EJERCICIOS DE COMBINATORIA

1.- Un estudiante tiene que contestar 8 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias? ¿Y si de las cinco primeras ha de contestar a cuatro? *Solución: 45, 21, 25*

2.- Para jugar al dominó, siete fichas hacen un juego. Sabiendo que tiene 28 fichas, ¿cuántos juegos diferentes se pueden hacer? *Solución: 1184040*

3.- Hallar el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. (Se supone que el alfabeto tiene 28 letras.) *Solución: 21953*

4.- El séxtuplo del número de combinaciones que se puede formar con m objetos tomados de tres en tres es igual al número de variaciones que se pueden formar con m-1 objetos tomados de cuatro en cuatro. Halla el valor de m, suponiendo que es mayor que cuatro. *Solución: m=6*

5.- La diferencia entre el número de variaciones binarias de m objetos y el de combinaciones binarias de los mismos m objetos es 136. Halla el número de objetos. *Solución: m=17*

6.- En las variaciones sin repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, ¿cuántas veces está la cifra 7? *Solución: 168*

7.- ¿Cuántas palabras de 12 letras se pueden formar con la palabra AYUNTAMIENTO, de tal manera que siempre comiencen y terminen por vocal? *Solución: 13608000*

8.- Con una baraja de 52 cartas, ¿cuántos grupos diferentes de cinco cartas se pueden hacer?
Solución: 2598960

9.- ¿Cuántas apuestas hay que rellenar en las quinielas de fútbol para tener la seguridad de acertar cinco resultados? *Solución: 243*

10.- De un grupo de 12 alumnos deben formarse tres equipos de cuatro participantes para que asistan a tres pruebas diferentes. ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden realizarse? *Solución: 34650*

11.- ¿Cuál de las siguientes expresiones tiene mayor valor: $C_{26}^{3}, P_6, V_9^4, VR_6^4$? *Solución:* V_9^4

12.- ¿Cuántos tetraedros determinan ocho puntos del espacio de forma que cuatro cualesquiera de ellos no sean coplanarios? *Solución: 70*

13.- ¿Cuántas palabras de 10 letras diferentes pueden formarse con cinco vocales y cinco consonantes de las 21 existentes, de manera que no haya dos vocales juntas ni dos consonantes juntas? *Solución: 586051200*

14.- En un departamento de una empresa trabajan cuatro hombres y tres mujeres. Desean que les hagan una fotografía de forma que estén todos los hombres juntos y también las mujeres. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse? *Solución: 288*

15.- ¿Cuántos resultados distintos se obtienen al lanzar tres dados iguales a la vez? ¿Y si los dados son distintos? *Solución: 56, 216*

16.- Con los dígitos pares, ¿cuántos números inferiores a 1 000 se pueden escribir? *Solución: 84*

17.- Calcula el número de diagonales que tiene un polígono de 12 lados. Generaliza el caso para cuando se trate de un polígono de n lados. *Solución: n (n-3)/2*

18.- Se disponen ocho monedas en una fila. La mitad de ellas son de duro y la otra mitad de 100 pesetas. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar? *Solución: 70*

19.- Una prueba de opción múltiple consta de 15 preguntas y cada una tiene tres alternativas. ¿En cuantas formas diferentes puede marcar un estudiante su respuesta a estas preguntas? *Solución: 14348907*

20.- ¿En cuantas formas puede un director de televisión programar seis diferentes comerciales de un patrocinador durante los seis periodos de tiempo asignado a mensajes comerciales durante un programa?
Solución: 720

21.- ¿De cuantas maneras pueden formarse cinco personas para tomar el autobús? ¿De cuantas maneras si dos de las personas se niegan a hacerlo una detrás de otra? *Solución: 120, 72*

22.- ¿Cuántas permutaciones diferentes hay de las letras de la palabra "statistics"? ¿Cuántas de ellas comienzan y terminan con la letra s?. *Solución: 50400, 3360*

23.- En un test de 20 preguntas con dos opciones, ¿de cuantas formas pueden marcarse las preguntas para que
  a) siete estén correctas y 13 equivocadas;
  b) 10 estén correctas y 10 equivocadas;
  c) cuando menos 17 están correctas?

Solución: 77520, 184756, 1351

24.- Si se suponen ordenadas todas las permutaciones que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 5, 8, 9 en orden creciente, que lugar ocupa la permutación 598132. *Solución: lugar nº 476*

25.- ¿Cuántos números naturales, incluido el cero, hay que sean menores que 1000, si cada número está constituido por cifras diferentes. *Solución: 739*

26.- Calcula el valor de m que verifica $V_m^3 = 5V_m^2 + C_m^3$. *Solución m= 8*

soluciones

1.- En el primer caso $\binom{10}{8} = 45$,en el segundo caso sólo debe elegir 5 de entre 7 $\binom{7}{5} = 21$,, la forma de elegir 4 entre las primeras 5 y cuatro entre las otras 5 será $\binom{5}{4}\binom{5}{4} = 25$

2.- $\binom{28}{7} = 1184040$

3.- La forma de elegir tres letras entre 28 pudiendo repetirse sería $VR_{28}^{3} = 21952$, con lo que si una ciudad tiene un habitante más tendrían dos individuos que coincidir en sus iniciales.

