7 Trigonometría

INTRODUCCIÓN

En esta unidad se pretende que los alumnos adquieran los conocimientos básicos en trigonometría, que serán necesarios en cursos posteriores, sobre todo para alumnos de las opciones de Ciencias, Tecnología o Biosanitarias.

En la unidad se trabaja con tres funciones: seno, coseno y tangente, dejando para cursos posteriores sus funciones inversas: cosecante, secante y cotangente, así como las relaciones que se deducen de ellas.

Se aplican dichas funciones en la resolución de triángulos, sean rectángulos o no (cálculo de la altura), y por último, se estudia la conversión de grados en radianes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Definiciones de *seno*, *coseno* y *tangente*.
- Cálculo de dichas razones para ángulos notables: 30°, 45° y 60°.
- Signos del *seno*, *coseno* y *tangente* para ángulos en distintos cuadrantes de la *circunferencia goniométrica*.
- *Razones trigonométricas* de ángulos: complementarios, suplementarios, opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360°.
- Relación fundamental y expresión de la tangente.
- Resolución de triángulos rectángulos y cálculo de la altura en triángulos no rectángulos.
- Conversión de *grados sexagesimales* a *radianes*.

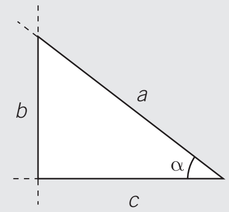
OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Razones trigonométricas.	• Definiciones de seno, coseno y tangente.	• Seno, coseno y tangente de triángulos rectángulos.
2. Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.	• Seno, coseno y tangente de los ángulos de 30º, 45º y 60º.	• Cálculo de las razones de ángulos notables.
3. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.	• Seno, coseno y tangente de ángulos de cualquiera de los cuatro cuadrantes.	• Deducción del signo del seno, el coseno y la tangente en cada uno de los cuatro cuadrantes.
4. Razones de ángulos complementarios y suplementarios.	• Seno, coseno y tangente de ángulos complementarios. • Seno, coseno y tangente de ángulos suplementarios.	• Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos complementarios y suplementarios.
5. Razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes.	• Seno, coseno y tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360º.	• Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360º.
6. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.	• Relación fundamental de la trigonometría. Tangente en función de seno y coseno.	• Obtención de dos razones trigonométricas, conocida la tercera.
7. Aplicaciones de las razones trigonométricas.	• Cálculo de lados y ángulos de un triángulo rectángulo, conocidos algunos de ellos. • Obtención de la altura de un triángulo no rectángulo.	• Aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas para hallar los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo.
8. Medida de ángulos en radianes.	• Definición de radián.	• Conversión de ángulos notables expresados en grados a radianes.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 OBJETIVO 1
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

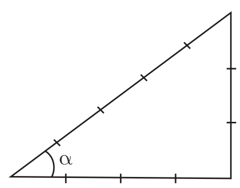
Dado un triángulo rectángulo, definimos las **razones trigonométricas** de uno de sus ángulos agudos α:



seno	coseno	tangente
$sen\ \alpha = \dfrac{b}{a}$	$cos\ \alpha = \dfrac{c}{a}$	$tg\ \alpha = \dfrac{b}{c}$
(cateto opuesto dividido entre hipotenusa)	(cateto contiguo dividido entre hipotenusa)	(cateto opuesto dividido entre cateto contiguo)

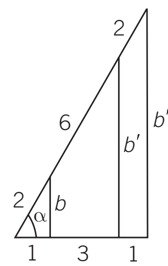
EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo de la figura.



$sen\ \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad tg\ \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{4}$

1 **Completa las igualdades y comprueba que las razones trigonométricas son independientes del tamaño del triángulo elegido.**



Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos de menor a mayor tamaño, hallamos *b*, *b'* y *b''*:

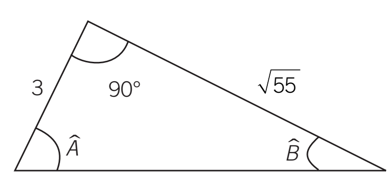
$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$
$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$sen\ \alpha = \dfrac{b}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad sen\ \alpha = \dfrac{b'}{8} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} =$ ______ $\qquad sen\ \alpha = \dfrac{b''}{10} = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} =$ ______

$cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad cos\ \alpha = \dfrac{c'}{a'} = \dfrac{\_\_\_}{\_\_\_} =$ ______ $\qquad cos\ \alpha = \dfrac{c''}{a''} = \dfrac{\_\_\_}{\_\_\_} =$ ______

$tg\ \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad tg\ \alpha = \dfrac{b'}{c'} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} =$ ______ $\qquad tg\ \alpha = \dfrac{b''}{c''} = \dfrac{\_\_\_}{\_\_\_} =$ ______

2 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.**



OBJETIVO 2

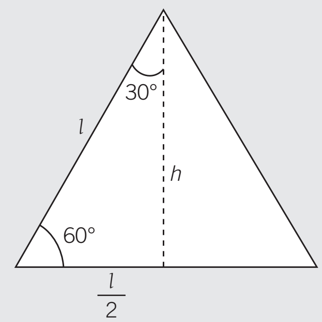
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60° 7

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° se deducen a partir de un triángulo equilátero de lado l.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos su altura:

$$h^2 = l^2 - (l/2)^2 = l^2 - l^2/4 = 3l^2/4 \rightarrow h = l \cdot \sqrt{3}/2$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l/2} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

1 **Deduce las razones trigonométricas del ángulo de 30° a partir del triángulo equilátero anterior.**

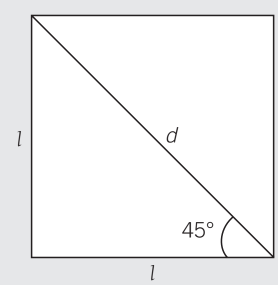
Las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2};\ cos\ 30° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \underline{\qquad};\ tg\ 30° = \frac{l/2}{l \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\qquad}$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45° se deducen a partir de un cuadrado y su diagonal.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la diagonal:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \rightarrow d = l \cdot \sqrt{2}$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

2 **Completa la tabla con las razones trigonométricas de ángulos notables.**

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen	0	—	—	—	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe	0	no existe	0

ADAPTACIÓN CURRICULAR

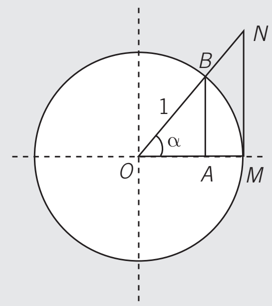
7 OBJETIVO 3
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La circunferencia goniométrica o círculo unitario es una circunferencia de radio la unidad.

Sobre dicha circunferencia, el valor del seno coincide con el segmento *AB* y el coseno con el segmento *OA*.

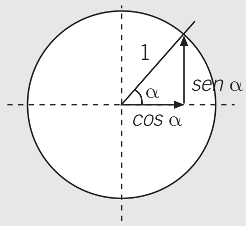
$$\text{sen } \alpha = \frac{AB}{1} = AB \qquad \cos \alpha = \frac{OA}{1} = OA$$



La tangente coincide con el segmento *MN*, que es tangente a la circunferencia, ya que:

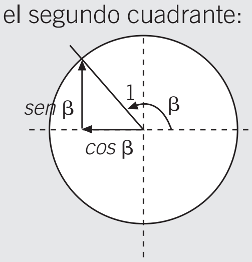
$$\text{tg } \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{MN}{1} = MN$$

En el primer cuadrante:



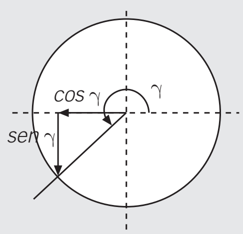
$\text{sen } \alpha > 0$
$\cos \alpha > 0$
$\text{tg } \alpha > 0$

En el segundo cuadrante:



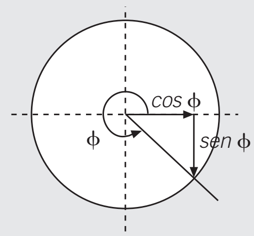
$\text{sen } \beta > 0$
$\cos \beta < 0$
$\text{tg } \beta < 0$

En el tercer cuadrante:



$\text{sen } \gamma < 0$
$\cos \gamma < 0$
$\text{tg } \gamma > 0$

En el cuarto cuadrante:

