FUNCIONES ELEMENTALES II

Rectas

<u>EJERCICIO 1</u> . Halla la pendiente, la ordenada en el origen y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta $5x - 6y + 2 = 0$. Represéntala gráficamente.

Solución:

- Para calcular la pendiente, despejamos la *y:*

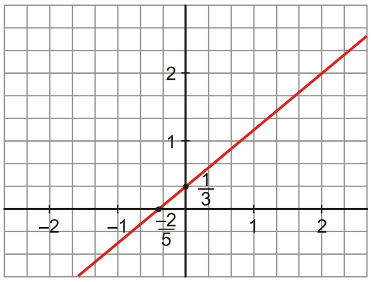
$$5x - 6y + 2 = 0 \quad \to \quad 6y = 5x + 2 \quad \to \quad y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{6} \quad \to \quad y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{La pendiente es } m = \frac{5}{6}.$$

- La ordenada en el origen es $n = \frac{1}{3}$.

- Puntos de corte con los ejes:

— Eje $Y \quad \to \quad \left(0, \frac{1}{3}\right)$

— Eje $X \quad \to \quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 5x - 6y + 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \to \quad 5x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \quad$ Luego $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$



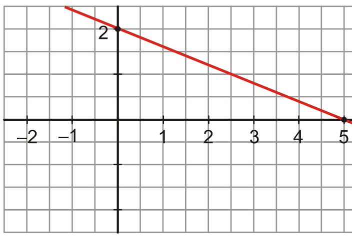
<u>EJERCICIO 2</u> : Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = -\frac{2}{5}x + 2$ **b)** $y = -\frac{3}{2}$ **c)** $y = \frac{5}{3}x$

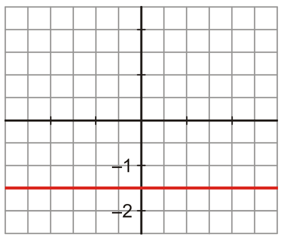
Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	0	5
y	2	0



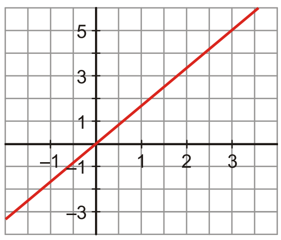
b) $y = -\frac{3}{2} \quad \to \quad$ Es una recta paralela al eje X que pasa por $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.



c) $y = \frac{5}{3}x \quad \to \quad$ Pasa por el $(0, 0)$.

Basta dar otro punto para representarla:

Si $x = 3 \quad \to \quad y = 5$



<u>EJERCICIO 3</u> : Dadas las siguientes rectas, identifica cuáles son paralelas y represéntalas:

a) $\mathbf{y = \dfrac{x+5}{2}}$ **b)** $\mathbf{y = -\dfrac{1}{2}}$ **c) 2x + 5y = 3** **d) 2y – x + 3 = 0**

Solución:

Calculamos la pendiente de cada una de ellas:

- $y = \dfrac{x+5}{2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \rightarrow m_a = \dfrac{1}{2}$
- $y = -\dfrac{1}{2} \rightarrow m_b = 0$
- $2x + 5y = 3 \rightarrow 5y = 3 - 2x \rightarrow y = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}x \rightarrow m_c = -\dfrac{2}{5}$
- $2y - x + 3 = 0 \rightarrow 2y = x - 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \rightarrow m_d = \dfrac{1}{2}$

Son paralelas la a) y la d) por tener la misma pendiente.

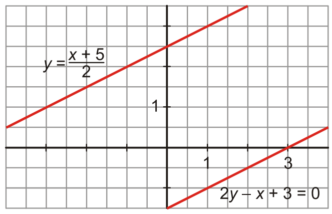
Representamos ambas haciendo una tabla de valores:

a) $y = \dfrac{x+5}{2}$

x	1	−1
y	3	2

d) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

x	3	1
y	0	−1



<u>EJERCICIO 4</u> : Representa la siguiente recta tomando la escala adecuada en cada eje: $\mathbf{y = \dfrac{x}{25} + 3}$

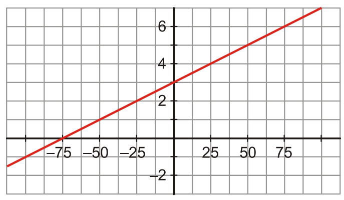
Solución:

Observando que la pendiente de la recta es $m = \dfrac{1}{25}$, lo más adecuado es tomar la escala en el eje X de 25 en 25.

Hagamos una tabla de valores para ver cuál es la escala más adecuada en el eje Y:

x	−75	−25	0	25	75
y	0	2	3	4	6

En el eje Y, tomamos la escala de 1 en 1.



<u>EJERCICIO 5</u> : Representa las rectas siguientes:

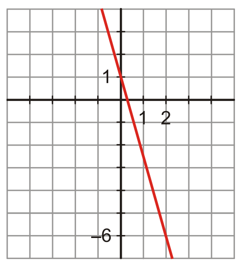
a) y = -3,5x + 1 **b)** $\mathbf{y = \dfrac{5}{4}}$ **c) y = -**$\mathbf{\dfrac{7}{2}x}$

¿Qué relación hay entre las rectas a) y c)?

