TRIGONOMETRÍA

UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

EJERCICIO 1

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70° b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y 3,5 rad

Solución:

a) $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{7\pi}{6}$ rad $\qquad 70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{7\pi}{18}$ rad

b) $\frac{7\pi}{6}$ rad $= \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ \qquad 3{,}5$ rad $= 3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ\ 32'7''$

EJERCICIO 2 : Completa la tabla:

GRADOS	130º		330º	
RADIANES		4π / 3		1,5

Solución:

$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{13\pi}{18}$ rad $\qquad \frac{4\pi}{3}$ rad $= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$

$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{11\pi}{6}$ rad $\qquad 1{,}5$ rad $= 1{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ\ 56'37''$

Por tanto:

GRADOS	**130º**	240º	**330º**	85º56'37''
RADIANES	13π / 18	**4π / 3**	11π / 6	**1,5**

CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 3 : Sabiendo que α es un ángulo agudo y que el *cos* α = 1/5, calcula *sen* α y *tg* α.

Solución:

Como $cos\ \alpha = \frac{1}{5} \ \rightarrow\ \left(\frac{1}{5}\right)^2 + sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{1}{25} + sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = \frac{24}{25} \ \rightarrow \rightarrow\ sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Luego, $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = 2\sqrt{6}$

EJERCICIO 4 : Completa la siguiente tabla haciendo uso de las relaciones fundamentales y sabiendo que α es un ángulo agudo:

***sen* α**		
***cos* α**	**0,25**	
***tg* α**		**0,6**

Solución:

- Si $cos\ \alpha = 0{,}25 \ \rightarrow\ (0{,}25)^2 + sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 0{,}9375$

  Luego, $sen\ \alpha \approx 0{,}97$ y $tg\ \alpha = \frac{0{,}97}{0{,}25} \approx 3{,}88$.

- Si $tg\ \alpha = 0{,}6 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}6\ cos\ \alpha \ \rightarrow\ (0{,}6\ cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1$
  $0{,}36\ cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ 1{,}36\ cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha \approx 0{,}74 \ \rightarrow\ cos\ \alpha \approx 0{,}86$
  Luego, $sen\ \alpha = 0{,}6 \cdot 0{,}86 \approx 0{,}52$ y la tabla queda:

***sen* α**	0,97	0,52
***cos* α**	**0,25**	0,86
***tg* α**	3,88	**0,6**

<u>EJERCICIO 5</u> : Calcula *sen* α y *cos* α de un ángulo agudo, α, sabiendo que la $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$.

Solución:

Si $tg\ \alpha = \frac{4}{3} \ \rightarrow\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{4}{3} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \frac{4}{3} cos\ \alpha$

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \left(\frac{4}{3} cos\ \alpha\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{16}{9} cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$\frac{25}{9} cos^2\alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\alpha = \frac{9}{25} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{3}{5}$

Luego, $sen\ \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \frac{4}{5}$

<u>EJERCICIO 6</u> : Sabiendo que 0° < α < 90°, completa la siguiente tabla usando las relaciones fundamentales:

***sen* α**		**0,8**
***cos* α**		
***tg* α**	**0,75**	

Solución:

- Si $tg\ \alpha = 0{,}75 \ \rightarrow\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}75 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot cos\ \alpha$
  $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \ \rightarrow\ (0{,}75 cos\ \alpha)^2 + cos^2\alpha = 1 \ \rightarrow\ 0{,}5625 cos^2\ \alpha + cos^2\alpha = 1$
  $1{,}5625 cos^2\alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\alpha = 0{,}64 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = 0{,}8$
  Luego, $sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$.
- Si $sen\ \alpha = 0{,}8 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ (0{,}8)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow$
  $\rightarrow\ 0{,}64 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = 0{,}36 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = 0{,}6$
  Luego, $tg\ \alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}\widehat{3}$.
  Completamos la tabla:

***sen* α**	0,6	**0,8**
***cos* α**	0,8	0,6
***tg* α**	**0,75**	$1{,}\widehat{3}$

<u>EJERCICIO 7</u> : De un ángulo agudo, α, conocemos que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$. Halla *cos* α y *tg* α.

Solución:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \frac{9}{25} + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \;\rightarrow\; cos^2\alpha = \frac{16}{25} \;\rightarrow\; cos\,\alpha = \frac{4}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{3}{4}$$

<u>EJERCICIO 8</u> : Completa la tabla sin usar calculadora (0° ≤ α ≤ 90°):

α		**90°**		
***sen* α**	**0**			
***cos* α**				$\sqrt{3}/2$
***tg* α**			$\sqrt{3}$	

Solución:

α	0	**90°**	60°	30°
***sen* α**	**0**	1	$\sqrt{3}/2$	1/2
***cos* α**	1	0	1/2	$\sqrt{3}/2$
***tg* α**	0	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$

<u>EJERCICIO 9</u> : Sin hacer uso de la calculadora, halla el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan o del ángulo α, sabiendo que 0° ≤ α ≤ 90°:

***sen* α**			**1**	
***cos* α**	**1/2**			
***tg* α**		$\sqrt{3}/3$		
α				**45°**

Solución:

***sen* α**	$\sqrt{3}/2$	1/2	**1**	$\sqrt{2}/2$
***cos* α**	**1/2**	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
***tg* α**	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	NO EXISTE	1
α	60°	30°	90°	**45°**

<u>EJERCICIO 10</u> : Sin usar calculadora, completa la siguiente tabla (0° ≤ α ≤ 90°):

α		**60°**		
***sen* α**				$\sqrt{2}/2$
***cos* α**			**1**	
***tg* α**	**NO EXISTE**			

α	90°	**60°**	0°	45°
sen α	1	$\sqrt{3}/2$	0	$\mathbf{\sqrt{2}/2}$
cos α	0	1/2	**1**	$\sqrt{2}/2$
tg α	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	0	1

<u>EJERCICIO 11</u> : Calcula el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan o del ángulo α, sin usar calculadora $(0° < \alpha \leq 90°)$:

sen α	$\mathbf{\sqrt{3}/2}$			
cos α				$\mathbf{\sqrt{2}/2}$
tg α		**0**		
α			**30°**	