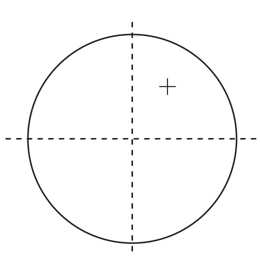


$\text{sen } \phi < 0$
$\cos \phi > 0$
$\text{tg } \phi < 0$

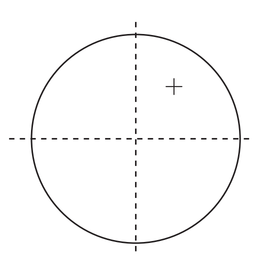
1 **Completa la siguiente tabla con los signos que correspondan a las razones trigonométricas indicadas.**

	40°	70°	110°	210°	300°
sen	+				
cos	+				
tg	+				

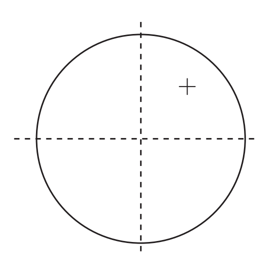
2 **Escribe, para cada cuadrante, el signo del seno, el coseno y la tangente.**



seno



coseno

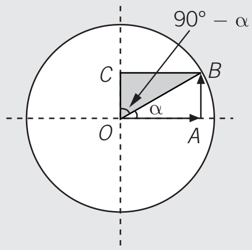


tangente

RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

NOMBRE: ________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Ángulos **complementarios** son aquellos cuya suma vale 90°.



El cateto opuesto al ángulo de $90° - \alpha$ (BC) es igual al cateto contiguo a α (OA): $\boldsymbol{sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $90° - \alpha$ (OC) es igual al cateto opuesto a α (AB): $\boldsymbol{cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (90° - \alpha)} = \frac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{tg\ \alpha}}$$

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 60°$, sabiendo que las razones del ángulo de 30° ($60° = 90° - 30°$) son:

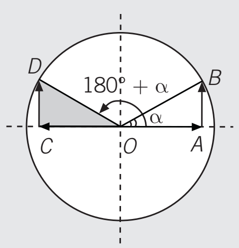
$$\boldsymbol{sen\ 30° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$sen\ 60° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{1}{tg\ 30°} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

1 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75°, sabiendo que las razones de 15° son:**

$sen\ 15° = 0{,}259$ $\qquad cos\ 15° = 0{,}966$ $\qquad tg\ 15° = 0{,}268$

Ángulos **suplementarios** son aquellos cuya suma vale 180°.



El cateto opuesto al ángulo de $180° - \alpha$ (CD) es igual al cateto opuesto a α (AB): $\boldsymbol{sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $180° - \alpha$ (OC) es el contrario del cateto contiguo a α (OA): $\boldsymbol{cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ (180° - \alpha)}{cos\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \boldsymbol{-tg\ \alpha}$$

EJEMPLO

Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, sabiendo que las razones del ángulo de 60° ($120° = 180° - 60°$) son:

$$\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 60° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 60° = \sqrt{3}}$$

$$sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$$

2 **Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 155°, sabiendo que las razones de 25° son:**

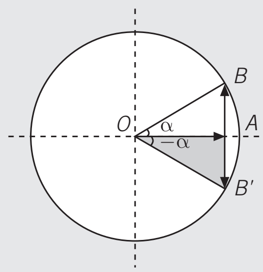
$sen\ 25° = 0{,}423$ $\qquad cos\ 25° = 0{,}906$ $\qquad tg\ 25° = 0{,}466$

7 OBJETIVO 5

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **ángulos opuestos** son los que miden igual, pero tienen distinto signo.



El cateto opuesto al ángulo $-\alpha$ (AB') es el contrario al cateto opuesto a α (AB): $\textbf{sen}\ (-\alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo $-\alpha$ (OA) es igual al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{cos}\ (-\alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (-\alpha) = \frac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\textbf{tg}\ \alpha$$

EJEMPLO

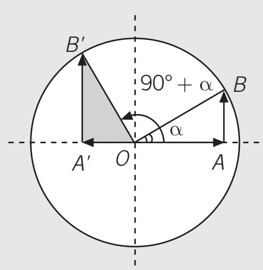
Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -20°$, sabiendo que las razones del ángulo de 20° son:

***sen* 20° = 0,342** **cos* 20° = 0,940** ***tg* 20° = 0,364**

$sen\ (-20°) = -sen\ 20° = -0,342$ $cos\ (-20°) = cos\ 20° = 0,940$ $tg\ (-20°) = -tg\ 20° = -0,364$

1 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de −45° (encuentra en la tabla del objetivo 2 las razones del ángulo de 45°).**

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90°



El cateto opuesto al ángulo de $90° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{sen}\ (90° + \alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo de $90° + \alpha$ (OA') es igual al contrario del cateto opuesto a α (AB): $\textbf{cos}\ (90° + \alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (90° + \alpha) = \frac{sen\ (90° + \alpha)}{cos\ (90° + \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{-sen\ \alpha} = -\frac{\mathbf{1}}{\textbf{tg}\ \alpha}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, conociendo las razones del ángulo de 30°.

