locomotora, lo adecuado es usar las toneladas.

e) La cantidad de gasoil que transporta un camión se puede expresar en litros y en kilos.

NOTA: en caso de “falso”, escribe la opción verdadera.

2. Asocia cada enunciado con su medida:

a) Una zancada.

b) La altura de un edificio.

c) Una cucharadita de jarabe.

d) El gasoil que transporta un camión cisterna.

e) El peso de un gato.

f) La cosecha de maíz de una finca.

g) La lona de una tienda de campaña.

h) La superficie de una finca.

27 m	6,8 m²	6,7 *t*	8 *ml*
95 *hl*	80 cm	3,4 ha	2 500 g

Cambios de unidades

3. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 2,7 hm = … km = … dam = … dm

b) 2 380 m = … km = … hm = … cm

c) 47 m = … dam = … dm = … hm

d) 382 cm = … m = … dm = … mm

4. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,4 t = … kg = … hg = … dag

b) 0,005 kg = … g = … mg = … dag

c) 7 hg = … dag = … g = … dg

d) 42 g = … dag = … cg = … mg

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 4,52 *kl* = … *hl*

b) 0,57 *hl* = … *dal*

c) 15 *dal* = … *l*

d) 0,6 *l* = … *cl*

e) 850 *ml* = … *dl*

f) 1 200 *cl* = … *l*

g) 2 000 *ml* = … *dl*

h) 380 *dal* = … *kl*

6. Expresa, primero en kilogramos y después en miligramos, el peso de la barra de pan.

7. Expresa en centilitros.

a) 0,15 *hl*

b) 0,86 *dal*

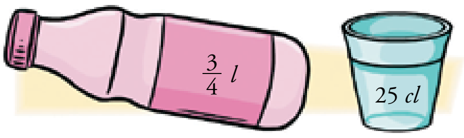
c) 0,7 *l*

d) 1,3 *l*

e) 26 *dl*

f) 580 *ml*

8. Expresa en decilitros la capacidad de la botella, y con una fracción de litro, la capacidad del vaso.



9. Expresa en metros.

a) 3 km 8 hm 5 dam

b) 8 dam 5 m 7 cm

c) 1 m 4 dm 6 cm 7 mm

10. Expresa en gramos.

a) 4 kg 5 hg 2 dag 3 g

b) 9 hg 8 dag 5 g 4 dg

c) 6 dag 8 g 6 dg 8 cg

d) 7 dg 6 mg

11. Traduce a litros.

a) 8 *kl* 6 *hl* 3 *l*

b) 5 *hl* 2 *dal* 7 *l* 2 *dl*

c) 1 *dal* 9 *l* 6 *dl* 3 *cl*

d) 4 *l* 2 *dl* 5 *cl* 7 *ml*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Unidades de superficie

12. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 1 km^2 = ... m^2

b) 1 m^2 = ... dm^2

c) 1 hm^2 = ... m^2

d) 1 m^2 = ... cm^2

e) 1 dam^2 = ... m^2

f) 1 m^2 = ... mm^2

13. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 4 km^2 = ... dam^2

b) 54,7 hm^2 = ... m^2

c) 0,005 dam^2 = ... dm^2

d) 0,7 dm^2 = ... mm^2

e) 5 400 m^2 = ... hm^2

f) 174 cm^2 = ... dm^2

14. Pasa a decímetros cuadrados.

a) 0,146 dam^2

b) 1,4 m^2

c) 0,36 m^2

d) 1 800 cm^2

e) 544 cm^2

f) 65 000 mm^2

15. Expresa en forma compleja.

a) 248 750 dam^2

b) 67 425 m^2

c) 83 545 cm^2

d) 2 745 600 mm^2

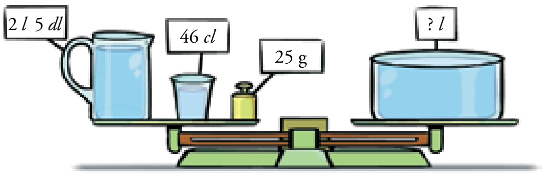
Resuelve problemas

16. Cada cápsula de cierto medicamento contiene 20 mg de principio activo. ¿Qué cantidad de principio activo se necesita para fabricar 100 000 cápsulas?

17. ¿Cuántas zancadas necesita un corredor de maratón para completar la prueba (42,192 km) si avanza, por término medio, 1,25 m en cada zancada?

18. Un metro cúbico es un cubo de un metro de arista. Teniendo eso en cuenta, ¿cuánto pesa un metro cúbico de agua?

19. ¿Cuánta agua hay en el recipiente que ocupa el platillo derecho de la balanza?



Autoevaluación

1. Indica la unidad adecuada, en cada caso, para medir estas magnitudes:

a) La anchura de un campo de fútbol.

b) El grosor de un folio.

c) La capacidad de un frasco de perfume.

d) El peso de la carga de un camión.

2. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5,2 km = … hm

b) 18 hm = … m

c) 0,07 m = … cm

d) 345 mm = … cm

3. Expresa en forma compleja.

a) 2 537 m

b) 35,42 *dal*

c) 0,856 kg

d) 2 348 mm

4. Expresa en forma incompleja.

a) 3 hm 8 dam 4 m 5 dm

b) 5 *l* 6 *dl* 7 *cl*

c) 5 kg 7 dag 8 g

5. Copia y completa en tu cuaderno.

a) 5 hm^2 = … ha

b) 3,5 hm^2 = … m^2

c) 3 450 mm^2 = … cm^2

6. Pasa a forma incompleja.

a) 2 km^2 15 hm^2 23 dam^2 = … m^2

b) 35 m^2 12 dm^2 9 cm^2 = … dm^2

7. Un camión transporta 8 palés de café. Cada palé lleva 60 cajas, y cada caja, 75 paquetes de café de 250 gramos. ¿Cuántas toneladas de café transporta el camión?

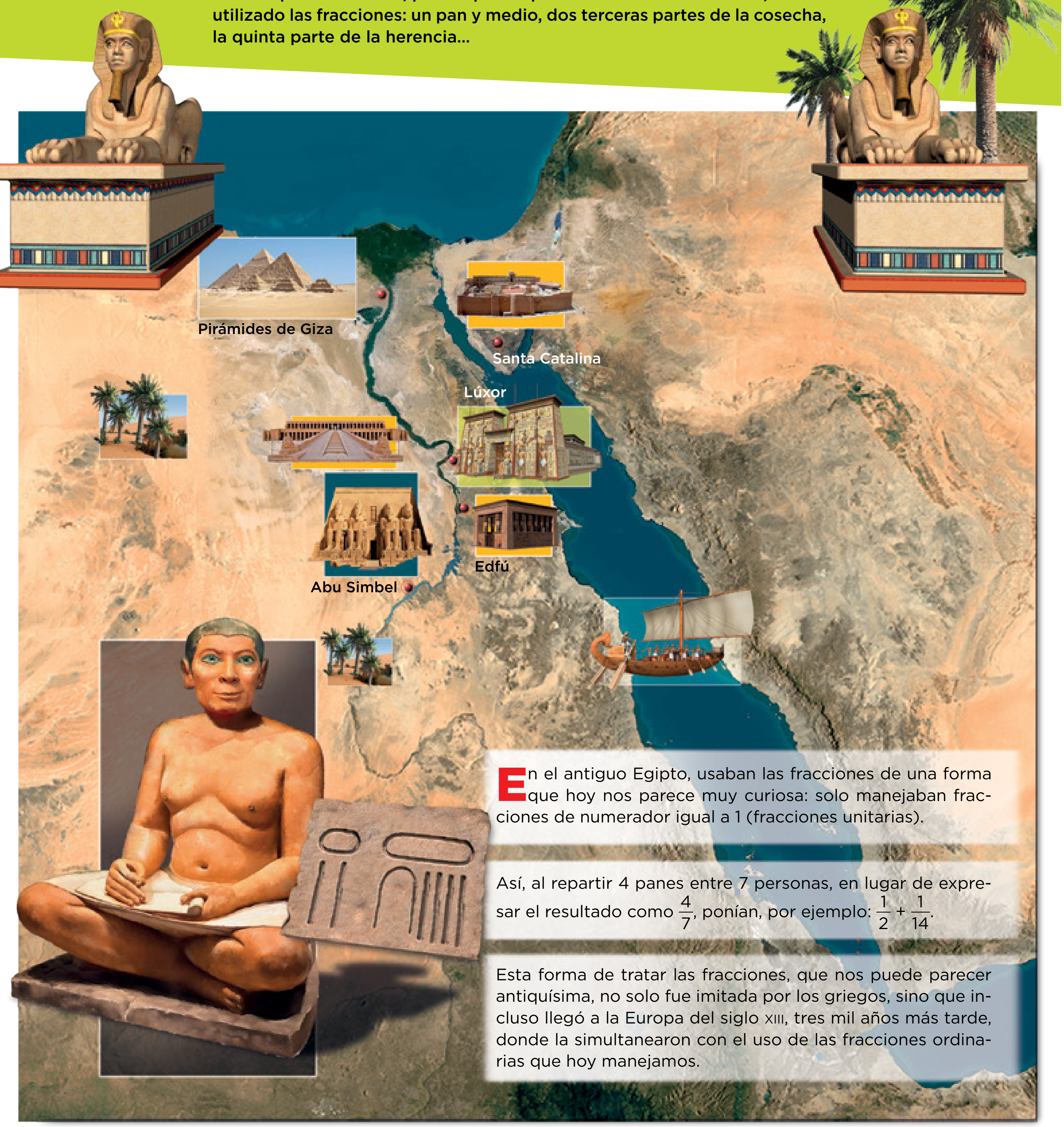
8. Un grifo averiado pierde una gota de agua por segundo. Si estimamos que el volumen de una gota es de 0,05 *ml*, ¿cuánta agua pierde el grifo en un día?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7

Las fracciones

Desde épocas remotas, para expresar partes de la unidad dividida, se han utilizado las fracciones: un pan y medio, dos terceras partes de la cosecha, la quinta parte de la herencia…



En el antiguo Egipto, usaban las fracciones de una forma que hoy nos parece muy curiosa: solo manejaban fracciones de numerador igual a 1 (fracciones unitarias).

Así, al repartir 4 panes entre 7 personas, en lugar de expresar el resultado como $\frac{4}{7}$, ponían, por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$.

Esta forma de tratar las fracciones, que nos puede parecer antiquísima, no solo fue imitada por los griegos, sino que incluso llegó a la Europa del siglo XIII, tres mil años más tarde, donde la simultanearon con el uso de las fracciones ordinarias que hoy manejamos.

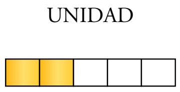
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 El significado de las fracciones

Una fracción se puede contemplar como una parte de la unidad, como un operador o como una división. Veamos cada uno de esos conceptos con mayor detalle.

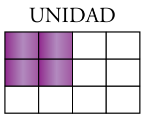
Las fracciones expresan partes de la unidad

Un todo se toma como unidad y se divide en porciones iguales. Una fracción indica una determinada cantidad de esas porciones.



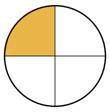
$\frac{2}{5}$ → Dos quintos

$\frac{1}{6}$ → Un sexto

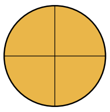


$\frac{4}{12}$ → Cuatro doceavos

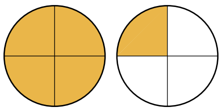
Una fracción puede representar una cantidad menor, igual o mayor que una unidad. Observa:



$\frac{1}{4} < 1$

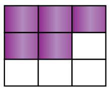


$\frac{4}{4} = 1$



$\frac{5}{4} > 1$

Recuerda

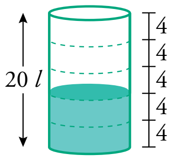


$\frac{5}{9}$ → NUMERADOR
→ DENOMINADOR

El numerador indica las partes que se toman. El denominador, las partes en que se divide la unidad.

Las fracciones son operadores

Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



En el bidón hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros. $\begin{cases} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 20 : 5 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 4 \cdot 2 = 8 \end{cases}$

$\frac{2}{5}$ de 20 litros = (20 : 5) · 2 = 8 litros

Para calcular la **fracción de un número,** se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

En la web

Averigua si has entendido el concepto de fracción.

Practica con el concepto de fracción.

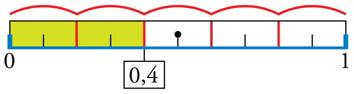
En la web

Practica con las fracciones como operadores.

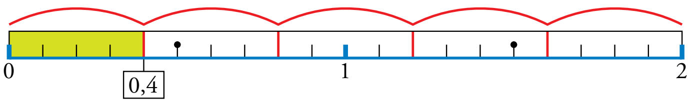
Las fracciones son divisiones indicadas

Observa:

- $\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2.



- 2 : 5 → Dividimos dos unidades entre 5.



$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

Una fracción equivale al cociente entre el numerador y el denominador.

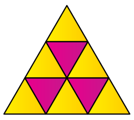
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web Practica el concepto de fracción.

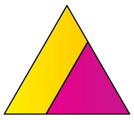
Piensa y practica

1. Escribe la fracción que ocupa la parte amarilla en cada figura:

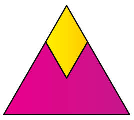
a)



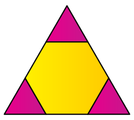
b)



c)



d)



2. Representa las fracciones siguientes:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$

3. Indica, para cada fracción, si es menor, igual o mayor que la unidad:

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{6}$ d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{3}{3}$ f) $\frac{5}{6}$

4. ¿Verdadero o falso?

a) Una fracción es un número.

b) Una fracción nunca expresa un número exacto de unidades.

c) Si el denominador es mayor que el numerador, la fracción es mayor que uno.

d) Entre dos fracciones con el mismo numerador, es mayor la que tenga menor denominador.

5. Reflexiona y contesta.

a) ¿Qué fracción del año es un trimestre?

b) ¿Qué fracción del día son dos horas?

c) ¿Qué fracción de hora son diez minutos?

d) ¿Qué fracción de minuto son 15 segundos?

6. Las siete décimas partes de los clientes de una tienda de discos tienen menos de 25 años. ¿Qué fracción de los clientes tienen 25 años o más?

7. Calcula mentalmente.

a) $\frac{1}{4}$ de 8 b) $\frac{1}{3}$ de 12 c) $\frac{1}{5}$ de 20

$\frac{3}{4}$ de 8 $\frac{2}{3}$ de 12 $\frac{3}{5}$ de 20

d) $\frac{1}{6}$ de 18 e) $\frac{1}{7}$ de 14 f) $\frac{1}{8}$ de 40

$\frac{5}{6}$ de 18 $\frac{2}{7}$ de 14 $\frac{5}{8}$ de 40

8. Calcula.

a) $\frac{2}{5}$ de 15 b) $\frac{3}{4}$ de 12 c) $\frac{3}{7}$ de 21

d) $\frac{2}{3}$ de 30 e) $\frac{4}{5}$ de 30 f) $\frac{3}{8}$ de 24

g) $\frac{3}{4}$ de 48 h) $\frac{2}{3}$ de 72 i) $\frac{3}{5}$ de 85

9. Opera.

a) $\frac{1}{4}$ de 384 b) $\frac{3}{5}$ de 715 c) $\frac{5}{7}$ de 483

10. En mi clase, entre chicos y chicas, somos 27. Las chicas representan los 4/9 del total. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en clase?

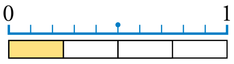
11. En un campamento internacional de verano hay 280 campistas, de los que 3/7 son españoles. ¿Cuántos españoles hay en el campamento?

12. El pollo está hoy en el mercado a 5 € el kilo. ¿Cuánto cuesta un pollo de un kilo y tres cuartos?

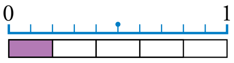
13. Según una encuesta, de cada 100 personas con empleo, solo cuatro trabajan en domingo, y del resto, las dos terceras partes tampoco trabajan en sábado. ¿Qué fracción de las personas empleadas no trabaja ni sábados ni domingos?

14. Expresa cada división con una fracción que represente el mismo valor:

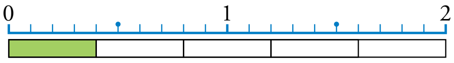
a) 1 : 4 →



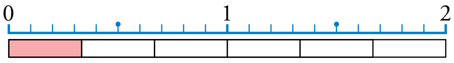
b) 1 : 5 →



c) 2 : 5 →



d) 2 : 6 →



15. Representa, reflexiona y di si estos enunciados son verdaderos o falsos:

a) La mitad de cinco es tanto como cinco mitades.

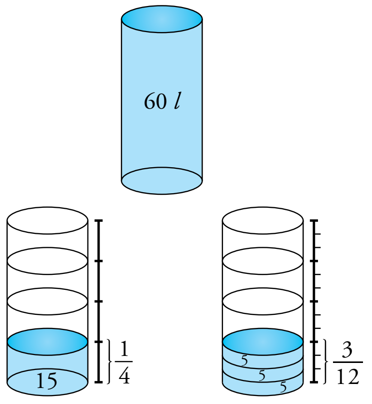
b) La tercera parte de dos vale lo mismo que los dos tercios.

c) La quinta parte de tres es lo mismo que tres quintos de uno.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Fracciones equivalentes

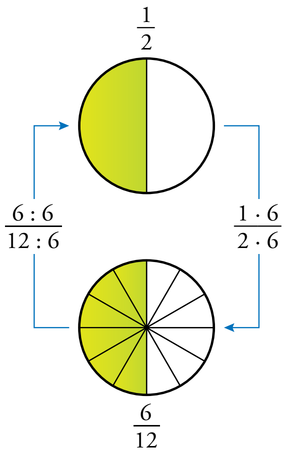
Ejemplo



$\frac{1}{4}$ de 60 = 15

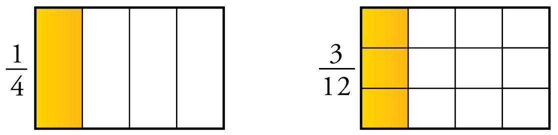
$\frac{3}{12}$ de 60 = 15

Observa



Fracciones diferentes con el mismo valor

Observa que las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ expresan el mismo valor, aunque sus términos sean diferentes:



$\underbrace{\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25}$ $\underbrace{\frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25}$

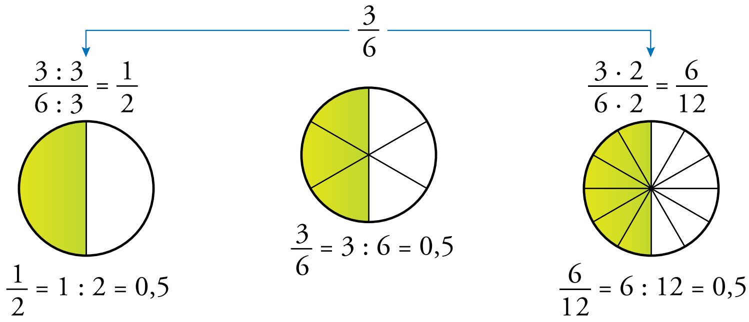
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

Decimos que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad; es decir, cuando tienen el mismo valor numérico.

Cómo obtener fracciones equivalentes

Observa que al multiplicar o al dividir los dos términos de una fracción por el mismo número, la porción de unidad representada no varía.



Como ves, las tres fracciones que aparecen arriba, son equivalentes. $\} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$

Propiedad fundamental de las fracciones

Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

Ejemplos

- $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

  $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{8}{12}$.

- $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$

  $\frac{15}{20}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

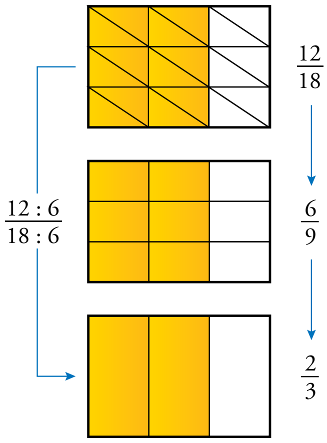
Practica con las fracciones equivalentes.

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto se consigue **dividiendo** los dos términos por el mismo número.

Ejemplo

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{18}} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \leftarrow \boxed{\text{Fracción irreducible}}$$



Observa que hemos dividido dos veces, primero por 2 y después por 3, ambos divisores comunes de 12 y 18.

- Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por el mismo número.
- Una fracción que no se puede simplificar se dice que es **irreducible.**

Observa, también, que la simplificación anterior se podía realizar de una sola vez, dividiendo el numerador y el denominador por 6, que es el máximo común divisor de 12 y 18:

$$\text{máx.c.d. } (12, 18) = 6 \rightarrow \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{18}} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \leftarrow \boxed{\text{Fracción irreducible}}$$

En la web Practica calculando fracciones irreducibles.

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno, completa y observa que se obtiene siempre el mismo resultado.

$\frac{3}{2} = 3 : 2 = \square$

$\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{\square}{\square} = \square : \square = \square$

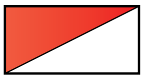
$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\square}{\square} = \square : \square = \square$

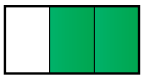
2. Copia en tu cuaderno y completa para obtener fracciones equivalentes.

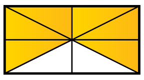
a) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{5 \cdot 3} = \frac{\square}{\square}$

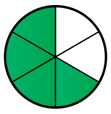
c) $\frac{18}{30} = \frac{18:2}{30:\square} = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{18}{30} = \frac{18:\square}{30:3} = \frac{\square}{\square}$

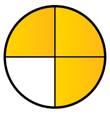
3. Busca, entre las siguientes, tres pares de fracciones equivalentes:

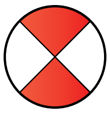
$\frac{1}{2}$ 

$\frac{2}{3}$ 

$\frac{6}{8}$ 

$\frac{4}{6}$ 

$\frac{3}{4}$ 

$\frac{2}{4}$ 

4. Escribe, en cada caso, dos fracciones equivalentes:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{15}{20}$ d) $\frac{18}{24}$

5. Simplifica.

a) $\frac{15}{20}$ → dividiendo entre 5.

b) $\frac{20}{30}$ → dividiendo entre 2 y, después, entre 5.

6. Simplifica estas fracciones:

a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{9}{12}$

e) $\frac{10}{18}$ f) $\frac{21}{28}$ g) $\frac{33}{22}$ h) $\frac{13}{26}$

7. Simplifica, paso a paso.

a) $\frac{12}{30}$ b) $\frac{18}{27}$ c) $\frac{16}{24}$ d) $\frac{30}{75}$

8. Simplifica, dividiendo el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos.

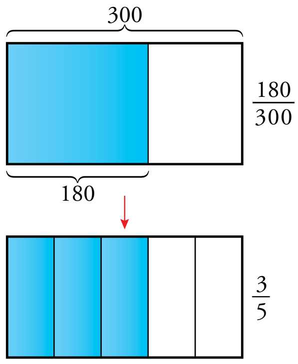
a) $\frac{9}{18}$ b) $\frac{30}{40}$ c) $\frac{30}{18}$ d) $\frac{16}{80}$

9. Calcula, en cada caso, la fracción irreducible:

a) $\frac{8}{20}$ b) $\frac{36}{24}$ c) $\frac{42}{70}$ d) $\frac{90}{108}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Algunos problemas con fracciones



Estudia detenidamente los procesos seguidos en los problemas que vienen a continuación. Te servirán para resolver otros muchos problemas con fracciones.

- **CÁLCULO DE LA FRACCIÓN**

Alberto tiene 180 de los 300 cromos de la colección que empezó el trimestre pasado. ¿Qué parte de la colección ha reunido hasta ahora?

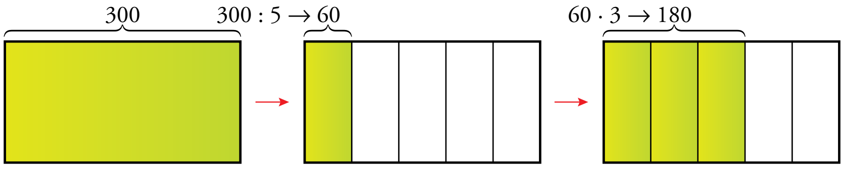
$$\left.\begin{array}{l}\text{TIENE} \rightarrow 180\\ \text{TOTAL} \rightarrow 300\end{array}\right\}\ \text{FRACCIÓN REUNIDA} \rightarrow \frac{180}{300}$$

Simplificamos, primero entre 10 y después entre 6: $\frac{180}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Solución: Alberto ha reunido las tres quintas partes $\left(\frac{3}{5}\right)$ de la colección.

- **FRACCIÓN DE UN NÚMERO: PROBLEMA DIRECTO**

Alberto empezó el trimestre pasado una colección de 300 cromos y ya ha reunido las tres quintas partes. ¿Cuántos cromos tiene?

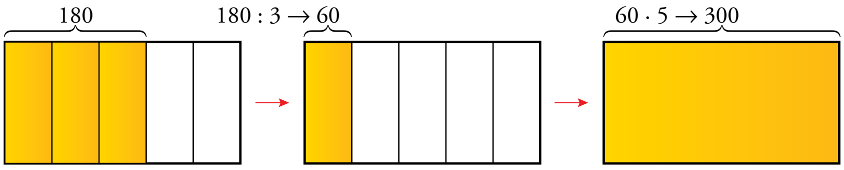


$$\frac{3}{5} \text{ de } 300 = (300 : 5) \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$$

Solución: Alberto tiene 180 cromos.

- **FRACCIÓN DE UN NÚMERO: PROBLEMA INVERSO**

Alberto ha reunido 180 cromos de la colección que empezó a hacer el trimestre pasado, y eso supone las tres quintas partes del total. ¿Cuántos cromos forman la colección completa?



$$\frac{3}{5} \text{ del total} = 180 \rightarrow \frac{1}{5} \text{ del total} = 180 : 3 = 60 \rightarrow \frac{5}{5} \text{ del total} = 60 \cdot 5 = 300$$

Solución: La colección tiene, en total, 300 cromos.

En la web

Resuelve problemas usando fracciones.

En la práctica

$$\frac{3}{5} \text{ de } x = 180$$
$$\downarrow$$
$$x = (180 : 3) \cdot 5$$

Se divide entre el numerador y se multiplica por el denominador.

Piensa y practica

1. De un pinar destinado a la producción de madera, con una población estimada de 3 400 árboles, se van a talar las tres cuartas partes.

¿Cuántos árboles se van a talar?

2. Se van a talar 2 550 árboles en un pinar destinado a la producción de madera, lo que supone las tres cuartas partes del total.

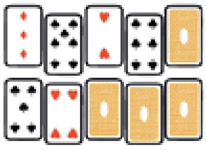
¿Cuántos árboles hay en total?

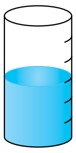
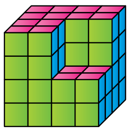
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Significado de las fracciones

1. Observa y representa con una fracción.



a) La parte de las cartas que están del revés.

b) La parte de la huevera que se ha usado ya.

c) La parte ocupada del depósito.

d) La parte que le falta al cubo.

2. La tabla siguiente muestra datos de mi clase:

	APRUEBAN TODO	NO APRUEBAN TODO
CHICOS	8	5
CHICAS	11	5

a) ¿Qué fracción de la clase ocupan las chicas?

b) ¿Qué fracción de la clase aprueba todo?

c) ¿Qué fracción de la clase abarca a los chicos que aprueban todo?

d) ¿Qué fracción de las chicas no aprueban todo?

e) ¿Qué grupo, en conjunto, obtiene mejores resultados, el de los chicos o el de las chicas?

La fracción de un número

3. Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{3}$ de 9 b) $\frac{4}{5}$ de 20 c) $\frac{3}{4}$ de 80

d) $\frac{2}{7}$ de 14 e) $\frac{5}{6}$ de 60 f) $\frac{5}{8}$ de 400

4. Calcula.

a) $\frac{2}{3}$ de 192 b) $\frac{4}{5}$ de 375 c) $\frac{3}{7}$ de 749

d) $\frac{3}{4}$ de 332 e) $\frac{5}{8}$ de 1 096 f) $\frac{4}{9}$ de 153

5. Copia, calcula mentalmente y completa.

a) Los $\frac{3}{4}$ de … valen 15. b) Los $\frac{2}{3}$ de … valen 40.

c) Los $\frac{4}{5}$ de … valen 20. d) Los $\frac{3}{5}$ de … valen 9.

Fracciones equivalentes

6. Escribe tres fracciones equivalentes a 7/21 que tengan por denominador 3, 6 y 30, respectivamente.

7. Obtén la fracción irreducible.

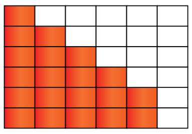
a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{10}{14}$ c) $\frac{5}{15}$

d) $\frac{18}{22}$ e) $\frac{5}{25}$ f) $\frac{6}{27}$

g) $\frac{21}{28}$ h) $\frac{22}{33}$ i) $\frac{30}{45}$

j) $\frac{20}{60}$ k) $\frac{56}{80}$ l) $\frac{165}{330}$

8. ¿Qué fracciones expresan la parte coloreada?



a) $\frac{10}{18}$ b) $\frac{15}{30}$ c) $\frac{20}{36}$

d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{12}{25}$ f) $\frac{36}{20}$

9. ¿Qué parte del día ha transcurrido a las ocho en punto de la mañana? ¿Y a las ocho en punto de la tarde? Responde con fracciones irreducibles.

10. ¿Verdadero o falso?

a) Tres hacen un tercio de docena.

b) Setenta y cinco centésimas hacen tres cuartos de unidad.

c) Tres décimas hacen seis veinteavos de unidad.

d) Diez minutos hacen un quinto de hora.

e) Doce segundos hacen un quinto de minuto.

11. Estas son las notas de los 25 estudiantes de una clase en un control de Ciencias Sociales:

6,25; 5; 8; 7,5; 5,25; 5; 1,75; 6,75; 4,5; 5,5; 5,5; 6; 6,25; 8,25; 3,75; 3,25; 9,75; 6,75; 6; 5; 7,75; 8,25; 10; 4,25; 6,25

a) ¿Qué fracción de la clase ha aprobado?

b) ¿Qué fracción ha suspendido?

Responde con fracciones irreducibles.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

12. Laura tiene, amontonadas, 10 bolas rojas y 6 bolas verdes.

a) ¿Cuántas bolas rojas habría que añadir al montón para que fueran los tres cuartos del conjunto?

b) ¿Cuántas habría que quitar para que fueran solo la cuarta parte?

13. Un cliente compra la cuarta parte de un queso que pesa dos kilos.

a) ¿Qué fracción de queso queda?

b) ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

14. Con un bidón de 20 litros, se llenan 30 botellas de agua. ¿Qué fracción de litro entra en cada botella?

15. Un kilo de fresas cuesta 2,80 €. ¿Cuánto pagarás por tres cuartos de kilo?

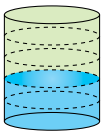
16. Las dos quintas partes de las 460 ovejas de un rebaño han tenido esta primavera un corderito. ¿Cuántos corderos ha dado el rebaño esta primavera?

17. En una parcela de 800 m^2, se ha construido una casa que ocupa 2/5 del terreno y el resto se ha ajardinado. ¿Qué superficie ocupa la casa? ¿Y el jardín?

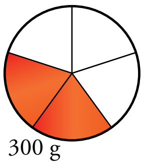
18. Un empleado, que gana 1 200 € al mes, ingresa tres veinteavos del sueldo en una cuenta de ahorro. ¿Cuánto ahorra cada mes?

19. Julia compró un queso de 2 kilos y 800 gramos, pero ya ha consumido dos quintos. ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

20. En este bidón hay 12 litros de agua. ¿Cuántos litros caben en total en el bidón?



21. He comprado 2/5 de una empanada que han pesado 300 gramos. ¿Cuánto pesaba la empanada completa?

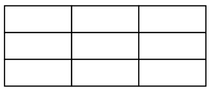


22. Se han sembrado de alfalfa los 4/5 de la superficie de una finca, y aún quedan 600 metros cuadrados sin sembrar. ¿Cuál es la superficie total de la finca?

Autoevaluación

1. ¿Qué fracción de hora son 12 minutos?

2. Representa en tu cuaderno, en gráficos como el que tienes a continuación o en otros que tú decidas, las fracciones 8/9 y 15/9.



3. En un concurso oposición aprueban 15 candidatos y suspenden 35. ¿Qué fracción de los opositores ha aprobado?

4. Calcula.

a) Tres cuartos de 240

b) $\frac{2}{5}$ de 80

c) $\frac{3}{3}$ de 35

d) Tres medios de 10

5. Escribe.

a) Una fracción equivalente a $\frac{6}{21}$ que tenga por denominador 14.

b) Una fracción equivalente a $\frac{9}{15}$ que tenga por denominador 10.

6. Simplifica.

a) $\frac{14}{28}$ b) $\frac{36}{48}$ c) $\frac{40}{60}$

7. Ana y Rosa han comprado un bolígrafo cada una. Ana ha gastado 4/5 de euro, y Rosa, 75 céntimos. ¿Cuál de los dos bolígrafos ha salido más caro?

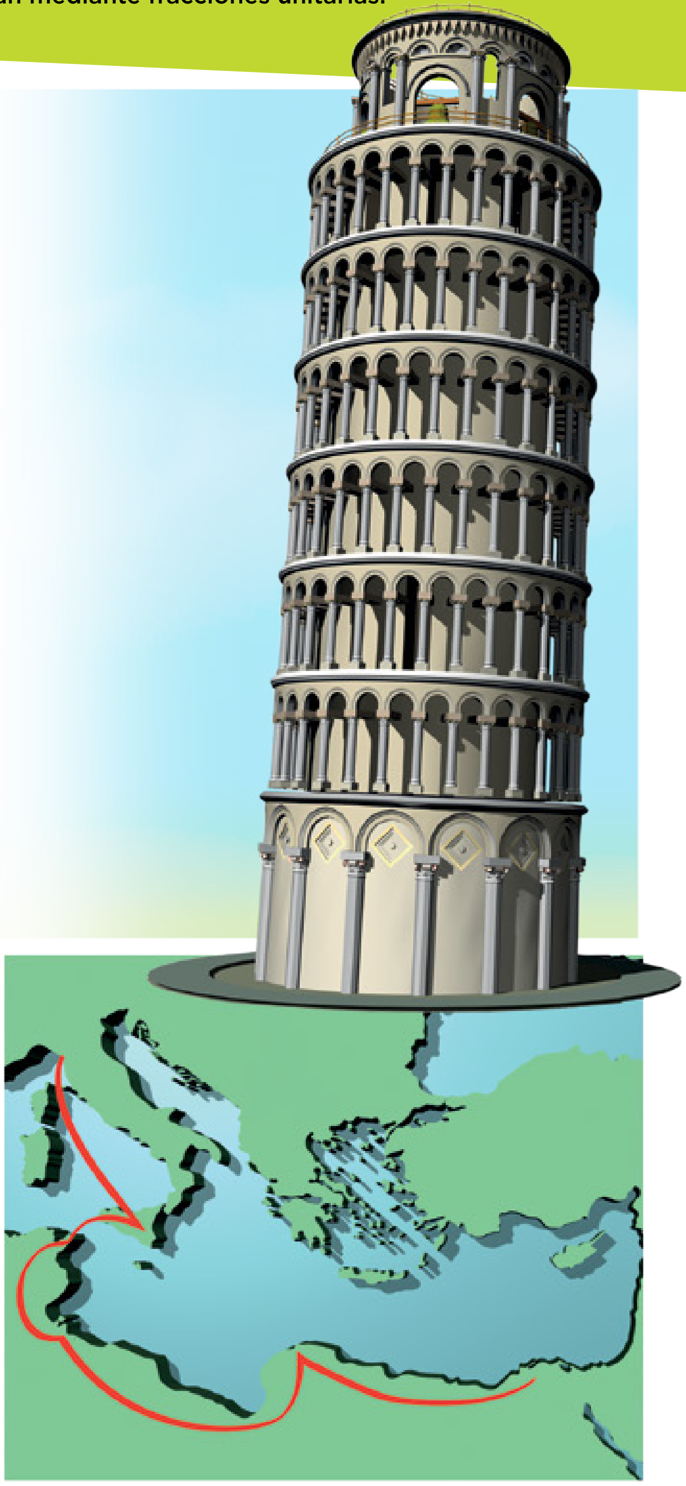
8. En una de las estanterías de la biblioteca hay 300 libros. Las cinco sextas partes son novelas.