Solución:

sen α	$\mathbf{\sqrt{3}/2}$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$
cos α	1/2	1	$\sqrt{3}/2$	$\mathbf{\sqrt{2}/2}$
tg α	$\sqrt{3}$	**0**	$\sqrt{3}/3$	1
α	60°	0°	**30°**	45°

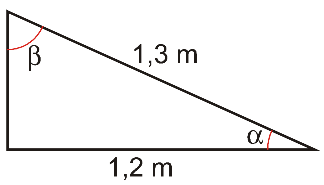
<u>EJERCICIO 12</u> : Completa la tabla sin usar calculadora $(0° \leq \alpha \leq 90°)$:

α	**0°**			
sen α		**1/2**		
cos α				**0**
tg α			**1**	

Solución:

α	**0°**	30°	45°	90°
sen α	0	**1/2**	$\sqrt{2}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	**0**
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	**1**	NO EXISTE

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

Llamamos x a la longitud del otro cateto y calculamos su valor usando el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 1{,}2^2 = 1{,}3^2 \;\rightarrow\; x^2 + 1{,}44 = 1{,}69 \;\rightarrow\; x^2 = 0{,}25 \;\rightarrow\; x = 0{,}5$ m

Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{0{,}5}{1{,}3} \approx 0{,}38 \qquad cos\ \alpha = \frac{1{,}2}{1{,}3} \approx 0{,}92 \qquad tg\ \alpha = \frac{0{,}5}{1{,}2} \approx 0{,}42$$

$$sen\ \beta = \frac{1{,}2}{1{,}3} \approx 0{,}92 \qquad cos\ \beta = \frac{0{,}5}{1{,}3} \approx 0{,}38 \qquad tg\ \beta = \frac{1{,}2}{0{,}5} \approx 2{,}4$$

<u>EJERCICIO 14</u> :

a) Comprueba, usando el teorema de Pitágoras, que el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm es rectángulo.

b) Calcula las razones trigonométricas de sus dos ángulos agudos.

Solución:

a) $10^2 = 6^2 + 8^2 \;\rightarrow\; 100 = 36 + 64 \;\rightarrow\; 100 = 100$

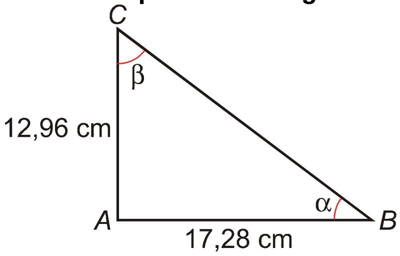
Se cumple el teorema Pitágoras. Por tanto, es rectángulo.

b) Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad cos\ \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8 \qquad tg\ \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$sen\ \beta = \frac{8}{10} = 0{,}8 \qquad cos\ \beta = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad tg\ \beta = \frac{8}{6} = 1{,}\widehat{3}$$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo *ABC* sabiendo que es rectángulo.



Solución:

Sea x la longitud de la hipotenusa; por el teorema de Pitágoras:

$12{,}96^2 + 17{,}28^2 = x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 466{,}56 \;\rightarrow\; x = 21{,}6$ cm

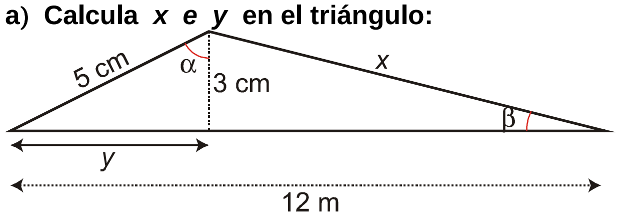
Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{12{,}96}{21{,}6} = 0{,}6 \qquad cos\ \alpha = \frac{17{,}28}{21{,}6} = 0{,}8 \qquad tg\ \alpha = \frac{12{,}96}{17{,}28} = 0{,}75$$

$$sen\ \beta = \frac{17{,}28}{21{,}6} = 0{,}8 \qquad cos\ \beta = \frac{12{,}96}{21{,}6} = 0{,}6 \qquad tg\ \beta = \frac{17{,}28}{12{,}96} = 1{,}\widehat{3}$$

<u>EJERCICIO 16</u> :

a) Calcula *x* e *y* en el triángulo:

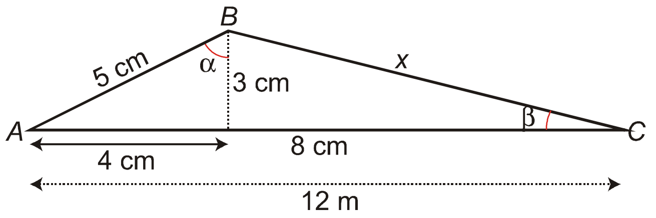


b) Halla el seno, el coseno y la tangente de los ángulos α y β.

Solución:

a) Calculamos y aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 3^2 + y^2 \;\rightarrow\; 25 = 9 + y^2 \;\rightarrow\; 16 = y^2 \;\rightarrow\; y = 4$ cm



Calculamos x sabiendo que la longitud de los catetos del triángulo BDC miden 3 cm y $12 - 4 = 8$ cm:
$x^2 = 3^2 + 8^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 + 64 \quad \rightarrow \quad x^2 = 73 \quad \rightarrow \quad x \approx 8{,}54$ cm

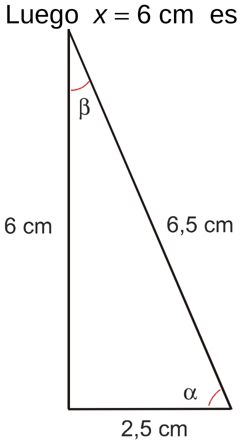
b) Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad cos\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad tg\ \alpha = \frac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$$

$$sen\ \beta = \frac{3}{8{,}54} \approx 0{,}35 \qquad cos\ \beta = \frac{8}{8{,}54} \approx 0{,}94 \qquad tg\ \beta = \frac{3}{8} \approx 0{,}375$$

<u>EJERCICIO 17</u> : Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo en el que uno de sus catetos mide 2,5 cm y la hipotenusa, 6,5 cm.

