11 Funciones exponenciales y logarítmicas

INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudian dos funciones que se aplican a numerosas situaciones cotidianas y, sobre todo, a fenómenos de la Física, la Biología o la Economía.

A los alumnos les cuesta diferenciar las funciones potenciales de las funciones exponenciales e, incluso, de las funciones logarítmicas, por lo que habrá dedicar el tiempo necesario a trabajar este aspecto.

Como aplicación de las funciones exponenciales se estudia el interés compuesto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Funciones exponenciales:* $f(x) = a^x$, $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{(x+b)}$.
- *Interés compuesto.*
- Cálculo del *logaritmo* de un número.
- Propiedades de los logaritmos.
- *Función logarítmica*: $y = \log_a x$.
- Relaciones entre las funciones inversas: exponencial y logarítmica.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer funciones exponenciales.	• Definición de la función $f(x) = a^x$. • Gráficas y características de las funciones: $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$.	• Estudio de las características de la función $f(x) = a^x$, si $a > 1$ o $a < 1$. • Construcción de tablas de valores y las gráficas de: $f(x)= a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$
2. Aplicar funciones exponenciales al interés compuesto.	• Definición de la función capital final para el interés compuesto.	• Cálculo del capital final: $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$
3. Calcular logaritmos y utilizar sus propiedades.	• Definición del logaritmo de b en base a. • Propiedades de los logaritmos.	• Obtención de logaritmos aplicando la definición. • Cálculo de logaritmos aplicando las propiedades.
4. Reconocer funciones logarítmicas.	• Propiedades de la función $f(x) = \log_a x$.	• Representación de la función $f(x) = \log_a x$.
5. Relacionar funciones exponenciales y logarítmicas.	• Comparación de las funciones inversas: $f(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a x$.	• Comparación de las gráficas de las funciones: $f(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a x$.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

11 OBJETIVO 1
RECONOCER FUNCIONES EXPONENCIALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Una **función exponencial** es una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ o $\boldsymbol{y = a^x}$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 0$).

La función exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ verifica que:

- $f(0) = a^0 = 1$, y un punto de su gráfica es (0, 1).
- $f(1) = a^1 = a$, y un punto de su gráfica es $(1, a)$.
- La función es creciente si $a > 1$.
- La función es decreciente si $a < 1$.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones exponenciales.

a) $\boldsymbol{y = 2^x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

Realizamos una tabla de valores, utilizando la calculadora, por ejemplo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} 2 = 0{,}25 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} \boxed{\pm} 2 = 4$

a)

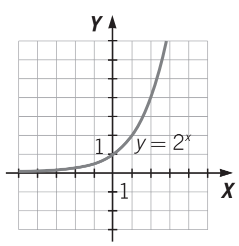
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^x	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

b)

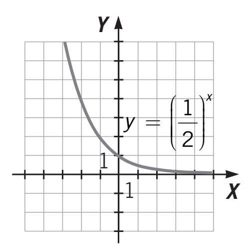
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Representamos las funciones sobre los ejes de coordenadas:

a)



b)



1 **Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.**

a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	$y = 4^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
−2		
−1		
0		
1		
2		

- Las funciones $\boldsymbol{y = a^x + b}$ son de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia arriba si b es positivo, y en b unidades hacia abajo si es negativo.
- Las funciones $\boldsymbol{y = a^{x+b}}$ son también de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia la izquierda si b es positivo, y en b unidades hacia la derecha si es negativo.

EJEMPLO

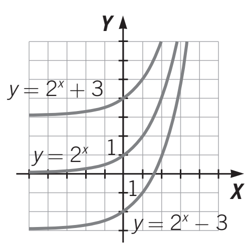
Representa, en los mismos ejes que $y = 2^x$, las funciones exponenciales.

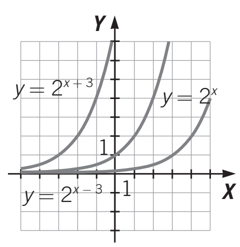
a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 2^{x-3}$ **c)** $y = 2^x + 3$ **d)** $y = 2^x - 3$

Realizamos la siguiente tabla de valores:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = 2^{x+3}$	1	2	4	8	16	32	64
$y = 2^{x-3}$	0,015625	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1
$y = 2^x + 3$	3,125	3,25	3,5	4	5	7	11
$y = 2^x - 3$	−2,875	−2,75	−2,5	−2	−1	1	5

Representamos las funciones sobre los ejes de coordenadas:





2 **Representa, en los mismos ejes que $y = 1{,}5^x$, las funciones exponenciales.**

a) $y = 1{,}5^{x+2}$ **b)** $y = 1{,}5^{x-1}$ **c)** $y = 1{,}5^x + 2$ **d)** $y = 1{,}5^x - 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 1{,}5^x$							
$y = 1{,}5^{x+2}$							
$y = 1{,}5^{x-1}$							
$y = 1{,}5^x + 2$							
$y = 1{,}5^x - 1$							

11 OBJETIVO 2

APLICAR FUNCIONES EXPONENCIALES AL INTERÉS COMPUESTO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **capital final** C_f, obtenido al invertir un **capital** C a un **rédito** r, durante un **tiempo** t, a **interés compuesto** es: $\boldsymbol{C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$.