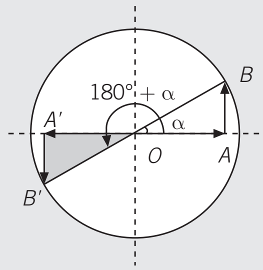
$$sen\ 120° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 120° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -\frac{1}{tg\ 30°} = -\frac{1}{1/\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

2 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 100°, sabiendo que 100° = 90° + 10°.**

$sen\ 10° = 0,174$ $cos\ 10° = 0,985$ $tg\ 10° = 0,176$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°



El cateto opuesto al ángulo de $180° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto opuesto a α (AB): $\boldsymbol{sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $180° + \alpha$ (OA') es igual al contrario del cateto contiguo a α (OA): $\boldsymbol{cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (180° + \alpha)} = \frac{sen\ (180° + \alpha)}{cos\ (180° + \alpha)} = \frac{-sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \boldsymbol{tg\ \alpha}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 240°$, conociendo las razones del ángulo de 60°.

$sen\ 240° = -sen\ 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad cos\ 240° = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

3 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 250°, sabiendo que:**

$sen\ 70° = 0{,}940$ $\qquad cos\ 70° = 0{,}342$ $\qquad tg\ 70° = 2{,}747$

Ten en cuenta que $250° = 180° + 70°$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 90°: Reducción al primer cuadrante

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo superior a 90° se pueden expresar en función de las razones de otro ángulo perteneciente al primer cuadrante.

1.er caso: para ángulos del segundo cuadrante.

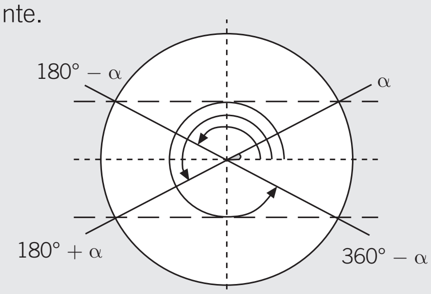
$\beta = 180° - \alpha$

2.º caso: para ángulos del tercer cuadrante.

$\gamma = 180° + \alpha$

3.er caso: para ángulos del cuarto cuadrante.

$\varepsilon = 360° - \alpha$



4 **Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 135°

Como 135° pertenece al segundo cuadrante, resulta que $135° = 180° -$ ______

$sen\ 135° =$ ______ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° =$ ______ $= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° =$ ______ $= -1$

b) 210°

Como 210° es mayor de 180°, pertenece al tercer cuadrante, pues $210° = 180° +$ ______

$sen\ 210° =$ ______ $= -\dfrac{1}{2}$

$cos\ 210° =$ ______ $= \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 210° =$ ______ $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) 330°

Como 330° pertenece al cuarto cuadrante, resulta que $330° = 360° - 30°$.

$sen\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 420°

¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de 420°? Si hacemos $420° = 360° + 60°$, vemos que está situado en el primer cuadrante.

$sen\ 420° = sen\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 420° = cos\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 420° = tg\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°

Si el ángulo es mayor de 360°, hay que hallar su ángulo equivalente, restando el número entero de veces que contiene a 360. Sus razones trigonométricas son iguales que las del ángulo equivalente resultante.

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1.470°$.

Dividimos 1.470 entre 360:

$1.470 = 360 \cdot 4 + 30$ dividendo = divisor · cociente + resto

$sen\ 1.470° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$ $cos\ 1.470° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 1.470° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos.**

a) 840°

Divide 840 entre 360 y expresa:

$840 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 840° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 840° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 840° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = -\sqrt{3}$

b) 3.915°

Divide 3.915 entre 360 y expresa:

$3.915 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 3.915° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 3.915° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 3.915° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

c) 1.320°

Divide 1.320 entre 360 y expresa:

$1.320 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 1.320° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 1.320° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 1.320° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \sqrt{3}$

d) 780°

Divide 780 entre 360 y expresa:

$780 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 780° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 780° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 780° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

OBJETIVO 6

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

Esta relación se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, junto con la relación que se deduce de la definición de tangente:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Conociendo una de las razones trigonométricas de un ángulo, podemos calcular las restantes razones.