4.- Las soluciones de la ecuación planteada son 2 y 6, por lo que la solución válida es m=6.

5.- Esta ecuación tiene como solución m=17, m=-16, y la solución válida es m=17.

6.- Se pueden formar $V_9^3 = 504$ variaciones distintas, no interviene el 7 en $V_8^3 = 336$, por lo que intervendrá el 7 en 504-336 = 168

7.- Consideramos tres casos:

a) Las dos vocales a no figuran en los extremos. $V_4^2 \cdot P_{10}^{2,2,2} = 5443200$ (formas de elegir las vocales por las permutaciones de las otras letras que no están en los extremos)

b) Una vocal a está en el extremo. $2 \cdot V_4^1 \cdot P_{10}^{2,2} = 7257600$

c) Las dos a figuran en los extremos. $P_{10}^{2,2} = 907200$

Y en total tendremos 5443200+7257600+907200 = 13608000.

8.- $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$

9.- $VR_3^5 = 3^5 = 243$ apuestas

10.- $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$=34650

11.- Los valores de cada expresión son 2600, 720, 3024 y 1296, por lo que la mayor es V_9^4 .

12.- $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$

13.- Las palabras serán de la forma VCVCVCVCVC o CVCVCVCVCV, y por lo tanto tendremos que las posibles ordenaciones son $2 \cdot V_5^5 \cdot V_{21}^5 = 2 \cdot 120 \cdot 2441880 = 586051200$

14.- 2 $P_4 P_3$= 288, ya que pueden empezar los hombres o las mujeres y pueden los hombres pueden estar de P_4 formas distintas mientras que las mujeres lo pueden hacer de P_3.

15.-

a) Si los lados son iguales tendremos $\binom{6}{3} = 20$, además de las repetidas 111, 112, 113, 114, 115, 116, y análogamente con 2, 3, 4, 5, 6 es decir 36, por lo que habrá 56 resultados posibles.

b) Si los dados son distintos $VR_6^3 = 216$

16.- Serán números de 1, 2 y 3 cifras, $V_4^1 + VR_4^2 + VR_4^3 = 4 + 16 + 64 = 84$

17.- $\binom{12}{2} - 12 = 54$, es decir el número de combinaciones de dos vértices menos los doce lados del polígono.

En el caso de n lados tendremos $\binom{n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

18.- $P_8^{4,4} = 70$

19.- Son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15, es decir 3^{15}

20.- Serán permutaciones de 6 elementos, 6!=720

21.- Primeramente serán permutaciones de 5 elementos, 5!=120. Para la segunda pregunta nos damos cuenta que si uno de los dos que se niegan a estar contiguos se coloca en alguno de los tres lugares centrales, el otro solo puede ocupar dos lugares, por lo que habrá 3*2*3*2=36 formas de hacerlo, mientras que si ocupa uno de los extremos, el otro podrá colocarse en tres posiciones y por tanto habrá 2*3*3*2=36, en total 72 formas de colocarse.

22.- La palabra tiene 10 letras, pero la "s" se repite 3 veces, la "t" tres y la "i" otras dos, con lo que se podrán hacer $PR_{10}^{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!3!2!} = 50400$ Si queremos que empiece y termine por s, solo quedarán para permutar 8 letras, de las cuales se repite la t tres veces y la i dos, por lo que será $PR_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!2!} = 3360$

23.-

a) Se pueden elegir las 7 preguntas a contestar correctamente de $\binom{20}{7}$

b) De igual forma será $\binom{20}{10}$

c) En este caso debemos sumar las posibles formas de fallar solo 3, 2, 1 o tener todo el examen correcto, es decir, $\binom{20}{3}+\binom{20}{2}+\binom{20}{1}+\binom{20}{0}=1140+190+20+1=1351$

24.- Contemos todas las permutaciones que quedan por debajo.

i)	Primero todas las que comiencen por 1, 2, o 3:	3.3!=360
ii)	Que comiencen con 5 y la segunda sea menor que 9:	4.4!=96
iii)	que la tercera cifra sea menor que 8 (el 5 ya está puesto)	3.3!=18
iv)	que la cuarta cifra sea menor que 1 no puede darse.	
v)	que la cuarta cifra sea menor que 3 (ya solo queda el 2)	1

En total 475 por esto ocupará el lugar nº 476.

25.-

a)	números con una cifra (no se puede repetir)	10
b)	números con dos cifras. Las decenas no pueden ser 0,	9.9=81
c)	de tres cifras (la 1ª no es cero, la segunda si puede serlo y la tercera no puede ser ni la primera ni la segunda	9.9.8=648

En total 10+81+648=739 números sin repetir la cifras

26.- m(m-1) (m-2) = 5 m (m-1)+ (m (m-1) (m-2))/6 resolviendo esta ecuación nos saldrá m=0, m=1 y m=8, de las que sólo será válida m=8.