¿Cuántas novelas hay en la estantería?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

8 Operaciones con fracciones

Los griegos tomaron de los egipcios el uso de las fracciones unitarias. Hacia el siglo IV a. C. empezaron a utilizar fracciones ordinarias, aunque el resultado de sus operaciones lo expresaban mediante fracciones unitarias.



Este uso mixto de los dos tipos de fracciones se mantuvo hasta el siglo XII. El matemático italiano **Fibonacci** manejó con soltura las ordinarias, pero en sus libros seguía dedicando tiempo y esfuerzo al manejo de las unitarias, porque sus lectores las preferían.

El verdadero nombre de Fibonacci era Leonardo de Pisa. Acompañó a su padre Bonaccio (Fi-bonacci, hijo de Bonaccio) en sus numerosos viajes que, como mercader, realizó por el norte de África. Fibonacci tuvo maestros musulmanes y de ellos aprendió, con gran provecho, la matemática árabe, que ayudó a introducir en Europa.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Reducción a común denominador

Algunas operaciones con fracciones (comparar, sumar…) resultan más sencillas cuando las fracciones tienen denominadores iguales. Por ejemplo:

— Ordenar $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ y $\frac{5}{7}$ es obvio → $\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

— Sin embargo, ordenar $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{6}$ no es tan sencillo a simple vista. Se hace necesario reducir a común denominador.

Reducir fracciones a común denominador es sustituirlas por otras equivalentes con el mismo denominador.

Método para reducir fracciones a común denominador

Fíjate en el ejemplo del margen mientras sigues el proceso que se expone a continuación.

Para reducir fracciones a común denominador

- Calcula el mínimo común múltiplo, m, de los denominadores.
- Transforma cada fracción en otra equivalente que tenga por denominador m.

  Para ello, se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir m entre el denominador.

Ejemplo

Vamos a reducir a común denominador $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{12}$.

mín.c.m. (8, 4, 12) = 24

$$\begin{array}{ccc}
\frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\boxed{24 : 8 = 3} & \boxed{24 : 4 = 6} & \boxed{24 : 12 = 2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} & \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} & \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{15}{24} & \frac{18}{24} & \frac{14}{24}
\end{array}$$

Piensa y practica

1. Ejercicio resuelto

Reducir a común denominador $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$, poniendo de denominador común 12.

$$12 : 4 = 3 \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$12 : 6 = 2 \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

2. Reduce al denominador común que se indica.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (denominador común 6)

b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ (denominador común 6)

c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ (denominador común 10)

d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ (denominador común 12)

e) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ (denominador común 12)

f) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ (denominador común 8)

3. Reduce a denominador común.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$

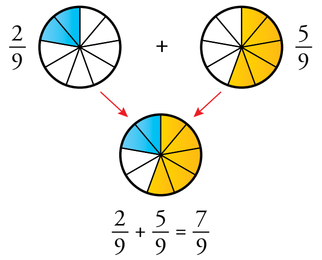
c) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{20}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Suma y resta de fracciones

Suma y resta de fracciones con igual denominador



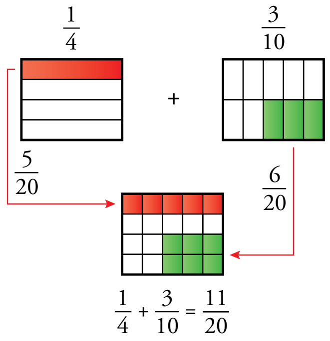
Sumar y restar fracciones con igual denominador resulta muy sencillo.

Ejemplos

- $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$
- $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Veamos a continuación otros casos que se pueden presentar.

Suma y resta de fracciones con distinto denominador



Cuando las fracciones tienen denominadores diferentes, las reduciremos, primero, a común denominador.

Ejemplos

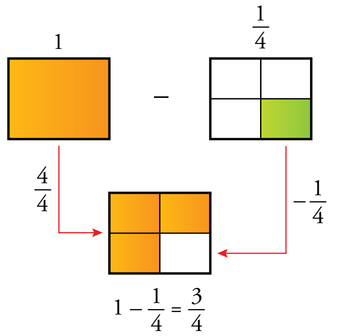
a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(4,10)=20\\ \text{Tomamos 20 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{3\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{5}{20}+\frac{6}{20}=\frac{5+6}{20}=\frac{11}{20}$$

b) $\frac{2}{3}-\frac{7}{15}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(3,15)=15\\ \text{Tomamos 15 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{7}{15}=\frac{10}{15}-\frac{7}{15}=\frac{10-7}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

Suma y resta de fracciones con números enteros



Si alguno de los sumandos es un número entero, se le trata como una fracción con denominador la unidad.

Ejemplo

$2-\frac{7}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2}{1}-\frac{7}{3}+\frac{5}{6}=\begin{cases}\text{Cambianos 2 por la fracción } \frac{2}{1}.\\ \text{mín.c.m.}\,(1,3,6)=6\\ \text{Tomamos 6 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{2\cdot 6}{1\cdot 6}-\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{5}{6}=\frac{12}{6}-\frac{14}{6}+\frac{5}{6}=\frac{12-14+5}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Observa que en las operaciones con fracciones, se deben simplificar siempre los resultados, entregando una fracción irreducible.

Ejemplo

$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\begin{cases}\text{mín.c.m.}\,(3,5,10)=30\\ \text{Tomamos 30 como denominador común.}\end{cases}$

$$=\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{10}{30}+\frac{24}{30}-\frac{9}{30}=$$

$$=\frac{10+24-9}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

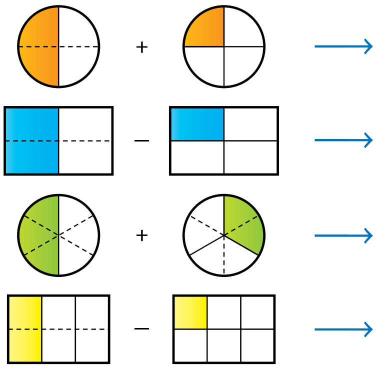
En la web

Practica la suma y la resta de fracciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Observa y calcula mentalmente.



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

2. Calcula, reduciendo primero a común denominador.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{6}+\frac{7}{8}$

f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}$

h) $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}$

i) $\frac{5}{12}+\frac{1}{6}$

j) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$

3. Opera y simplifica los resultados.

a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$

b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$

c) $\frac{3}{10}+\frac{8}{15}$

d) $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{20}$

f) $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$

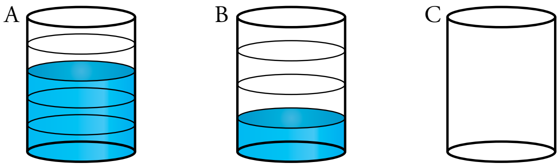
g) $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}$

h) $\frac{13}{18}-\frac{1}{6}$

i) $\frac{5}{8}+\frac{1}{24}$

j) $\frac{13}{15}-\frac{7}{10}$

4. Los recipientes A, B y C son iguales.



a) ¿Qué fracción de C se ocuparía al verter sobre él los contenidos de A y B?

b) ¿Qué fracción le faltaría para estar completo?

5. Transforma cada entero en una fracción de denominador la unidad y opera:

a) $1+\frac{1}{5}$

b) $1-\frac{3}{5}$

c) $2+\frac{2}{7}$

d) $2-\frac{5}{3}$

6. Calcula.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$

c) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-1$

e) $\frac{7}{4}-\frac{5}{8}-\frac{2}{3}$

f) $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-2$

g) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$

h) $\frac{3}{5}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$

7. Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$

d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

e) $1-\frac{3}{10}-\frac{8}{15}$

f) $1-\frac{4}{15}-\frac{2}{5}$

g) $\frac{5}{2}-2+\frac{1}{10}$

h) $\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}-\frac{1}{3}$

j) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

8. Nuria ha gastado 3/4 del dinero que tenía en un libro y 1/5 en un refresco. ¿Qué parte del dinero ha gastado? ¿Qué parte le queda?

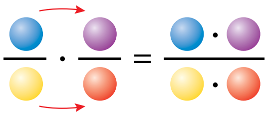
9. La cuarta parte de la producción de un viñedo es uva de mesa, los 5/8 se destinan a la producción de vino y el resto se envía a la fábrica de zumos. ¿Qué parte de la producción va a la fábrica de zumos?

10. Con una botella que contiene dos litros de agua, se llenan dos vasos de cuarto de litro y un botellín de un tercio de litro. ¿Qué fracción de litro queda en la botella?

11. Un embalse estaba lleno a finales de primavera. Durante el verano pierde 7/8 de su capacidad, y durante el otoño recupera 2/5 de la misma. ¿Qué fracción del embalse está llena cuando empieza el invierno?

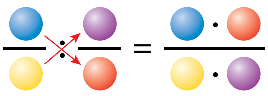
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Multiplicación y división de fracciones



Para multiplicar fracciones:
- Se multiplican los numeradores.
- Se multiplican los denominadores.

$\rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$



Para dividir dos fracciones, se multiplican los términos cruzados. $\rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Piensa y practica

1. Calcula y, si es posible, simplifica.

a) $5 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4} \cdot 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot 2$ d) $(-5) \cdot \frac{3}{10}$

e) $6 \cdot \frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4} \cdot (-4)$

2. Multiplica y, si es posible, simplifica.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{11}$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{15}$ f) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}$

g) $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}$ h) $\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5}$

i) $\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{18}$ j) $\frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$

3. Expresa con una fracción.

a) El triple de dos séptimos.

b) La mitad de la mitad.

c) La mitad de un cuarto.

d) La cuarta parte de un tercio.

e) Un tercio de tres cuartos.

4. Luis avanza $\frac{3}{4}$ de metro con cada paso. ¿Cuántos metros avanza con mil pasos?

5. Un bote de refresco de naranja contiene un tercio de litro.

¿Cuántos litros se necesitan para llenar 60 botes?

6. Divide y, si es posible, simplifica.

a) $5 : \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} : 5$ c) $\frac{3}{2} : 6$

d) $7 : \frac{14}{3}$ e) $\frac{2}{5} : 3$ f) $5 : \frac{10}{3}$

7. Divide.

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7} : \frac{5}{2}$ e) $\frac{2}{11} : \frac{1}{5}$ f) $\frac{7}{4} : \frac{5}{3}$

8. Un clavo penetra 3/4 de centímetro con cada martillazo. ¿Cuántos golpes de martillo se necesitan para que penetre 6 centímetros?

9. Con 3/4 de kilo de café se han llenado 5 bolsas. ¿Qué fracción de kilo contiene cada una?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

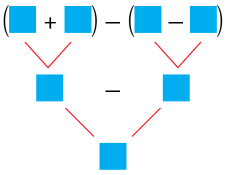
4 Operaciones combinadas

Recuerda que, en las expresiones con paréntesis y operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Teniendo esto en cuenta, analiza los ejercicios resueltos y aplica los mismos procesos en las actividades que se te proponen debajo.

Ejercicios resueltos



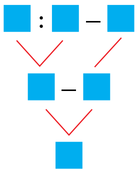
1. ***Calcular*** $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

a) Podemos operar, primero, dentro de los paréntesis:

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{15}\right)-\left(\frac{5}{10}-\frac{2}{10}\right)=\frac{11}{15}-\frac{3}{10}=\frac{22-9}{30}=\frac{13}{30}$$

b) O quitar, primero, los paréntesis:

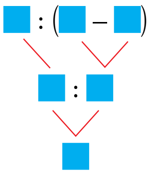
$$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{12}{30}+\frac{10}{30}-\frac{15}{30}+\frac{6}{30}=\frac{28-15}{30}=$$
$$=\frac{13}{30}$$



2. ***Calcular*** $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$.

Resolvemos, primero, la división. Después, la resta:

$$\frac{2}{5}:\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$



3. ***Calcular*** $\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)$.

Comenzamos operando dentro del paréntesis:

$$\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)=\frac{2}{5}:\left(\frac{5}{10}-\frac{3}{10}\right)=\frac{2}{5}:\frac{2}{10}=\frac{\cancel{2}\cdot 10}{5\cdot\cancel{2}}=\frac{10}{5}=2$$

En la web Practica resolviendo operaciones combinadas con fracciones.

Piensa y practica

1. Calcula.

a) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{3}{5}-\left(1-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{6}$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{8}{15}$

e) $\left(1+\frac{2}{7}\right)+\left(2-\frac{10}{7}\right)$

f) $\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$

g) $\left(3-\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{5}{4}-1\right)$

h) $\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right)$

2. Opera.

a) $\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{5}{6}\right)$

c) $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{6}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$

e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}$

f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}$

g) $\frac{3}{5}-\frac{1}{6}:\frac{1}{2}$

h) $\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{2}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Algunos problemas con fracciones

Analiza los problemas siguientes, observa sus diferencias y reflexiona sobre los procesos seguidos en su resolución. Te ayudarán en muchos problemas con fracciones.

En la web

Practica la resolución de problemas haciendo uso de las fracciones.

En la web

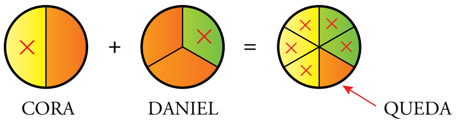
Resuelve un problema haciendo uso de las fracciones.

Suma de fracciones

Problema resuelto

Cora y Daniel entran en un restaurante italiano y piden una pizza. Cora toma la mitad y Daniel la tercera parte.

¿Qué fracción de pizza queda?



TOMAN $\rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ QUEDA $\rightarrow \frac{1}{6}$

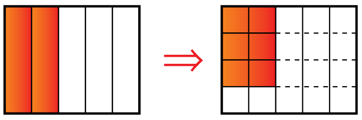
Solución: Han consumido $\frac{5}{6}$ de pizza y queda $\frac{1}{6}$.

Ten en cuenta

Para calcular la fracción de otra fracción, se multiplican ambas fracciones.

Por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$



$\frac{2}{5} \longrightarrow \frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

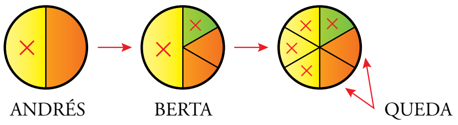
$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

Fracción de otra fracción

Problema resuelto

Andrés y Berta piden otra pizza en el mismo restaurante. Andrés toma la mitad, y Berta, la tercera parte del resto.

¿Qué fracción de pizza queda?



ANDRÉS: Toma $\rightarrow \frac{1}{2}$ Queda $\rightarrow \frac{1}{2}$

BERTA: Toma $\rightarrow \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ Queda $\rightarrow \frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$

Solución: Han consumido $\frac{4}{6}$ de pizza y quedan $\frac{2}{6}$ (simplifica estos resultados).

Piensa y practica

1. Un hortelano vende 2/3 de su producción de tomate a una conservera y 1/5 a una tienda de verduras. ¿Qué parte de la producción de tomate ha vendido?

2. El mismo hortelano vende 2/3 de sus melones a un supermercado y 1/5 del resto a un vendedor ambulante. ¿Qué fracción de los melones ha vendido?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Operaciones con fracciones

Suma y resta

1. Calcula mentalmente.

a) $1-\frac{1}{2}$ b) $1-\frac{1}{4}$ c) $1-\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

2. Realiza estas sumas y restas:

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{8}+\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{14}$

3. Opera.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\frac{25}{27}$

c) $2-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}$ f) $\frac{8}{5}-1+\frac{13}{15}$

g) $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$ h) $\frac{5}{9}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

Multiplicación y división

4. Calcula y simplifica.

a) $4\cdot\frac{1}{8}$ b) $6\cdot\frac{5}{12}$ c) $\frac{4}{3}\cdot 9$

d) $3\cdot\frac{2}{15}$ e) $\frac{5}{6}\cdot 12$ f) $\frac{4}{9}\cdot 3$

5. Multiplica y reduce.

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$ c) $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}$ d) $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}$

e) $\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{12}$ f) $\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{15}$ g) $\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}$ h) $\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{16}$

6. Calcula y reduce.

a) $1:\frac{5}{6}$ b) $1:\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{3}:3$

d) $5:\frac{3}{4}$ e) $3:\frac{6}{5}$ f) $\frac{4}{5}:8$

7. Divide y simplifica.

a) $\frac{2}{5}:\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}:\frac{2}{6}$ c) $\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ f) $\frac{15}{12}:\frac{3}{10}$ g) $\frac{5}{3}:\frac{1}{6}$ h) $\frac{2}{7}:\frac{6}{14}$

Operaciones combinadas

8. Calcula.

a) $\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)$ b) $\frac{3}{5}-\left(1-\frac{7}{10}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(1-\frac{1}{5}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)$

e) $\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$

g) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{5}\right)$ h) $\left(3-\frac{5}{3}\right)-\left(2-\frac{7}{5}\right)$

9. Calcula.

a) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

c) $2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)$ d) $\frac{1}{10}:\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)$

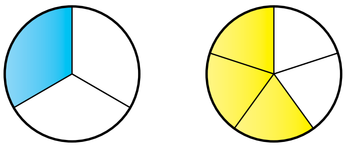
e) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)$ f) $\frac{7}{9}:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)$

Reflexiona y resuelve

10. Observa estos rectángulos:

Si recortas la parte coloreada de los dos primeros y las colocas sobre el tercero, ¿qué parte del rectángulo quedará cubierta?

11. Si recortas en el primer círculo la porción coloreada de azul y la colocas en el segundo, sobre la parte amarilla, ¿qué porción de círculo se verá en amarillo?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

12. Arancha abre una botella de aceite de 3/4 de litro y retira un vaso de 2/5 de litro para la receta de un gazpacho. ¿Cuánto aceite queda en la botella?

13. Un barco pesquero entra a puerto con la bodega llena. Los dos tercios de la carga son de merluza; la cuarta parte, de boquerón, y el resto, de calamar. ¿Qué fracción de la carga corresponde al calamar?

14. Una vuelta ciclista consta de cuatro etapas. La primera abarca la sexta parte del recorrido; la segunda, la tercera parte, y la tercera, los dos novenos. ¿Qué parte del recorrido abarca la última etapa?

15. ¿Cuántos kilos de mermelada se necesitan para llenar 2 500 botes de 3/5 de kilo?

16. ¿Cuántos litros de perfume se necesitan para llenar 100 frasquitos de 3/20 de litro?

17. Una industria conservera envasa 1 500 kilos de mermelada de frambuesa en botes de 3/5 de kilo. ¿Cuántos botes se llenan?

18. ¿Cuántos frascos de perfume de 3/20 de litro se llenan con un bidón de 15 litros?

19. Ana, Loli y Mar han comprado un queso por 32 €. Ana se queda con la mitad; Loli, con la cuarta parte, y Mar, con el resto.

a) ¿Qué fracción de queso se lleva Mar?

b) ¿Cuánto debe pagar Mar por su parte?

20. Ana, Loli y Mar han comprado un queso. Ana se queda con la mitad; Loli, con la cuarta parte, y Mar, con el resto. Sabiendo que Mar, por su porción, ha puesto 8 euros, ¿cuánto costó el queso?

21. Juan compró ayer una tarta y comió 2/5. Hoy ha comido la mitad del resto. Si el trozo que queda pesa 300 gramos, ¿cuál era el peso de la tarta entera?

Autoevaluación

1. Reduce a común denominador: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{13}{18}$

2. Calcula.

a) $\frac{1}{2} - \frac{13}{18} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} - 1$

3. Calcula y simplifica.

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10}$ b) $\frac{7}{15} : \frac{7}{9}$

4. Resuelve y da cada resultado con una fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3} : \left(\frac{3}{10} \cdot 5\right)$ b) $10 : \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{5}\right)$

5. Resuelve.

a) $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(1 - \frac{5}{6}\right)$

6. En casa de Raquel compran una tarta. Al mediodía consumen la mitad de la tarta, y en la cena, la tercera parte.

¿Qué porción de tarta han consumido?

¿Qué porción queda?

7. Un embalse estaba lleno a finales del mes de mayo. En el mes de junio se consumieron 3/10 de sus reservas y a finales de julio solo quedaba la mitad. ¿Qué fracción del embalse se consumió durante el mes de julio?

8. Una furgoneta de reparto carga en el almacén 40 cajas de aceite. Cada caja contiene 12 botellas de tres cuartos de litro. ¿Cuántos litros de aceite van en la furgoneta?

9. Un frasco de agua de colonia tiene una capacidad de tres quinceavos de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón de diez litros?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

9

Proporcionalidad y porcentajes

Los matemáticos de los pueblos antiguos, como los egipcios o los babilonios, se ocuparon de resolver problemas prácticos, entre ellos los de proporcionalidad (repartos, herencias...).

Sin embargo, los griegos, especialmente los de la escuela de Pitágoras, avanzaron investigando en aspectos más teóricos. Y en ese empeño, descubrieron curiosas relaciones de la proporcionalidad con la música.

Como sabes, la escala musical consta de siete notas: *do, re, mi, fa, sol, la* y *si.* La octava nota vuelve a ser un *do,* repitiéndose la serie anterior. Y al intervalo entre dos notas con el mismo nombre se le llama *octava.*

Pues bien, los pitagóricos apreciaron que si dos cuerdas tensas cuyas longitudes están en relación 1:2 se hacen vibrar, sus sonidos marcan una octava. Y que si sus longitudes están en una proporción sencilla (2:3, 3:4, 5:6...), sus sonidos son armoniosos, suenan bien.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

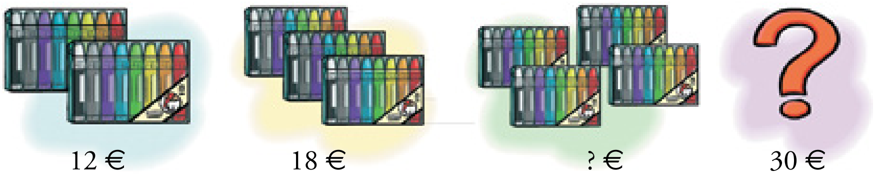
1 Relación de proporcionalidad entre magnitudes

Como ya sabes, llamamos magnitud a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, la longitud, el peso o el precio son magnitudes. A veces, entre las magnitudes se dan relaciones muy útiles para la resolución de problemas, como la relación de proporcionalidad que vas a estudiar ahora en sus dos modalidades: directa e inversa.

Relación de proporcionalidad directa

Observa la ilustración y calcula mentalmente los datos que faltan.

? €



Aquí aparecen dos magnitudes, el número de cajas de rotuladores y el coste (euros). Podemos construir una tabla con los valores correspondientes:

· 5

N.° DE CAJAS	1	2	3	4	5	6
COSTE (EUROS)	6	12	18	24	30	36

· 5

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, lo que nos permite completar la tabla. Diremos que esa relación es de proporcionalidad directa.

En la web
Practica la relación de proporcionalidad directa.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se divide de la misma forma (mitad, tercio, …).

Piensa y practica

1. ¿Son directamente proporcionales estas magnitudes?:

a) El peso de una sandía que compras y su precio.

b) Volumen de aceite y su peso.

c) El precio de una entrada de cine y el tiempo que dura la película.

d) La edad de una persona y su altura.

e) El peso que cuelga de un muelle y la longitud que lo alarga.

f) La distancia que recorre un coche y el número de vueltas que da una rueda.

g) El precio de un libro y su número de páginas.

2. Copia y completa la tabla que hace corresponder el número de terrones de azúcar y su peso en gramos.

N.° DE TERRONES	1	2	3	4	5	10	20
PESO (GRAMOS)	5	10					

¿Es de proporcionalidad directa? En caso afirmativo, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

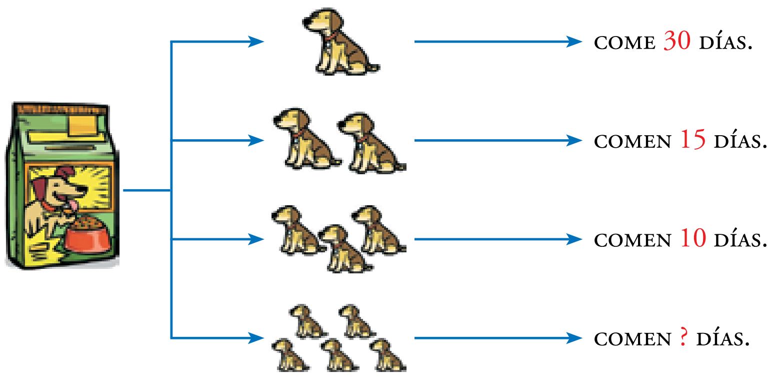
3. Copia y completa la tabla que relaciona el tiempo que está abierto un grifo con la cantidad de agua que arroja.

SEGUNDOS	1	2	3	4	5	10	20
LITROS	0,2	0,4					

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Relación de proporcionalidad inversa

Reflexiona, ahora, sobre las cuentas que hacen en una protectora de animales, relacionando lo que dura un saco de pienso según el número de perros que haya que alimentar.



Observa que cuantos *más* perros hay que alimentar *menos* dura el saco de pienso; y cuantos *menos* sean los perros *más* dura el saco.

La relación existente entre las dos magnitudes (el número de perros y el número de días que dura el saco) nos permite completar la tabla siguiente:

· 5

N.° DE PERROS	1	2	3	5	6
N.° DE DÍAS	30	15	10	6	5

: 5

Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

> Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:
> - Al multiplicar una (doble, triple, …), se divide la otra (mitad, tercio, …).
> - Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se multiplica (doble, triple, …).

En la web
Practica identificando relaciones de proporcionalidad.

Piensa y practica

4. ¿Son inversamente proporcionales estas magnitudes?:

a) El peso de una persona y el número de personas que entran en un ascensor.

b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir cierta distancia.

c) El número de vacunas vendidas contra la gripe y el número de personas que contraen la enfermedad.

d) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.

e) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.

5. Una cuadrilla de limpieza, de cuatro operarios, limpia un edificio de oficinas en cinco horas.

Copia y completa en tu cuaderno la tabla con los tiempos que tardaría la cuadrilla en hacer el mismo trabajo si tuviera distintos números de trabajadores.

: 4

N.° DE OPERARIOS	1	2	4	5	10
TIEMPO (HORAS)	20		5		

· 4

¿Qué relación existe entre las dos magnitudes consideradas? Justifica tu respuesta.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Problemas de proporcionalidad directa

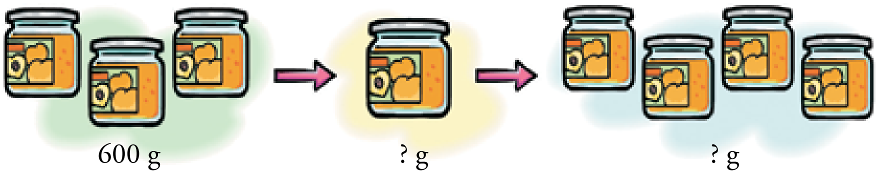
De las relaciones de proporcionalidad se derivan herramientas que facilitan la resolución de algunos tipos de problemas aritméticos. Esas herramientas se concretan en dos métodos de resolución: la reducción a la unidad y la regla de tres.

Método de reducción a la unidad

Ejemplo

Tres botes de mermelada pesan 600 gramos. ¿Cuánto pesan cuatro botes?

Para resolver la pregunta, primero calcularemos el peso de un bote:



MAGNITUDES

	N.º DE BOTES	PESO (g)	
	3	600	
REDUCCIÓN A LA UNIDAD	1	?	600 : 3 = 200 g
	4	?	200 · 4 = 800 g

Solución: Cuatro botes pesan 800 gramos.

Método de reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

Conociendo ese valor, es fácil completar cualquier par de valores correspondientes.

Problema resuelto

Tres botes de mermelada cuestan 5,40 €. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

NÚMERO DE BOTES		COSTE (€)
3	→	5,40
1	→	5,40 : 3 = 1,80 €
4	→	1,80 · 4 = 7,20 €

Solución: Cuatro botes cuestan 7,20 €.

Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales

Tomemos la tabla de valores del ejemplo anterior, que relaciona el número de botes de mermelada con su peso.

Observa que con dos pares de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes. La igualdad de esas dos fracciones se llaman **proporción.**

NÚMERO DE BOTES	PESO (GRAMOS)
1	200
2	400
3	600
4	800

$$\frac{1}{2}=\frac{200}{400} \iff \underbrace{1\cdot 400}_{400}=\underbrace{2\cdot 200}_{400}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{600}{800} \iff \underbrace{3\cdot 800}_{2\,400}=\underbrace{4\cdot 600}_{2\,400}$$

Comprueba que ocurre lo mismo con nuevos valores de la tabla.

Nos apoyaremos en esta propiedad para justificar un nuevo método para la resolución de problemas de proporcionalidad: **la regla de tres directa.**

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD 1		MAGNITUD 2	
a	→	m	$\left.\right\} \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{x}$
b	→	x	

$$a \cdot x = b \cdot m \rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$$

En la web

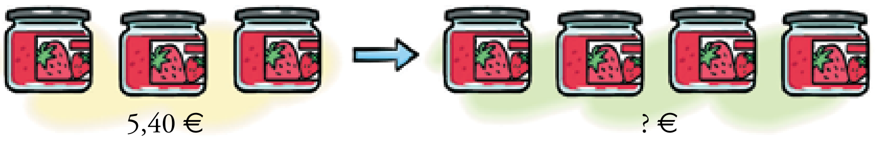
Practica resolviendo problemas de proporcionalidad directa.

Regla de tres directa

Dos pares de valores correspondientes forman dos fracciones equivalentes. Esto nos permite calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres.

Ejemplo

Tres botes de mermelada cuestan 5,40 €. ¿Cuánto cuestan 4 botes?



MAGNITUDES

N.º DE BOTES		COSTE (€)
3	→	5,40
4	→	x

Formamos dos fracciones equivalentes:

$$\frac{3}{4} = \frac{5{,}40}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 5{,}40}{3} = 7{,}20$$

Para obtener el valor de x, recuerda el procedimiento de la página 129.

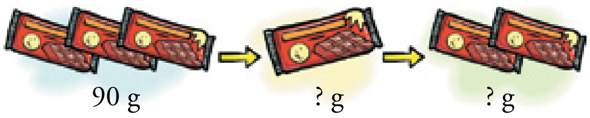
$$\frac{3}{4} = \frac{5{,}40}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot 5{,}40 \rightarrow x = \frac{4 \cdot 5{,}40}{3} = 7{,}20$$

Solución: Cuatro botes de mermelada cuestan 7,20 €.

Piensa y practica

1. Resuelve por reducción a la unidad.

Tres chocolatinas pesan 90 gramos. ¿Cuánto pesan 2 chocolatinas?



N.º CHOCOLATINAS		PESO (g)
3	→	90
1	→	?
2	→	?

2. Resuelve por reducción a la unidad.

Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuánto avanzará en 10 saltos?

3. ¿Verdadero o falso?

a) Tres barras de pan pesan 600 gramos. Dos barras pesarán 400 gramos.

b) Dos kilos de patatas han costado 0,80 €. Tres kilos costarán 1,30 €.

c) Por aparcar dos horas pago 3 €. Por aparcar media hora pago 0,75 €.

4. Calcula x en cada caso, como en el ejemplo:

- $\mathbf{\dfrac{4}{6} = \dfrac{14}{x} \rightarrow x = \dfrac{6 \cdot 14}{4} = 21}$

a) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{x}$ b) $\dfrac{6}{9} = \dfrac{10}{x}$ c) $\dfrac{5}{6} = \dfrac{7}{x}$

d) $\dfrac{10}{12} = \dfrac{4}{x}$ e) $\dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{x}$ f) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{14}{x}$

g) $\dfrac{1{,}2}{3} = \dfrac{0{,}6}{x}$ h) $\dfrac{1{,}6}{0{,}8} = \dfrac{1}{x}$ i) $\dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{7{,}5}{x}$

5. Resuelve con una regla de tres.

He pagado 9,20 € al comprar cuatro chocolatinas. ¿Cuánto habría pagado si hubiera comprado tres?

CHOCOLATINAS		COSTE (€)
4	→	9,20
3	→	x

6. Por un gasto de 20 € te dan 3 cupones-descuento. ¿Cuántos cupones te darán por un gasto de 140 €?

7. Si 100 g de salmón ahumado cuestan 2,40 €, ¿cuánto costarán 260 g?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Porcentajes

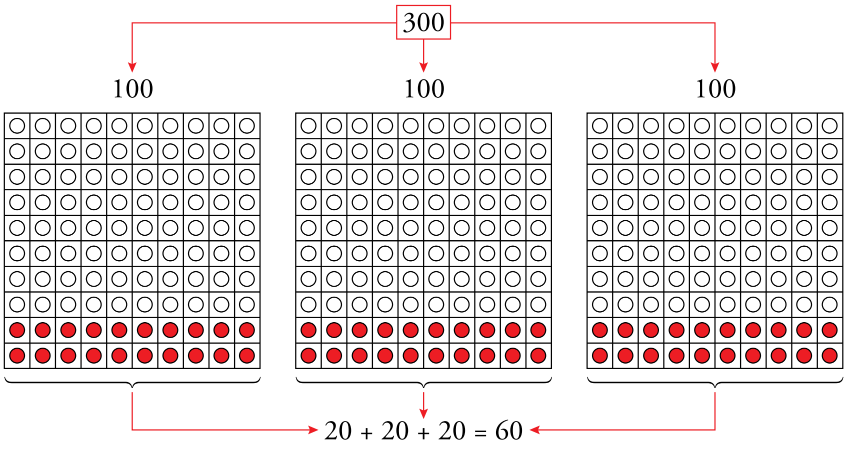
Seguramente, habrás escuchado frases como “hay un ochenta por ciento de posibilidades”, “me han hecho una rebaja del diez por ciento” o “el banco cobra un cuatro y medio por ciento”. Son expresiones muy usadas en el lenguaje corriente y, sobre todo, en el lenguaje comercial.