Solución:
Llamamos x a la longitud del otro cateto y calculamos su valor aplicando el teorema de Pitágoras:
$x^2 + 2{,}5^2 = 6{,}5^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 6{,}25 = 42{,}25 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36$
Luego $x = 6$ cm es la longitud del otro cateto.



- Calculamos las razones trigonométricas de α:

$$sen\ \alpha = \frac{6}{6{,}5} \approx 0{,}92 \qquad cos\ \alpha = \frac{2{,}5}{6{,}5} \approx 0{,}38 \qquad tg\ \alpha = \frac{6}{2{,}5} \approx 2{,}4$$

- Calculamos las razones trigonométricas de β:

$$sen\ \beta = \frac{2{,}5}{6{,}5} \approx 0{,}38 \qquad cos\ \beta = \frac{6}{6{,}5} \approx 0{,}92 \qquad tg\ \beta = \frac{2{,}5}{6} \approx 0{,}42$$

<u>EJERCICIO 18</u> : De un ángulo α sabemos que la tag α = 3/4 y 180º < α < 270º. Calcula sen α y cos α.

Solución:

Como $tg\ \alpha = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = \frac{3}{4} cos\ \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ sen\ \alpha = \frac{3}{4} cos\ \alpha \end{array}\right\} \quad \frac{19}{6} cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{25}{16} cos^2\ \alpha = 1$$

$cos^2\ \alpha = \frac{16}{25} \quad \rightarrow \quad cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$ por estar α en el tercer cuadrante.

Asi, $sen\ \alpha = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = -\frac{3}{5}$

EJERCICIO 19 : Si *cos* $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ y $270° < \alpha < 360°$, calcula *sen* α y *tg* α.

Solución:

En el cuarto cuadrante, *sen* $\alpha < 0$ y *tg* $\alpha < 0$.

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - \frac{2}{9} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) : \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{14}}{2} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$$

EJERCICIO 20 :

Sabiendo que *cos* $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y que α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula *sen* α y *tg* α.

Solución:

Como $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \rightarrow\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{5}{25} + sen^2\ \alpha = 1$

$sen^2\ \alpha = \frac{20}{25} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (elegimos el signo $-$ por estar α en el tercer cuadrante).

Así, $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) : \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2 \ \rightarrow\ tg\ \alpha = 2$

EJERCICIO 21 : Si *sen* $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $90° < \alpha < 180°$, ¿Cuánto valen *cos* α y *tg* α?

Solución:

Si $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \ \rightarrow\ \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{5}{9} + cos^2\ \alpha = 1$

$cos^2\ \alpha = 1 - \frac{5}{9} \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{4}{9} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = -\frac{2}{3}$

donde elegimos el signo $-$ por ser $90° < \alpha < 180°$.

Así, $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIO 22 : Calcula *sen* α y *cos* α sabiendo que la *tg* $\alpha = -\sqrt{5}$ y $\alpha \in$ 2º cuadrante.

Solución:

Como $tg\ \alpha = -\sqrt{5} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\sqrt{5}\, cos\ \alpha$

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ 5 cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 6 cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{1}{6} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$,

por estar α en el 2º cuadrante.

Así, $sen\ \alpha = -\sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

La solución es: $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$ y $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$

<u>EJERCICIO 23</u> : Sabiendo que $sen\ \alpha = \frac{15}{17}$ y que 90° < α < 180°, calcula el valor de *cos* α y *tg* α.

Solución:
En el 2º cuadrante, *cos* α < 0 y *tg* α < 0.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \frac{15}{17} \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \left(\frac{15}{17}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = 1 - \frac{225}{289} \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{64}{289} \ \rightarrow \rightarrow\ cos\ \alpha = -\frac{8}{17}$$

Luego: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{15}{17} : \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{15}{8} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -\frac{15}{8}$

<u>EJERCICIO 24</u> : De un ángulo agudo, α, a sabemos que $tg\ \alpha = \frac{5}{4}$. Calcula *sen* α y *cos* α.

Solución:

$$tg\ \alpha = \frac{5}{4} \ \rightarrow\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{5}{4} \ \rightarrow\ \left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \frac{5}{4} cos\ \alpha \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \left(\frac{5}{4} cos\ \alpha\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{25}{16} cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \frac{41}{16} cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{16}{41} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41} \approx 0,62 \qquad \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{5}{4} \cdot 0,62 \approx 0,78$$

<u>EJERCICIO 25</u> : Sabiendo que $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ y que 180° < α < 270°, calcula *sen* α y *tg* α.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{array}\right\} sen^2\ \alpha + \frac{7}{16} = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = \frac{9}{16} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{3}{4}$$

En el tercer cuadrante, *sen* α < 0 y *tg* α > 0.

Luego: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\frac{3}{4} : \frac{-\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

<u>EJERCICIO 26</u> : Calcula *sen* α y *tg* α de un ángulo agudo, α, sabiendo que $cos\ \alpha = 0,6$.

Solución:
$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha + 0,6^2 = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - 0,36 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 0,64 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0,8$

Luego: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = 1,\widehat{3} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = 1,\widehat{3}$

<u>EJERCICIO 27</u> : Si $sen\ \alpha = -\frac{12}{13}$ y α ∈ 4° cuadrante, calcula *cos* α y *tg* α.

Solución:

En el cuarto cuadrante, el *cos* α es positivo, y la tangente, negativa.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -\frac{12}{13} \\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \end{array}\right\} \left(-\frac{12}{13}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} \ \rightarrow\ cos^2\alpha = \frac{25}{169} \ \rightarrow$$

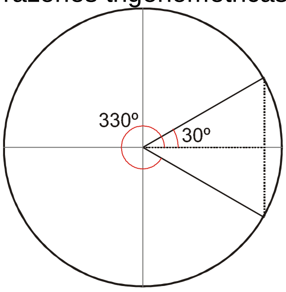
$$\rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{5}{13}$$

Luego: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13} = -\dfrac{12}{5} \quad \rightarrow \quad tg\ \alpha = -\dfrac{12}{5}$

CAMBIO DE CUADRANTES

<u>EJERCICIO 28</u> : Expresa, con valores comprendidos entre 0° y 360°, el ángulo de 2 130°. Calcula sus razones trigonométricas dibujándolo previamente en la circunferencia goniométrica y relacionándolo con un ángulo del primer cuadrante.