EJEMPLO

Sabiendo que $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$**, calcula el seno y la tangente de dicho ángulo.**

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

1 **Sabiendo que** $sen\,\alpha = 0{,}78$**; halla** $cos\,\alpha$ **y** $tg\,\alpha$**.**

2 **Dado** $cos\,\alpha = 0{,}32$**; obtén** $sen\,\alpha$ **y** $tg\,\alpha$**.**

EJEMPLO

Dado $tg\,\alpha = 2$**, calcula** $sen\,\alpha$ **y** $cos\,\alpha$**.**

Llamamos $sen\,\alpha = x$ y $cos\,\alpha = y$. Las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894 = sen\,\alpha$$

$$y = cos\,\alpha = 0{,}447$$

3 **Sabiendo que** $tg\,\alpha = 5$**, calcula** $sen\,\alpha$ **y** $cos\,\alpha$**.**

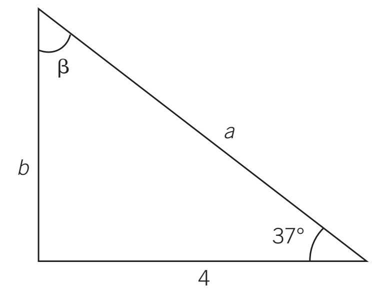
ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 OBJETIVO 7
APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

Calcula lo que miden los lados *a* y *b*, y el ángulo β del triángulo de la figura.



Como los tres ángulos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Para calcular el otro cateto, *b*, aplicamos la definición de *tg* 37° y usamos la calculadora para hallar *tg* 37°:

$$tg\ 37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

Para hallar la hipotenusa *a* podemos utilizar tres métodos:

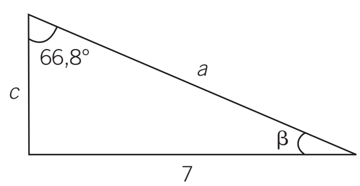
1.º Aplicar el teorema de Pitágoras.
2.º Utilizar la definición de *sen* 37°.
3.º Usar la definición de *cos* 37°.

Vamos a usar el segundo método:

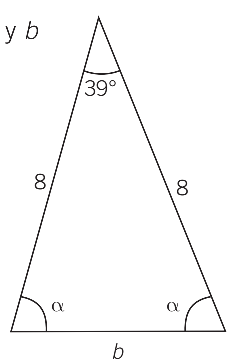
$$sen\ 37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

1 **Calcula, en cada triángulo, los lados y ángulos que se indican.**

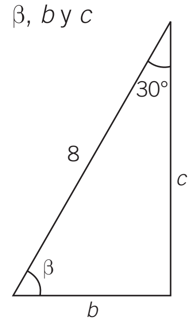
a) β, *a* y *c*



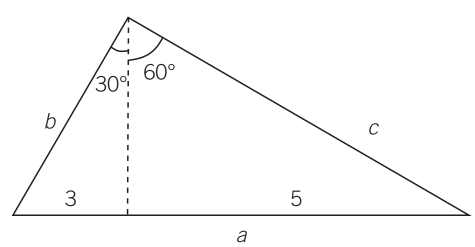
b) α y *b*



c) β, *b* y *c*

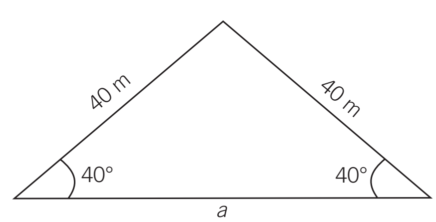


d) *a*, *b* y *c*



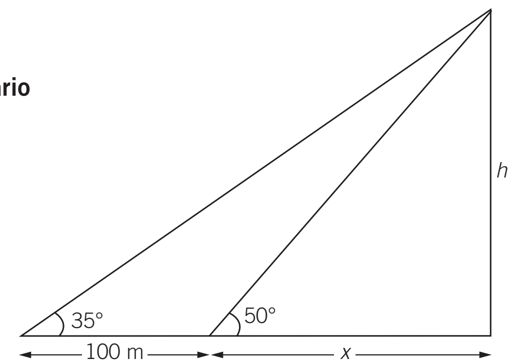
2 **Halla el área del siguiente triángulo.**

Trazamos la altura y, fijándonos en uno de los dos triángulos que se forman, hallamos *h* y la mitad de la base, $\frac{a}{2}$.