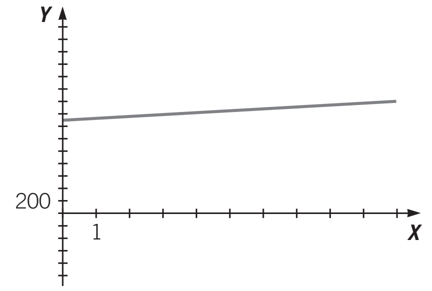
EJEMPLO

El capital que obtenemos al cabo de $t = 1, 2, 3, 4, 7$ y 10 años al invertir un capital de $C = 1.500$ €, a interés compuesto, a un rédito r del 2 %, se calcula mediante la fórmula:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t = 1.500 \cdot 1{,}02^t$$

Podemos considerar la fórmula como una función exponencial. Al representarla se observa la evolución del capital invertido. El capital inicial es el punto de corte de la gráfica con el eje *Y*.

t	$C_f = 1.500 \cdot 1{,}02^t$
1	1.530
2	1.560,60
3	1.591,81
4	1.623,65
7	1.723,03
10	1.828,49



Para calcular cuánto se tiempo tardará en conseguir 1.650 €, hallamos el punto de la gráfica que corresponde a 1.650 € en el eje vertical, y determinamos su coordenada del eje horizontal.

En este caso se tardará aproximadamente 4,8 años, es decir, unos 4 años y 10 meses.

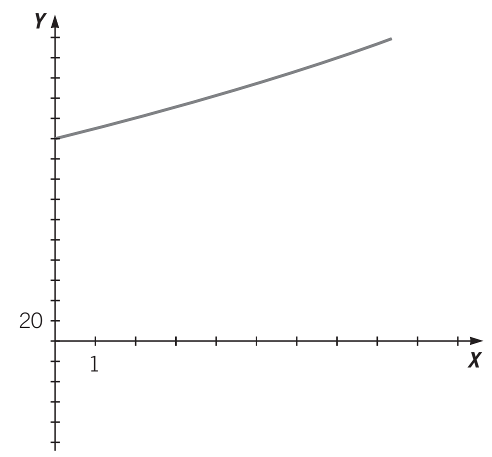
1 **Halla el capital que obtendremos en los 6 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 500 € a un rédito del 2,5 %.**

2 **La gráfica representa cómo evoluciona un capital *C*, invertido a interés compuesto, con un rédito del 5 %. Contesta a las siguientes cuestiones.**

a) **¿Cuál es el capital inicial?**

b) **Indica el capital final que se obtendrá a los 4 años.**

c) **¿Cuánto tiempo aproximado ha de pasar para tener 2.200 €?**



OBJETIVO 3

CALCULAR LOGARITMOS Y UTILIZAR SUS PROPIEDADES 11

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dados dos números reales positivos a y b ($a \neq 1$), el **logaritmo de *b* en base *a*** es el exponente al que hay que elevar a para que el resultado sea b.

$$\log_a b = c \qquad a^c = b$$

Cuando la base de los logaritmos es 10, se llaman **logaritmos decimales**, y la base no se escribe: $\log_{10} b = \log b$

Si la base es el número $e = 2{,}7182...$, se llaman **logaritmos neperianos**, y la base se escribe: $\ln b$

EJEMPLO

Aplica la definición de logaritmo, y halla el valor de *x*.

a) $\log_5 \sqrt{5} = x$ — a) $5^x = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_x \frac{1}{64} = 6$ — b) $x^6 = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x$ — c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \rightarrow 3^{-x} = 3^4 \rightarrow x = -4$

1 **Calcula los logaritmos, mediante la definición.**

a) $\log_5 125$ b) $\log 1.000$ c) $\log_2 64$ d) $\log_4 64$ e) $\ln e^4$

2 **Halla, aplicando la definición, estos logaritmos.**

a) $\log 0{,}01$ b) $\log_3 \sqrt{27}$ c) $\log_{\frac{1}{4}} 64$ d) $\ln \frac{1}{e^6}$ e) $\log_2 \frac{2}{\sqrt{2}}$

3 **Calcula el valor de *x* en cada caso.**

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log x = -4$ c) $\log_3 (x + 2) = 3$ d) $\log_x 81 = 729$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a b^n = n \cdot \log_a b$

EJEMPLO

Resuelve estas operaciones con logaritmos.

a) $\ln e^6 = 6 \ln e = 6 \cdot 1 = 6$

b) $\log 0{,}01 - \log 10 = \log \left(\dfrac{0{,}01}{10}\right) = \log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$

c) $\log_{25} 3.125 = \log_{25} 25^2 \cdot 5 = \log_{25} 25 + \log_{25} 5 = 1 + \log_{25} \sqrt{25} = 1 + \log_{25} 5^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