Solución:
2 130° = 5 · 360° + 330°, luego calcular las razones trigonométricas de 2 130° equivale a calcular las razones trigonométricas de 330°.

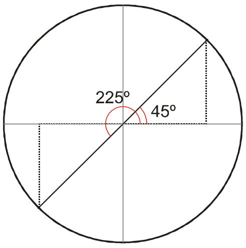


$sen\ 2\,130° = sen\ 330° = -\ sen\ 30°$ $\qquad$ $cos\ 2\,130° = cos\ 330° = cos\ 30°$

Así: $sen\ 2130° = -\dfrac{1}{2}; \quad cos\ 2130° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad tg 2130° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

<u>EJERCICIO 29</u> : Representa en la circunferencia goniométrica las razones trigonométricas del ángulo de 225°, y calcula el valor de cada una de ellas relacionando el ángulo de 225° con uno del primer cuadrante.

Solución:



Observamos que:

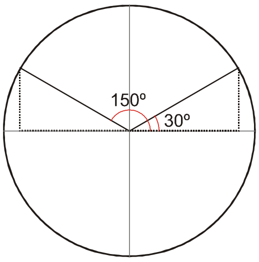
$$sen\ 225° = -sen\, 45° \quad \rightarrow \quad sen 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 225° = -cos\, 45° \quad \rightarrow \quad cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 225° = tg\, 45° \quad \rightarrow \quad tg 225° = 1$$

<u>EJERCICIO 30</u> : Representa en la circunferencia goniométrica *sen* 150°, *cos* 150° y *tg* 150°. Calcula el valor de cada una de ellas relacionando el ángulo de 150° con un ángulo del primer cuadrante.

Solución:

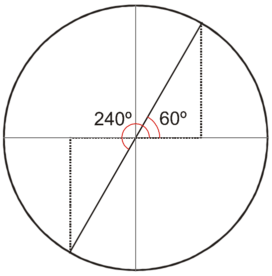


En la circunferencia goniométrica observamos:

$$sen\ 150° = sen\,30° \quad \rightarrow \quad sen150° = \frac{1}{2}$$
$$cos\ 150° = -cos\,30° \quad \rightarrow \quad cos150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg\ 150° = -tg\,30° \quad \rightarrow \quad tg150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>EJERCICIO 31</u> : Calcula las razones trigonométricas de 240° dibujando previamente este ángulo en la circunferencia goniométrica.

Solución:



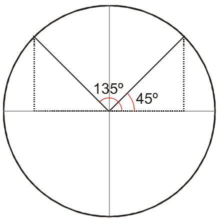
En el dibujo se observa que:

$$sen\ 240° = -sen\ 60° \quad \rightarrow \quad sen\ 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos\ 240° = -cos\ 60° \quad \rightarrow \quad cos\ 240° = -\frac{1}{2}$$

Luego: $tg\ 240° = \dfrac{sen\ 240°}{cos\ 240°} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad tg\ 240° = \sqrt{3}$

<u>EJERCICIO 32</u> : Sitúa sobre la circunferencia goniométrica, el ángulo de 135° y calcula sus razones trigonométricas relacionándolo con uno del primer cuadrante.

Solución:



Se observa en la circunferencia goniométrica que:

$$sen\ 135° = sen\ 45° \quad \rightarrow \quad sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\ 135° = -cos\ 45° \quad \rightarrow \quad cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego, $tg\ 135° = -1$.

<u>EJERCICIO 33</u> : Relacionándolo con un ángulo del primer cuadrante, calcula las razones trigonométricas de 210°.

Solución:
210° pertenece al 3<u>er</u> cuadrante y 180° + 30° = 210°.

Luego, las razones trigonométricas de 210° van a estar relacionadas con las razones trigonométricas de 30°:

$$sen\ 210° = -sen\ 30° \quad \rightarrow \quad sen\ 210° = -\frac{1}{2}$$

$$cos\ 210° = -cos\ 30° \quad \rightarrow \quad cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 210° = tg\ 30° \quad \rightarrow \quad tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>EJERCICIO 34</u> : Sabiendo que *cos* 58° = 0,53, *sen* 58° = 0,85 y *tg* 58° = 1,6, calcula las razones trigonométricas de 122°.

Solución:
122° pertenece al 2º cuadrante y $122° + 58° = 180°$.

Relacionamos las razones trigonométricas de 122° y 58°:

$$sen\ 122° = sen\ 58° \quad \rightarrow \quad sen\ 122° = 0{,}85$$

$$cos\ 122° = -cos\ 58° \quad \rightarrow \quad cos\ 122° = -0{,}53$$

$$tg\ 122° = -tg\ 58° \quad \rightarrow \quad tg\ 122° = -1{,}6$$

<u>EJERCICIO 35</u> : Halla las razones trigonométricas de 315° estableciendo una relación entre dicho ángulo y uno del primer cuadrante.

Solución:
Se sabe que 315° es un ángulo del 4º cuadrante, y además, $315° + 45° = 360°$.
Relacionamos, pues, las razones trigonométricas de 315° con las razones trigonométricas de 45°:

$$sen\ 315° = -sen\ 45° \quad \rightarrow \quad sen\ 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 315° = cos\ 45° \quad \rightarrow \quad cos\ 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 315° = -tg\ 45° \quad \rightarrow \quad tg\ 315° = -1$$

<u>EJERCICIO 36</u> : Calcula las razones trigonométricas de 227° a partir de las razones trigonométricas de 47°: *sen* 47° = 0,73; *cos* 47° = 0,68; *tg* 47° = 1,07

Solución:
227° es un ángulo correspondiente al 3er cuadrante. Además, $180° + 47° = 227°$, luego:

$$sen\ 227° = -sen\ 47° \quad \rightarrow \quad sen\ 227° = -0{,}73$$

$$cos\ 227° = -cos\ 47° \quad \rightarrow \quad cos\ 227° = -0{,}68$$

$$tg\ 227° = tg\ 47° \quad \rightarrow \quad tg\ 227° = 1{,}07$$

<u>EJERCICIO 37</u> : Calcula el valor del *sen* 120°, *cos* 120° y *tg* 120°, relacionándolos con un ángulo del primer cuadrante.