EJEMPLO

Desde un punto vemos el extremo superior del campanario de la iglesia bajo un ángulo de 50°. Si nos alejamos 100 m, lo vemos bajo un ángulo de 35°. Halla la altura del campanario y la distancia a la que nos encontramos inicialmente.



Este tipo de problemas se resuelven utilizando las tangentes de los dos ángulos:

$$tg\,50° = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}192x$$

$$tg\,35° = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0{,}7(100 + x)$$

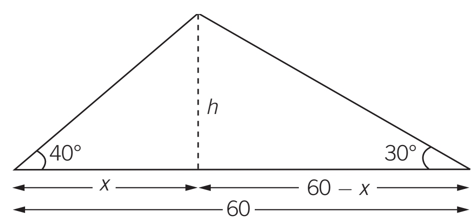
Igualando ambas, resulta:

$$1{,}192\,x = 0{,}7(100 + x) = 70 + 0{,}7x \rightarrow 0{,}492x = 70 \rightarrow x = 142{,}3 \text{ m}$$

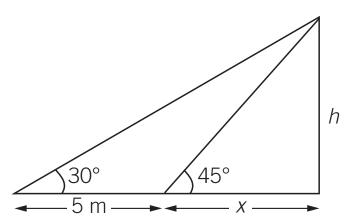
Sustituyendo en la primera de las ecuaciones, tenemos que la altura del campanario es:

$$h = 1{,}192x = 1{,}192 \cdot 142{,}3 = 169{,}6 \text{ m}$$

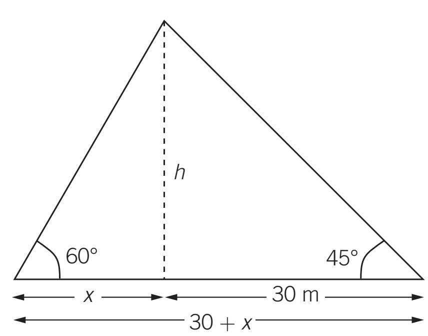
3 **Calcula la altura *h* y las distancias *x* y 60 — *x* de la figura. Utiliza las tangentes de los ángulos de 40° y 30°.**



4 **Halla los valores de *h* y *x*.**



5 **Determina la altura del árbol que, visto desde dos posiciones, distantes 30 m entre sí, forma la siguiente figura.**



OBJETIVO 8

MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

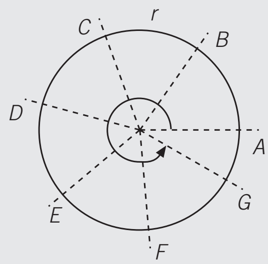
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

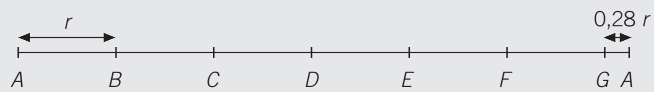
Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene igual longitud que el radio de una circunferencia.

Como la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, la equivalencia entre grados y radianes es:

$$\mathbf{360° = 2\pi \text{ radianes}}$$

Podemos comprobar gráficamente esta equivalencia, ya que $2\pi = 6{,}28$, que es el número de secciones en las que se cumple que el arco es igual al radio en el que podemos dividir la circunferencia.





EJEMPLO

Expresa en radianes los ángulos de 90°, 180° y 270°.

Convertimos los grados en radianes aplicando una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{r} 360° \;\text{——}\; 2\pi \text{ radianes} \\ 90° \;\text{——}\; x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \qquad \left.\begin{array}{r} 360° \;\text{——}\; 2\pi \text{ radianes} \\ 180° \;\text{——}\; x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 2\pi}{360} = \pi$$

$$\left.\begin{array}{r} 360° \;\text{——}\; 2\pi \text{ radianes} \\ 270° \;\text{——}\; x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{270 \cdot 2\pi}{360} = \frac{3 \cdot 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

1 **Convierte en radianes los ángulos de la tabla.**

0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
0			$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π

$$\left.\begin{array}{r} 360° \;\text{——}\; 2\pi \text{ radianes} \\ 30° \;\text{——}\; x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

2 **Convierte en radianes los ángulos correspondientes a cada casilla.**