4 **Calcula, usando las propiedades, los siguientes logaritmos.**

a) $\log_4 1$

b) $\log_3 3$

c) $\log_4 2.048$

d) $\log 1.000 + \log 0{,}01$

e) $\ln e^7 - \ln e^5 + \ln e^8$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4}$

CAMBIO DE BASE

Para trabajar los logaritmos con la calculadora, es necesario que sean decimales o neperianos. Cuando no es así, utilizamos un cambio de base para transformarlos.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

EJEMPLO

Halla con la calculadora.

a) $\log 453$ **b)** $\log_5 769$

a) 453 $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$ 2,65609...

b) $\log_5 769 = \dfrac{\log 769}{\log 5} = \dfrac{2{,}8859\ldots}{0{,}6989\ldots} = 4{,}1288\ldots$

5 **Convierte en logaritmos decimales, y halla su valor, ayudándote de la calculadora.**

a) $\log_2 3$ b) $\log_3 2$ c) $\log_6 35$

6 **Transforma en logaritmos neperianos los logaritmos, y obtén su valor mediante la calculadora.**

a) $\log 15$ b) $\log_8 4$ c) $\log_4 127$

RECONOCER FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La **función logarítmica** es de la forma $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 1$).

La función logarítmica $y = \log_a x$ verifica que:

- El dominio es $(0, +\infty)$.
- $\log_a 1 = 0 \rightarrow$ Un punto de su gráfica es (1, 0).
- $\log_a a = 1 \rightarrow$ Un punto de su gráfica es $(a, 1)$.
- La función es creciente cuando $a > 1$ y es decreciente cuando $a < 1$.

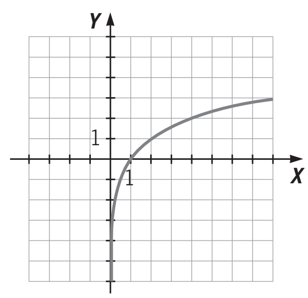
EJEMPLO

Representa la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

Como el dominio $f = (0, +\infty)$ y $a > 1$, la función es creciente.

Pasa por los puntos (1, 0) y (2, 1). Construimos una tabla de valores.

x	$\log_2 x$
0,25	−2
0,5	−1
1	0
2	1
3	1,5849...
4	2



1 **Describe las características de las siguientes funciones, y compruébalas representando su gráfica en los mismos ejes.**

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2 **Asocia cada función con su gráfica.**

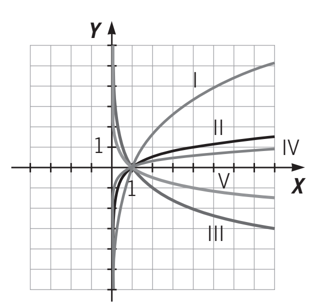
a) $y = \log x$ I)

b) $y = \log_{0,5} x$ II)

c) $y = \log_4 x$ II)

d) $y = \log_{1,5} x$ IV)

e) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ V)



ADAPTACIÓN CURRICULAR

11 OBJETIVO 5
RELACIONAR FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La función logarítmica $y = \log_a x$ es la **función inversa** de la función exponencial $y = a^x$. Por tanto, se cumple que:

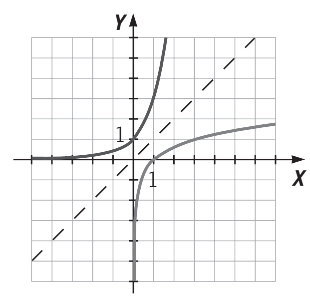
- Si (c, b) pertenece a la función $y = a^x$, entonces (b, c) pertenece a la función $y = \log_a x$.
- Las **gráficas** de la función $y = a^x$, y la función $y = \log_a x$, son **simétricas** respecto de la **bisectriz del primer y tercer cuadrante**.

EJEMPLO

Comprobamos que las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3 x$ son inversas.

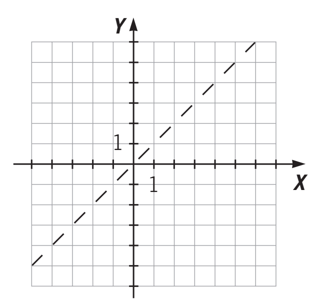
Construimos una tabla de valores para las funciones y las representamos.

x	$f(x)$	$g(x)$
−3	0,037	
−1	0,333	
0	1	
0,5	1,732	−0,631
1	3	0
2	9	0,631
1,5	5,196	0,369
3	27	1



1 **Completa la tabla de valores para las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x$, y represéntalas.**

x	$f(x)$	$g(x)$
−0,5		
−1		
0	1	
0,5		
1		0
2		
4		
8		



2 **Dibuja, en los mismos ejes, las funciones inversas de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $g(x) = 2^x$. ¿Cuáles son sus fórmulas?**