Concepto de tanto por ciento

Tomar un determinado tanto por ciento de un total equivale a partir el total en paquetes de cien unidades y tomar de cada paquete el tanto indicado.

Ejemplo

En un aparcamiento hay 300 coches. El 20 % son rojos. ¿Cuántos coches rojos hay?



Para calcular el 20 %, partimos el total en paquetes de 100 y tomamos 20 de cada paquete. } $300 : 100 = 3 \rightarrow 3 \cdot 20 = 60$

- El símbolo % se lee **por ciento:** 20 % → veinte por ciento.
- Para calcular un determinado **tanto por ciento de una cantidad,** dividimos la cantidad entre 100 y multiplicamos por el tanto.

Ten en cuenta

$a\%$ de $N = (N : 100) \cdot a$

Ejemplo:

35% de $240 = (240 : 100) \cdot 35 =$
$= 2{,}4 \cdot 35 = 84$

Ejemplo

Vamos a calcular el 65% de 540:

$$65\% \text{ de } 540 = (540 : 100) \cdot 65 =$$
$$= 5{,}4 \cdot 65 =$$
$$= 351$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***Calcular:***

a) 12 % de 380 ***b) 40 % de 65***

a) 12 % de 380 = (380 : 100) · 12 = 3,8 · 12 = 45,6

b) 40 % de 65 = (65 : 100) · 40 = 0,65 · 40 = 26

2. ***Una tienda vende el 45 % de los 800 balones de su almacén. ¿Cuántos ha vendido?***

45 % de 800 = (800 : 100) · 45 = 8 · 45 = 360

Solución: Ha vendido 360 balones.

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente en el orden en que aparecen.

a) 30 % de 100 b) 8 % de 100
30 % de 200 8 % de 200
30 % de 300 8 % de 300
c) 15 % de 200 d) 5 % de 200
15 % de 300 5 % de 300
15 % de 400 5 % de 400

2. Calcula mentalmente.

a) 12 % de 400 b) 7 % de 300
c) 25 % de 300 d) 6 % de 800
e) 40 % de 200 f) 10 % de 500

3. Calcula con lápiz y papel.

a) 4 % de 175 b) 9 % de 1 200
c) 10 % de 820 d) 12 % de 425
e) 17 % de 560 f) 25 % de 1 480
g) 32 % de 625 h) 44 % de 10 000
i) 63 % de 830 j) 90 % de 451

4. Calcula.

a) 10 % de 30 b) 10 % de 82
c) 15 % de 40 d) 15 % de 68
e) 20 % de 50 f) 20 % de 34
g) 35 % de 80 h) 35 % de 48
i) 50 % de 24 j) 50 % de 31

5. Reflexiona y contesta.

a) El 80 % de los frutales de una huerta son manzanos, y el resto, perales. ¿Cuál es el porcentaje de perales?

b) El 92 % de los alumnos han aprobado un examen. ¿Qué porcentaje no ha aprobado?

c) El 10 % de los empleados de una empresa están de vacaciones. ¿Qué porcentaje está trabajando?

d) Si al comprar un jersey me rebajan el 15 %, ¿qué porcentaje pago?

6. El 90 % de los 430 empleados de una fábrica trabajan en turno de día. ¿Cuántos trabajan de día?

7. En una clase de 30 alumnos, el 80 % votaron a la actual delegada. ¿Cuántos votos recibió la delegada?

8. El 30 % de los 560 árboles que hay en un parque se plantaron el invierno pasado.

¿Cuántos árboles se plantaron el último invierno?

9. En el estante de los zumos de un supermercado hay 900 botellas. Un 25 % son de zumo de tomate; un 45 %, de naranja; un 20 %, de pera, y el resto, de melocotón.

¿Cuántas botellas hay de cada sabor?

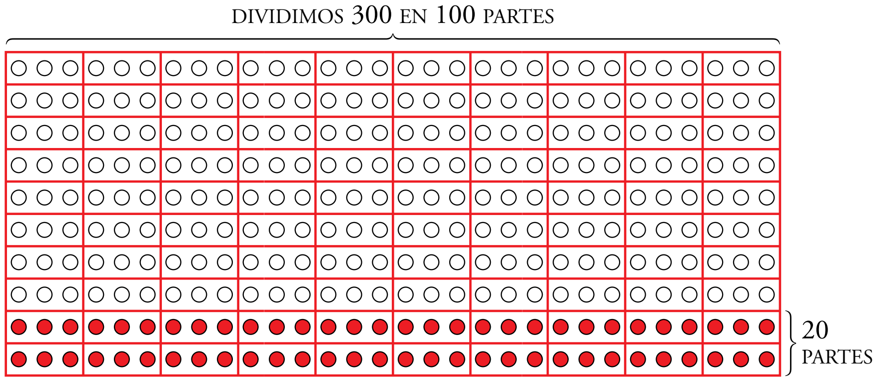
10. Una familia compra un frigorífico que cuesta 840 € pagando el 30 % al contado y el resto en 6 plazos mensuales sin recargo.

¿Cuál es el importe de cada plazo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Un porcentajes es una fracción

Recuerda que para calcular el 20 % de una cantidad, tomábamos 20 unidades de cada 100. Pero obtenemos el mismo resultado si dividimos el total en 100 partes iguales y tomamos 20 de esas partes; esto es, si tomamos 20/100 de la cantidad.



$$\left.\begin{array}{l} 20\,\%\text{ de }300 = \\ \frac{20}{100}\text{ de }300 = \end{array}\right\rangle (3000 : 100) \cdot 20 = 3 \cdot 20 = 60$$

Como ves, calcular un tanto por ciento es calcular una fracción del total.

Un tanto por ciento equivale a una fracción que tiene por numerador el tanto y por denominador 100. $\Big\} \rightarrow a\,\% \leftrightarrow \frac{a}{100}$

Recuerda

$a\,\%$ de $N = \frac{a}{100}$ de N

Ejemplo:

$15\,\%$ de $240 = \frac{15}{100}$ de $240 =$

$= (240 : 100) \cdot 15 = 2{,}4 \cdot 15 = 36$

Ejemplo

Vamos a calcular el 15 % de 80:

$$15\,\%\text{ de }80 = \frac{15}{100}\text{ de }80 = (80 : 100) \cdot 15 = 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 12$$

Ejercicio resuelto

Calcular los porcentajes siguientes:

a) 65 % de 590

b) 8 % de 475

a) $65\,\%$ de $590 = \frac{65}{100}$ de $590 = (590 : 100) \cdot 65 =$

$= 5{,}9 \cdot 65 = 383{,}5$

b) $8\,\%$ de $475 = \frac{8}{100}$ de $475 = (475 : 100) \cdot 8 =$

$= 4{,}75 \cdot 8 = 38$

Porcentajes con calculadora

Para calcular porcentajes con la calculadora, puedes utilizar la tecla %.

15 % de 240

⇓

240 × 15 % → $\boxed{36}$

Algunos porcentajes especiales

Con un poco de ingenio, y basándote en la simplificación de fracciones, el cálculo de algunos porcentajes te resultará muy sencillo.

Veamos algunos ejemplos.

- **EL 50 %**

$$50\,\% \text{ de } 80 = \frac{50}{100} \text{ de } 80 = \frac{1}{2} \text{ de } 80 = 80 : 2 = 40$$

El 50 % es la mitad. Para hallar el 50 %, se divide entre 2.

- **EL 25 %**

$$25\,\% \text{ de } 60 = \frac{25}{100} \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \text{ de } 60 = 60 : 4 = 15$$

El 25 % es la cuarta parte. Para hallar el 25 %, se divide entre 4.

- **EL 20 %**

$$20\,\% \text{ de } 40 = \frac{20}{100} \text{ de } 40 = \frac{1}{5} \text{ de } 40 = 40 : 5 = 8$$

El 20 % es la quinta parte. Para calcular el 20 %, se divide entre 5.

- **EL 10 %**

$$10\,\% \text{ de } 70 = \frac{10}{100} \text{ de } 70 = \frac{1}{10} \text{ de } 70 = 70 : 10 = 7$$

El 10 % es la décima parte. Para calcular el 10 %, se divide entre 10.

Piensa y practica

11. Calcula mentalmente.

a) 50 % de 18
b) 50 % de 84
c) 25 % de 20
d) 25 % de 48
e) 20 % de 35
f) 20 % de 55
g) 10 % de 190
h) 10 % de 240

12. Reflexiona y justifica los cálculos que hagas:

a) 10 % de 260 = 260 : 10 = 26
b) 5 % de 260 = 26 : 2 = 13
c) 20 % de 55 = 55 : 5 = 11
d) 40 % de 55 = 11 · 2 = 22
e) 25 % de 84 = 84 : 4 = 21
f) 75 % de 84 = 21 · 3 = 63
g) 50 % de 348 = 348 : 2 = 174
h) 5 % de 348 = 174 : 10 = 17,4

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Aumentos y disminuciones porcentuales

Veamos dos tipos de problemas que encontrarás con frecuencia en el mundo real. Analízalos con detenimiento y aprende los métodos de resolución.

Aumentos porcentuales

Un billete de avión a París costaba, el verano pasado, 460 €, pero desde entonces ha subido un 20 %.

¿Cuál es el precio actual del billete?

- **Resolución**

Precio antiguo $\longrightarrow$ 460 €

Aumento $\longrightarrow$ 20 % de 460 = $\frac{20 \cdot 460}{100}$ = 92 €

$\boxed{\text{PRECIO NUEVO}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} + \boxed{\text{AUMENTO}} \longrightarrow 460 + 92 = 552$ €

Por tanto, el precio actual del billete asciende a 552 €.

Disminuciones porcentuales

Una tienda de electrodomésticos saca en oferta, con una rebaja del 15%, un televisor que antes costaba 900 €.

¿Cuánto cuesta, ahora, el televisor?

- **Resolución**

Precio antiguo $\longrightarrow$ 900 €

Rebaja $\longrightarrow$ 15 % de 9000 = $\frac{15 \cdot 900}{100}$ = 135 €

$\boxed{\text{PRECIO FINAL}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} - \boxed{\text{REBAJA}} \longrightarrow 900 - 135 = 765$ €

Por tanto, ahora el televisor cuesta 765 €.

Piensa y practica

1. Rosa pide un préstamo de 4 000 € para devolverlo al cabo de un año.

¿Qué cantidad deberá devolver si el banco le cobra un interés del 5 %?

2. Una aldea tenía, tras el último censo, 250 habitantes, pero desde entonces su población ha disminuido un 8 %.

¿Cuál es la población actual?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Las relaciones de proporcionalidad

1. Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en ir de Palencia a Valladolid.

b) El tiempo que funciona el aspirador y la cantidad de energía que gasta.

c) El peso de un besugo y su coste.

d) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un cubo.

e) La edad de una persona y el número de veces que va al médico.

f) Las veces que un jugador de baloncesto lanza a canasta y los puntos que consigue.

2. Calcula en cada caso el término desconocido:

a) $\frac{6}{10} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{21}{24} = \frac{28}{x}$ c) $\frac{17}{24} = \frac{51}{x}$

d) $\frac{14}{21} = \frac{x}{69}$ e) $\frac{x}{63} = \frac{65}{91}$ f) $\frac{39}{x} = \frac{13}{17}$

g) $\frac{x}{18} = \frac{18}{81}$ h) $\frac{5}{9} = \frac{1}{x}$ i) $\frac{3}{2{,}4} = \frac{35}{x}$

Problemas de proporcionalidad

3. Resuelve mentalmente.

a) Rosa ha pagado 3,60 € por un trozo de queso de 300 gramos. ¿Cuánto pagará por 150 gramos?

b) Dos bolsas de arroz cuestan 2,10 €. ¿Cuánto cuestan tres bolsas?

4. Resuelve por reducción a la unidad.

Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

5. Si con medio kilo de jamón salen cuatro bocadillos, ¿cuánto jamón necesito para 10 bocadillos?

6. Una fábrica ha sacado 2 280 coches en los últimos 15 días. Si sigue con el mismo ritmo de producción, ¿cuántos sacará en los próximos veinte días?

7. Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?

8. Una fuente arroja 42 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 15 minutos?

9. Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

10. Las grosellas se venden a 2,30 euros el cuarto. ¿Cuánto cuesta cuarto y mitad?

11. Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

Porcentajes

12. Calcula mentalmente.

a) 10 % de 340 b) 10 % de 4 800

c) 50 % de 68 d) 50 % de 850

e) 25 % de 40 f) 25 % de 2 000

g) 20 % de 45 h) 20 % de 500

i) 32 % de 50 j) 80 % de 50

13. Calcula con lápiz y papel y, después, comprueba con la calculadora.

a) 15 % de 360 b) 11 % de 3 400

c) 8 % de 175 d) 60 % de 1 370

e) 45 % de 18 f) 84 % de 5 000

g) 150 % de 80 h) 120 % de 350

i) 200 % de 45 j) 250 % de 250

14. Calcula y, si el resultado no es exacto, redondea a las unidades.

a) 16 % de 470 b) 14 % de 288

c) 57 % de 1 522 d) 7 % de 3 640

e) 6 % de 895 f) 92 % de 2 630

g) 115 % de 94 h) 120 % de 751

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

15. Copia y completa cada casilla con un número decimal y, después, calcula el resultado:

a) 20 % de 560 = ☐ · 560 = …

b) 16 % de 1 250 = ☐ · 1 250 = …

c) 72 % de 925 = ☐ · 925 = …

d) 9 % de 700 = ☐ · 700 = …

e) 2 % de 650 = ☐ · 650 = …

16. Copia y completa en tu cuaderno.

PARA CALCULAR EL…	20 %	15 %	43 %	65 %	5 %	2 %
SE MULTIPLICA POR…	0,20					

17. Completa con el porcentaje adecuado en cada caso:

a) ☐ % de 70 = 35

b) ☐ % de 230 = 115

c) ☐ % de 800 = 200

d) ☐ % de 370 = 37

e) ☐ % de 56 = 5,6

f) ☐ % de 30 = 6

Problemas de porcentajes

18. Reflexiona y contesta.

a) En una caja de bombones, el 25 % está envuelto. ¿Qué tanto por ciento está sin envolver?

b) Un 35 % de los empleados de cierta fábrica trabajan en turno de mañana; otro 35 %, en el de tarde, y el resto lo hacen en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja en el turno de noche?

19. En mi clase somos 28 y el 25 % nos hemos apuntado a atletismo. ¿Cuántos nos hemos apuntado?

20. Solo el 12 % de los 25 asistentes a la clase de baile son chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas son?

21. Un televisor que costaba 450 € está rebajado un 15 %. ¿Cuánto cuesta tras la rebaja?

22. ¿A cuánto asciende una factura de 85 € después de cargarle el 21 % de IVA?

23. Este año, el 30 % de la vacas de la granja ha tenido un ternero. ¿Cuántas vacas hay en la granja, sabiendo que han nacido 12 terneros?

Autoevaluación

1. Indica si hay relación de proporcionalidad directa o inversa en los siguientes pares de magnitudes:

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

b) El peso de un libro y su precio.

c) El número de horas trabajadas y el pago recibido.

d) El número de caballos que tiene un granjero y el tiempo que tardan en consumir una carga de heno.

e) El número de folios de un paquete y su peso.

2. Completa estas tablas en tu cuaderno:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA			
1	2	3	4
	30		

PROPORCIONALIDAD INVERSA			
1	2	3	4
	30		

3. Resuelve con ayuda de la regla de tres.

Un trozo de queso de 375 gramos ha costado 4,50 €. ¿Cuánto costará otro trozo de 200 gramos?

4. Un jardinero, con su máquina cortacésped, tarda 18 minutos en segar una parcela de 200 m^2. ¿Qué superficie puede segar en hora y media?

5. Calcula.

a) 10 % de 48 b) 30 % de 350 c) 65 % de 520

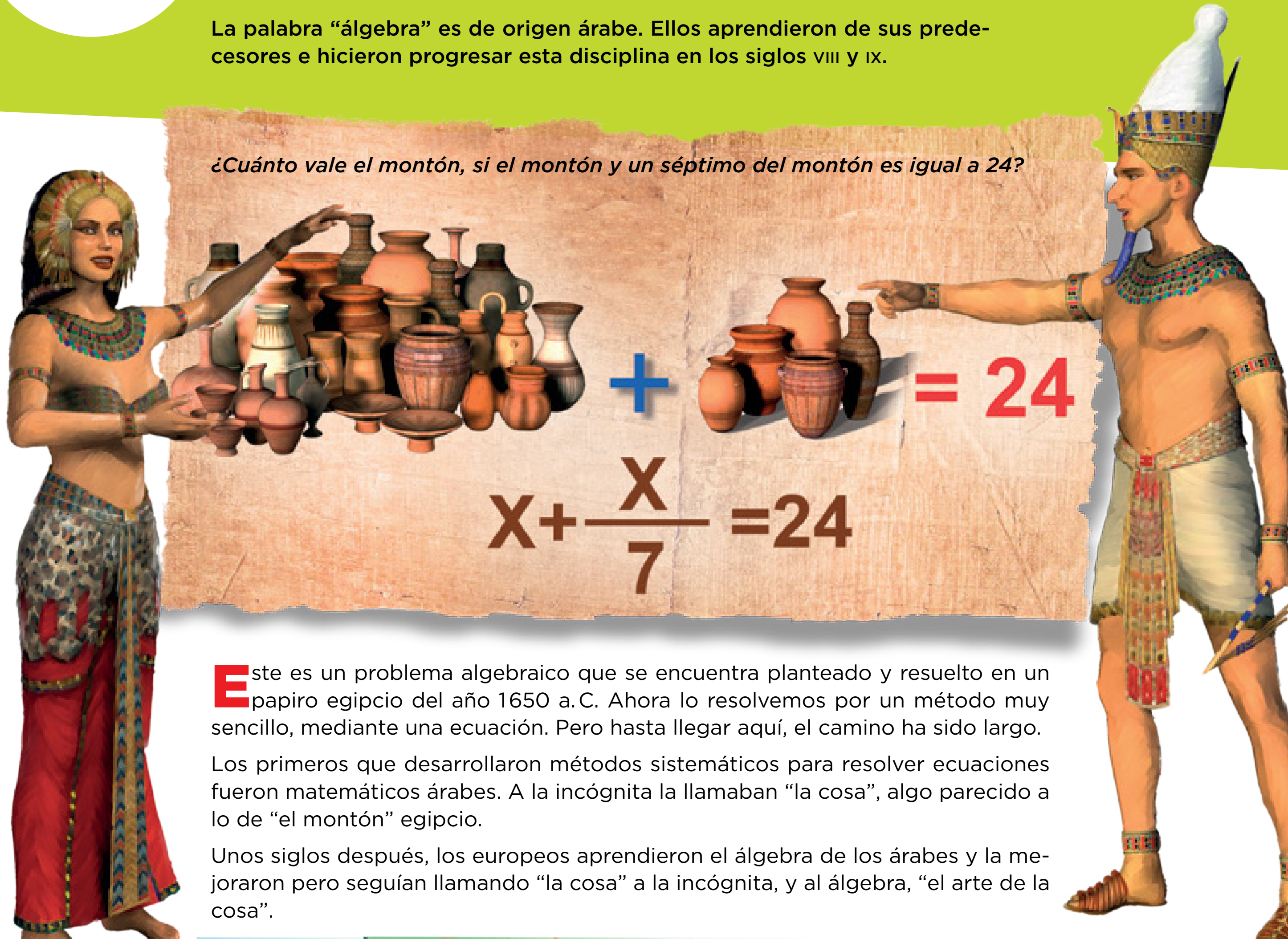
6. Un colegio tiene 585 estudiantes. El 60 % se queda al comedor. ¿Cuántos estudiantes usan ese servicio?

7. Marta ha comprado una blusa que costaba 35 €, pero estaba rebajada un 20 %. ¿Cuánto ha pagado finalmente por la blusa?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10 Álgebra

La palabra “álgebra” es de origen árabe. Ellos aprendieron de sus predecesores e hicieron progresar esta disciplina en los siglos VIII y IX.



¿Cuánto vale el montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 24?

$$x+\frac{x}{7}=24$$

Este es un problema algebraico que se encuentra planteado y resuelto en un papiro egipcio del año 1650 a. C. Ahora lo resolvemos por un método muy sencillo, mediante una ecuación. Pero hasta llegar aquí, el camino ha sido largo.

Los primeros que desarrollaron métodos sistemáticos para resolver ecuaciones fueron matemáticos árabes. A la incógnita la llamaban “la cosa”, algo parecido a lo de “el montón” egipcio.

Unos siglos después, los europeos aprendieron el álgebra de los árabes y la mejoraron pero seguían llamando “la cosa” a la incógnita, y al álgebra, “el arte de la cosa”.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Letras en vez de números

En muchas tareas de las matemáticas es preciso trabajar con números de valor desconocido o indeterminado. En esos casos, los números se representan por letras y se operan con las mismas leyes y propiedades que en las expresiones numéricas. Veamos algunos ejemplos.

Expresar propiedades aritméticas

- El orden de los sumandos no altera la suma (propiedad conmutativa).

$$a + b = b + a$$

- Multiplicar un número por una suma equivale a multiplicar por cada sumando y sumar los productos parciales (propiedad distributiva).

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

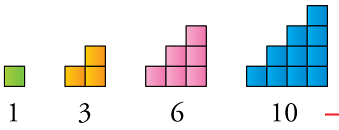
Otro ejemplo

Un múltiplo de un número, a, se obtiene al multiplicar a por cualquier número natural n.

$$a \cdot n \xrightarrow{\quad} \text{múltiplo de } a$$

Generalizar relaciones numéricas

- La expresión $\frac{n+n^2}{2}$ generaliza la relación entre la altura de la torre, n, y el número de casillas que contiene:



$$\ldots \xrightarrow{\quad} \frac{n+n^2}{2}$$

- Las últimas casillas de la siguiente tabla generalizan la ley que define su construcción:

1	2	3	4	5	…	10	…	15	…	***n***
2	5	10	17	26	…	101	…	226	…	$\boldsymbol{n^2+1}$

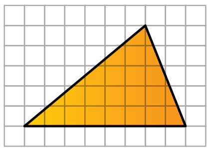
Puedes comprobarlo con algunos ejemplos:

$1 \rightarrow 1^2 + 1 = 2 \qquad 4 \rightarrow 4^2 + 1 = 17 \qquad 15 \rightarrow 15^2 + 1 = 226$

Expresar relaciones entre magnitudes. Fórmulas

- El área de un triángulo, A, se calcula conociendo las longitudes de su base, b, y de su altura, a.

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$



Base $\rightarrow b = 8$ u

Altura $\rightarrow a = 5$ u

Área $\rightarrow A = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ u^2

- La distancia, d, recorrida por un móvil a velocidad constante, v, en un cierto tiempo, t, es:

$$d = v \cdot t$$

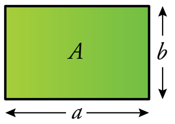
Velocidad $\rightarrow v = 60$ km/h

Tiempo $\rightarrow t = 3$ h

Distancia $\rightarrow d = 60 \cdot 3 = 180$ km

Hazlo tú

Expresa con una fórmula el área del siguiente rectángulo:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Expresar y operar números desconocidos

Empleando una letra, podemos representar un número cuyo valor aún no conocemos, operar con él y relacionarlo con otros números.

Ejemplo:

- Peso de un tubo de galletas ⟶ x
- Peso de dos tubos de galletas ⟶ $2x$
- Una caja pesa 400 gramos más que un tubo ⟶ $x + 400$
- Peso de dos tubos y una caja ⟶ $2x + (x + 400)$

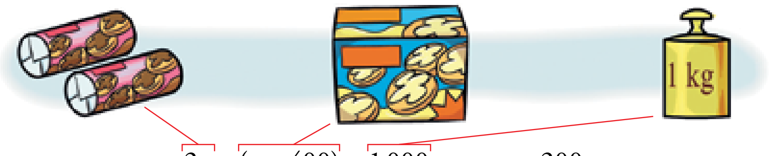
Codificar matemáticamente un problema y facilitar su resolución

Problema resuelto

Una caja de galletas pesa 400 gramos más que un tubo.

Dos tubos y una caja pesan un kilo (1 000 g).

¿Cuánto pesa un tubo y cuánto una caja?



$$2x + (x + 400) = 1\,000 \longrightarrow x = 200$$

Solución: El tubo pesa 200 g. La caja pesa 200 + 400 = 600 g.

En la web

Traduce enunciados a lenguaje algebraico.

- Cuando las letras expresan números, las trataremos como tales en cuanto a las operaciones y sus propiedades.
- La parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de las expresiones con letras y números se denomina **álgebra.**

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno y completa, sabiendo que $a = 5$.

⑬ ⟶ $\boxed{2 \cdot a + 3}$ ○ ⟶ $\boxed{2 \cdot a - 3}$

⑯ ⟶ ☐ ○ ⟶ $\boxed{10 \cdot a + 7}$

2. Escribe una expresión para el valor asociado a n.

a)			b)			c)		
2	⟶	5	2	⟶	0	2	⟶	2
6	⟶	13	6	⟶	2	6	⟶	30
10	⟶	21	10	⟶	4	10	⟶	90
…		…	…		…	…		…
n	⟶	?	n	⟶	?	n	⟶	?

3. Llamando x a un número natural, escribe:

a) El doble del número. b) El siguiente del número.

c) La suma del número, su doble y su siguiente.

4. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La suma de un número, x, su doble y su siguiente es 21.

5. Llamando x a la edad de Ana, escribe una expresión matemática para cada apartado:

a) La edad que tendrá dentro de ocho años.

b) La edad que tenía hace dos años.

c) El doble de la edad que tenía hace dos años.

6. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La edad de Ana, dentro de ocho años, será igual al doble de la que tenía hace dos años.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Expresiones algebraicas

Ejemplos

- Un número $\longrightarrow x$
- Su siguiente $\longrightarrow x + 1$
- El doble de su siguiente $\longrightarrow 2 \cdot (x + 1)$
- El cociente entre el número y el doble de su siguiente $\longrightarrow \dfrac{x}{2 \cdot (x+1)}$

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras.

Son expresiones algebraicas:

$$3x - 5 \qquad x^2 + 1 \qquad \frac{(a+1) \cdot b}{5} \qquad \frac{(t+1)^2}{3} \qquad \frac{a+b}{a}$$

Las operaciones, al incluir valores que no se conocen, quedan necesariamente indicadas.

Monomios

Ten en cuenta

En un monomio no se suelen incluir los signos de producto.

$$5 \cdot x \cdot y^3$$
$$\Downarrow$$
$$5xy^3$$

Cuando encontramos un número seguido de una o varias letras, entendemos que están multiplicados.

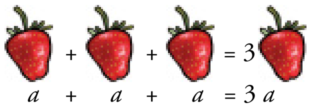
Las expresiones algebraicas más simples, formadas por productos de letras y números, se llaman **monomios.**

Un monomio consiste en el producto de un número conocido **(coeficiente)** por una o varias letras **(parte literal).**

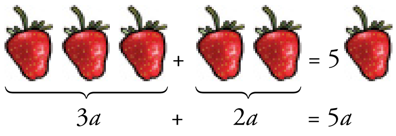
Por ejemplo:

$$\underbrace{-4}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{x}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{a^2 \cdot b}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

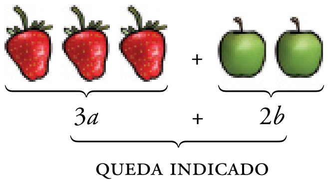
Suma y resta de monomios y polinomios



$a + a + a = 3\,a$



$3a + 2a = 5a$



$3a + 2b$

QUEDA INDICADO

Los monomios solo se pueden sumar (o restar) cuando son semejantes, es decir, cuando tienen la misma parte literal.

Cuando no son semejantes, la operación se deja indicada.

Observa los distintos casos que se presentan en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $4x + 2x = 6x$
EJEMPLO 3 $5x - 3x = 2x$	EJEMPLO 4 $a^2 + a^2 = 2a^2$
EJEMPLO 5 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 6 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 7 $7x - (2x + x) = 7x - 3x = 4x$	EJEMPLO 8 $5a - (a - 4a) = 5a - (-3a) = 5a + 3a = 8a$

Como puedes ver, las expresiones algebraicas se operan con las mismas leyes y propiedades que las expresiones numéricas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Multiplicación de monomios

Un monomio es un producto. Por tanto, al multiplicar dos monomios obtendrás otro producto con más factores; es decir, otro monomio.

Ejemplos

- $(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$
- $(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot a \cdot 5 \cdot a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$
- $\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot (6xy) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y = \frac{6}{3}x^2y = 2x^2y$

El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

No lo olvides

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

Multiplicación de un monomio por una suma

Cuando uno de los factores es una suma, aplicamos la propiedad distributiva; es decir, multiplicamos por cada sumando.

Ejemplos

- $5 \cdot (2a + 3b) = 5 \cdot 2a + 5 \cdot 3b = 10a + 15b$
- $2x \cdot (x^2 + 2y^2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2y^2 = 2x^3 + 4xy^2$

Piensa y practica

1. Reduce las expresiones siguientes:

a) $x + x$ b) $a + a + a + a$

c) $m + m - m$ d) $k + k + k + k$

e) $a + a + b + b$ f) $x + x + y + y + y$

2. Opera.

a) $2x + 5x$ b) $7a - 3a$

c) $4a + 3a$ d) $9x - 5x$

e) $2x + 3x + 4x$ f) $6a + 2a - 5a$

g) $4a - 3a + a$ h) $10x - 3x - x$

3. Iguala cada expresión con su reducida:

$x + x + 1$	$2x^2 + 2x + 3$
$x^2 + x^2 + x$	$x^2 + 5$
$3x^2 - 2x^2 + 5$	$4x^2 + x + 4$
$x^2 + x^2 + x + x$	$2x^2 + x$
$2x^2 + 4x - 2x + 3$	$2x^2 + 2x$
$9x^2 - 5x^2 + 3 + x + 1$	$2x + 1$

4. Reduce.

a) $x^2 + x^2$ b) $4a^2 - 2a^2$

c) $5a^2 + 2a^2$ d) $7x^2 - 5x^2$

e) $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$ f) $8a^2 - 3a^2 - a^2$

5. Reduce.

a) $3x - (4x - 3x)$ b) $5x - (2x + 1)$

c) $8x - (3x + 2x)$ d) $2x - (4 - x)$

e) $(x + 4x) - (5x - 3x)$ f) $(6x - 4) - (2x - 1)$

6. Multiplica el número por el monomio.

a) $3 \cdot 2x$ b) $5 \cdot 3a$ c) $2 \cdot 4m$

d) $(-3) \cdot 5x$ e) $2 \cdot (-2a)$ f) $(-3) \cdot (-4m)$

g) $\frac{1}{2} \cdot 6x$ h) $4 \cdot \frac{1}{6}a$ i) $(-2) \cdot \frac{6}{8}m$

7. Multiplica los monomios siguientes:

a) $x \cdot 2x$ b) $5a \cdot a$ c) $m \cdot 2m^2$

d) $2x \cdot 5x$ e) $3a \cdot 4a^2$ f) $2m^2 \cdot 5m^2$

g) $3x^2 \cdot 2x^3$ h) $4a \cdot 2a^4$ i) $2m^2 \cdot 2m^4$

j) $x^3 \cdot (-2x)$ k) $(-5a^2) \cdot 3a^3$ l) $2m^3 \cdot (-4m^3)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. Sin embargo, no todas las igualdades algebraicas son ecuaciones, como verás a continuación.

Igualdades algebraicas: ecuaciones e identidades

Observa la diferencia entre las igualdades siguientes:

$3x - 4 = 8$	$6x - 4x = 2x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
La igualdad se cumple solamente para $x = 4$. (Es una ecuación)	La igualdad se cumple para cualquier valor de x. (Es una identidad)

- Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras.
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.

Elementos de una ecuación

Para poder manejar las ecuaciones, es necesario que sepas nombrar sus elementos:

- **Miembros:** son las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{\underbrace{4x}-\underbrace{5}}^{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \overbrace{\underbrace{2x}+\underbrace{1}}^{\text{SEGUNDO MIEMBRO}} \quad \text{TÉRMINOS}$$

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en los términos.
- **Soluciones:** son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.

$$4x - 5 = 2x + 1 \begin{cases} \text{ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA} \\ \text{SOLUCIÓN: } x = 3, \text{ ya que } 4 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 1 \end{cases}$$

Ten en cuenta

El **grado** de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que contiene.

- ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

  $5x - 4 = 3x$

  Solución → $x = 2$

- ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:

  $6 + x^2 = 5x$

  Soluciones $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Piensa y practica

1. Razona y encuentra una solución para cada una de estas ecuaciones:

a) $5x = 20$

b) $5x - 2 = 18$

c) $\dfrac{5x-2}{3} = 6$

d) $\dfrac{5x+4}{8} = 3$

2. Busca, por tanteo, una solución para cada ecuación:

a) $5x - 8 = 7$

b) $2x + 3 = 5x - 3$

c) $2(x - 1) = 8$

d) $10 - (x - 3) = 6$

e) $\dfrac{3-x}{2} = 1$

f) $\dfrac{5+x}{6} = 2$

g) $\dfrac{x-1}{4} = 5$

h) $\dfrac{x+2}{3} = 1$

i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 5$

j) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{8} = 7$

k) $x + x^2 + x^3 = 3$

l) $\sqrt{x+5} = 3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

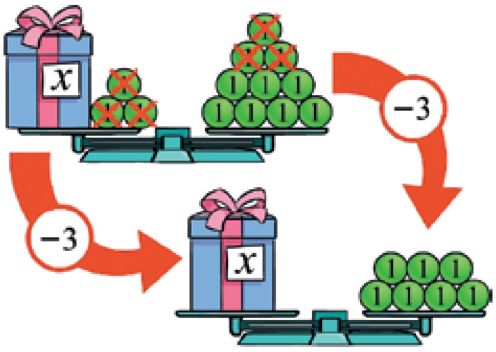
4 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

Ejemplo: $x + 3 = 10$

Restando 3 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x + 3 = 10$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 10 - 3$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \rightarrow x + a - a = b - a \rightarrow x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

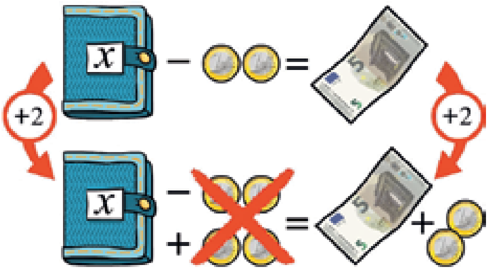
EJEMPLOS

a)	b)
$x + 5 = 10$	$x + 9 = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 10 - 5$	$x = 5 - 9$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5$	$x = -4$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

Ejemplo: $x - 2 = 5$

Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x - 2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 5 + 2$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \rightarrow x - a + a = b + a \rightarrow x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a)	b)
$x - 8 = 5$	$13 - x = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5 + 8$	$13 - 5 = x$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 13$	$x = 8$

Piensa y practica

1. Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$

d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$

g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2. Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$

d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$

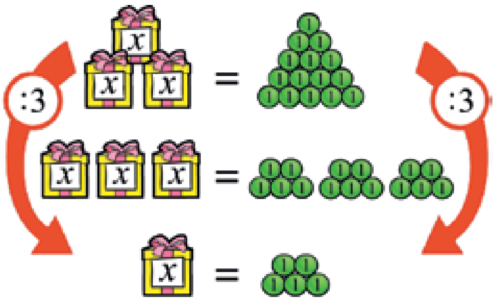
g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

Ejemplo: $3x = 15$

Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$3x = 15$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

La solución es $x = 5$.

Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\Big\}$ $ax = b \rightarrow \frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$

En la práctica

REGLA

Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él), pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

b) $7x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$

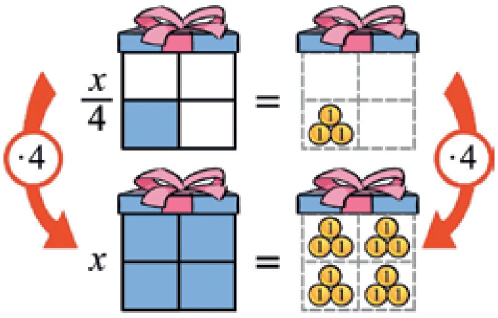
CASOS ESPECIALES

- La ecuación $0 \cdot x = b$ (con $b \neq 0$) no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé un número distinto de cero.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación $x/a = b$

Ejemplo: $\frac{x}{4} = 3$

Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$\frac{x}{4} = 3$$
$$\downarrow$$
$$\frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4$$
$$\downarrow$$
$$x = 12$$

La solución es $x = 12$.

Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\Big\}$ $\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$

En la práctica

REGLA

Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él), pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{5} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 5 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{x}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

En la web

Practica resolviendo ecuaciones.

Piensa y practica

3. Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\frac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\frac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \frac{x}{2}$

4. Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

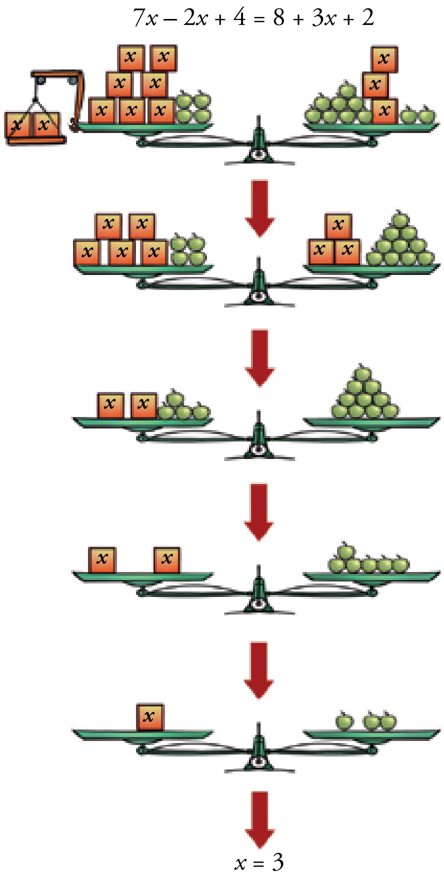
5 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación, la iremos transformando, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes cada vez más sencillas, hasta despejar la incógnita; es decir, hasta que quede sola en un miembro y en el otro un número conocido.

> Para transformar una ecuación en otra equivalente, utilizaremos dos recursos:
> - Reducir sus miembros.
> - Transponer sus términos, de un miembro al otro.

Ejemplo

Vamos a resolver la ecuación: $7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$



$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

REDUCIR →

$5x + 4 = 10 + 3x$

TRANSPONER →
(Restamos $3x$ en ambos miembros).

$5x + 4 - 3x = 10$

REDUCIR →

$2x + 4 = 10$

TRANSPONER →
(Restamos 4 en ambos miembros).

$2x = 10 - 4$

REDUCIR →

$2x = 6$

TRANSPONER →
(Dividimos a ambos miembros por 2).

$x = \frac{6}{2}$

REDUCIR →

$x = 3$

Comprobación: Sustituimos x por 3 en la ecuación primitiva y comprobamos que la igualdad se cumple.

$$\boxed{x = 3}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 2x + 4 \rightarrow 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 21 - 6 + 4 = 19 \\ 8 + 3x + 2 \rightarrow 8 + 3 \cdot 3 + 2 = 8 + 9 + 2 = 19 \end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4}_{19} = \underbrace{8 + 3 \cdot 3 + 2}_{19}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicio resuelto

Resolver esta ecuación:

$$\boldsymbol{5 - 4x = 7 + 8x - 6}$$

$$\begin{tikzcd}
5 - 4x = 7 + 8x - 6 \arrow[d] & 5 = 1 + 8x + 4x \arrow[d] & 5 - 1 = 12x \arrow[d] & \frac{4}{12} = x \arrow[d] \\
5 - 4x = 1 + 8x \arrow[ur] & 5 = 1 + 12x \arrow[ur] & 4 = 12x \arrow[ur] & x = \frac{1}{3}
\end{tikzcd}$$

Práctica en la resolución de ecuaciones

Los ejercicios que siguen te ayudarán a tomar confianza en la resolución de ecuaciones. Abórdalos en el orden en que aparecen y aplicando las técnicas que has aprendido: *reducir los miembros-transponer los términos*.

Para que puedas evaluar tu trabajo, encontrarás las soluciones al final de la página.

Piensa y practica

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 1 = 6$
b) $x + 8 = 3$
c) $7 = x + 3$
d) $5 = 11 + x$
e) $x + 1 = -2$
f) $x + 5 = -2$
g) $5 + x = 7$
h) $4 + x = 4$
i) $8 + x = 1$
j) $-3 = 2 + x$

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x - 2 = 4$
b) $x - 6 = 7$
c) $2 = x - 2$
d) $5 = x - 1$
e) $x - 4 = -1$
f) $x - 5 = -3$
g) $-4 = x - 2$
h) $-8 = x - 1$
i) $4 - x = 1$
j) $5 - x = 6$
k) $8 = 13 - x$
l) $15 = 6 - x$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x - 4x = 9$
b) $7x - 2x = 15$
c) $x - 2x = 7$
d) $2x - 6x = 12$
e) $2x - 5x = -3$
f) $4x - 6x = -8$
g) $6x - 4x = 1$
h) $11x - 5x = 2$
i) $2x - 7x = 4$
j) $3x - x = -8$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $8x - 5x = x + 8$
b) $3x + 6 = 2x + 13$
c) $5x - 7 = 2 - 4x$
d) $3x + x + 4 = 2x + 10$
e) $4x + 7 - x = 5 + 2x$
f) $8 - x = 3x + 2x + 5$

SOLUCIONES

1. a) 5
b) –5
c) 4
d) –6
e) –3
f) –7
g) 2
h) 0
i) –7
j) –5

2. a) 6
b) 13
c) 4
d) 6
e) 3
f) 2
g) –2
h) –7
i) 3
j) –1
k) 5
l) –9

3. a) 9
b) 3
c) –7
d) –6
e) 1
f) 4
g) 1/2
h) 1/3
i) –4/5
j) –4

4. a) 4
b) 7
c) 1
d) 3
e) –2
f) 1/2

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Las ecuaciones son una potente herramienta para resolver problemas. Observa en los ejemplos el proceso que hay que seguir. El objetivo es que tú, ante un problema, seas capaz de aplicar ese proceso.

En la web Resuelve problemas haciendo uso de las ecuaciones.

En la web Calcula la anchura de un río utilizando ecuaciones.

Problemas resueltos

1. ***Al sumar un número natural con el doble de su siguiente, se obtiene 14. ¿Qué número es?***

a) Deja claro lo que conoces y da nombre a lo que no conoces.

- El número ⟶ x
- Su siguiente ⟶ $x + 1$
- El doble del siguiente ⟶ $2(x + 1)$
- El número más el doble de su siguiente es igual a 14.

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL DOBLE DEL SIGUIENTE}} = 14$$

$$x + 2(x + 1) = 14$$

c) Resuelve la ecuación.

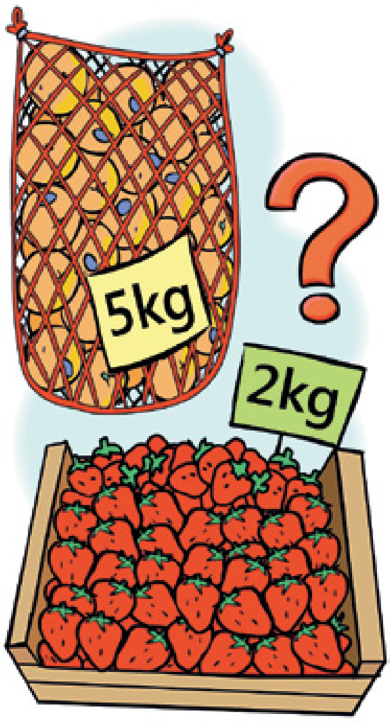
$$x + 2(x + 1) = 14 \rightarrow x + 2x + 2 = 14 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

d) Expresa la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: El número buscado es 4.

Comprobación: $4 + 2(4 + 1) = 4 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$

2. ***El supermercado vende la bolsa de naranjas de cinco kilos al mismo precio que la caja de fresas de dos kilos. Así, el kilo de fresas sale 1,80 € más caro que el de naranjas. ¿A cómo sale el kilo de naranjas y a cómo el de fresas?***



a) Los datos:

- Coste de un kilo de naranjas (€) ⟶ x
- Coste de un kilo de fresas (€) ⟶ $x + 1,80$
- Cinco kilos de naranjas cuestan lo mismo que dos de fresas.

b) La ecuación:

$$\boxed{\text{COSTE DE 5 kg DE NARANJAS}} = \boxed{\text{COSTE DE 2 kg DE FRESAS}}$$

$$5x = 2(x + 1,8)$$

c) Resolución de la ecuación:

$$5x = 2(x + 1,8) \rightarrow 5x = 2x + 2 \cdot 1,8 \rightarrow 5x = 2x + 3,6 \rightarrow$$
$$\rightarrow 5x - 2x = 3,6 \rightarrow 3x = 3,6 \rightarrow x = \frac{3,6}{3} = 1,2$$

d) *Solución*: Las naranjas se venden a 1,20 €/kg.

Las fresas se venden a 1,20 + 1,80 = 3 €/kg.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 1,2 = 6 \text{ €} \\ 2(1,2 + 1,8) = 6 \text{ €} \end{array}\right\} 5 \cdot 1,2 = 2(1,2 + 1,8)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Lenguaje algebraico

1. Asocia la edad de cada personaje con una de las expresiones que hay debajo:

- Jorge tiene x años.
- Pilar, su esposa, tiene 3 años menos.
- Manuel, su padre, le dobla la edad.
- Lola, su madre, tiene 5 años menos que su padre.
- Gema, su hija, nació cuando Jorge tenía 26 años.
- Javi, el pequeño, tiene la mitad de años que la niña.

$x - 3$	$x - 26$	$2x$
$2x - 5$	x	$(x - 26) : 2$

2. Llamando x a un número natural, escribe la expresión algebraica que corresponde a cada enunciado:

a) El siguiente de ese número.

b) Su doble.

c) El doble de su anterior.

d) La mitad del número que resulta al sumarle cinco.

e) El número que resulta al restarle cinco a su mitad.

3. Asigna una expresión algebraica al sueldo de cada uno de los siguientes empleados:

- El sueldo de un informático en cierta empresa es de x euros mensuales.
- Un contable gana un 10 % menos.
- El jefe de su sección gana 700 € más.
- Un operario manual gana 400 euros menos que un informático.
- El gerente gana el doble que un jefe de sección.
- El director gana 800 euros más que el gerente.
- El sueldo de un peón sobrepasa en 200 euros la de un operario manual.

4. Una empresa de ventas online anuncia una promoción de discos, a 4,50 € el álbum, más un fijo de 3,50 € por los gastos de envío. ¿Cuál de las siguientes igualdades relaciona el importe (I) del envío, con el número de discos (d) pedidos?:

a) $I = (3{,}5 + 4{,}5) \cdot d$ b) $I = 3{,}5 - 4{,}5 \cdot d$

c) $I = 3{,}5 + 4{,}5 \cdot d$ d) $I = (3{,}5 + 4{,}5) : d$

Monomios y operaciones

5. Opera.

a) $3x + 2x + x$ b) $10x - 6x + 2x$

c) $5a - 7a + 3a$ d) $a - 5a + 2a$

e) $-2x + 9x - x$ f) $-5x - 2x + 4x$

6. Reduce todo lo posible.

a) $x + x + y$ b) $2x - y - x$

c) $5a + b - 3a + b$ d) $3a + 2b + a - 3b$

e) $2 + 3x + 3$ f) $5 + x - 4$

g) $2x - 5 + x$ h) $3x + 4 - 4x$

i) $x - 2y + 3y + x$ j) $2x + y - x - 2y$

7. Reduce, cuando sea posible.

a) $x^2 + 2x^2$ b) $x^2 + x$

c) $3a^2 - a - 2a^2$ d) $a^2 - a - 1$

e) $x^2 - 5x + 2x$ f) $4 + 2a^2 - 5$

g) $2a^2 + a - a^2 - 3a + 1$ h) $a^2 + a - 7 + 2a + 5$

8. Multiplica.

a) $2 \cdot (5a)$ b) $(-4) \cdot (3x)$ c) $(-2a) \cdot a^2$

d) $(5x) \cdot (-x)$ e) $(2a) \cdot (3a)$ f) $(-2x) \cdot (-3x^2)$

g) $(2a) \cdot (-5ab)$ h) $(6a) \cdot \left(\frac{1}{3}b\right)$ i) $\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x)$

9. Divide.

a) $(6x) : 3$ b) $(-8) : (2a)$ c) $(-15a) : (-3)$

d) $(2x) : (2x)$ e) $(6a) : (-3a)$ f) $(-2x) : (-4x)$

g) $(15a^2) : (3a)$ h) $(-8x) : (4x^2)$ i) $(10a) : (5a^3)$

Ecuaciones

10. Resuelve.

a) $2x + 5 - 3x = x + 19$ b) $7x - 2x = 2x + 1 + 3x$

c) $11 + 2x = 6x - 3 + 3x$ d) $7 + 5x - 2 = x - 3 + 2x$

e) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$ f) $5x = 4 - 3x + 5 - x$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x - x + 7x + 12 = 3x + 9$

b) $6x - 7 - 4x = 2x - 11 - 5x$

c) $7x + 3 - 8x = 2x + 4 - 6x$

d) $5x - 7 + 2x = 3x - 3 + 4x - 5$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

12. La suma de tres números consecutivos es 57. ¿Qué números son?

13. Si a un número le sumas su mitad y le restas 7, obtienes 17. ¿Qué número es?

14. Si a un número le sumas 20 obtienes el triple que si le restas 8. ¿De qué número se trata?

15. Al sumarle a un número 30 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cuatro. ¿Cuál es el número?

16. Si añadieras 20 botes de kétchup a la estantería, habría el cuádruple que si retiraras 10. ¿Cuántos botes hay en la estantería?

17. Un pastor tiene, entre ovejas y cabras, 231 cabezas. El número de ovejas supera en 83 al de cabras. ¿Cuántas cabras y cuantas ovejas hay en el rebaño?

18. En un garaje hay 12 coches más que motos, y en total contamos 60 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en el garaje?

	MOTOS	COCHES
VEHÍCULOS	x	$x + 12$
RUEDAS	$2x$	$4(x + 12)$

19. Amaya ha encontrado en un cajón 13 monedas, unas de diez céntimos y otras de 20 céntimos, que valen en total 1,70 €. ¿Cuántas hay de cada clase?

 → x monedas  → $(13 - x)$ monedas

20. Alfredo tiene 36 cromos más que Iván, y si comprara 10 más, tendría el triple. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

Iván → x Alfredo → $x + 36$

$\boxed{\text{CROMOS DE ALFREDO}} + 10 = 3 \cdot \boxed{\text{CROMOS DE IVÁN}}$

Autoevaluación

1. En una granja hay vacas (V) y avestruces (A).

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones indica el número de cabezas?

b) ¿Y el número de alas?

c) ¿Y el número de patas?

$\boxed{2V + A}$ $\boxed{4V + 2A}$ $\boxed{V + A}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{V - 2A}$

2. Completa en tu cuaderno las tablas siguientes:

n	1	2	3	5	10	15
$n^2 + 3$				28		

1	2	3	5	10	a	n
2	5	10	26	101		

3. Calcula.

a) $x \cdot 3x^3$ b) $15a^3 : 3a^2$ c) $(-2x) \cdot 3x^4$

4. Reduce.

a) $5a^3 - 2a^3$ b) $x + 2 - x^2 + 2x + x^2$

c) $(7x^2 - x) - (4x^2 + 2x)$ d) $3(x^2 - 1) + 2(x - 1)$

5. Resuelve.

a) $3x - 5 + 2x = x + 3$

b) $8 - 2(x + 1) = 5(x - 1) + 4$

6. La suma de tres números naturales consecutivos es 54. ¿Cuáles son esos números?

7. Por tres kilos de naranjas y dos de peras, he pagado 6,40 €. ¿A cómo está el kilo de cada una de esas frutas, si el de peras es veinte céntimos más caro que el de naranjas?

8. En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta, el doble que la pequeña. Si compras una caja de cada tamaño, te llevas 350 unidades. ¿Cuántos clavos tiene cada caja?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

11 Rectas y ángulos

Los ríos Tigris y Éufrates fueron la cuna de una antiquísima civilización. Hace 3 500 años los babilonios eran ya grandes astrónomos: predecían eclipses, controlaban los movimientos de estrellas y planetas y establecieron el calendario.

Para realizar esas actividades, hubieron de dominar la medida y el manejo de los ángulos, imprescindibles para precisar la posición de los astros en el firmamento. Este dominio lo aplicaron también en la construcción, en la agrimensura (medición de campos) y en la navegación.

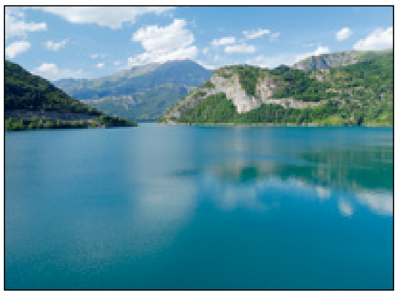
La unidad de medida de ángulos la determinaron dividiendo el círculo en 360 grados. Pero ¿por qué esta cantidad?

En un principio, creyeron que el año tenía 360 días, y cada grado era el ángulo que recorría "el Sol alrededor de la Tierra" cada día.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Elementos geométricos básicos

Plano, puntos, rectas, …



PLANO

La superficie del agua en calma (el mar, un lago o embalse, una piscina), la superficie de la mesa, una hoja de papel… son imágenes del plano con tal de que las imaginemos extendiéndose indefinidamente en todas las direcciones.

PUNTO

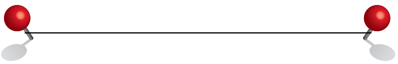
Una marca sobre el papel con la punta del lápiz o un pinchazo con un alfiler son buenas representaciones de puntos.

Un punto carece de dimensiones.

A los puntos se les suele denominar con letras mayúsculas: A, M, P…

RECTA

Un hilo tenso, la marca que deja un pliegue en una hoja de papel, el borde de la mesa o de la regla son representaciones adecuadas de rectas.



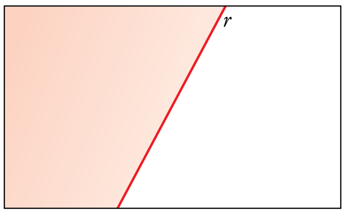
Una recta carece de grosor y se extiende indefinidamente en los dos sentidos.

Las rectas se suelen designar mediante letras minúsculas: r, s, t…

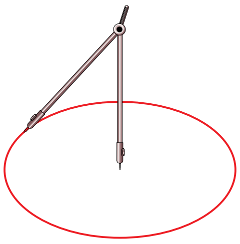
SEMIPLANO

Una recta r divide al plano en dos partes. Cada una de ellas, junto con la propia recta, es un semiplano.

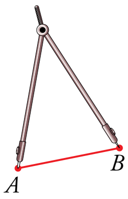
La recta se llama *borde* del semiplano.



El compás sirve para hacer circunferencias…



…pero también se utiliza para tomar distancias y transportarlas.



SEMIRRECTA

Un punto, A, sobre una recta la divide en dos partes. Cada una de ellas, junto al propio punto, es una semirrecta.

El punto A es su *origen*.

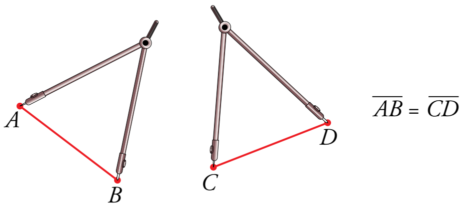
SEGMENTO

El trozo de recta comprendido entre dos de sus puntos, A y B, incluyendo estos, es un segmento.

A y B son los *extremos* del segmento. A este se le denomina AB.

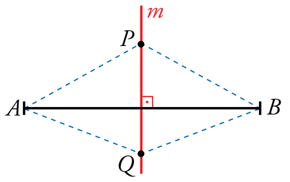
La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos. Se designa $\overline{AB}$.

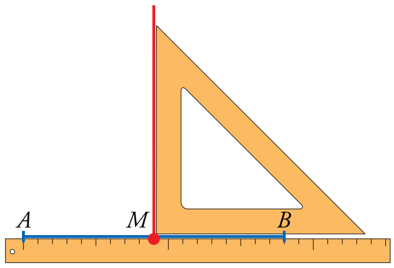
Decimos que dos segmentos son iguales si tienen la misma longitud.



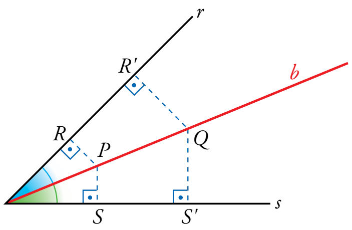
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Dos rectas importantes





Trazado de la mediatriz con regla y escuadra.



Mediatriz de un segmento

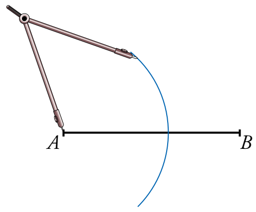
La **mediatriz** de un segmento, AB, es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

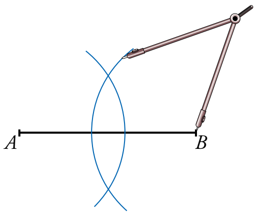
Propiedad fundamental: Los puntos de la mediatriz equidistan (están a igual distancia) de los extremos del segmento:

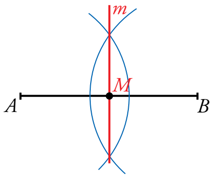
$$\overline{PA} = \overline{PB} \qquad \overline{QA} = \overline{QB}$$

Esta propiedad le confiere a esta recta una gran importancia en el estudio de figuras geométricas, triángulos, simetrías, etc.

Observa cómo se construye la mediatriz con regla y compás:







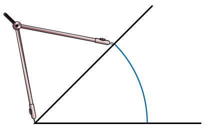
Bisectriz de un ángulo

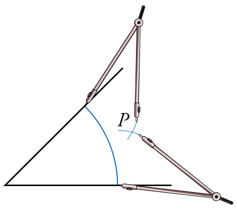
La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que divide al ángulo en otros dos ángulos iguales.

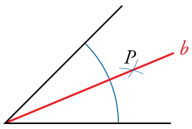
Los puntos de la bisectriz equidistan (están a igual distancia) de los lados del ángulo:

$$\overline{PR} = \overline{PS} \qquad \overline{QR'} = \overline{QS'}$$

Observa cómo se traza la bisectriz con regla y compás:



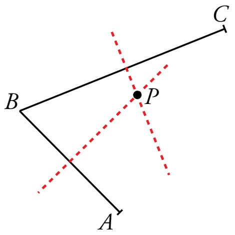




Piensa y practica

1. Dibuja dos segmentos concatenados, AB y BC. Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.

— Comprueba que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

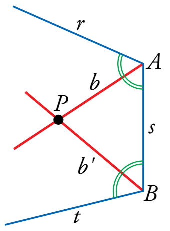


— Razona por qué P está a la misma distancia (equidista) de A, de B y de C.

2. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\widehat{rs}$ y $\widehat{st}$ como se ve en la figura.

— Traza sus bisectrices, b y b', que se cortan en un punto P.

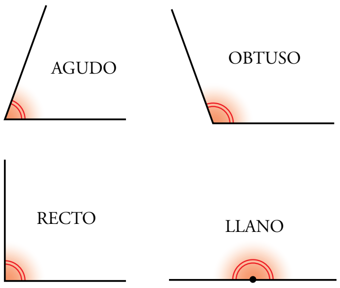
— Razona que las distancias del punto P a las rectas r, s y t coinciden.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

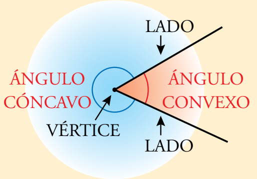
3 Ángulos

Tipos de ángulos

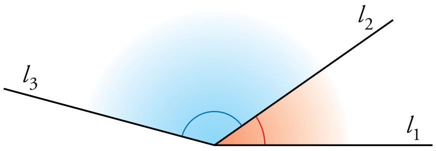


Un par de semirrectas con origen común delimitan dos ángulos: uno convexo (en rojo) y otro cóncavo (en azul).

Las semirrectas se llaman **lados** del ángulo, y el punto común, **vértice.**

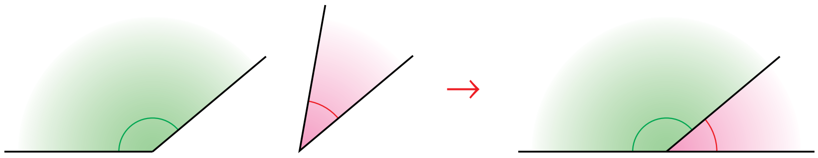


- Dos ángulos (rojo y azul) se llaman **consecutivos** cuando tienen el mismo vértice y un lado común, l_2.



El ángulo cuyos lados son l_1 y l_3 es la **suma** de los dos anteriores.

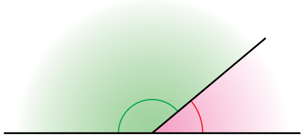
- Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano.



En la web

Practica clasificando ángulos.

- Dos ángulos se llaman **adyacentes** cuando son consecutivos y suplementarios.

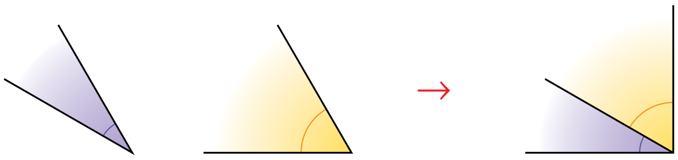


A propósito de su nombre, *ad yacentes*: cada uno yace junto al otro.

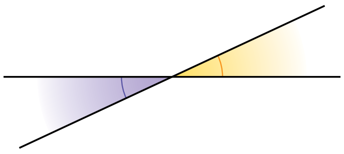
En la web

Practica encontrando el ángulo complementario o suplementario.

- Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto.



- Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los del otro.



Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces ambos son rectos.

b) Dos ángulos complementarios no pueden ser iguales.

c) El suplementario de un águlo agudo es un ángulo obtuso.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Relaciones angulares

Ten en cuenta

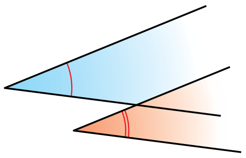
Hay ciertas configuraciones que se repiten con frecuencia y, por tanto, conviene tenerlas estudiadas. Es lo que ocurre con las que presentamos en esta página: ángulos con sus lados paralelos y, sobre todo, la colección de ángulos que se generan al cortar con una recta dos rectas paralelas entre sí.

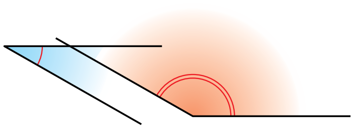
En la web

Practica averiguando qué ángulos se forman cuando una secante corta a dos rectas paralelas.

Ángulos de lados paralelos

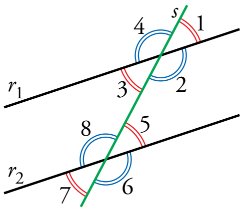
Dos ángulos cuyos lados son paralelos o son iguales o son suplementarios.





Ángulos que se forman cuando una recta corta a otras dos rectas paralelas entre sí

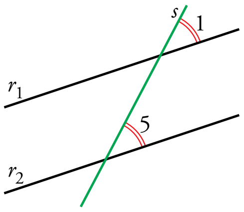
Si dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, se forman ocho ángulos, muchos de los cuales son iguales entre sí por tener sus lados paralelos.



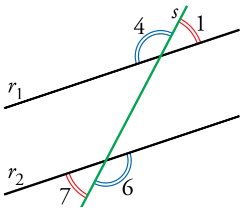
- $\hat{1} = \hat{3}$ por ser **opuestos por el vértice.**

  Por lo mismo:

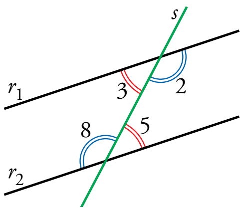
  $\hat{2} = \hat{4}$ $\hat{5} = \hat{7}$ $\hat{6} = \hat{8}$



- $\hat{1} = \hat{5}$. Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$ se llaman **correspondientes** porque están en la misma posición respecto a r_1 y a r_2. También son correspondientes $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$, $\hat{4}$ y $\hat{8}$.



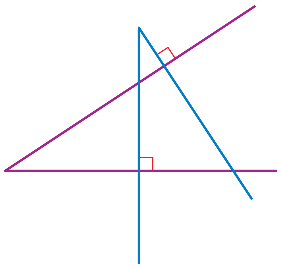
- $\hat{1} = \hat{7}$. Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{7}$ son **alternos externos** porque están a distintos lados de la recta s (alternos) y en la zona exterior de las dos paralelas (externos). También son alternos externos $\hat{4}$ y $\hat{6}$.



- $\hat{3} = \hat{5}$. Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ son **alternos internos** porque están a distintos lados de s y en la zona interior de las paralelas. También son alternos internos $\hat{2}$ y $\hat{8}$.

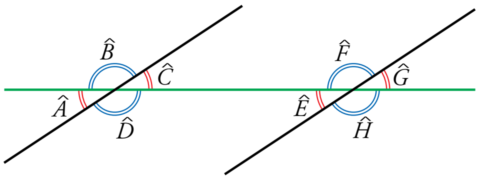
Piensa y practica

1. Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios.



Justifícalo en tu cuaderno con un dibujo.

2. De estos ángulos, di dos que sean iguales por ser:

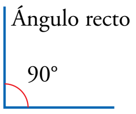


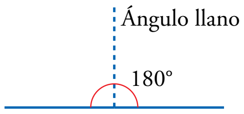
a) Opuestos por el vértice.
b) Correspondientes.
c) Alternos internos.
d) Alternos externos.

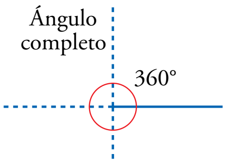
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Medida de ángulos. Operaciones

Recuerda que un ángulo recto tiene 90°. Por tanto, los ángulos *llano y completo* tienen 180° y 360°, respectivamente.







Etimología

Minutus, en latín, significa *menudo, diminuto*, y así se le llamó a este pequeño angulillo de 1/60 de grado.

Al tomar otro menor aún, se le llamó **segundo trozo menudo,** es decir, por segunda vez pequeño, más pequeño todavía. Es el **segundo,** 1/60 de minuto = 1/3 600 de grado.

El **grado** (1/90 de ángulo recto) es la unidad de medida de ángulos.

Para afinar en la medida de ángulos, se utilizan los submúltiplos del grado:

minuto ⟶ $1' = \frac{1}{60}$ de grado. Es decir, $1° = 60'$.

segundo ⟶ $1'' = \frac{1}{60}$ de minuto. Es decir, $1' = 60''$.

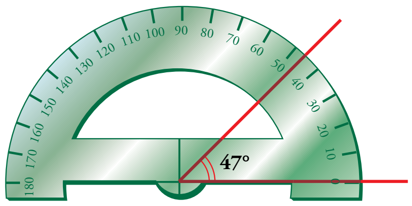
A estos grados se les llama **sexagesimales** por la forma de dividirse, de 60 en 60.

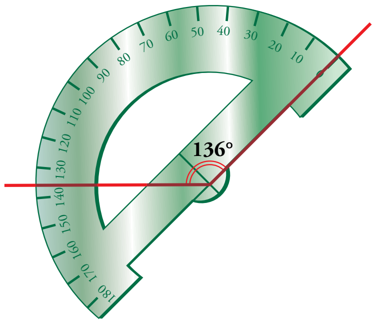
Tomar 60 como base de numeración tiene su origen, posiblemente, en una forma de contar basada en los cinco dedos de una mano y en las doce falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de la otra mano (5 · 12 = 60).

SEXTANTE: instrumento para medir ángulos.

Instrumentos de medida de ángulos

Para medir ángulos dibujados sobre el papel, se utiliza el **transportador.**





Para medidas angulares sobre el terreno existen otros instrumentos mucho más precisos, como el sextante, el goniómetro y el teodolito.

Expresión de un ángulo en grados y minutos

¿Qué significa un ángulo de 37° 40'? Es un ángulo mayor que 37° y menor que 38°. En concreto, mide 37 grados más 40/60 de grado.

¿Tiene sentido un ángulo de 24° 256'? No es una forma correcta de expresar un ángulo, pues 256' es más que un grado. Veámoslo:

$$\begin{array}{r|l} 246 & 60 \\ \hline 16 & 4 \end{array}$$

Es decir, 256' = 4 · 60' + 16'= 4° 16'

Por tanto, 24° 256' = 24° + 4° 16' = 28° 16'.

Nota

Este curso vamos a trabajar solo con ángulos en grados y minutos.