Solución:
Observamos que 120° $\in$ 2º cuadrante y que $180° - 60° = 120°$.

Luego: $sen\ 120° = sen\ 60° \quad \rightarrow \quad sen\ 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

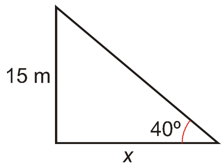
$cos\ 120° = -cos\ 60° \quad \rightarrow \quad cos\ 120° = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 120° = -tg\ 60° \quad \rightarrow \quad tg\ 120° = -\sqrt{3}$

PROBLEMAS

<u>EJERCICIO 38</u> : El ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra de un árbol con la parte superior del árbol es de 40°. Calcula la longitud de la sombra sabiendo que el árbol mide 15 m de altura.

Solución:
Sea x la longitud de la sombra del árbol.

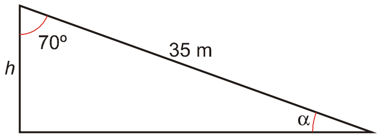


Como datos tenemos un ángulo y el cateto opuesto a ese ángulo; nos piden el cateto contiguo, luego la tangente es la razón trigonométrica a usar: $tg\ 40° = \dfrac{15}{x} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{15}{tg\ 40°} \approx \dfrac{15}{0{,}84} \approx 17{,}86$ m

La sombra del árbol mide 17,86 m.

<u>EJERCICIO 39</u> : Carlos sube por una rampa de 35 m hasta el tejado de su casa. Estando ahí, mide la visual entre su casa y la rampa, resultando ser de 70°. Calcula la altura de la casa de Carlos y el ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

Solución:



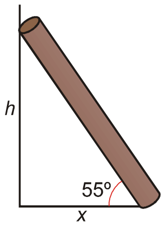
Llamamos h a la altura de la casa y α al ángulo que hay entre la rampa y el suelo.
Calculamos α: $90° + 70° + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = 20°$

Calculamos h: $cos\ 70° = \dfrac{h}{35} \quad \rightarrow \quad h = 35 \cdot cos\ 70° \approx 35 \cdot 0{,}34 \Rightarrow$

$h = 11{,}9$ m es la altura de la casa de Carlos.

<u>EJERCICIO 40</u> : Un tronco de 6,2 m está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de 55°.
a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?
b) Calcula la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

Solución:
$h \rightarrow$ altura que alcanza el tronco apoyado en la pared.
$x \rightarrow$ distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.



La hipotenusa del triángulo que se forma mide 6,2 m, y un ángulo agudo, 55°.
Así:

a) $sen\ 55° = \frac{h}{6{,}2} \quad \rightarrow \quad h = 6{,}2 \cdot sen\ 55° \approx 6{,}2 \cdot 0{,}82 = 5{,}08$ m

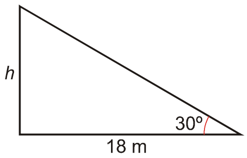
El tronco se encuentra apoyado en la pared a 5,08 m del suelo.

b) $cos\ 55° = \frac{x}{6{,}2} \quad \rightarrow \quad x = 6{,}2 \cdot cos\ 55° \approx 6{,}2 \cdot 0{,}57 = 3{,}53$ m

La distancia entre el extremo inferior del tronco y la pared es de 3,53 m.

<u>EJERCICIO 41</u> : Halla la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 m se ve la parte superior de la antena bajo un ángulo de 30°.

Solución:
Llamamos h a la altura de la antena.

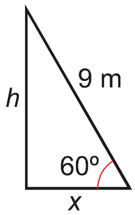


Como datos tenemos un ángulo y el cateto contiguo; nos piden el cateto opuesto al ángulo, luego la tangente será la razón trigonométrica a usar: $tg\ 30° = \frac{h}{18} \quad \rightarrow \quad h = 18 \cdot tg\ 30° = 18\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ m

La altura de la antena es de 10,39 m.

<u>EJERCICIO 42</u> : Calcula la altura de una casa sabiendo que al tender un cable de 9 m desde el tejado, este forma con el suelo un ángulo de 60°. ¿A qué distancia de la casa cae el cable?

Solución:



Llamamos h a la altura de la casa; como conocemos la longitud del cable, que es la hipotenusa, y tenemos que hallar el cateto opuesto al ángulo que nos dan, debemos usar el seno como razón trigonométrica:

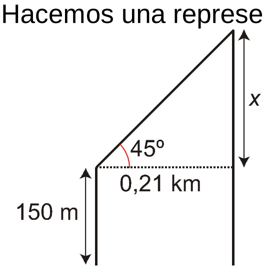
$sen\ 60° = \frac{h}{9} \quad \rightarrow \quad h = 9 \cdot sen\ 60° = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 7{,}79$ m $\Rightarrow$ La altura de la casa es de 7,79 m.

Sea x = distancia entre el pie de la casa y el cable sujeto al suelo por un extremo. En este caso, el coseno es la razón trigonométrica que debemos usar: $cos\ 60° = \frac{x}{9} \quad \rightarrow \quad x = 9 \cdot cos\ 60° = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$ m

El cable está sujeto al suelo a 4,5 m de distancia de la casa.

<u>EJERCICIO 43</u> : Desde el tejado de un edificio de 150 m de altura, se divisa el tejado de otro edificio cercano bajo un ángulo de 45°. La distancia entre ambos en línea recta es de 0,21 km. Calcula la altura del otro edificio.