Al expresar un ángulo en grados y minutos, el número de minutos ha de ser menor que 60.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Suma de ángulos

Para sumar dos ángulos expresados en grados y minutos, se suman por separado los grados y los minutos. Después, si el número de minutos es mayor que 60, se pasan a grados.

$$\begin{array}{rr} 36^{\circ} & 45' \\ +\ 82^{\circ} & 56' \\ \hline 118^{\circ} & 101' \end{array} = 118^{\circ} + 1^{\circ}\,41' - 119''\,41'$$

$$\begin{array}{r|l} 101 & 60 \\ \cline{2-2} 41 & 1 \end{array} \qquad 101' = 1^{\circ}\,41'$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) 23° 35' + 48° 22'

b) 31° 40' + 23° 20'

c) 31° 42' + 23° 25'

Resta de ángulos

Suponemos que el minuendo es mayor que el sustraendo. Si el número de minutos del minuendo es mayor que el del sustraendo, la operación se realiza de inmediato. Si no, se procede como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rr} 56^{\circ} & 31' \\ -\ 32^{\circ} & 43' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr} 56^{\circ} & 31' \\ -\ 32^{\circ} & 43' \\ \hline 23^{\circ} & 48' \end{array} \leftarrow \text{(hemos convertido 1° en 60').}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) 87° 58' – 36° 25'

b) 87° – 36° 20'

c) 87° 10' – 36° 20'

Producto de un ángulo por un número natural

Para multiplicar un ángulo por un número natural, se efectúan los productos de los minutos y de los grados por ese número. Después, si el resultado de los minutos es mayor que 60, se pasan a grados los que corresponda.

$$(32^{\circ}\,47') \times 7 \Rightarrow \begin{array}{r} 32^{\circ} \\ \times\ \ 7 \\ \hline 224^{\circ} \end{array} \quad \begin{array}{r} 47' \\ \times\ \ 7 \\ \hline 329' \end{array} \rightarrow 224^{\circ}\,329' = 224^{\circ} + 5^{\circ}\,29' = 229^{\circ}\,29'$$

$$\begin{array}{r|l} 329 & 60 \\ \cline{2-2} 29 & 5 \end{array} \qquad 329' = 5^{\circ}\,29'$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) (20° 10') × 3

b) (20° 20') × 3

c) (20° 25') × 3

División de un ángulo entre un número natural

Para dividir un ángulo por un número natural, se dividen los grados y el resto se pasa a minutos, que se añaden a los que había. Después, se dividen los minutos.

$$(97^{\circ}\,15') : 7 \Rightarrow \begin{array}{rrr|l} 97^{\circ} & & 15 & 7 \\ \cline{4-4} 27 & & & 13^{\circ}\,53' \rightarrow \text{El cociente es } 13^{\circ}\,53'. \\ 6^{\circ} & \rightarrow & 360' & \\ \cline{1-3} & & 375' & \\ & & 25' & \\ & & 4' & \longrightarrow \text{El resto es } 4'. \end{array}$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) (42° 36') : 3

b) 91° : 3

c) (91° 30') : 3

Piensa y practica

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) 47° 25' + 56° 11' + 17° 49' b) 37° 53' – 29° 49'

c) 68° 42' + 11° 3' + 43° 39' d) 52° 41' – 36° 55'

2. Realiza estas operaciones:

a) (38° 43') × 8 b) (24° 55') × 10 c) (27° 42') × 5

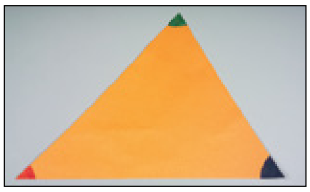
d) (76° 39') : 5 e) (89° 21') : 2 f) (115° 44') : 7

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

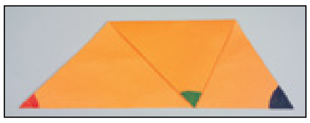
6 Ángulos en los polígonos

Observa

Ángulos de un triángulo



Recorta un triángulo cualquiera y colorea cada vértice de un color por ambas caras. Señala los puntos medios de dos de los lados.



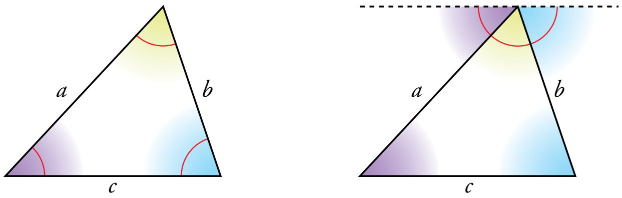
Pliega por la línea que une los puntos medios.

Pliega los otros dos vértices.

Al coincidir los tres ángulos, se aprecia que suman 180°.

Suma de los ángulos de un triángulo

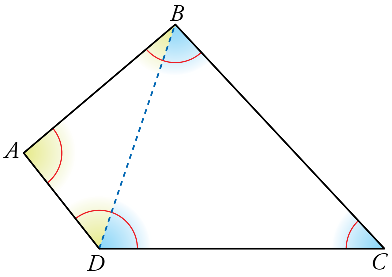
Para hallar la suma de los ángulos de un triángulo, trazamos por uno de sus vértices la paralela al lado opuesto y razonamos del siguiente modo:



Los ángulos morados son iguales por ser alternos internos al cortar las paralelas por la recta *a*. Lo mismo les ocurre a los azules con la recta *b*. Ahora, es claro que entre los tres completan un ángulo llano; es decir, suman 180°.

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°.

Suma de los ángulos de un cuadrilátero



Mediante la diagonal, el cuadrilátero se parte en dos triángulos.

La suma de los ángulos de cada triángulo es 180°.

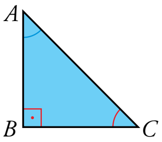
Los ángulos de los dos triángulos suman 180° · 2 = 360°.

La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es 360°.

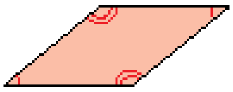
Como los cuadrados y los rectángulos tienen los cuatro ángulos iguales, cada uno de ellos mide 360° : 4 = 90°, como ya sabíamos.

Piensa y practica

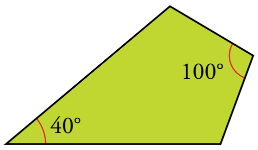
1. En un triángulo rectángulo, $\hat{A}$ mide 42° 20'. ¿Cuánto mide $\hat{C}$?



2. Si un ángulo de un rombo mide 39°, ¿cuánto miden los demás?



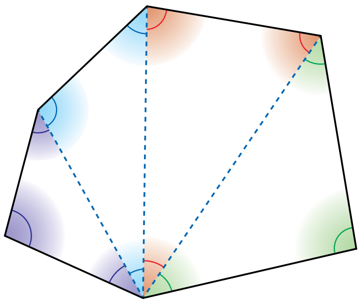
3. ¿Cuánto miden los ángulos iguales de una cometa con esta forma?



4. ¿Es posible construir un cuadrilátero con un solo ángulo recto? ¿Y con dos? ¿Y con tres?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Suma de los ángulos de un pentágono



Mediante diagonales, descomponemos el pentágono en tres triángulos.

Los ángulos de cada uno de ellos suman 180°. Entre los tres, los ángulos suman $3 \cdot 180° = 540°$. Por tanto, los ángulos de todos los pentágonos suman 540°.

Los cinco ángulos de cualquier pentágono suman 540°.

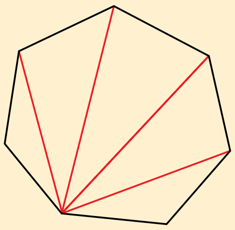
Por tanto, cada ángulo de un **pentágono regular** (todos sus ángulos son iguales) mide $540° : 5 = 108°$.

Ángulos de un polígono cualquiera

Como el pentágono, el hexágono se puede descomponer, mediante diagonales, en 4 triángulos. Sus ángulos sumarán, por tanto, $4 \cdot 180° = 720°$.

Así, en un hexágono regular, cada ángulo medirá $720° : 6 = 120°$.

Lo que hemos hecho con cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, lo podemos generalizar para polígonos de n lados como vemos a continuación.



Un polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos. La suma de todos sus ángulos es de $(n - 2) \cdot 180°$.

Cada ángulo de un polígono regular de n lados mide:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

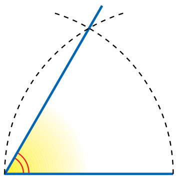
Piensa y practica

5. Averigua cuánto suman todos los ángulos de un decágono cualquiera y cuánto mide cada ángulo de un decágono regular. Hazlo de dos formas:

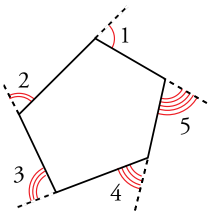
a) Volviendo a hacer todo el razonamiento: “Un decágono regular se puede descomponer en ocho triángulos…”.

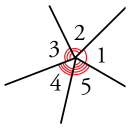
b) Aplicando las fórmulas anteriores.

6. Justifica que el ángulo así construido mide 60°.



7. Los ángulos señalados en rojo se llaman ángulos exteriores o externos del polígono.





Copia esta figura en un papel, recorta los ángulos externos, júntalos como ves en la figura de la derecha y comprueba que suman 360°.

8. Justifica que la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Operaciones con ángulos

1. Efectúa las siguientes sumas:

a) 15° 13' + 35° 23'

b) 18° 50' + 22° 15'

c) 25° 167' + 54° 40' + 13° 54'

2. Resuelve estas restas:

a) 180° 19' – 121° 52'

b) 143° 12' – 97° 24'

3. Haz los productos siguientes:

a) (58° 14') · 3

b) (37° 43') · 5

c) (62° 12') · 7

d) (5° 58') · 2

4. Resuelve estas divisiones:

a) (277° 34') : 11

b) (201° 52') : 8

c) (127° 55') : 5

d) (174° 30') : 6

5. Halla el complementario de los siguientes ángulos:

a) 45° 13'   b) 70° 52'

6. Halla, en cada caso, el suplementario del ángulo que se te da:

a) 93° 15'   b) 15° 02'

Construcciones con regla y compás

7. Traza un segmento de 6 cm y construye su mediatriz. ¿Qué propiedad tienen sus puntos?

8. Traza, con ayuda del transportador, un ángulo de 68° y construye su bisectriz. Comprueba que obtienes dos ángulos de 34°.

9. Dibuja, con ayuda del transportador, un triángulo rectángulo con un ángulo de 72°.

10. Construye un ángulo de 60° sin usar el transportador.

11. Construye un triángulo semejante al cartabón; es decir, sus ángulos deben medir 60°, 90° y 30°.

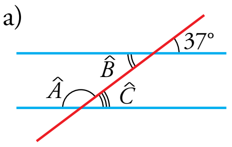
12. Dibuja dos semirrectas que tengan un segmento en común.

13. Dibuja dos semirrectas que estén sobre la misma recta y no tengan nada en común.

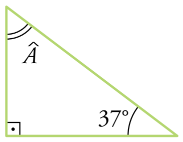
Relaciones angulares

14. Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:

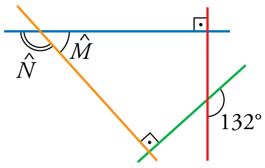
a)



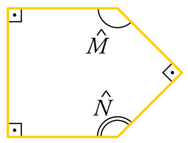
b)



c)

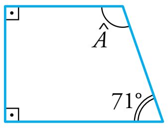


d)

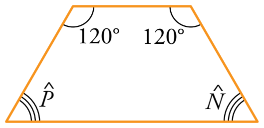


15. Halla el valor de los ángulos desconocidos.

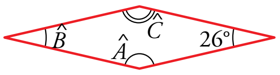
a)



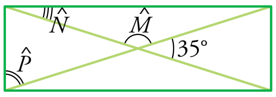
b)



c)



d)



16. Piensa y contesta:

a) ¿Cuánto mide un ángulo equivalente a un cuarto de vuelta?

b) ¿Qué ángulo giras si das media vuelta?

c) Estás frente a la playa y a tu espalda está la montaña. ¿Qué verás si giras 360°?

d) ¿Cuántos ángulos de 45° equivalen a media vuelta?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

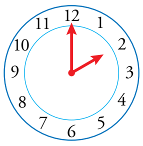
Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

17. Halla, en grados y minutos, el ángulo interior de un heptágono regular. Calcula, también, su ángulo central.

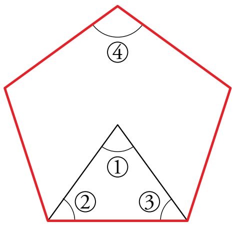
18. a) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2 en punto?

b) ¿Y a las 5 en punto?



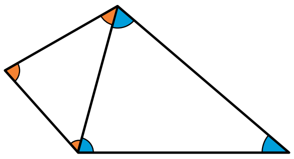
c) ¿Y a las 5 y cuarto? Ten en cuenta que la aguja horaria ha recorrido la cuarta parte del arco que va de 5 a 6.

19. ¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos señalados en este pentágono regular?

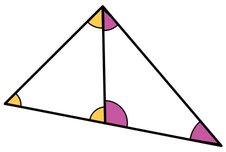


20. ¿Es posible dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo de 100°? Dibújalo o explica por qué no puede existir.

21. Como la suma de los ángulos de cada triángulo es 180°, la suma de los ángulos de este cuadrilátero es $180° \cdot 2 = 360°$:

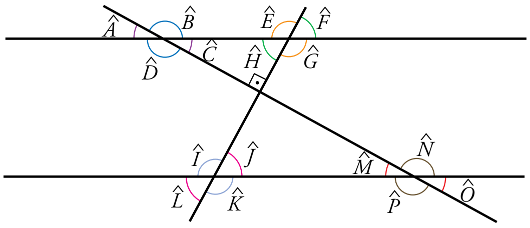


De la misma forma, ¿podríamos afirmar que al juntar estos dos triángulos se crea una figura cuya suma de ángulos es $180° \cdot 2 = 360°$?



Autoevaluación

1. Observa estos ángulos:



a) Identifica un ángulo recto, uno agudo y uno obtuso.

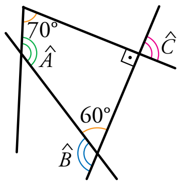
b) Escribe dos ángulos complementarios y dos suplementarios.

c) Indica dos ángulos opuestos por el vértice, dos correspondientes, dos alternos externos y dos alternos internos.

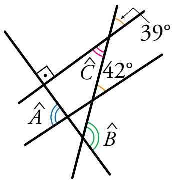
d) Sabiendo que $\hat{A} = 30°$, halla el resto de ángulos.

2. Halla los valores de los ángulos indicados:

a)



b)



3. Realiza las siguientes operaciones con ángulos:

a) 13° 44' + 23° 38'

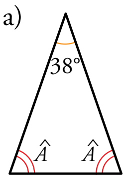
b) 26° 15' – 12° 32'

c) (32° 42') · 3

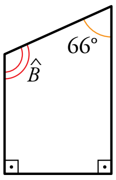
d) (23° 44') : 4

4. Calcula el valor de los ángulos indicados.

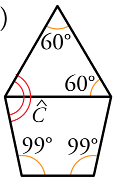
a)



b)



c)



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

12

Figuras geométricas

En torno al Nilo se desarrolló una potente civilización en la cual la geometría evolucionó con fuerza. Era una geometría de tipo práctico con la que, además de medir terrenos, calculaban eficazmente áreas y volúmenes de figuras geométricas.

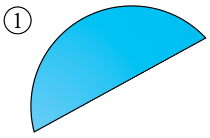
Del antiguo Egipto es muy conocido el hecho de que cada año, en primavera, el Nilo se desbordaba inundando las tierras de labor. Las lindes de los campos de cultivo se borraban y, cuando las aguas volvían a su cauce, debían ser restauradas.

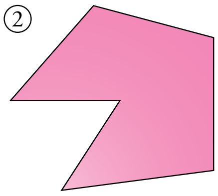
Funcionarios del faraón, agrimensores, se encargaban de volver a delimitar las parcelas.

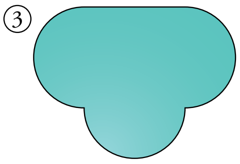
Esta actividad repetida año tras año en infinidad de parcelas propició grandes avances en la práctica de la geometría.

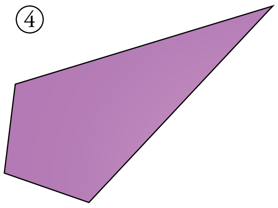
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

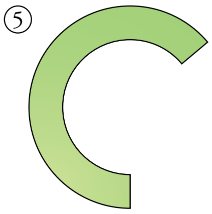
1 Polígonos y otras figuras planas

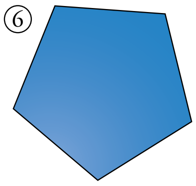
①


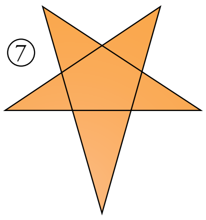
②


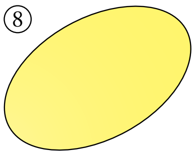
③


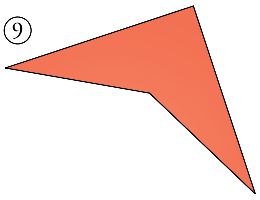
④


⑤


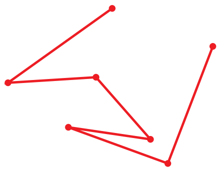
⑥


⑦


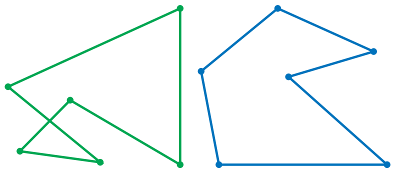
⑧


⑨


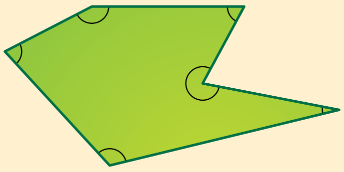
De todas las figuras planas representadas arriba, son polígonos las siguientes: ②, ④, ⑥ y ⑨. Pero antes de definir *polígono*, recordaremos algunos conceptos.



La figura de la derecha es una **línea poligonal,** pues está formada por una concatenación de segmentos, cada dos de los cuales tienen un extremo común. Es **abierta,** porque dos de los segmentos tienen su extremo libre.



Las dos líneas poligonales del margen son **cerradas,** porque no dejan extremos libres. La azul es **simple,** porque los segmentos que la forman no se cortan entre sí. La verde es **compleja,** porque algunos segmentos se cortan.



Polígono es una porción de plano limitada por una línea poligonal cerrada simple.

Los segmentos de la poligonal son los **lados** del polígono, los ángulos entre cada dos segmentos consecutivos son sus **ángulos,** y los extremos, sus **vértices.**

Etimología

Polígono viene del griego:

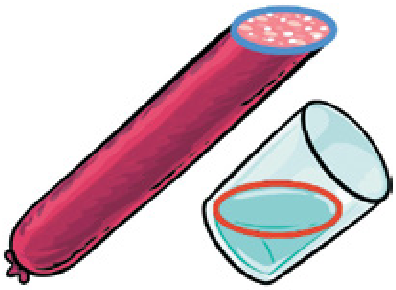
poli: varios.

gono: ángulo.

Como sabes, los polígonos se clasifican por el número de sus lados (o ángulos) en **tri**ángulos, **cuadri**láteros, **pentá**gonos, **hexá**gonos, etc. Trabajaremos con ellos en apartados posteriores.

De las figuras de arriba, la número ⑦ es una poligonal cerrada compleja. Se llama *pentágono estrellado*. Los "polígonos" estrellados, aunque los llamemos así, no son propiamente polígonos según la definición anterior.

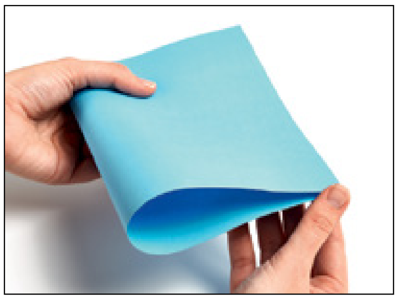
Las figuras ①, ③ y ⑤ están formadas por arcos de circunferencias y segmentos. También les prestaremos atención en esta unidad y en la siguiente.



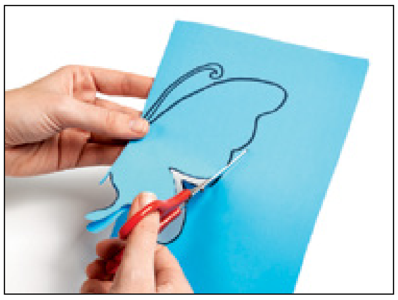
La figura ⑧ es una elipse. ¿Quieres verla en la realidad? Pues corta un salchichón inclinando el cuchillo. O echa agua en un vaso e inclínalo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Simetrías en las figuras planas



Pliega una hoja de papel.



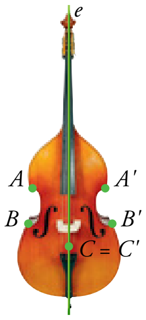
Recorta cualquier motivo.

Al desplegar, obtendrás una figura simétrica.

En la naturaleza, en la tecnología, en el arte, en nuestro mundo cotidiano, estamos rodeados de figuras simétricas. Su estudio es interesante.

Eje de simetría de una figura

Una figura plana es simétrica respecto a un eje (una recta) si al doblarla por ella, las dos mitades coinciden.

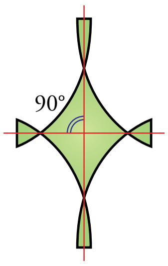


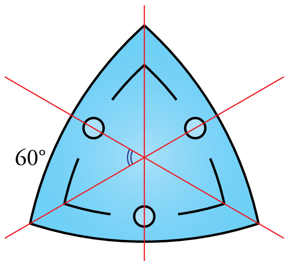
En una **simetría respecto a un eje** o **simetría axial:**

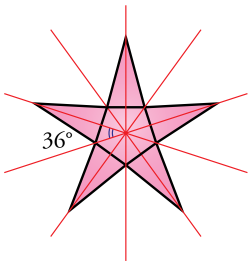
- La recta e se llama **eje de simetría.**
- A y A' son simétricos respecto a e, porque e es la mediatriz del segmento AA'. Lo mismo ocurre con B y B'.
- Cada punto del eje es simétrico de sí mismo: $C = C'$.

La simetría de las figuras planas se aprecia a simple vista, y su eje de simetría suele ser sencillo de identificar. No obstante, puede ser de gran ayuda **valerse de un espejo** para comprobar si una cierta recta es o no eje de simetría de una figura.

Las siguientes figuras tienen dos, tres y cinco ejes de simetría, respectivamente:







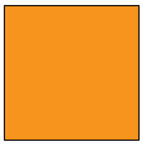
Si una figura tiene n ejes de simetría, estos se cortan en un punto, y cada dos ejes contiguos forman un ángulo de $\frac{180^\circ}{n}$.

Piensa y practica

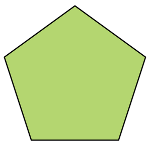
En la web Practica encontrando ejes de simetría.

1. Di cuáles de las siguientes figuras son simétricas respecto a algún eje. Dibuja cada eje de simetría y, si tienes un pequeño espejo a mano, comprueba que lo es. Si tiene más de un eje de simetría, averigua qué ángulo forman cada dos de ellos contiguos.

a)



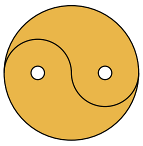
b)



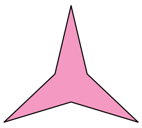
c)

d)

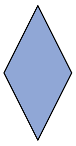
e)



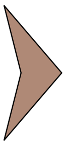
f)



g)

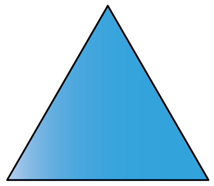


h)



3 Triángulos

Relación entre los lados y los ángulos

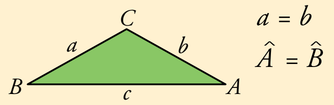


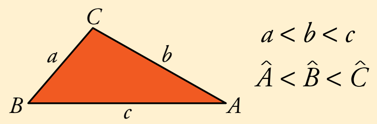
EQUILÁTERO Y EQUIÁNGULO

Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos. Estos elementos, como es natural, están estrechamente relacionados. Por ejemplo:

- Los triángulos equiláteros también son equiángulos. Cada uno de sus ángulos mide, pues, 60°.
- Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales. Pues bien, sus ángulos opuestos también son iguales.
- Los triángulos escalenos tienen los lados desiguales y, también, los ángulos desiguales. Y se cumple que *a mayor lado se opone mayor ángulo*.

En un triángulo ABC, de lados a, b, c, si $a = b$, entonces $\hat{A} = \hat{B}$, y si $a < b$, entonces $\hat{A} < \hat{B}$.





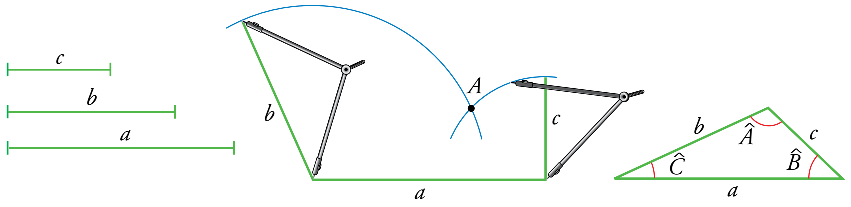
Construcción de triángulos

Un triángulo queda perfectamente definido conociendo solamente tres de sus elementos, al menos uno de los cuales ha de ser un lado.

Por tanto, podremos construir un triángulo si conocemos los tres lados; o dos lados y un ángulo; o un lado y dos ángulos. Veamos aquí el primero de los casos:

■ **CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE SUS TRES LADOS**

DATOS CONSTRUCCIÓN RESULTADO



En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Por tanto, para que tres segmentos puedan formar un triángulo han de cumplir esta propiedad.

En la web
Construye triángulos.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) Un triángulo con dos ángulos rectos es birrectángulo.

b) Un triángulo puede ser escaleno y rectángulo.

c) Un triángulo isósceles siempre es acutángulo.

d) Un triángulo equilátero siempre es acutángulo.

e) Cuanto más grandes sean los lados de un triángulo equilátero, más grandes son sus ángulos.

2. Construye con regla y compás un triángulo cuyos lados miden:

a) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm y $c = 6$ cm.

b) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm y $c = 3$ cm.

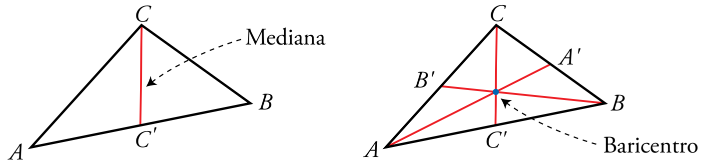
c) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm y $c = 8$ cm.

d) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm y $c = 8$ cm.

Estudia, en cada caso, la relación entre sus ángulos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Medianas de un triángulo. Baricentro



Se llama **mediana** de un triángulo a un segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro.**

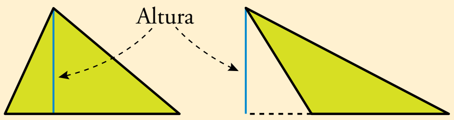
Equilibrio

Un triángulo de cartulina, chapa o madera se mantiene en equilibrio si lo sostenemos en el baricentro.

bari-centro: centro de gravedad.

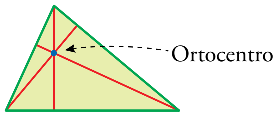
Alturas de un triángulo. Ortocentro

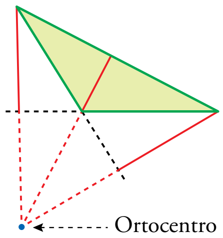
La **altura** de un triángulo es un segmento que va, perpendicularmente, desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



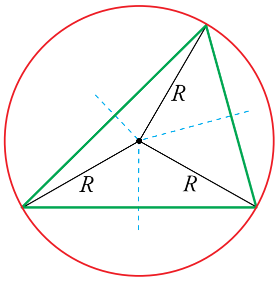
Las tres alturas de un triángulo, o sus prolongaciones, se cortan en un punto llamado **ortocentro.**

En los triángulos rectángulos, el ortocentro es el vértice del ángulo recto; en los acutángulos está en el interior del triángulo, y en los obtusángulos, el ortocentro está en el exterior del triángulo.

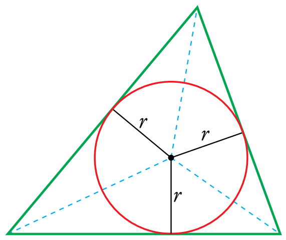




Circunferencias asociadas a un triángulo



CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA. Pasa por los tres vértices. Su centro, **circuncentro,** es el punto donde se cortan las **mediatrices** de sus lados.



CIRCUNFERENCIA INSCRITA. Es tangente a los tres lados. Su centro, **incentro,** es el punto donde se cortan las **bisectrices** de sus ángulos.

En la web

Practica con las rectas y puntos notables de un triángulo.

Etimología

circun-scrita: dibujada alrededor de.

in-scrita: dibujada dentro de.

Piensa y practica

3. Dibuja el triángulo de lados 8 cm, 10 cm y 12 cm. Observa que es acutángulo. Traza sus tres alturas y señala su ortocentro.

4. Dibuja el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm. Observa que es obtusángulo. Traza sus medianas y señala su baricentro.

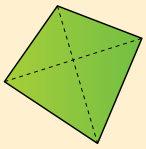
5. Dibuja el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm. Observa que es rectángulo. Localiza su ortocentro y su circuncentro. Traza la circunferencia circunscrita.

6. Dibuja el triángulo equilátero de lado 6 cm. Traza la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.

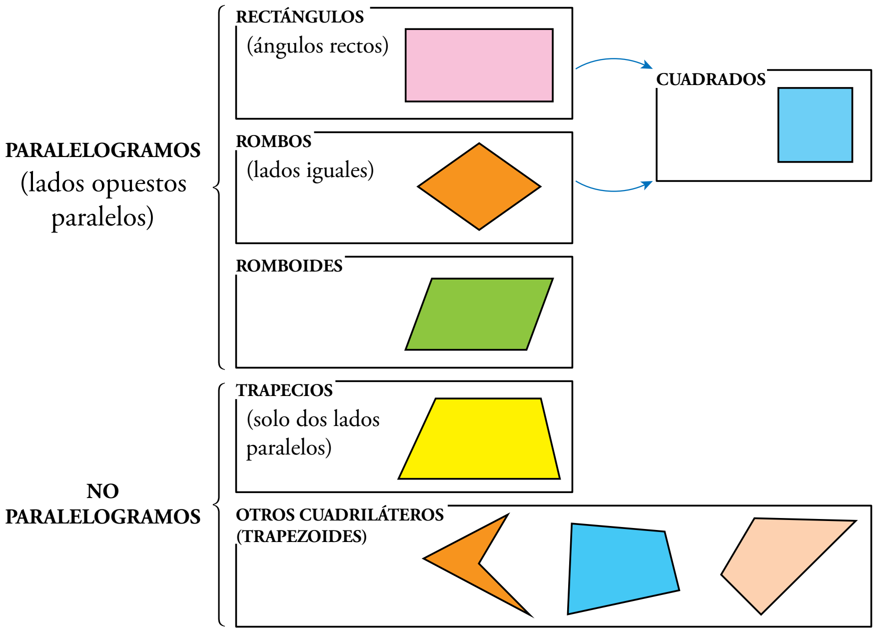
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Cuadriláteros

Cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.
Recuerda que sus cuatro ángulos suman 360°.
Tienen dos diagonales.



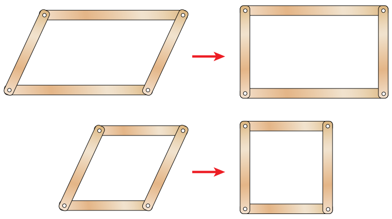
Clasificación de los cuadriláteros



Atención

Los cuadrados son rectángulos, porque tienen los cuatro ángulos rectos.
Y también son rombos, porque tienen los cuatro lados iguales.

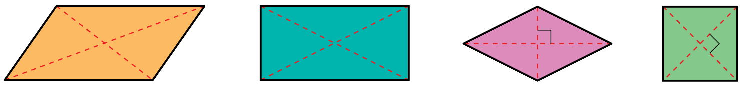
Paralelogramos. Diagonales. Ejes de simetría



Se llama **paralelogramo** al cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

- **Diagonales**

  Las diagonales de un paralelogramo cualquiera se cortan en sus puntos medios.



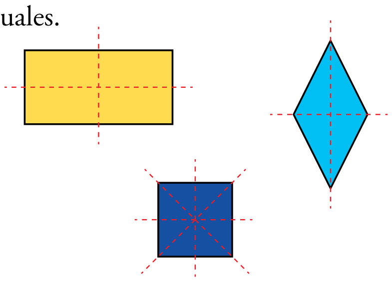
En el cuadrado y en el rombo, las diagonales son perpendiculares. En el cuadrado y en el rectángulo, las diagonales son iguales.

- **Ejes de simetría**

  El romboide no tiene ejes de simetría.

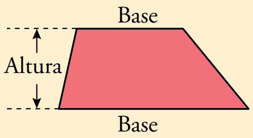
  El rectángulo y el rombo tienen dos ejes de simetría.

  El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.



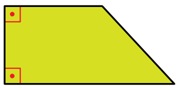
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Trapecios

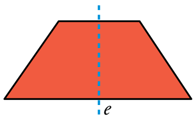


Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos y otros dos no paralelos.

Los lados paralelos se llaman **bases,** y la distancia entre ellos, **altura.**



TRAPECIO RECTÁNGULO

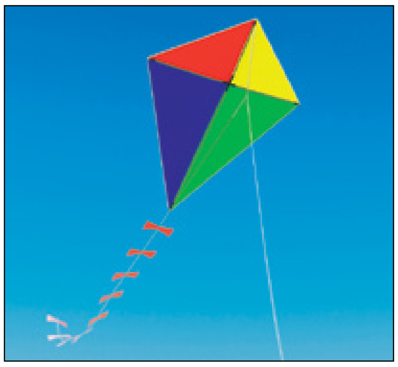


TRAPECIO ISÓSCELES

- Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **trapecio rectángulo.**
- Un **trapecio** con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles.** El trapecio isósceles tiene los ángulos iguales dos a dos. Pero, ¡atención!, los ángulos iguales son contiguos, no opuestos. Tiene un eje de simetría.

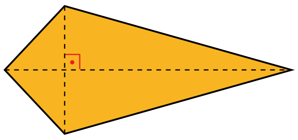
Trapezoides

Los cuadriláteros que no tienen ningún par de lados paralelos se llaman **trapezoides.**



Ejemplos

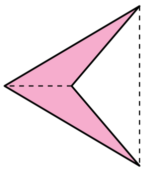
- Este trapezoide, con forma de cometa, tiene los lados iguales dos a dos, pero los lados iguales son contiguos, no opuestos (si fueran iguales los lados opuestos, sería un paralelogramo).



  Además, sus diagonales son perpendiculares, como las del rombo, pero no se cortan en sus puntos medios. Solo tiene un eje de simetría, su diagonal mayor.

- Este también tiene los lados iguales dos a dos. Sus diagonales, aunque tienen direcciones perpendiculares, no se cortan, pues una de ellas está fuera del polígono.

  Estos cuadriláteros, en los que una diagonal queda fuera, se llaman **cóncavos.**



Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

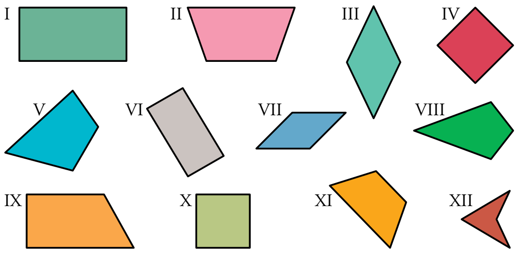
a) Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo.

b) Si un cuadrilátero tiene los lados iguales dos a dos, entonces es un paralelogramo.

c) Si un cuadrilátero tiene las diagonales perpendiculares, entonces es un rombo.

d) Si un cuadrilátero tiene los ángulos iguales dos a dos, es rombo, romboide o trapecio isósceles.

2. Observa los cuadriláteros siguientes:



a) ¿Cuáles son paralelogramos, cuáles trapecios y cuáles trapezoides?

b) Ponle un nombre adecuado a cada uno. Por ejemplo, cuadrado, trapezoide…

c) Di cuántos ejes de simetría tiene cada figura.

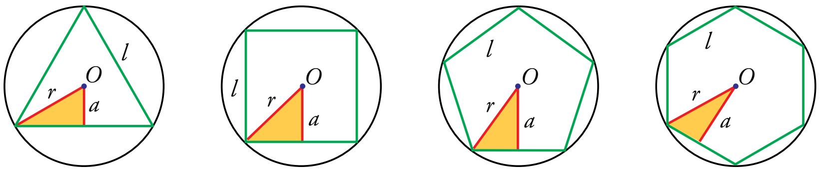
d) ¿Cuáles de estas figuras tienen las diagonales perpendiculares? ¿Cuáles las tienen iguales?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Polígonos regulares

Polígono regular es el que tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales. Al triángulo regular lo hemos llamado **triángulo equilátero,** y al cuadrilátero regular, **cuadrado.**

Todos los polígonos regulares tienen una circunferencia circunscrita.

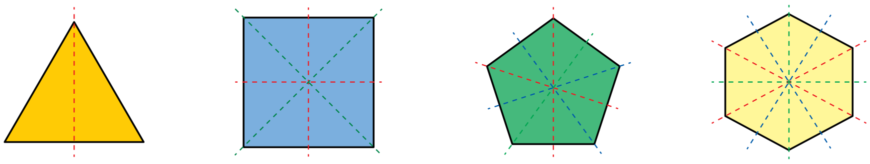


Se llaman **centro,** O, y **radio,** r, de un polígono regular al centro y al radio de la circunferencia circunscrita.

Apotema, a, es el segmento perpendicular desde el centro, O, al lado, l. La apotema siempre corta al lado en su punto medio.

En todos los polígonos regulares, r, a y $l/2$ son los lados de un triángulo rectángulo.

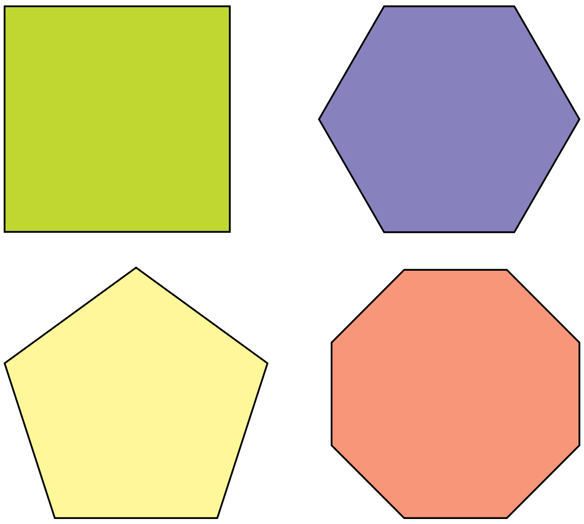
Ejes de simetría



Todos los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados.

Piensa y practica

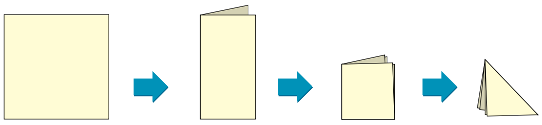
1. Calca en tu cuaderno las figuras siguientes:



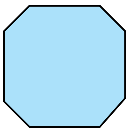
Dibuja en rojo todos sus ejes de simetría.

2. Calca las figuras del ejercicio anterior y recórtalas. Señala, mediante pliegues, todos sus ejes de simetría.

Observa que en el cuadrado puedes realizarlo mediante tres pliegues, y en el octógono, mediante cuatro.



3. ¿Verdadero o falso?

a)  Este octógono tiene todos sus ángulos iguales. Pero no es regular porque sus lados no son iguales.

b) Si un polígono tiene sus lados iguales, entonces seguro que sus ángulos son también iguales y, por tanto, es regular.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

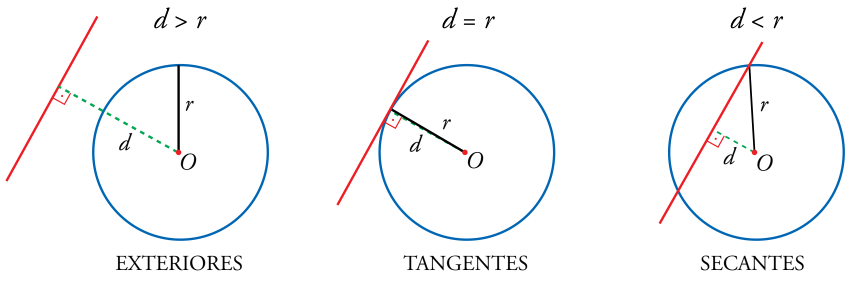
6 Circunferencia

La circunferencia es la línea que rodea al círculo.

El círculo es la figura plana más perfecta:

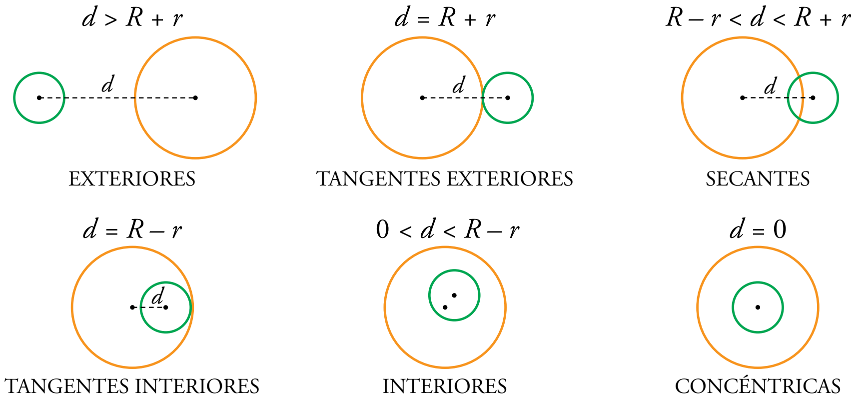
- Cualquier recta que pase por su centro es eje de simetría. Por tanto, tiene infinitos ejes de simetría.
- Su área es la mayor posible entre todas las figuras que tienen su mismo perímetro. Es decir, si con una cuerda queremos delimitar un terreno cuya superficie sea la mayor posible, deberemos construir una circunferencia.

Posiciones relativas de recta y circunferencia



Posiciones relativas de dos circunferencias

Observa cómo varía la posición de dos circunferencias en función de la distancia que separa sus centros: al principio, sus centros distan más que la suma de sus radios, y se van acercando hasta que sus centros coinciden.



Exprésate

d = distancia entre los centros.

R = radio de la circunferencia mayor.

r = radio de la circunferencia menor.

La expresión $R - r < d < R + r$ significa:

d es mayor que $R - r$…

… pero menor que $R + r$.

Interpreta cada una de las demás expresiones y relaciónalas con la posición correspondiente.

Piensa y practica

1. Traza una circunferencia de 5 cm de radio y tres rectas que pasen a 3 cm, 5 cm y 8 cm, respectivamente, del centro de la circunferencia.

2. Dibuja en tu cuaderno dos circunferencias secantes y una circunferencia interior a otra.

Mide, en ambos casos, la distancia entre sus centros y compárala con sus radios.

3. Si trazaras dos circunferencias de radios 7 cm y 4 cm con sus centros a 10 cm de distancia, ¿en qué posición relativa quedarían? Trázalas y comprueba tu respuesta.

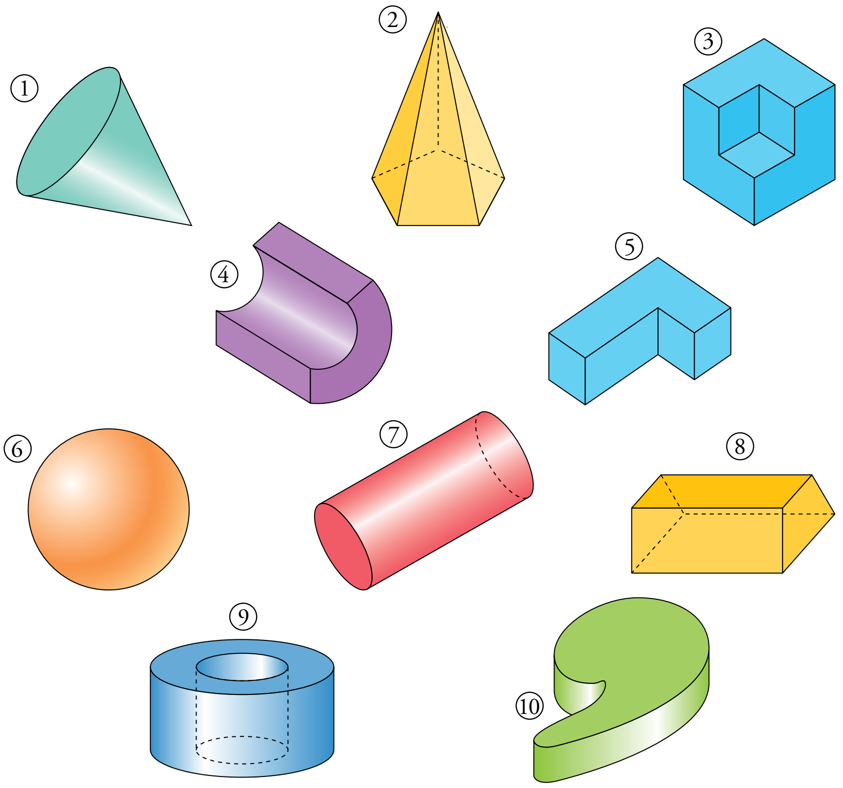
4. Traza dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm tangentes exteriores. ¿A qué distancia están sus centros?

Traza dos circunferencias de 5 cm y 3 cm de radio tangentes interiores. ¿Cuánto distan sus centros?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Cuerpos geométricos

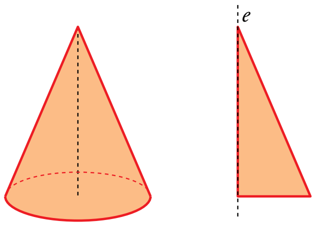
Los cuerpos geométricos son, como sabes, figuras de tres dimensiones, es decir, figuras que ocupan una porción de espacio.



Todas estas figuras recuerdan diferentes objetos de nuestro entorno. Son cuerpos geométricos. Entre ellos, distinguiremos dos grandes tipos:

- **Poliedros:** Están limitados por caras planas poligonales. La figura ② es un poliedro que tiene cinco caras triángulos y una cara pentágono. También es poliedro la figura ③.
- **Cuerpos de revolución:** Son el resultado del giro de una figura plana en torno a un eje. Por ejemplo, el ① y el ⑥ de arriba.

Las figuras ④ y ⑩ no son poliedros pues sus caras no son polígonos. Tampoco son cuerpos de revolución, pues no se pueden obtener haciendo girar alguna figura plana. Esta categoría de cuerpos no reciben ningún nombre especial.

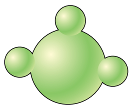


El cono es un cuerpo de revolución porque se obtiene haciendo girar el triángulo naranja alrededor del eje *e*.

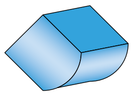
Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) Esta figura es cuerpo de revolución porque es redondita.



b) Esta figura es un poliedro porque algunas de sus caras son polígonos.



2. Señala, entre los cuerpos de arriba, dos poliedros (aparte del 2 y el 3).

3. Entre los cuerpos de arriba, señala dos cuerpos de revolución (aparte del 1 y el 6).

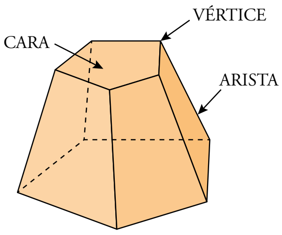
Dibuja la figura plana y el eje que generan cada cuerpo.

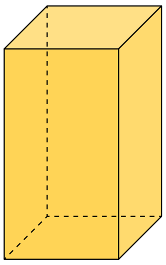
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

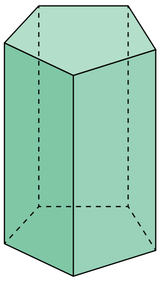
8 Poliedros

Los cuerpos geométricos limitados por polígonos se llaman **poliedros.**

- **Caras** del poliedro son los polígonos que lo forman.
- **Aristas** son los lados de las caras. En cada arista se juntan dos caras.
- **Vértices** del poliedro son los vértices de las caras. En cada vértice concurren tres o más caras.




ORTOEDRO


PRISMA PENTAGONAL REGULAR

PRISMAS

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos, llamados **bases,** y varios paralelogramos llamados **caras laterales.**

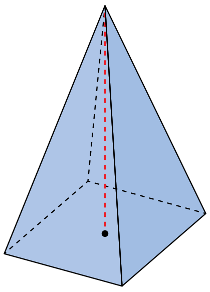
Si las bases son polígonos regulares y las caras laterales son rectángulos, el **prisma** se llama **regular.**

Los prismas cuyas caras son todas rectángulos se llaman **ortoedros.**

PIRÁMIDES

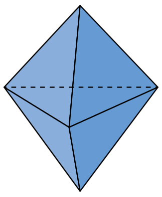
Una **pirámide** es un poliedro que tiene por **base** un polígono cualquiera y por **caras laterales** triángulos con un vértice común, que se denomina **vértice** de la pirámide. La distancia del vértice a la base es la **altura.**

Una **pirámide** es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.


PIRÁMIDE CUADRANGULAR REGULAR

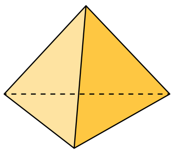
No te confundas

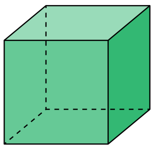
Este poliedro no es regular, porque en unos vértices concurren tres triángulos, y en otros, cuatro.

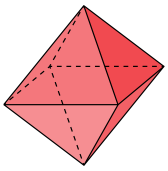


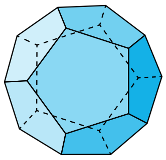
POLIEDROS REGULARES

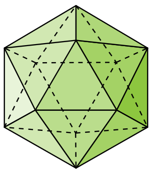
Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares idénticos y en cada vértice concurren el mismo número de caras. Hay 5 poliedros regulares:


TETRAEDRO


CUBO

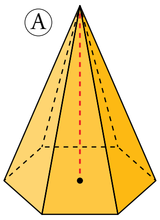

OCTAEDRO

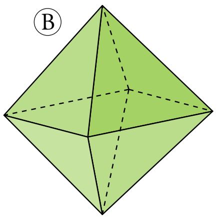

DODECAEDRO

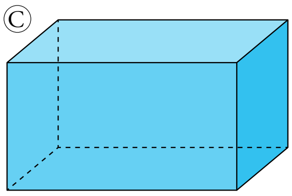

ICOSAEDRO

Piensa y practica

1. Describe los poliedros siguientes: nombre, cómo son sus caras y cuántas tienen, número de aristas, de vértices…

Ⓐ


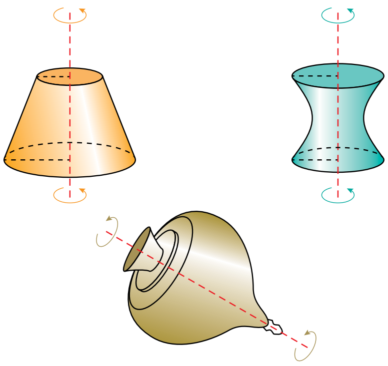
Ⓑ


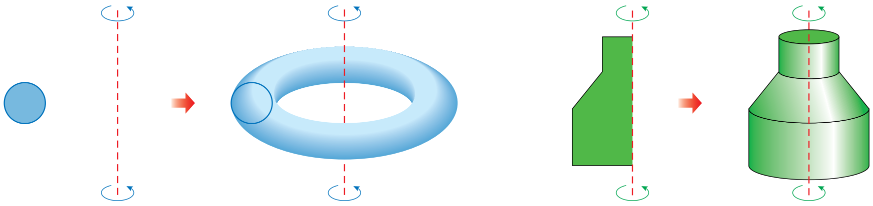
Ⓒ


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

9 Cuerpos de revolución

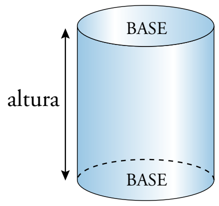
Los **cuerpos de revolución** se originan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.

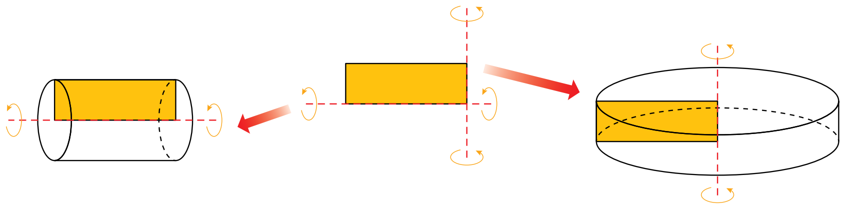




CILINDROS

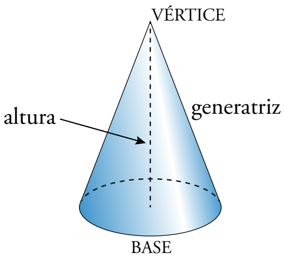
Un **cilindro** es un cuerpo de revolución generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

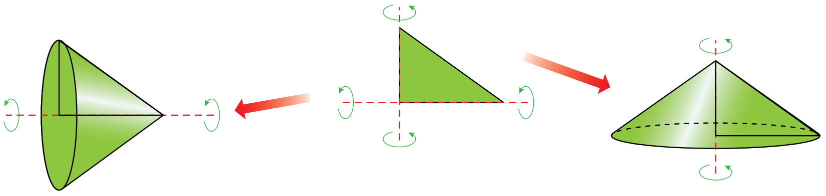




CONOS

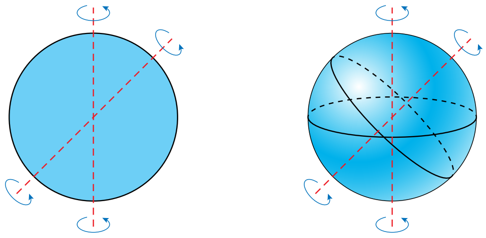
Un **cono** es un cuerpo de revolución generado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de los catetos.





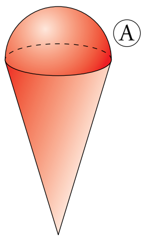
ESFERAS

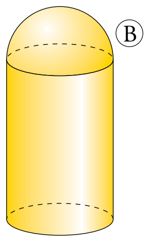
Una **esfera** es un cuerpo de revolución generado por un círculo que gira alrededor de cualquiera de sus diámetros.

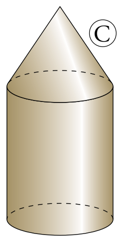


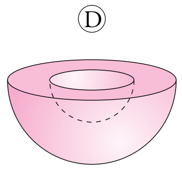
Piensa y practica

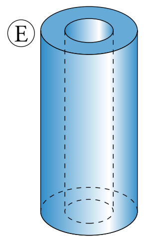
1. Utilizando las palabras cilindro, cono y esfera, describe los siguientes cuerpos geométricos:









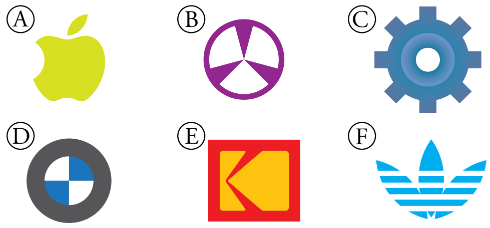


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

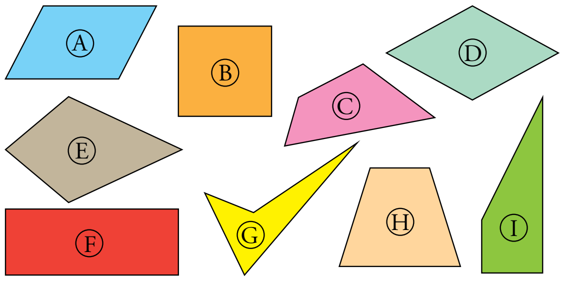
Simetrías

1. Señala, cuando existan, todos los ejes de simetría en estas figuras. Si hay más de dos, halla el ángulo que forman dos de los ejes contiguos.



Polígonos. Clasificación

2. Pon nombre a cada uno de estos cuadriláteros:

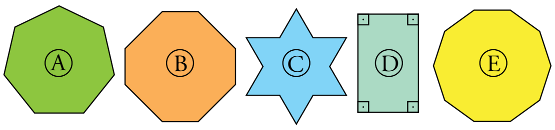


3. Indica qué propiedades de la derecha tienen las figuras de la izquierda:

CUADRADO
RECTÁNGULO (no cuadrado)
ROMBO (no cuadrado)
ROMBOIDE
PARALELOGRAMO
TRAPEZOIDE

① Cuatro lados iguales.
② Cuatro ángulos rectos.
③ Ángulos opuestos iguales.
④ Diagonales perpendiculares.
⑤ Diagonales que se cortan en sus puntos medios.
⑥ Diagonales no perpendiculares.
⑦ Cuatro ejes de simetría.
⑧ Dos ejes de simetría.

4. ¿Cuáles de estos polígonos son regulares?



Construcciones

5. Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 5 cm y 7 cm, y traza sus medianas. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan?

6. Dibuja estos triángulos, clasifícalos y encuentra el circuncentro de cada uno:

a) 4 cm, 6 cm y 5 cm.
b) 12 cm, 13 cm y 5 cm.
c) 8 cm, 6 cm y 12 cm.
d) 5 cm, 5 cm y 5 cm.

Propiedades de las figuras planas

Para resolver las siguientes actividades, te puedes ayudar de un dibujo.

7. ¿Por qué no pueden construirse estos triángulos?:

a) Sus lados miden 15,3 cm, 8,6 cm y 5,2 cm.
b) Dos de sus ángulos miden 95° y 88°.

8. Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿De qué tipo es…

a) … si los dos segmentos tienen distinta longitud?
b) … si los dos segmentos tienen la misma longitud?

9. Imagina dos segmentos que se cortan en sus puntos medios y no son perpendiculares. Al unir sus extremos se obtiene un cuadrilátero. ¿Cuál es…

a) … si los dos segmentos son iguales?
b) … si un segmento es más largo que el otro?

10. Dibuja y clasifica, cuando sea posible, un ejemplo de cada cuadrilátero:

a) Con dos ejes de simetría.
b) Con cuatro ejes de simetría.
c) Con un eje de simetría.
d) Paralelogramo sin ejes de simetría.
e) No trapecio con un eje de simetría.

11. Escribe el nombre de cada cuadrilátero:

a) Paralelogramo con diagonales perpendiculares.
b) No paralelogramo con diagonales perpendiculares.
c) Paralelogramo con diagonales iguales.
d) No paralelogramo con diagonales iguales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

12. ¿De qué cuadrilátero se trata?

a) Dos pares de lados iguales y paralelogramo.

b) Dos pares de lados iguales y no paralelogramo.

c) Dos pares de ángulos iguales y paralelogramo.

d) Dos pares de ángulos iguales y no paralelogramo.

13. Dibuja dos trapecios que, al unirlos, den lugar a las siguientes figuras:

a) Un cuadrado. b) Un rombo.

Te puedes ayudar, en cada caso, de un dibujo de la figura e intentar dividirla en dos trapecios.

Posiciones relativas

14. Dibuja una circunferencia de 5 cm de radio y un triángulo cuyos lados sean: uno secante a la circunferencia, otro tangente y otro exterior.

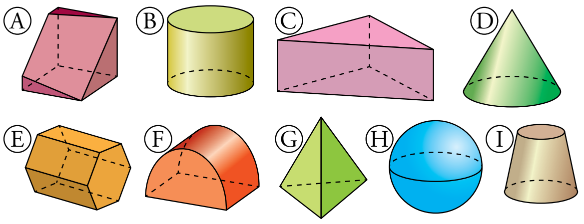
15. Indica en cada caso la posición relativa de dos circunferencias de radios 7 cm y 10 cm, respectivamente, cuyos centros se encuentran a:

a) 9 cm b) 20 cm c) 3 cm d) 17 cm e) 0 cm

16. Dibuja dos circunferencias, C y C', de radios 5 cm y 3 cm que sean tangentes interiores. Traza tres circunferencias distintas, de 2 cm de radio, tales que cada una de ellas sea tangente a C y a C'.

Cuerpos geométricos

17. Observa estos cuerpos:



a) ¿Cuáles son poliedros? De ellos, nombra los prismas y la pirámide. ¿Hay alguno que no sea prisma ni pirámide?

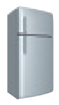
b) ¿Cuáles son cuerpos de revolución? Nómbralos.

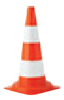
c) ¿Hay alguno que no sea poliedro ni cuerpo de revolución?

18. ¿Cuáles de estas figuras son cuerpos de revolución? ¿De cuáles conoces el nombre?

a) 

b) 

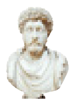
c) 

d) 

e) 

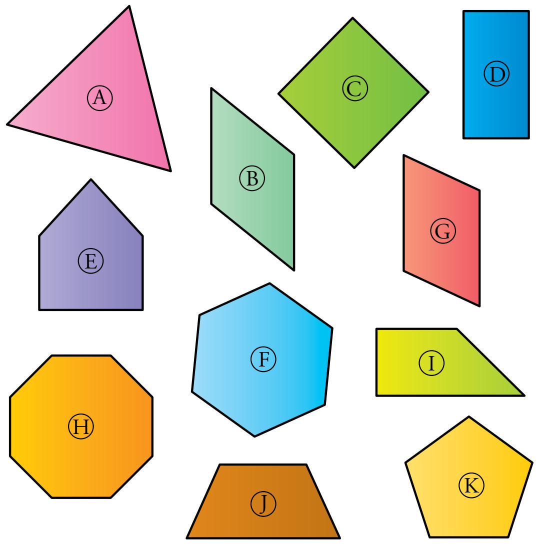
f) 

g) 

h) 

Autoevaluación

1. Observa los siguientes polígonos:



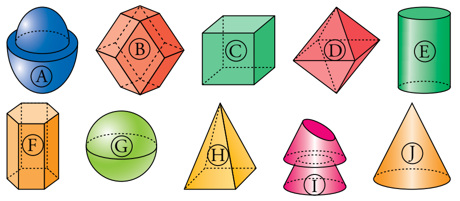
a) Clasifica los cuadriláteros y escribe las características de cada uno.

b) Identifica los polígonos regulares y nómbralos.

c) ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada figura?

2. Dibuja en tu cuaderno dos triángulos escalenos. Encuentra el circuncentro y la circunferencia circunscrita de uno de ellos y el baricentro del otro.

3. Entre los siguientes cuerpos geométricos, determina los poliedros, los poliedros regulares y los cuerpos de revolución. Pon nombre a los que conozcas.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

13 Áreas y perímetros

La cultura griega se extendió por el Mediterráneo desde Sicilia hasta Asia Menor. Los griegos aprendieron la geometría egipcia, práctica y utilitaria, y la superaron, cultivándola de forma teórica, por el placer intelectual de investigar y saber.

Cuentan que un barco griego naufragó y algunos viajeros consiguieron llegar a una playa desconocida. En la arena vieron dibujadas algunas figuras geométricas. Entonces uno de ellos exclamó: “¡No temamos, compañeros!, aquí viven personas civilizadas”.

Para hallar áreas y volúmenes, los egipcios utilizaban fórmulas obtenidas experimentalmente, mientras que los griegos las obtuvieron mediante un proceso deductivo.

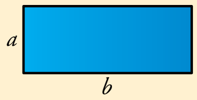
La culminación llegó con Arquímedes de Siracusa, que supo obtenerlas por métodos muy sofisticados.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Medidas en los cuadriláteros

Rectángulo

Tanto el área como el perímetro de un rectángulo son muy conocidos.

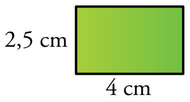


ÁREA $A = a \cdot b$

PERÍMETRO $P = 2a + 2b$

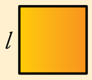
Cálculo mental

Di el área y el perímetro de este rectángulo:



Cuadrado

Un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales. Por tanto:

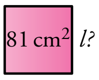


ÁREA $A = l^2$

PERÍMETRO $P = 4l$

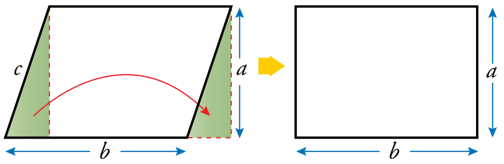
Cálculo mental

¿Cuál es el lado de este cuadrado cuya área conocemos? ¿Y su perímetro?

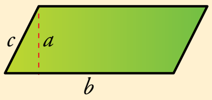


Paralelogramo cualquiera

Al suprimir en el paralelogramo el triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones $a \times b$.



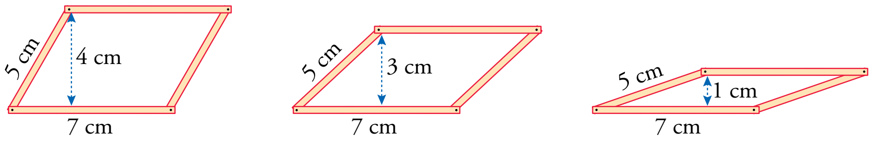
PARALELOGRAMO DE LADOS b Y c Y ALTURA a



ÁREA $A = a \cdot b$

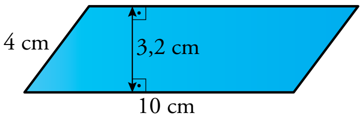
PERÍMETRO $P = 2b + 2c$

Observa que puede haber muchos paralelogramos con los mismos lados pero con distinta área:

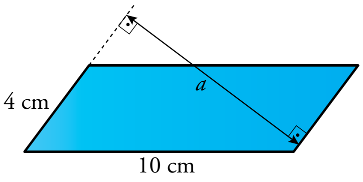


Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este paralelogramo:



Y ahora que ya conoces el área, ¿sabrías calcular la otra altura? Es decir, la distancia entre los otros dos lados.



Piensa y practica

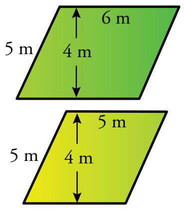
1. Calcula el perímetro y el área de un salón rectangular de dimensiones 6,4 m y 3,5 m.

2. Mide las dimensiones de una página de este libro. ¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para hacer el libro completo, sin contar las tapas?

3. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 225 cm^2 de área?

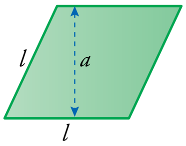
4. Halla la altura de un rectángulo de 47 m^2 de superficie y 4 m de base.

5. Halla el área y el perímetro de estos dos paralelogramos. Observa que, aunque el segundo es un rombo, su área se puede calcular como la de un paralelogramo cualquiera.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

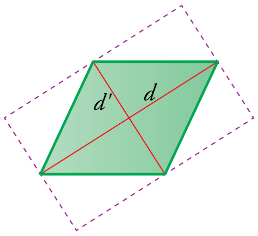
Rombo



Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área se puede calcular como se ha descrito en el apartado anterior:

$A = l \cdot a$ (a es la distancia entre dos lados opuestos).

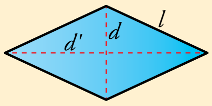
También se puede calcular conociendo sus diagonales.



Área del rectángulo morado: $A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$

Área del rombo: $A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{A_{\text{RECTÁNGULO}}}{2}$

ROMBO DE LADO l
Y DIAGONALES d Y d'



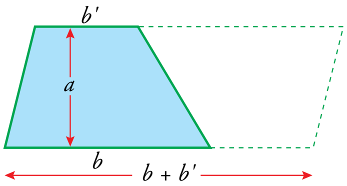
ÁREA $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

PERÍMETRO $P = 4l$

Cálculo mental

- Las diagonales de un rombo miden 6 cm y 10 cm. ¿Cuál es su área?
- La diagonal de un cuadrado mide 4 dm. ¿Cuál es su área?

Trapecio



A los lados paralelos de un trapecio se les llama **bases** (b, base mayor; b', base menor). A la distancia entre las bases, **altura,** a.

Si a un trapecio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a.

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$$

No hay una fórmula especial para el perímetro del trapecio.

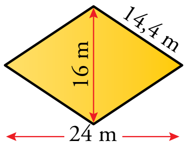
Cálculo mental

Las bases de un trapecio miden 13 cm y 7 cm. Su altura, 10 cm. ¿Cuál es su área?

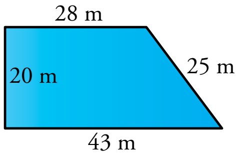
Piensa y practica

6. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:

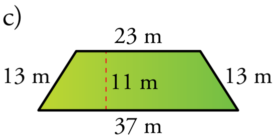
a)



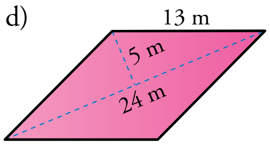
b)



c)



d)



7. Una parcela cuadrangular tiene dos lados paralelos de longitudes 37,5 m y 62,4 m. La distancia entre esos lados paralelos es 45 m.

¿Cuál es la superficie de la parcela?

8. Las diagonales de un rombo miden 37 cm y 52 cm.

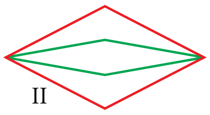
Halla su área.