Solución:
Hacemos una representación del problema:



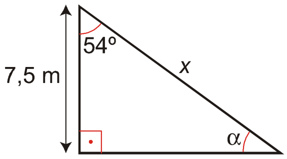
0,21 km = 210 m

$tg\ 45° = \frac{x}{210} \quad \rightarrow \quad x = 210 \cdot tg\ 45° \quad \rightarrow \quad x = 210$ m

Luego, la altura del otro edificio será $x + 150 = 210 + 150$, es decir, 360 m.

<u>EJERCICIO 44</u> : Un globo, sujeto al suelo por una cuerda, se encuentra a una altura de 7,5 m; entre la altura y la cuerda se forma un ángulo de 54°. Calcula la longitud de la cuerda y el ángulo que esta forma con el suelo.

Solución:



Llamamos: $x \rightarrow$ longitud de la cuerda $\quad\quad \alpha \rightarrow$ ángulo entre la cuerda y el suelo

La razón trigonométrica a usar con los datos del problema es el coseno:

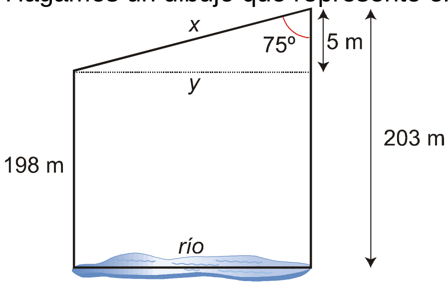
$$cos\ 54° = \frac{7,5}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{7,5}{cos\ 54°} \approx \frac{7,5}{0,59} \approx 12,71 \Rightarrow$$ La cuerda tiene una longitud de 12,71 m.

Calculamos $\alpha \rightarrow 54° + 90° + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 36°$

<u>EJERCICIO 45</u> : Dos torres de 198 m y 203 m de altura están unidas en sus puntos más altos por un puente bajo el cual hay un río. Calcula la longitud del puente y la anchura del río sabiendo que el ángulo que hay entre el puente y la torre más alta es de 75°.

Solución:

Hagamos un dibujo que represente el problema:



Llamamos $x \rightarrow$ longitud del puente $\quad\quad y \rightarrow$ anchura del río

Observamos que tenemos un triángulo rectángulo del cual conocemos el cateto contiguo al ángulo de 75°: $203 - 198 = 5$ m.

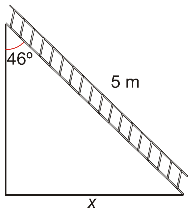
$$cos\ 75° = \frac{5}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{cos\ 75°} \approx \frac{5}{0,26} \approx 19,23 \text{ m}$$

$$sen\ 75° = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = x \cdot sen\ 75° \approx 19,23 \cdot 0,97 \approx 18,65 \text{ m}$$

La longitud del puente es de 19,23 m, y la anchura del río, 18,65 m.

<u>EJERCICIO 46</u> : Una escalera de 5 m está apoyada en una pared formando un ángulo de 46°. Calcula la distancia entre la base de la escalera y la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

Solución:



Llamamos: $x \rightarrow$ distancia entre la base de la escalera y la pared

$\alpha \rightarrow$ ángulo entre la escalera y el suelo

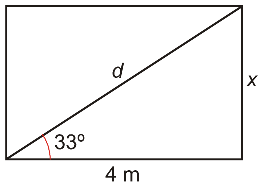
Conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo, y nos piden calcular el cateto opuesto a ese ángulo; usamos el seno como razón trigonométrica: $sen\ 46° = \frac{x}{5} \quad \rightarrow \quad x = 5 \cdot sen\ 46° \approx 5 \cdot 0,72 = 3,6$

La distancia entre la base de la escalera y la pared es de 3,6 m.

Calculamos $\alpha \rightarrow 46° + 90° + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 44°$ es la inclinación que hay entre la escalera y el suelo.

<u>EJERCICIO 47</u> : El lado de un rectángulo mide 4 m y la diagonal forma con dicho lado un ángulo de 33°. Calcula la longitud de la diagonal y el área del rectángulo.

Solución:



Llamamos: $d \rightarrow$ longitud de la diagonal $x \rightarrow$ longitud del otro lado

Nos dan un ángulo y el lado contiguo a este ángulo. Para calcular d y x, usamos el coseno y la tangente,

$$cos\ 33° = \frac{4}{d} \quad \rightarrow \quad d = \frac{4}{cos\ 33°} \approx \frac{4}{0{,}84} \approx 4{,}76 \text{ m}$$

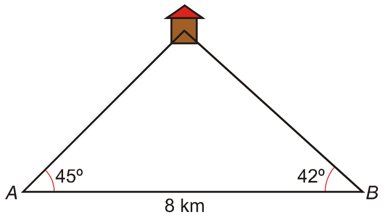
respectivamente:

$$tg\ 33° = \frac{x}{4} \quad \rightarrow \quad x = 4 \cdot tg\ 33° \approx 4 \cdot 0{,}65 = 2{,}6 \text{ m}$$

La longitud de la diagonal es de 4,76 m.

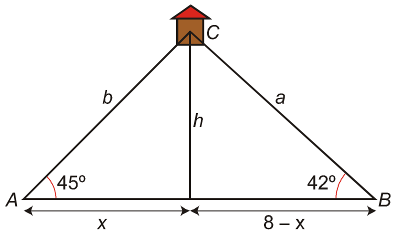
Calculamos el área: $A = 4 \cdot 2{,}6 = 10{,}4 \rightarrow$ El área del rectángulo es 10,4 m^2.

<u>EJERCICIO 48</u> : Dos ambulancias, distanciadas 8 km en línea recta, reciben una llamada de urgencia de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada ambulancia de la casa:



Solución:

Trazando la altura desde la casa al lado AB, conseguimos dos triángulos rectángulos: CHA y CHB.



Del dibujo deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h = x \cdot tg\ 45° \\ tg\ 42° = \dfrac{h}{8-x} \quad \rightarrow \quad h = (8-x) \cdot tg\ 42° \end{array}\right\}$$

$$x\ tg\ 45° = (8-x) tg\ 42° \quad \rightarrow \quad x = (8-x)0{,}9 \quad \rightarrow \quad x = 7{,}2 - 0{,}9x \quad \rightarrow \quad 1{,}9x = 7{,}2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = 3{,}79 \text{ km}, \quad \text{luego} \quad h = 3{,}79 \text{ km}$$

De este modo hemos calculado el valor de los catetos en ambos triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la hipotenusa en cada caso:

$$b = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{2 \cdot (3{,}79)^2} = 3{,}79\sqrt{2} \approx 5{,}36 \text{ km}$$

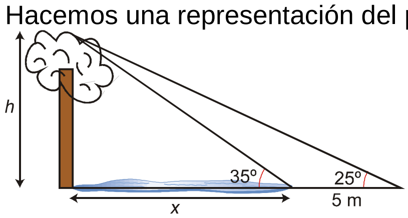
$$a = \sqrt{h^2 + (8-x)^2} = \sqrt{3{,}79^2 + 4{,}21^2} \approx 5{,}66 \text{ km}$$

La ambulancia A está a 5,36 km de la casa, y la ambulancia B, a 5,66 km.

<u>EJERCICIO 49</u> : Antonio está descansando en la orilla de un río mientras observa un árbol que está en la orilla opuesta. Mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35°; retrocede 5 m y mide el nuevo ángulo, obteniendo en este caso un ángulo de 25°. Calcula la altura del árbol y la anchura de río.

Solución:

Hacemos una representación del problema y llamamos: $h \rightarrow$ altura del árbol $\quad x \rightarrow$ anchura del río



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h = x \cdot tg\ 35° \\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x+5} \quad \rightarrow \quad h = (x+5)tg\ 25° \end{array}\right\}$$

$$x\ tg\ 35° = (x+5)\cdot tg\ 25° \quad \rightarrow \quad 0{,}7x = (x+5)\cdot 0{,}47 \quad \rightarrow \quad 0{,}7x = 0{,}47x + 2{,}35 \quad \rightarrow$$

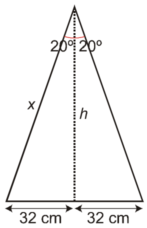
$$\rightarrow \quad 0{,}23x = 2{,}35 \quad \rightarrow \quad x \approx 10{,}22 \text{ m}$$

$h = 10{,}22 \cdot 0{,}7 = 7{,}15$ m

La altura del árbol es de 7,15 m, y la anchura del río, de 10,22 m.

<u>EJERCICIO 50</u> : La base de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de 40°. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Solución:



Trazamos la altura sobre la base para conseguir dos triángulos rectángulos.

Para calcular el perímetro y el área, necesitamos conocer el valor de la altura, h, y del otro lado, x.

En cada triángulo conocemos el ángulo de 20° y el cateto opuesto a este ángulo que mide $\dfrac{64}{2} = 32$ cm.

$$sen\ 20° = \frac{32}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{32}{sen\ 20°} \approx \frac{32}{0{,}34} = 94{,}12 \text{ cm}$$

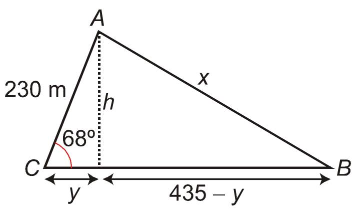
$$cos\ 20° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad cos\ 20° = \frac{h}{94{,}12} \quad \rightarrow \quad h = 94{,}12 \cdot cos\ 20°$$

$h \approx 94{,}12 \cdot 0{,}94 \approx 88{,}47$ cm

Luego: Perímetro $= 64 + 2 \cdot 94{,}12 = 252{,}24$ cm $\qquad$ Área $= \dfrac{64 \cdot 88{,}47}{2} = 2831{,}04 \text{ cm}^2$

<u>EJERCICIO 51</u> : El ángulo que se forma en la intersección de dos caminos es de 68°. La granja *A* está a 230 m de ese punto, y la granja *B*, a 435 m. ¿A qué distancia en línea recta está la granja *A* de la granja *B*?

Solución:



Llamamos x a la distancia en línea recta entre la granja A y la B.

Por no ser rectángulo el triángulo ABC, trazamos la altura h que lo divide en dos triángulos rectángulos: AHC y AHB.

En el triángulo AHC conocemos $\hat{C} = 68°$ y $\overline{AC} = 230$, podemos calcular h e y:

$cos\ 68° = \dfrac{y}{230} \quad \rightarrow \quad y = 230 \cdot cos\ 68° = 230 \cdot 0{,}37 = 85{,}1$ m

$sen\ 68° = \dfrac{h}{230} \quad \rightarrow \quad h = 230 \cdot sen\ 68° = 230 \cdot 0{,}93 = 213{,}9$ m

En el triángulo AHB, ahora conocemos $h = 213{,}9$ m y $435 - y = 435 - 85{,}1 = 349{,}9$ m.
Podemos calcular x usando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = h^2 + (435 - y)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = (213{,}9)^2 + (349{,}9)^2 \quad \rightarrow$

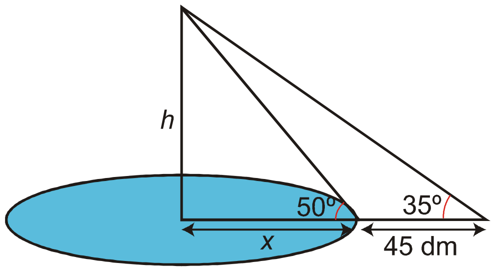
$x = \sqrt{45753{,}21 + 122430{,}01} = \sqrt{168183{,}22} \approx 410{,}1$ m

La distancia entre ambas granjas es de 410,1 m.