9. La diagonal de un cuadrado mide 15 cm.

Halla su área. (Recuerda, el cuadrado es, también, rombo).

10. ¿Verdadero o falso?


I


II

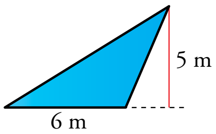
El área del *ala-delta* de la figura I se puede hallar calculando el área del rombo rojo (figura II), restándole el área del rombo verde y dividiendo la diferencia por 2.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

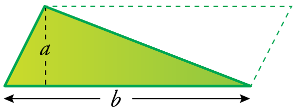
2 Medidas en los triángulos

Cálculo mental

Halla el área de este triángulo:



Observa: si a un triángulo le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo. Por tanto, el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo.



$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

No hay una fórmula especial para el cálculo del perímetro de un triángulo.

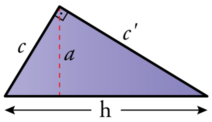
Si el **triángulo** es **rectángulo,** los catetos son perpendiculares. Tomando uno como base, el otro es la altura. Por tanto, el área se puede calcular de dos maneras:

Notación

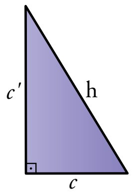
c y c' son los catetos.

h es la hipotenusa.

a es la altura sobre la hipotenusa.



$$A = \frac{\text{h} \cdot a}{2}$$

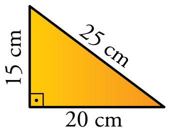


$$A = \frac{c \cdot c'}{2}$$

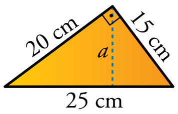
Ejercicios resueltos

1. ***Calcular el área del triángulo rectángulo de lados 15 cm, 20 cm y 25 cm. Calcular la altura sobre la hipotenusa. Hallar, también, su perímetro.***

Los dos catetos son los lados menores.



El área es, pues: $A = \frac{c \cdot c'}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$



El área también se puede calcular así:

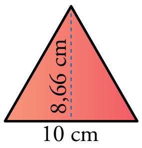
$$A = \frac{25 \cdot a}{2}$$

Como $A = 150 \rightarrow \frac{25 \cdot a}{2} = 150 \rightarrow 25 \cdot a = 300 \rightarrow a = \frac{300}{25} = 12 \text{ cm}$

La altura sobre la hipotenusa mide 12 cm.

Su perímetro es 15 cm + 20 cm + 25 cm = 60 cm.

2. ***Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm y 8,66 cm de altura.***



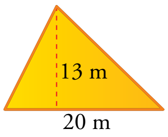
$$A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$$

El área es 43,3 cm^2.

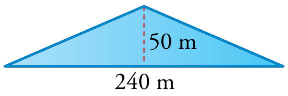
Piensa y practica

1. Halla el área de estos triángulos:

a)



b)



2. De un triángulo rectángulo, conocemos los tres lados: $c = 18$ cm, $c' = 24$ cm y h = 30 cm.

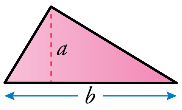
a) Calcula su área.

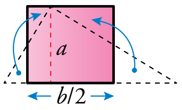
b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

3. Halla el área de un triángulo equilátero de 40 m de lado y 34,64 m de altura.

4. ¿Verdadero o falso?

En las siguientes figuras, se ve que el área de un triángulo es igual al área de un rectángulo con su misma altura y la mitad de su base.



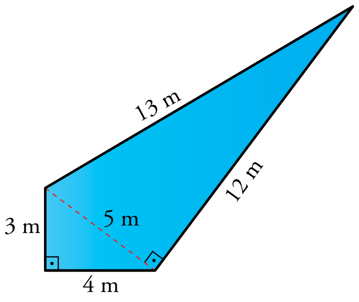


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Medidas en los polígonos

Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este cuadrilátero irregular. Observa que se puede descomponer en dos triángulos rectángulos.



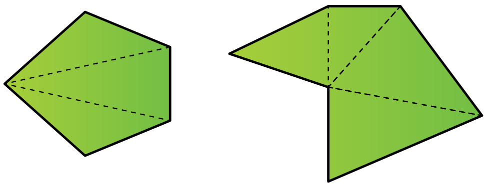
En la web

Practica calculando áreas.

Notación

a es la apotema del polígono regular.

Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se calcula el área de cada uno.

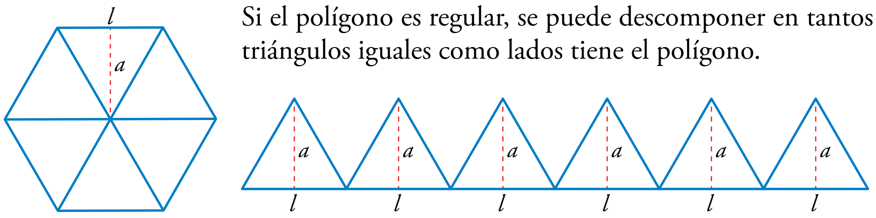


ÁREA DEL POLÍGONO =
= Suma de la áreas de los triángulos

Sin embargo, para los polígonos regulares se puede proceder de una forma más sencilla.

Área y perímetro de un polígono regular

Si el polígono es regular, se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.

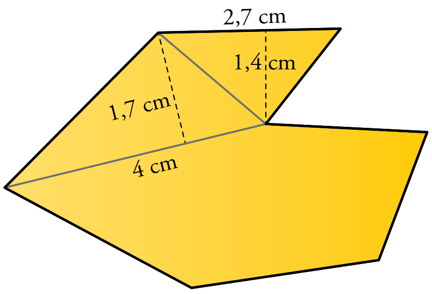


$$A = n \text{ veces } \frac{l \cdot a}{2} = \frac{Perímetro \cdot a}{2}$$

n es el número de lados y, por tanto, $Perímetro = n \cdot l$.

Piensa y practica

1. Calca este polígono en tu cuaderno, continúa descomponiéndolo en triángulos y toma en ellos las medidas necesarias para calcular sus áreas. Halla, así, el área total.

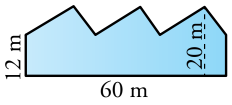


2. En el hexágono regular, la longitud del lado es igual a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Dibuja un hexágono regular cuyo lado tenga una longitud $l = 4$ cm. Mide su apotema y comprueba que es de, aproximadamente, 3,5 cm. Calcula su área.

3. El lado de un octógono regular mide 15 cm, y su apotema 18,9 cm. Halla su área.

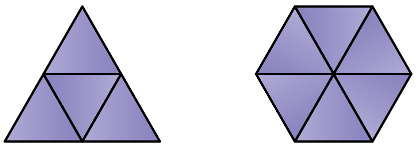
4. Calcula el área de la siguiente figura:



5. ¿Verdadero o falso?

a) En los polígonos irregulares, no se puede calcular el área. Si acaso, aproximadamente.

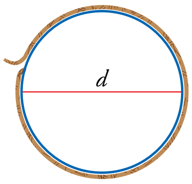
b)



Con estas dos figuras se ve que si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro, entonces el área del triángulo es 3/4 de la del hexágono.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Medidas en el círculo

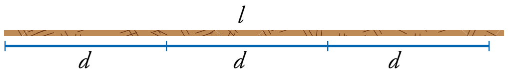


$l = \pi d = 2\pi r$

El número π (pi) vale, aproximadamente, 3,14 o 3,1416.

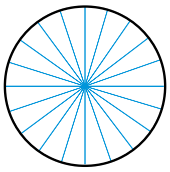
Perímetro del círculo

El perímetro de un círculo es la longitud de su circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia es algo más de tres veces su diámetro.

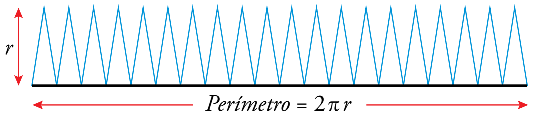


Longitud de la circunferencia = 3,14 veces su diámetro $\rightarrow$ $l = \pi d = 2\pi r$

Área del círculo



Descomponemos el círculo en muchos triángulos, como si fuera un polígono regular de muchos lados.



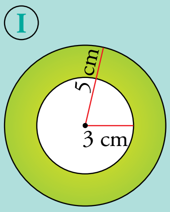
Si los sectores son muy finos, son prácticamente triángulos. Su altura es r.

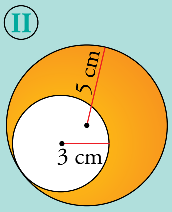
La suma de todas sus bases es el perímetro del círculo, $2\pi r$. Por tanto, su área es:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área y el perímetro de los recintos coloreados.





I. Estas dos circunferencias se llaman **concéntricas,** porque tienen el mismo centro. La región comprendida entre ellas se llama **corona circular.** Su área es la diferencia de las áreas de los dos círculos.

$$A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi = 50{,}26 \text{ cm}^2$$

El perímetro del recinto es la suma de las longitudes de las dos circunferencias:

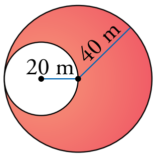
$$P = 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 3 = 16\pi = 50{,}26 \text{ cm}$$

Curiosamente, su área en centímetros cuadrados coincide con su perímetro en centímetros. Es, simplemente, una casualidad.

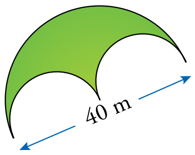
II. Aunque la forma sea distinta, tanto su área como su perímetro coinciden con los del recinto anterior.

Piensa y practica

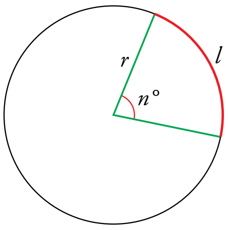
1. Halla la superficie y el perímetro del recinto coloreado.



2. Calcula el perímetro y el área de esta figura:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

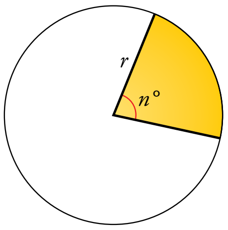


Longitud de un arco de circunferencia

La circunferencia completa, cuya longitud es $2\pi r$, corresponde a un arco de 360°.

Así, a cada grado le corresponde una longitud de $\frac{2\pi r}{360}$. Por tanto:

Un arco de n grados tiene una longitud de $l = \frac{2\pi r}{360} \cdot n$.



Área de un sector circular

El círculo completo, cuya superficie es πr^2, corresponde a un arco de 360°.

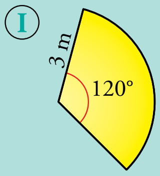
Así, a cada grado le corresponde una superficie de $\frac{\pi r^2}{360}$. Por tanto:

Un sector de n grados tiene una superficie de $A = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n$.

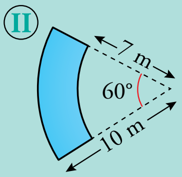
Ejercicio resuelto

Calcular el área y el perímetro de estos recintos:

Ⓘ



Ⅱ



I. $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360} \cdot 120 = 3\pi = 9,42 \text{ m}^2$ $\qquad P = \frac{2\pi \cdot 3}{360} \cdot 120 + 3 + 3 = 12,28 \text{ m}$

II. $A = (\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 7^2) \cdot \frac{60}{360} = 26,69 \text{ m}^2$

$P = \frac{2\pi \cdot 10}{360} \cdot 60 + \frac{2\pi \cdot 7}{360} \cdot 60 + 2(10 - 7) = 10,46 + 7,33 + 6 =$

$= 23,79 \text{ m}$

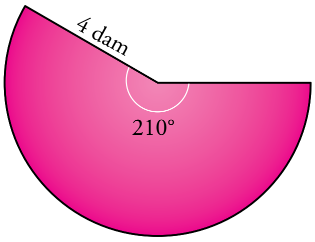
Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) El valor de π es tanto mayor cuanto más grande sea la circunferencia sobre la que actúa.

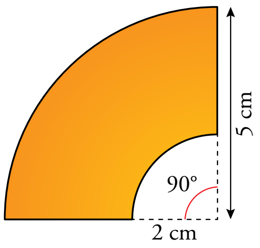
b) Cuando tomamos para π el valor 3,14, lo estamos haciendo de forma aproximada.

4. Halla el área y el perímetro de esta figura:



5. Halla la longitud de un arco de circunferencia de 10 cm de radio y 40° de amplitud.

6. Calcula el área y el perímetro de esta figura:



7. Calcula el área de un sector circular de 20 cm de radio y 30° de amplitud.

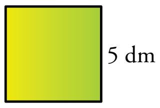
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

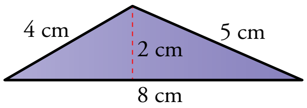
Áreas y perímetros de figuras sencillas

Halla el área y el perímetro de cada una de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

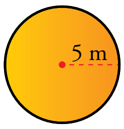
1. a)



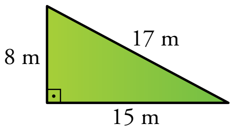
b)



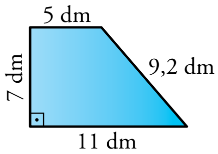
2. a)



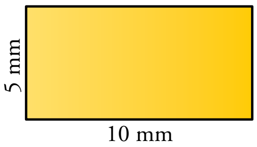
b)



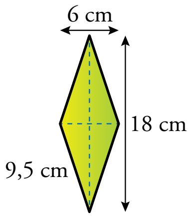
3. a)



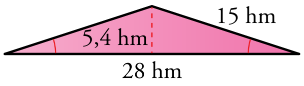
b)



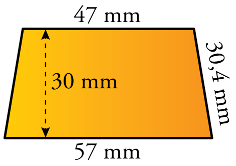
4. a)



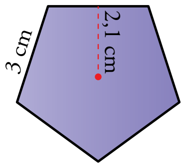
b)



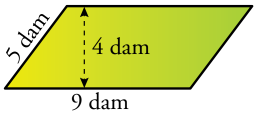
5. a)



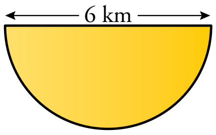
b)



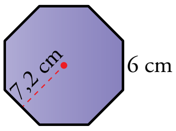
6. a)



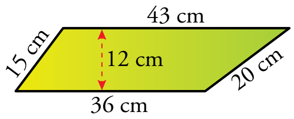
b)



7. a)



b)



8. Averigua cuánto mide la altura de un rectángulo de 40 m^2 de superficie y 5 m de base.

9. Halla el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 20 cm, y su altura, 10 cm.

10. Las bases de un trapecio isósceles miden 26 cm y 14 cm; la altura, 8 cm, y otro de sus lados, 10 cm. Calcula el perímetro y el área de la figura.

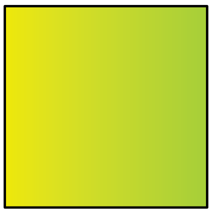
11. Los lados de un triángulo rectángulo miden 15 dm, 8 dm y 17 dm. Calcula su área y la altura sobre la hipotenusa.

12. Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 mm de lado y 5,2 mm de apotema.

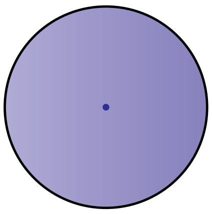
Medir y calcular áreas y perímetros

En cada una de las siguientes figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que medir algún elemento (lado, diagonal, radio…):

13. a)

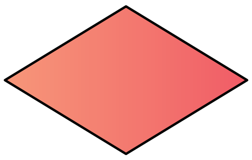


b)

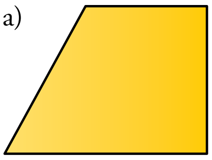


14. a)

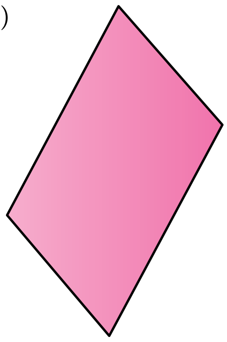
b)



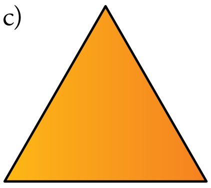
15. a)



b)



c)

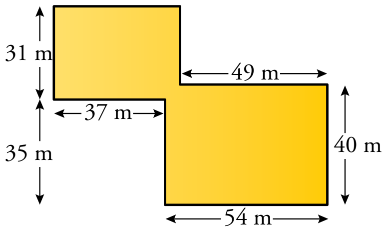


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

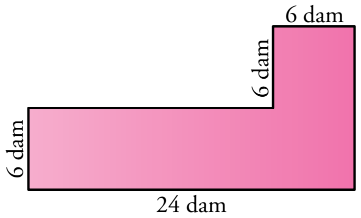
Áreas y perímetros menos sencillos

Halla el perímetro y el área de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

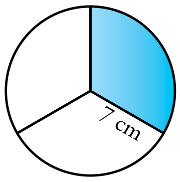
16. a)



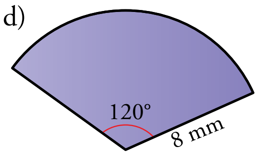
b)



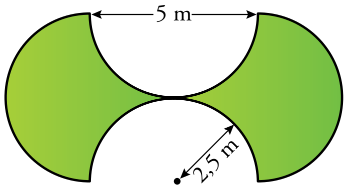
c)



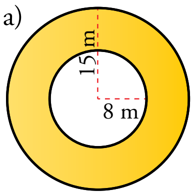
d)



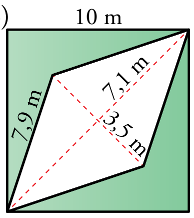
e)



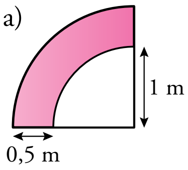
17. a)



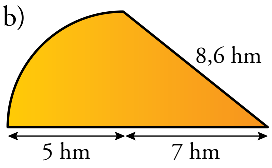
b)



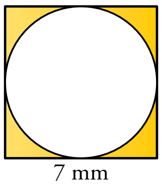
18. a)



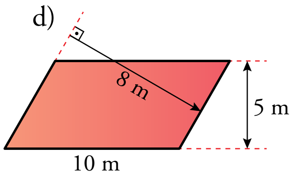
b)



c)



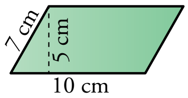
d)



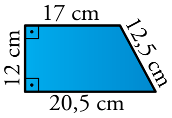
Autoevaluación

1. Calcula el área y el perímetro de cada una de las siguientes figuras:

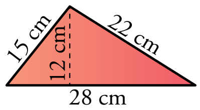
a)



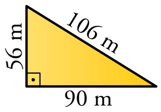
b)



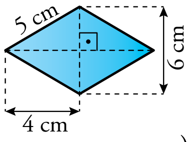
c)



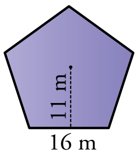
d)



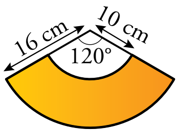
e)



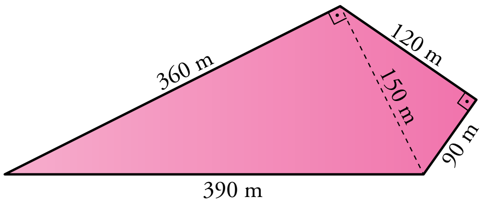
f)



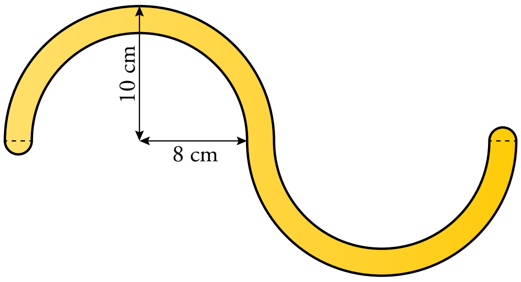
g)



2. Calcula el área de este campo:



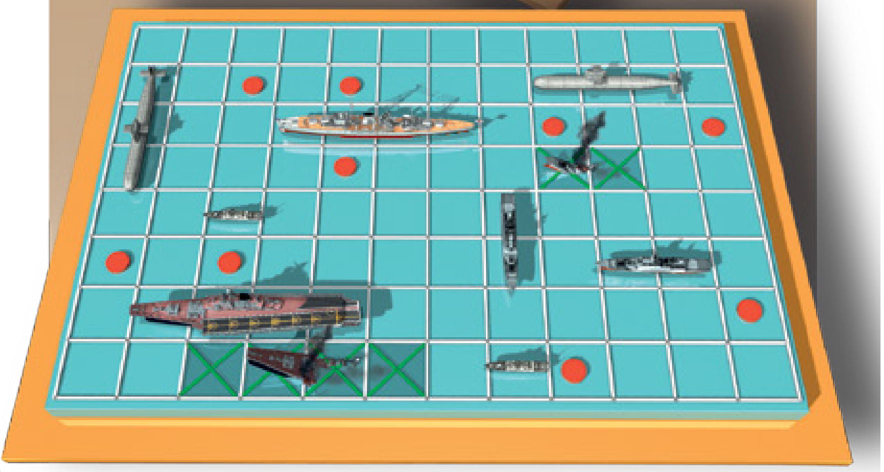
3. Halla el área y el perímetro de esta figura:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14 Gráficas de funciones

Designar puntos del plano mediante dos números *(coordenadas)* permitió tratar la geometría con herramientas aritméticas y algebraicas, lo que simplificó mucho el trabajo de los matemáticos.



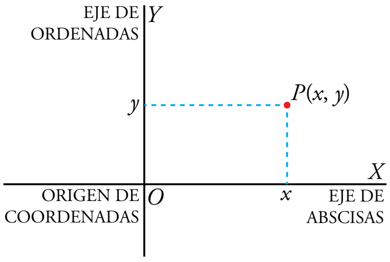
En el juego de los barquitos, cada casilla del tablero se designa por la fila y la columna en la que se encuentran.

En el ajedrez, cada movimiento se anota indicando la casilla de partida y la de llegada. Y esas casillas se designan, también, mediante la fila y la columna que ocupan.

Fue el filósofo y matemático francés **René Descartes** quien tuvo la genial idea de utilizar un método similar a los anteriores para nombrar cada punto del plano mediante dos números, conocidos como sus **coordenadas cartesianas.** ¿Y por qué este nombre? Porque Descartes firmaba en latín: *Cartesius.*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Coordenadas cartesianas

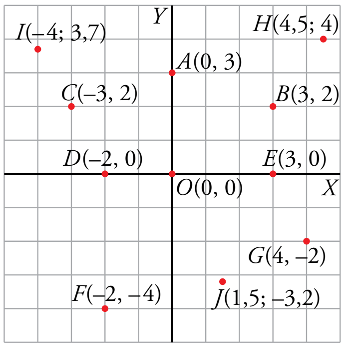


En un sistema de ejes cartesianos:

- El eje horizontal se llama eje *X* o **eje de abscisas.**
- El eje vertical se llama eje *Y* o **eje de ordenadas.**
- El punto *O*, donde se cortan los dos ejes, es el **origen de coordenadas.**

Cada punto del plano se designa por sus dos coordenadas:

- La primera coordenada se llama "*x* del punto" o **abscisa.**
- La segunda coordenada se llama "*y* del punto" u **ordenada.**



— Las coordenadas del **origen de coordenadas** son (0, 0) → *O*(0, 0).

— Los **puntos que están en el eje *Y*** tienen su abscisa igual a 0: *A*(0, 3).

Los puntos que están a la derecha del eje *Y* tienen su abscisa positiva, *B*(3, 2), y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa, *C*(–3, 2).

— La ordenada de los **puntos que están en el eje *X*** es 0: *D*(–2, 0), *E*(3, 0).

Los puntos que están por encima del eje *X* tienen su ordenada positiva, *C*(–3, 2), y los que están por debajo del eje *X* tienen su ordenada negativa, *G*(4, –2).

De igual forma que sobre la recta numérica, se pueden representar sobre los ejes cartesianos puntos con coordenadas decimales o fraccionarias:

H(4,5; 4) *I*(–4; 3,7) *J*(1,5; –3,2)

Para no confundirnos con la coma decimal, cuando una o las dos coordenadas son números decimales las separamos mediante un punto y coma ";".

Las coordenadas no enteras pueden ponerse con fracciones. Por ejemplo:

$$H(4{,}5;\,4) \rightarrow H\left(\frac{9}{2}, 4\right) \qquad J(1{,}5;\,-3{,}2) \rightarrow J\left(\frac{3}{2}, -\frac{16}{5}\right)$$

En la web

Averigua el punto marcado en unos ejes cartesianos.

Piensa y practica

1. a) Representa los puntos *A*(3, 5), *B*(2, 1) y *C*(5, 2).

b) Halla los simétricos, *A'*, *B'*, *C'*, de *A*, *B* y *C*, respecto del eje *X* y compara sus coordenadas.

Completa: "Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje *X* son … y sus ordenadas son … ".

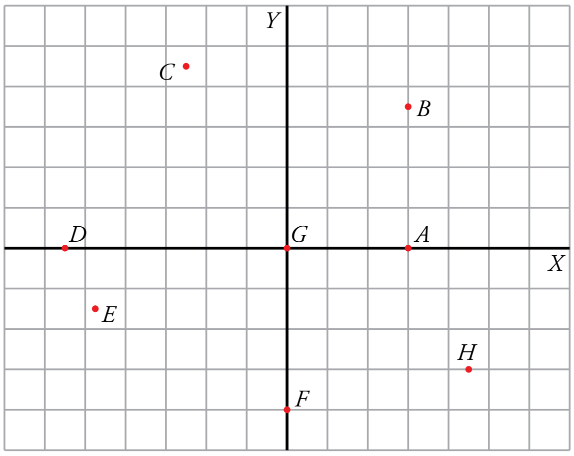
c) Halla los simétricos *A''*, *B''* y *C''*, de *A*, *B* y *C*, respecto del eje *Y* y compara sus coordenadas.

Completa: "Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje *Y* son … y sus ordenadas son …".

d) Halla los simétricos *A'''*, *B'''* y *C'''*, de *A*, *B* y *C*, respecto del origen de coordenadas, *O*, y compara sus coordenadas.

Completa: "Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del origen de coordenadas, *O*, son … y sus ordenadas son …".

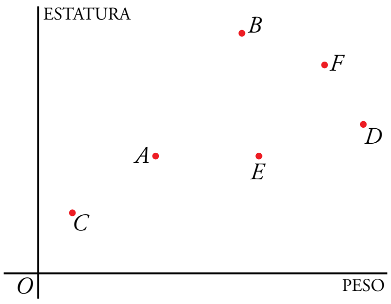
2. Indica las coordenadas de los puntos dibujados sobre el siguiente sistema de coordenadas:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2

Puntos que transmiten información



Amalia y Basilio, que viajaban con su hijito Carlos, han estampado su coche en el gran turismo de don Dionisio. Todos ellos contemplan los desperfectos junto con Eustaquia, que pasaba por allí. Faustino, guardia municipal, acude al lugar de los hechos.

En el diagrama del margen se relacionan las estaturas y los pesos de los 6 personajes.

Observa bien: Basilio (*B*) es el más alto, pero muy delgado. Amalia (*A*) y Eustaquia (*E*) son de la misma estatura, pero esta última pesa mucho más. Faustino (*F*) es grande y fuerte. Don Dionisio (*D*), muy gordo y bajo. Y Carlitos (*C*), chiquitín.

> Para interpretar los puntos de un diagrama cartesiano en el que se refleja una situación real, es fundamental atender al significado de cada uno de los dos ejes coordenados.

En la web

Practiva averiguando qué información proporcionan los puntos.

Piensa y practica

1. Las estaturas y los pesos de los seis personajes descritos arriban son, no respectivamente:

Estaturas (cm): 195, 185, 160, 150, 150, 75

Pesos (kg): 120, 92, 75, 70, 45, 12

Asigna a cada punto sus coordenadas. Por ejemplo, Carlitos: $C(12, 75)$.

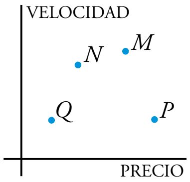
2. Asigna un punto (M, N, P o Q) a cada uno de los vehículos siguientes:

I

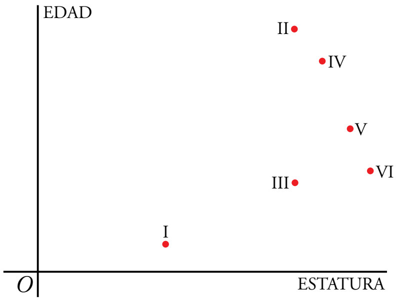
II

III

IV



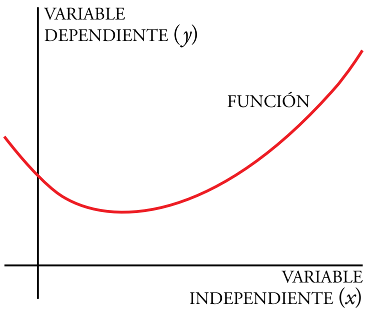
3. El siguiente diagrama relaciona estaturas con edades. En él aparecen los puntos correspondientes a los seis personajes descritos arriba.



Cópialo en tu cuaderno y asigna a cada punto el personaje (A, B, C, D, E o F) al que corresponda.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Interpretación de gráficas



Las gráficas describen relaciones entre dos variables.

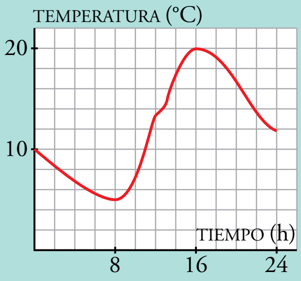
La variable que se representa en el eje horizontal se llama "variable x" o "variable **independiente**". La que se representa en el eje vertical, "variable y" o "variable **dependiente**".

La variable y **es función** de la variable x.

Para interpretar una gráfica, hemos de mirarla de izquierda a derecha, observando cómo varía la variable dependiente, y, al aumentar la variable independiente, x.

Ejercicios resueltos

1. ***Esta gráfica muestra la temperatura en la estación meteorológica de una ciudad a lo largo de 24 horas. Describirla con palabras.***



La variable x es el tiempo. Cada cuadradito corresponde a 2 horas.

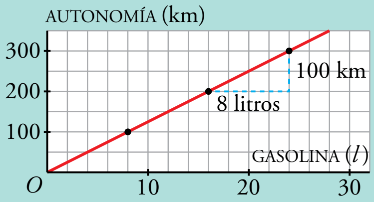
La variable y es la temperatura. Cada cuadradito representa 2 °C.

A las 0 horas (las 12 de la noche) el termómetro marca 10 °C. Como es de noche, va haciendo cada vez más frío y la temperatura acaba descendiendo hasta los 5 °C a las 8 de la mañana.

A partir de ese momento sale el Sol y la temperatura empieza a subir, ascendiendo rápidamente hasta las 12 h. En ese instante aparecen unas cuantas nubes en el cielo que provocan que ya no suba tan deprisa. A eso de las 13 h, y hasta las 16 h, de nuevo aumenta a mayor velocidad alcanzando los 20 °C.

El resto del día, como el Sol ya no calienta tanto, la temperatura no deja de descender, quedándose en 12 °C a las 24 h.

2. ***Describir esta función: distancia de autonomía de un vehículo en función de la gasolina que le queda.***



La variable independiente, x, nos da los litros de gasolina que quedan en el depósito. Cada cuadradito son 2 litros.

La variable dependiente, y, nos da los kilómetros de autonomía que tiene el vehículo. Cada cuadradito son 50 km.

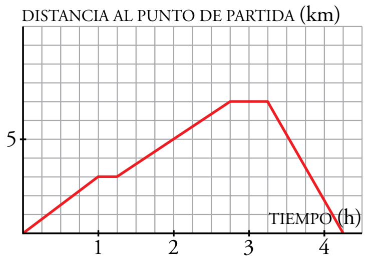
Por cada 8 litros (4 cuadraditos) tenemos 100 km (2 cuadraditos) de autonomía.

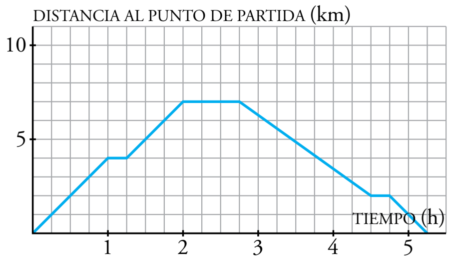
La recta correspondiente a la función pasa entonces por estos puntos:

(8, 100), (16, 200), (24, 300), …

Piensa y practica

1. Jimena hizo una ruta por la montaña mientras que Cayetana fue a dar un paseo por un hayedo. ¿Qué gráfica crees que corresponde a cada chica? ¿Por qué? Describe ambas gráficas.





Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Comparación de gráficas

En la web

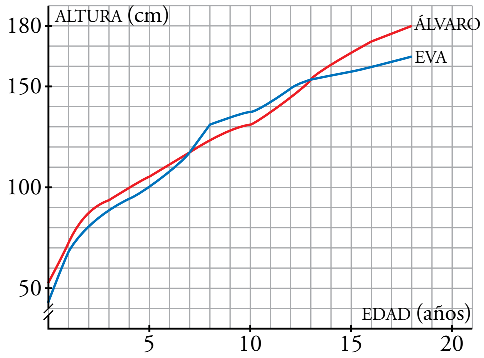
Practica comparando gráficas.

Para comparar dos gráficas, hay que analizar el fenómeno de izquierda a derecha, prestando especial atención a los puntos de corte.

Ejercicios resueltos

1. ***Las alturas de Álvaro y Eva, dos hermanos mellizos, durante sus primeros 18 años de vida son las que ves representadas en la gráfica de la derecha. Compararlas.***

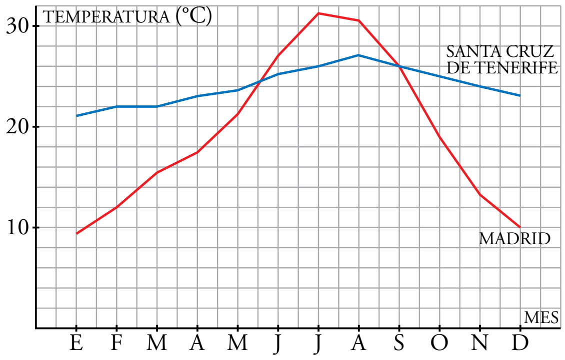
Álvaro nació con más estatura que Eva y durante el primer año casi fueron a la par. Después, Álvaro creció un poco más que Eva y mantuvo esa diferencia con ella hasta los 7 años, cuando medían lo mismo. Desde entonces, Eva, que se desarrolló antes, creció más que Álvaro. A los 13 años Álvaro dio el estirón y sus alturas volvieron a igualarse. A partir de esa edad, Álvaro siguió creciendo hasta medir 180 cm a los 18 años. Eva, por su parte, también siguió creciendo pero a un ritmo menor. A los 18 medía 165 cm.