EJERCICIO 52 : Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago y resulta ser de 50°; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir la visual, obteniendo un ángulo de 35°. Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

Solución:

Hacemos una representación. Llamamos: $h \rightarrow$ altura de la estatua $\qquad x \rightarrow$ radio del lago



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h = x \cdot tg\ 50° \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{x+45} \quad \rightarrow \quad h = (x+45) \cdot tg\ 35° \end{array}\right\} \rightarrow \quad x \cdot tg\ 50° = (x+45) \cdot tg\ 35° \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad x \cdot 1{,}19 = (x+45) \cdot 0{,}7 \quad \rightarrow \quad 1{,}19x = 0{,}7x + 31{,}5 \quad \rightarrow \quad 0{,}49x = 31{,}5 \quad \rightarrow \quad x = 64{,}29$ dm

Luego $h = 64{,}29 \cdot 1{,}19 = 76{,}51$ dm $= 7{,}65$ m

Calculamos la superficie del lago circular: $A_{CIRCULO} = \pi \cdot x^2 \approx 3{,}14 \cdot (64{,}29)^2 \approx 12978{,}26\ dm^2 \approx 129{,}78\ m^2$

La superficie del lago es de 129,78 m^2.

ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

EJERCICIO 53 :

Si $tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $tg(180° - \alpha)$ b) $tg(180° + \alpha)$ c) $tg(360° - \alpha)$ d) $tg(360° + \alpha)$

Solución:

a) $tg(180° - \alpha) = -tg\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$ b) $tg(180° + \alpha) = tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$

c) $tg(360° - \alpha) = -tg\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$ d) $tg(360° + \alpha) = tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$

EJERCICIO 54 : Si $sen\,\alpha = 0{,}35$ y $0° < \alpha < 90°$ halla (sin calcular α):

a) $sen(180° - \alpha)$ b) $cos(180° + \alpha)$

Solución:

a) $sen(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}35$

b) $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\,\alpha$

Necesitamos saber cuánto vale $cos\,\alpha$: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$

$0{,}1225 + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad cos^2\alpha = 0{,}8775 \Rightarrow cos\alpha = 0{,}94$ (es positivo, pues $0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Por tanto: $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\alpha = -0{,}94$

SIMPLIFICACIONES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 55 : Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{sen^2x.(1+\cos x)}{1-\cos x}$ **b)** $\dfrac{\cos x}{tagx.(1-senx)}$

Soluciones:

a) $$\frac{sen^2x.(1+\cos x)}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos^2 x).(1+\cos x)}{1-\cos x} = \frac{(1-cosx).(1+cosx).(1+\cos x)}{1-\cos x} = (1+\cos x)^2$$

b) $$\frac{\cos x}{tagx.(1-senx)} = \frac{\cos x}{\frac{senx}{\cos x}.(1-senx)} = \frac{\cos^2 x}{senx.(1-senx)} = \frac{1-sen^2x}{senx.(1-senx)} = \frac{(1+senx)(1-senx)}{senx.(1-senx)} = \frac{1+senx}{senx}$$

EJERCICIO 56 : Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{\sec^2 x}{\cos ec^2x-\sec^2x} + \frac{ctg^2x}{ctg^2x-1} = \frac{1}{\cos^2 x - sen^2x}$$

Soluciones:

$$\frac{\sec^2 x}{\cos ec^2x-\sec^2x} + \frac{ctg^2x}{ctg^2x-1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{\frac{\cos^2 x}{sen^2x}}{\frac{\cos^2 x}{sen^2x}-1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - sen^2x}{sen^2x.\cos^2 x}} + \frac{\frac{\cos^2 x}{sen^2x}}{\frac{\cos^2 x - sen^2x}{sen^2x}} =$$

$$= \frac{sen^2x}{\cos^2 x - sen^2x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - sen^2x} = \frac{sen^2x+\cos^2 x}{\cos^2 x - sen^2x} = \frac{1}{\cos^2 x - sen^2x}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 57 : Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen x = 0 **b) sen (x + Π/4) = $\sqrt{3}/2$** **c) 2.tag x – 3. cotag x – 1 = 0**

d) 3sen^{2}x – 5 sen x + 2 = 0 **e) cos^{2}x – 3sen^{2}x = 0** **f) 2cosx = 3tagx**

Solución:

a) sen x = 0 $\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{array} \forall k \in Z \Rightarrow$ *x = 0º + 180ºk* $\forall k \in Z$

b) sen (x + Π/4) = $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 45^\circ = 60^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ k \\ x + 45^\circ = 120^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ k \end{array} \forall k \in Z$

c) $2tagx - 3\ cotag\ x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{tagx} - \dfrac{3}{\text{tagx}} - 1 = 0 \Rightarrow 2tag^2x - tag\ x - 3 = 0$

$$tag\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{matrix} 1{,}5 \\ -1 \end{matrix}$$

$tag\ x = 1{,}5 \Rightarrow x = 56^\circ\ 18^\circ\ 35'' + 180^\circ k$

$tag\ x = -1 \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ\ k$

d) $3sen^2x - 5senx + 2 = 0 \Rightarrow sen\ x = \dfrac{5 \pm 1}{6}$

$sen\ x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$

$$sen\ x = 2/3 \Rightarrow x = \begin{matrix} 41^\circ 48'37'' + 360^\circ k \\ 138^\circ 11'23'' + 360^\circ k \end{matrix}$$

e) $cos^2\ x - 3\ sen^2x = 0 \Rightarrow 1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \Rightarrow 1 - 4\ sen^2x = 0 \Rightarrow sen^2x = ¼ \Rightarrow sen\ x = \pm 1/2$

$$sen\ x = 1/2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{matrix}$$

$$sen\ x = -1/2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{matrix}$$

O resumido: $\begin{matrix} x = 30^\circ + 180^\circ k \\ x = 150^\circ + 180^\circ k \end{matrix}$

f) $2cosx = 3\ tag\ x \Rightarrow 2cosx = \dfrac{3\text{senx}}{\cos x} \Rightarrow 2cos^2x = 3\ sen\ x \Rightarrow 2(1 - sen^2x) = 3\ sen\ x \Rightarrow$

$$2 - 2sen^2x = 3sen\ x \Rightarrow 2sen^2x + 3sen\ x - 2 = 0 \Rightarrow sen\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

$$Sen\ x = 1/2 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{matrix} \right.$$

$Sen\ x = -2 \Rightarrow$ *No tiene solución.*