2. ***Comparar las dos gráficas de la derecha correspondientes a las medias mensuales de las temperaturas máximas de Madrid y Santa Cruz de Tenerife en un cierto año.***

La temperatura de Santa Cruz de Tenerife empieza en 21 °C en enero, cuando en Madrid no llega a 10 °C. Las dos van subiendo (la de Madrid mucho más rápido) hasta que se igualan (24 °C) a mediados de mayo. La de Madrid alcanza su máximo en julio, con 31 °C, y la de Santa Cruz, en agosto, con 27 °C. Vuelven a igualarse en septiembre (26 °C). La de Santa Cruz baja a los 22 °C en diciembre y la de Madrid sufre un bajón muy grande. Acaba con unos 10 °C.

En definitiva, Madrid tiene temperaturas mucho más extremas (más frío en invierno y más calor en verano) que Santa Cruz, cuya temperatura media no varía mucho.



Piensa y practica

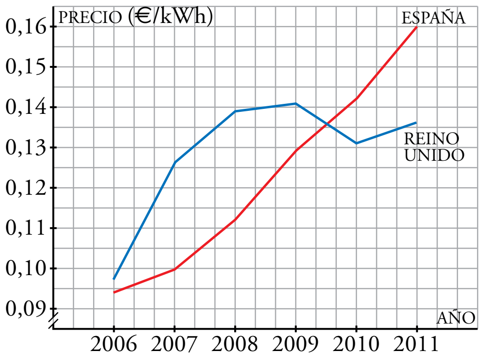
1. Las gráficas de la derecha muestran la evolución del precio de la electricidad (en € por kWh) en España y en Reino Unido.

a) ¿Entre qué fechas se comparan los precios?

b) ¿En qué año el precio español supera al del Reino Unido?

c) Descríbelos y compáralos fijándote en los puntos de corte.

d) Busca en internet los datos que te faltan para llegar al año actual y dibuja en tu cuaderno toda la evolución.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Representación de puntos

1. Representa los siguientes puntos:

a) $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(0, 2)$, $D(5, 5)$, $E(3, 0)$.

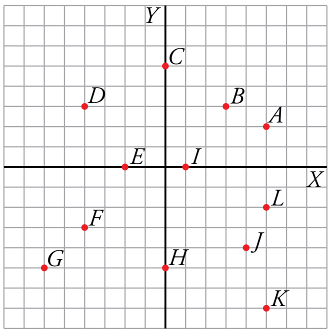
b) $A(-3, 5)$, $B(0, -6)$, $C(-1, -3)$, $D(3, 4)$, $E(5, -2)$.

c) $A(3;\ 0{,}5)$, $B(2;\ -2{,}5)$, $C(-4{,}5;\ 2)$, $D(0;\ 3{,}5)$, $E(-3{,}5;\ -4{,}5)$.

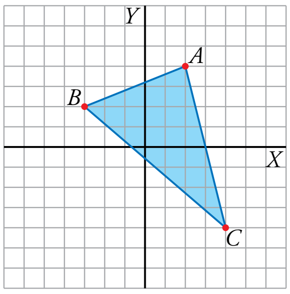
2. Dibuja en un papel cuadriculado la figura que se obtiene al unir cada punto con el siguiente:

$A(2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 3)$, $D(3, 5)$, $E(6, 5)$, $F(6, 3)$, $G(7, 3)$, $H(7, 1)$, $I(5, 1)$, $J(5, 2)$, $K(4{,}5;\ 3)$, $L(4, 2)$, $M(4, 1)$, $A(2, 1)$

3. Escribe las coordenadas de los siguientes puntos:



4. Escribe las coordenadas de los vértices de este triángulo:



a) Representa el triángulo de vértices A', B' y C' simétricos a A, B y C con respecto al eje X y escribe las coordenadas de cada uno.

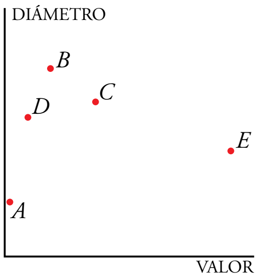
b) Haz lo mismo que en el apartado anterior pero con respecto al eje Y.

5. Traza unos ejes sobre una cuadrícula y dibuja los puntos $A(3, 2)$, $B(-1, 3)$ y $C(-3, -3)$.

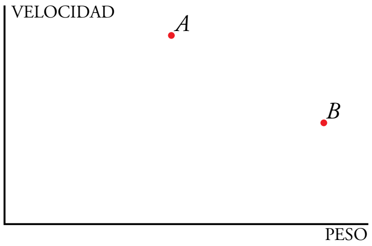
Calcula las coordenadas del punto D que haga que $ABCD$ sea un paralelogramo. Observa que hay tres posibles soluciones, D, D' y D''. Halla todas ellas.

Información mediante puntos

6. En dos de los puntos que representan estas monedas están intercambiadas sus ordenadas. Averigua cuáles son y colócalos donde corresponda.

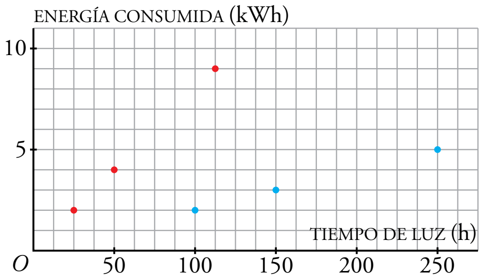


7. Los puntos A y B representan dos perros: uno de Sergio y otro de María Jesús. Di cuál es de cada uno sabiendo que el perro de María Jesús es un galgo y el de Sergio un mastín.



Sitúa sobre el diagrama un punto, C, que represente el de Richard, un perro salchicha que corre poco y pesa un poco más que el galgo. Y otro punto, D, para el de Virginia, un caniche que casi no corre y es muy pequeño.

8. En el diagrama se relacionan dos magnitudes: el tiempo que ha estado encendida una bombilla (en horas) y la energía consumida (en kilovatios hora). Hay unos puntos sobre una recta y otros que están sobre otra. Halla las coordenadas de dos puntos más de cada recta y determina cuál corresponde a una bombilla de bajo consumo y cuál a una normal.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Representación de funciones lineales

9. Representa sobre unos ejes coordenados la recta de ecuación $y = x + 2$. Para ello, completa la siguiente tabla:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y						

10. Asocia cada una de estas ecuaciones de rectas con su correspondiente gráfica:

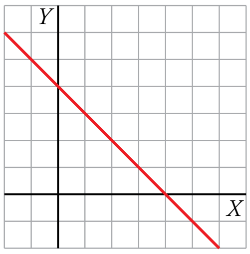
i) $y = x + 2$

ii) $y = 4 - x$

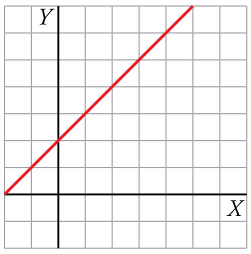
iii) $y = 3x$

iv) $y = 2x - 1$

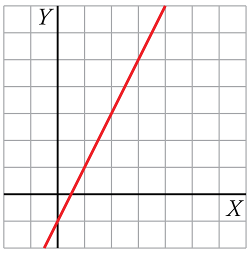
A



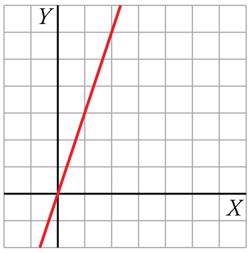
B



C



D



11. ¿Cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad?

a) Precio (en €) de una bolsa de arroz en función de su peso (en kg).

b) Velocidad (en km/h) a la que llega al suelo una piedra en función de la altura (en m) desde donde se deja caer.

c) El alquiler de una bicicleta cuesta una cierta cantidad inicial más otra cantidad por cada hora que se utiliza.

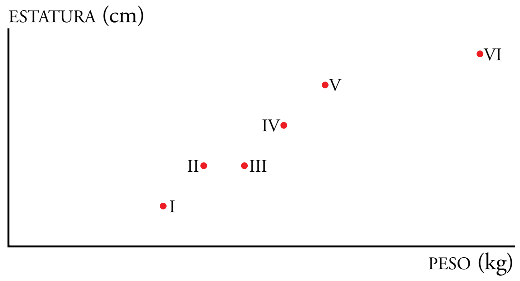
d) Peso (en kg) de una persona en función de su altura (en cm).

Autoevaluación

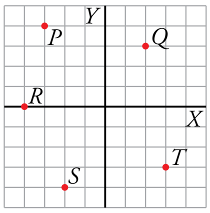
1. Represента en unos ejes coordenados los puntos siguientes:

$A(0{,}5; -2)$, $B(-3, 1)$, $C(1/2, 2)$, $D(-2, -2)$

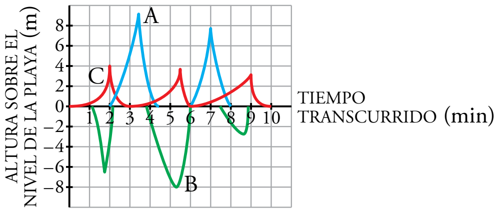
2. Asigna un punto a cada uno de estos personajes:



3. Escribe las coordenadas de los puntos P, Q, R, S y T representados en estos ejes:



4. Las siguientes gráficas muestran la altura sobre el nivel de la playa de tres amigos a lo largo de diez minutos: Raúl el kite-surfista (surf con parapente), Esther la surfista y Sonia la que bucea con tubo. Di qué gráfica corresponde a cada uno y cuenta en breves palabras lo que hicieron. Representa en tu cuaderno la gráfica de Ángel el nadador.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

15 Estadística

Los recuentos estadísticos se remontan al origen de la historia. Existen documentos antiquísimos (papiros egipcios, tablillas de arcilla babilonias) donde hay constancia de censos de población y de bienes públicos.

Hace unos 2 000 años, César Augusto ordenó que se realizara en todo el Imperio Romano una amplísima encuesta sobre habitantes, soldados, recursos de todo tipo y rentas públicas. Este es un antiguo antecedente de lo que actualmente se llama *estadística.* Pero no fue el primero.

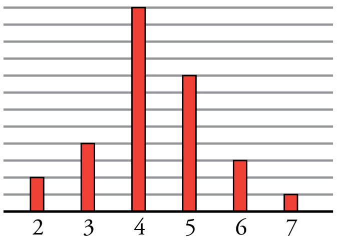
En la Biblia ya se recogen censos realizados por judíos. También los griegos, chinos e indios antiguos realizaron recuentos y encuestas.

Sin embargo, no es hasta el siglo XVII, en Europa, cuando la Estadística toma cuerpo como ciencia.

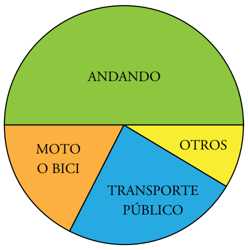
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Proceso para realizar un estudio estadístico

¿Cuántas personas vivís en casa?



¿Cómo acudes a tu centro?



A cada alumno de una clase se le han hecho las siguientes preguntas:

I. ¿Cuántas personas vivís en tu casa?

II. ¿Cómo acudes a tu centro de estudios?

Las respuestas dadas a cada una de estas preguntas es una **distribución estadística.**

Variable estadística

En cada una de las distribuciones anteriores se analiza una variable:

La primera variable es el *número de personas que viven en tu casa*. Es una *variable numérica* (*cuantitativa*), pues los valores que puede tomar son números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

La segunda es *cómo acudes al centro docente*. El resultado puede ser: ANDANDO, TRANSPORTE PÚBLICO, MOTO-BICI, OTROS. Este tipo de variables se llama *cualitativa*.

> Una **variable** se llama **cuantitativa** cuando toma valores numéricos, y **cualitativa,** cuando toma valores no numéricos.

Población y muestra

Los 30 alumnos de la clase anterior es el colectivo sobre el que estamos trabajando. A este colectivo objeto de estudio se le llama *población*.

> Se llama **población** al conjunto de todos los elementos que se estudian. Cada uno de sus componentes se denomina **individuo.**

En ocasiones, la población es demasiado grande, por lo que conviene estudiar solo unos cuantos de sus individuos. A esta selección se le llama *muestra*.

> Se denomina **muestra** a un subconjunto de la población elegido para realizar el estudio estadístico.

Ejemplos

— La marca del teléfono móvil es una variable cualitativa.

— El número de mensajes enviados es una variable cuantitativa.

Piensa y practica

1. Indica si cada una de las siguientes variables estadísticas es cuantitativa o cualitativa:

a) Equipo de fútbol preferido.

b) Edad.

c) Lugar de nacimiento.

d) Número de asignaturas suspendidas en la primera evaluación.

e) Asignaturas aprobadas en la segunda evaluación.

f) Número de viviendas que hay en tu calle.

g) Tiempo que tardas en correr los 100 m lisos.

2. Reconoce, en cada una de las siguientes situaciones, la población, la muestra y los individuos.

a) Una fábrica de bombillas quiere hacer un control de calidad. Para ello, analiza una bombilla de cada caja de 1 000.

b) Una farmacéutica visita a un médico de cada hospital para enseñarle sus nuevos productos.

c) Un agricultor recoge una naranja de cada uno de los árboles de su naranjal para comprobar la cantidad de zumo que puede obtenerse.

d) Tomo una golosina de cada cubo de la tienda.

2 Frecuencia y tablas de frecuencias

Ejemplo

En este conjunto de datos:

3	0	2	5	2
3	1	2	1	1
0	5	2	1	3

Comprueba que:

$f(0) = 2$	$f(1) = 4$
$f(2) = 4$	$f(3) = 3$
$f(4) = 0$	$f(5) = 2$

Frecuencia

En la distribución *cómo acudes a tu centro de enseñanza*, el número de individuos que utilizan el TRANSPORTE PÚBLICO es 7.

Lo expresamos así: f(TRANSPORTE PÚBLICO) = 7

Y se lee así: la frecuencia de TRANSPORTE PÚBLICO es 7.

El número de individuos correspondiente a un valor de la variable se llama **frecuencia** de ese valor.

Tablas de frecuencias

Una vez recogidos los datos correspondientes a una experiencia estadística, hay que tabularlos; es decir, hay que confeccionar con ellos una tabla en la que aparezcan, ordenadamente:

— Los *valores de la variable* que se está estudiando.

— El *número de individuos* de cada valor; es decir, su frecuencia.

Para hacer el recuento, se leen los datos uno a uno y se marca una señal en el correspondiente valor. Si las señales se agrupan de cinco en cinco, es más fácil contarlas.

Fijémonos, por ejemplo, en la distribución *número de personas que viven en tu casa*:

DATOS

4	5	4	7	6
2	4	6	3	5
4	6	5	5	3
4	4	4	5	3
2	5	4	4	5
4	5	4	3	4

RECUENTO

2	||	→	2
3	||||	→	4
4	卌 卌 ||	→	12
5	卌 |||	→	8
6	|||	→	3
7	|	→	1

TABLA DE FRECUENCIAS

VALORES	FRECUENCIA
2	2
3	4
4	12
5	8
6	3
7	1
	30

En la **tabla de frecuencias,** cada valor tiene emparejada su frecuencia.

Piensa y practica

1. Se pregunta a 40 estudiantes qué prefieren hacer en su tiempo libre: deporte (D), leer (L), ver la tele (T), salir con amigos (S), jugar con videojuegos (V). Los resultados son:

S	S	D	S	V	S	L	S	D	T
L	V	S	S	L	D	D	S	V	L
D	S	S	V	S	D	V	D	D	V
V	T	S	S	D	L	D	T	T	L

Confecciona una tabla de frecuencias con los resultados obtenidos.

2. Se ha contabilizado el número de libros leídos en las vacaciones de verano por los 30 estudiantes de un curso. Estos son los resultados:

1	3	1	0	4	4	1	0	2	3
0	1	1	2	3	2	3	1	1	6
1	1	2	1	2	0	0	2	1	4

Realiza la correspondiente tabla de frecuencias.

3. Construye la tabla de frecuencias del ejemplo del margen de esta página.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Gráficos estadísticos

Las representaciones gráficas sirven para captar, de un solo golpe de vista, las características más sobresalientes de una distribución de datos.

Hay muchos tipos de representaciones gráficas. Vamos a ver las de uso más frecuente.

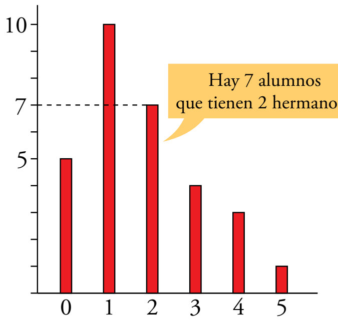
Importante

Las tablas de datos estadísticos y las representaciones gráficas son lenguajes, formas de dar información sumamente eficaces, pues lo que se dice mediante ellas "entra por los ojos".

Procura mirar con atención las gráficas y las tablas para captar todo lo que te "dicen".

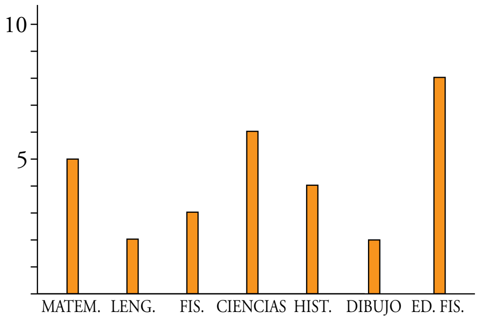
Diagrama de barras

Población: Alumnos de una clase
Variable: Número de hermanos



Hay 7 alumnos que tienen 2 hermanos.

Población: Alumnos de una clase
Variable: Asignatura preferida



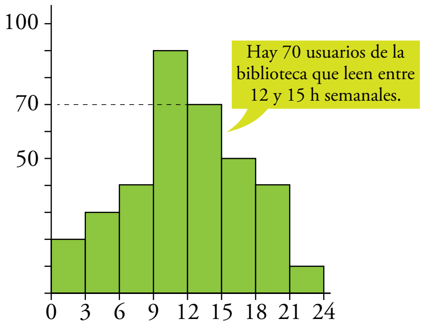
En la web

Interpreta un diagrama de barras.

El **diagrama de barras** está formado por barras finas. Sirve para representar tablas de frecuencias de variables cualitativas, o bien cuantitativas que tomen pocos valores. Las alturas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

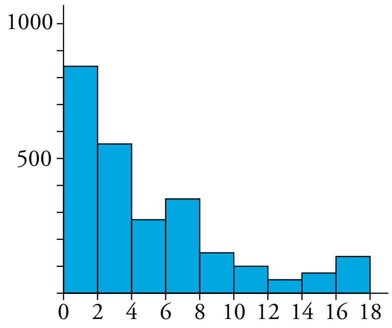
Histograma

Población: Usuarios de una biblioteca
Variable: Tiempo (en h) de lectura semanal



Hay 70 usuarios de la biblioteca que leen entre 12 y 15 h semanales.

Población: Árboles de un parque
Variable: Altura (en m)

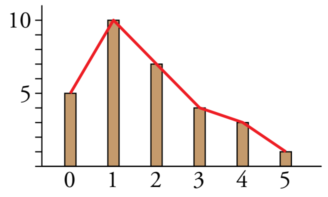


El **histograma** está formado por rectángulos anchos que se adosan unos a otros. Sirve para representar variables cuantitativas que tomen muchos valores diferentes. Las áreas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

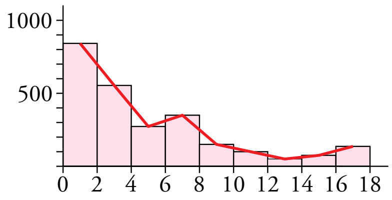
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Polígono de frecuencias

Población: Alumnos de una clase
Variable: Número de hermanos



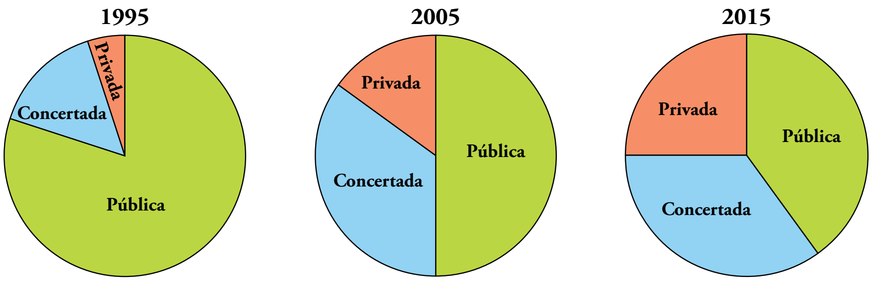
Población: Árboles de un parque
Variable: Altura (en m)



El **polígono de frecuencias** se utiliza para representar variables cuantitativas. Se construye uniendo los extremos de las barras o los puntos medios de los rectángulos de un histograma.

Diagrama de sectores

La evolución de la educación, según sea pública, concertada o privada, en una localidad se ve reflejada en los siguientes diagramas:



El **diagrama de sectores** sirve para representar variables de cualquier tipo. Cada sector representa un valor de la variable. El ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Utilidad

Los diagramas de sectores son muy útiles para ver la evolución de una misma variable.

Por ejemplo, podemos ver que en la localidad a la que se refieren los gráficos de la derecha el tipo de educación ha ido cambiando de pública a privada y concertada.

En la web

Interpreta un diagrama de sectores.

Piensa y practica

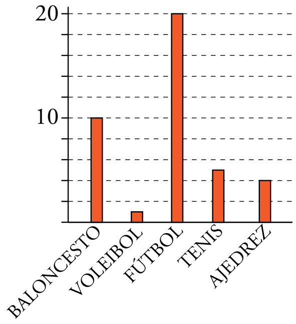
En la web Practica con gráficos estadísticos.

1. Este diagrama de barras representa los deportes preferidos por los alumnos de una clase.

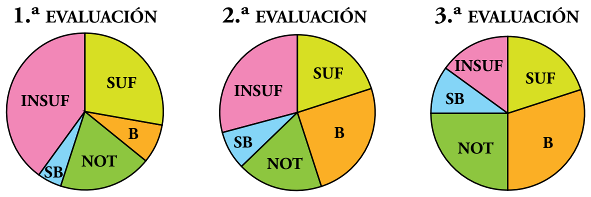
a) ¿Cuál es el que más gusta? ¿Y el que menos?

b) ¿Cuántos prefieren el tenis?

c) ¿Cuántos alumnos hay en clase?



2. Estas son las notas en matemáticas de un grupo de alumnos en las tres evaluaciones del año:



Explica cómo han evolucionado.

3. Representa con un diagrama de barras los datos del ejercicio 5 del epígrafe anterior.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Parámetros estadísticos

Los primeros parámetros que vamos a ver aquí (media, mediana y moda) son de **centralización,** pues designan valores en torno a los cuales se distribuyen los datos.

Media

Cuatro amigos han ido a pescar. Estan son las truchas capturadas por cada uno:

2, 1, 4, 5

La media de las truchas pescadas es: $\frac{2+1+4+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Esto significa que si juntan todos los peces y los reparten por igual, a cada uno le tocan 3 truchas.

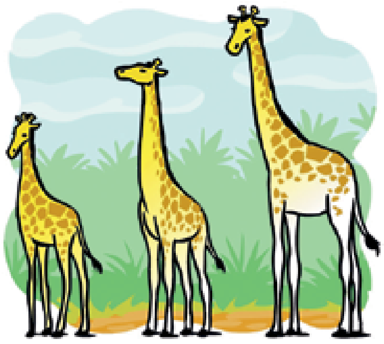
La **media** de varias cantidades es la suma de todas las cantidades dividida por el número de ellas. También se conoce como promedio.

Media solo para variables cuantitativas

Es claro que solo es posible obtener la media de una variable cuantitativa. Imagina tener que hallar la media de esta distribución:

A, A, A, B, B, A, C, A, A, B, C

Mediana



Las alturas de tres jirafas son 4 m, 5 m y 6 m. Al colocarlas ordenadas según sus alturas, decimos que la de en medio es la mediana.

Se llama **mediana** de un conjunto de datos numéricos al que ocupa el valor central una vez ordenados.

Para calcularla, ordenamos las cantidades de menor a mayor y elegimos la de en medio. Si hay un número par de datos, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

Ejemplos

- $4, 4, 7, \boxed{7}, 8, 8, 10 \rightarrow$ MEDIANA $= 7$
- $1, 5, \boxed{6, 6}, 9, 10 \rightarrow$ MEDIANA $= 6$
- $1, 5, \boxed{6, 9}, 9, 10 \rightarrow$ MEDIANA $= \frac{6+9}{2} = 7{,}5$

Moda

Cuando algo se lleva mucho, se dice que está de moda.

La moda es lo que más se lleva.

En una distribución estadística, se llama **moda** al dato que aparece con más frecuencia. Se puede obtener la moda de una variable cuantitativa o cualitativa.

Una distribución puede tener varias modas. Si hay dos datos que tienen la frecuencia más alta, la distribución será bimodal; si son tres datos, la distribución es trimodal, y así sucesivamente.

Ejemplos

- 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5 → La moda es 2.
- 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6 → Las modas son 1 y 4. Distribución bimodal.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Hay distintos parámetros que sirven para cuantificar cómo de dispersos están los datos. Se les llama **parámetros de dispersión.** Pero aquí solo vamos a estudiar uno de ellos: *el recorrido.*

Recorrido o rango

El recorrido nos muestra la longitud del tramo en el que se encuentran los datos.

> Se denomina **recorrido** de un conjunto de datos a la diferencia entre el dato mayor y el menor.
>
> RECORRIDO = Valor máximo – Valor mínimo

Ejemplos

- 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5
  El recorrido es 5 – 1 = 4.
- 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1
  El recorrido es 1 – 0 = 1.
- 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5
  El recorrido es 5 – 5 = 0.

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar la media, la mediana, la moda y el recorrido de esta distribución:*** ***4, 6, 8, 8, 9, 10, 10, 10***	• MEDIA = $\frac{4+6+8+8+9+10+10+10}{8} = 8{,}125$ • Los valores están ordenados. Los dos datos centrales son 8 y 9. Por tanto, la mediana es el promedio de ellos; MEDIANA = 8,5. • El valor que está más veces es el 10; MODA = 10. • El valor máximo menos el mínimo es 10 – 4 = 6; RECORRIDO = 6.
2. ***Hallar la media, la mediana, la moda y el recorrido de esta distribución:*** ***I, V, P, O, V, O, P, P, I, V***	Cuando la variables es cualitativa, no se puede hallar ni la media, ni la mediana, ni el recorrido. La moda es P. MODA = P
3. ***Hallar la media, la mediana, la moda y el recorrido de esta distribución de notas de un examen:*** ***2 1 5 7 4 3 8 7 9 5*** ***5 6 4 9 2 4 6 7 7 8*** ***4 5 5***	• MEDIA = $\frac{2+1+5+7+4+3+\ldots+4+5+5}{8} = 5{,}35$ • Se ordenan los valores: 1 2 2 3 4 4 4 4 5 5 **5** 5 5 6 6 7 7 7 7 8 8 9 9 El valor central corresponde a 5; MEDIANA = 5. • El valor que está más veces es el 5; MODA = 5. • El valor máximo menos el mínimo es 9 – 1 = 8; RECORRIDO = 8.

Piensa y practica

1. En la cola del autobús hay siete personas, cuyas edades son:

15, 12, 23, 30, 71, 55 y 12

Calcula la media, la mediana, la moda y el recorrido de las edades.

2. Las notas del último examen de matemáticas de seis amigos son:

9, 5, 10, 5, 7, 6

Halla la media, la mediana, la moda y el recorrido de las notas.

3. ¿Verdadero o falso?

a) En una distribución cuya variable es cualitativa no se puede calcular ni la media, ni la mediana, ni el rango.

b) La media de las edades de Ana, su madre y su abuela es 40. Si la abuela de Ana tiene 60 años, Ana debe tener 20 años.

c) La mediana de las puntuaciones de once equipos es 40. Si el 5.º clasificado tiene 42 puntos, el 7.º tendrá 38.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Variables estadísticas y frecuencias

1. Indica si es cualitativa o cuantitativa cada una de las variables por las que se pregunta.

a) ¿Cuántos hermanos sois en casa?

b) ¿Qué medio de transporte prefieres?

c) ¿Qué deporte prefieres practicar?

d) ¿Qué edad tienes?

2. Indica en cada caso la población, la muestra y los individuos:

a) Se quiere estudiar las migraciones anuales de las ballenas del océano índico. Para ello, se colocan radiotransmisores en 30 de estos cetáceos.

b) Se quiere saber qué opinan los mayores de edad sobre las nuevas iniciativas del ayuntamiento. Para ello se entrevista a 100 personas elegidas al azar.

c) Para saber qué opinión se tiene de una nueva sección de una revista, se ha preguntado telefónicamente a 50 lectores.

3. Elabora una tabla con las frecuencias correspondientes a este recuento.

Soleado	𝍸 |||
Sol y nubes	𝍸 𝍸 ||
Nublado	𝍸
Lluvia fina	|||
Lluvia torrencial	|
Nieve	||

4. Se ha preguntado a 50 personas qué tipo de película prefieren. Las respuestas son: Romántica (RO), Terror (TE), Comedia (CO), Aventuras (AV), *Thriller* (TH), Acción (AC), Otras (O). Dados los resultados, haz un recuento y elabora una tabla de frecuencias:

RO, TE, RO, TH, AC

TE, RO, CO, CO, TH

AC, AV, TE, O, TH

TE, RO, RO, AV, TH

RO, TE, RO, AV, TH

AV, O, AC, TH, TE

RO, TH, AC, O, AC

TE, AV, TH, AC, AC

TH, AC, AC, CO, TE

AC, O, TH, RO, RO

5. Se ha pasado una prueba tipo test a 30 estudiantes. Estos son los errores cometidos por cada uno:

2 3 2 1 0

0 3 2 4 0

2 3 2 0 0

1 2 2 1 3

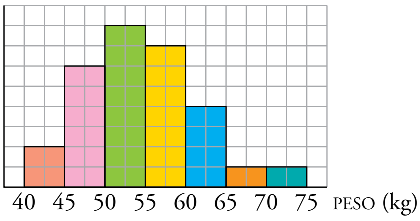
1 1 2 0 2

1 0 4 2 1

Realiza la tabla de frecuencias.

Gráficos estadísticos

6. El peso de los alumnos de una clase viene reflejado en el siguiente histograma:



Hay un solo alumno que pesa más de 70 kg.

a) ¿De qué color es la barra donde se ubica un alumno de 57 kg?

b) ¿Cuántos alumnos pesan entre 60 kg y 65 kg?

c) ¿Cuántos alumnos pesan más de 50 kg?

d) ¿Cuántos alumnos hay en clase?

7. Este diagrama de sectores representa la distribución de los 24 estudiantes de una clase de 1.º de ESO, según se queden o no a comer en el colegio:

a) ¿Qué fracción de los alumnos se quedan a comer?

b) ¿Qué porcentaje no se queda nunca?

c) ¿Qué tanto por ciento se queda a veces?

8. a) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondiente al ejercicio 3.

b) Haz lo mismo para el ejercicio 4.

c) Repítelo para el ejercicio 5.

9. Se ha pasado una encuesta a 40 empresarios sobre el número de continentes que han visitado:

1 1 2 1 2

2 1 1 2 3

1 3 1 4 1

1 1 2 1 1

1 2 4 1 3

2 2 3 4 1

1 2 1 1 1

2 1 4 4 3

a) Construye una tabla de frecuencias.

b) Representa los resultados en un diagrama de barras.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Parámetros estadísticos

10. Calcula la media, la mediana, la moda y el recorrido de las siguientes distribuciones:

a) 2, 4, 4, 41, 17, 13, 24

b) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10

c) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6

d) 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1

11. Halla la media, la mediana, la moda y el recorrido de los datos recogidos en los anteriores ejercicios 5 y 9.

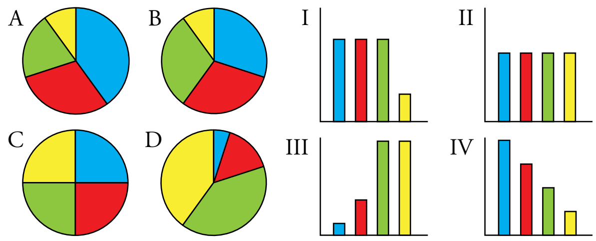
12. Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados obtenidos:

3	5	1	2	5	5	3	4	6	2
4	3	6	4	1	6	4	2	6	1
4	3	5	6	2	1	5	6	6	2
4	2	3	2	6	5	4	1	6	1

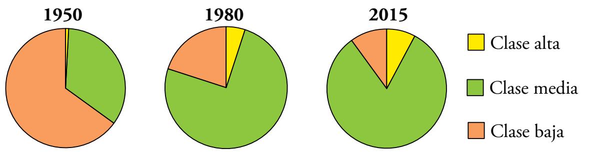
Calcula la media, la mediana, la moda y el recorrido de la distribución.

Resuelve problemas

13. Asocia a cada diagrama de sectores su correspondiente diagrama de barras:



14. La evolución de las clases sociales de un cierto país viene dada por estos tres diagramas de sectores:



a) Explica cómo han evolucionado las clases sociales en el país a lo largo de estos últimos 65 años.

b) ¿Crees que es positivo lo que ha ocurrido? Razónalo.

Autoevaluación

1. Indica cuáles son variables cualitativas y cuáles cuantitativas:

a) Color de zapatos o zapatillas.

b) Resultado de un partido en la quiniela (1, X, 2).

c) Tiempo en recorrer cierta distancia.

2. Los 40 componentes del equipo de tiro con arco realizan una competición. Estos son los resultados del número de dianas que ha conseguido cada uno:

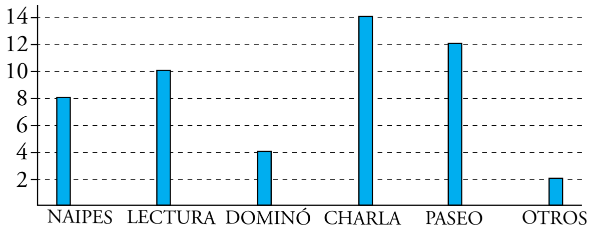
3	2	5	2	0	2	5	3	2	2
2	1	2	3	4	4	3	5	2	1
2	3	2	1	4	5	2	2	3	1
2	3	0	3	0	2	0	2	3	5

a) Construye una tabla de frecuencias.

b) Representa los datos en un diagrama de barras.

c) Calcula la media, la mediana, la moda y el recorrido.

3. Este diagrama de barras muestra lo que más les gusta hacer a un grupo de jubilados en su tiempo libre:



a) ¿Qué es lo que más prefieren hacer? ¿Y lo que menos?

b) ¿Cuántos prefieren jugar a los naipes?

c) ¿Cuántos prefieren dedicarse a la lectura?

d) ¿Cuántos jubilados han sido encuestados?

e) ¿Qué porcentaje de ellos prefiere salir de paseo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Anotaciones

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....