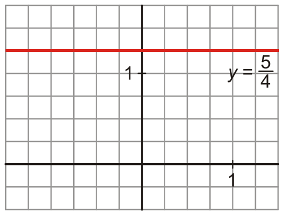
Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	0	2
y	1	−6

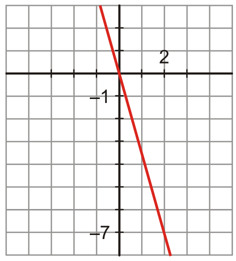


b) Es una recta paralela al eje x que pasa por $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.



c) $y = -\frac{7}{2}x$

x	0	2
y	0	–7



a) y c) son rectas paralelas, puesto que tienen la misma pendiente, $m = -3{,}5$.

<u>EJERCICIO 6</u> : Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(5, 1)$. ¿Cuál es la ordenada en el origen?

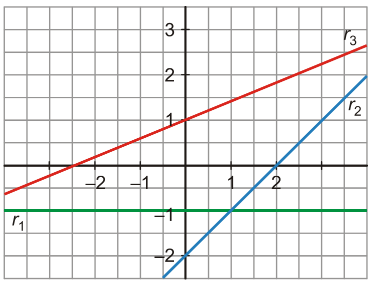
Solución:

Empezamos hallando su pendiente: $m = \frac{1-(-3)}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

Ecuación de la recta que pasa por $A(1, -3)$ y cuya pendiente es $m = 1 \;\rightarrow\; y + 3 = 1.(x - 1) \;\rightarrow$
$y = x - 4$

La ordenada en el origen es $n = -4$.

<u>EJERCICIO 7</u> : Observando las gráficas, indica cuál es la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



Solución:

- Para calcular la ordenada en el origen, basta con observar el punto de corte de cada una de las rectas con el eje Y: $r_1 \rightarrow n_1 = -1$ $\quad r_2 \rightarrow n_2 = -2$ $\quad r_3 \rightarrow n_3 = 1$
- Calculamos la pendiente de cada una de ellas:

  $r_1 \rightarrow m_1 = 0$

  r_2 pasa por $(0, -2)$ y $(2, 0)$ $\rightarrow m_2 = \frac{0-(-2)}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$

  r_3 pasa por $(0, 1)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ $\rightarrow m_3 = \frac{0-1}{-\frac{3}{2}-0} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

- La ecuación de cada recta será:

  $r_1 \rightarrow y = -1$ $\qquad r_2 \rightarrow y = x - 2$ $\qquad r_3 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$

<u>EJERCICIO 8</u> : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(-1, 3)$ y $B(5, 2)$ y es paralela a la recta $7x - 2y + 1 = 0$.

Solución:

- Empezamos calculando el punto medio del segmento de extremos $A(-1, 3)$ y $B(5, 2)$:

  $x = \frac{-1+5}{2} = 2 \qquad y = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad$ Punto medio: $P\left(2, \frac{5}{2}\right)$

- La recta tiene la misma pendiente que $7x - 2y + 1 = 0$ por ser paralelas:

  $2y = 7x + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{7}{2}$

- Ecuación de la recta pedida:

  $y = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}(x-2)$ (Ecuación en la forma punto-pendiente) $\Rightarrow y = \frac{7}{2}x - \frac{14}{2} + \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}$

<u>EJERCICIO 9</u> : Indica cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(0,-1) y B$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Escribe su ecuación y la de la paralela a ella que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

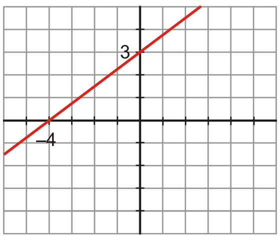
- Pendiente: $m = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

- Observamos que los puntos que nos dan son los puntos de corte con los ejes; concretamente, de $A(0, -1)$ se obtiene que $n = -1$.

  Así, la ecuación de la recta es: $y = \frac{2}{3}x - 1$

- La recta paralela a la anterior que pasa por $(0, 0)$ será: $y = \frac{2}{3}x$

<u>EJERCICIO 10</u> : La gráfica de una función lineal determina con los ejes coordenados el triángulo rectángulo que se vé en la figura. Halla la expresión analítica de dicha función.



Solución:

Como corta al eje Y en $(0, 3)$, entonces, $n = 3$.

Pendiente: $m = \frac{3}{4}$

La ecuación de la recta es: $y = \frac{3}{4}x + 3$

Parábolas

EJERCICIO 11 : Representa gráficamente las siguientes parábolas

a) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ **b)** $y=\frac{1}{4}x^2-2x+4$ **c)** $y=2x^2-x-3$ **d)** $y=-25x^2+75x$ **e)** $y=-x^2+2x-1$

Solución:

a)

- Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{1}=1 \;\rightarrow\; y=\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}=-1-\frac{2}{2}=-2 \Rightarrow$ El vértice es $V(1,-2)$.
- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \qquad y=-\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \left(0,-\frac{3}{2}\right)$

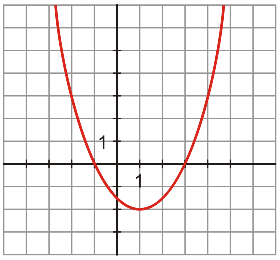
— Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0 \;\rightarrow\; x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$ $\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Puntos de corte con el eje X: $(3, 0)$ y $(-1, 0)$

- Puntos próximos al vértice:

X	-2	0	1	2	3
Y	5/2	-3/2	-2	-3/2	5/2

- Representación



b)

- Hallamos su vértice: $x=\frac{2}{2\cdot\frac{1}{4}}=4 \;\rightarrow\; y=\frac{1}{4}\cdot 16-8+4=0 \;\rightarrow\; V(4,0)$
- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{4}x^2-2x+4=0 \;\rightarrow\; x^2-8x+16=0$

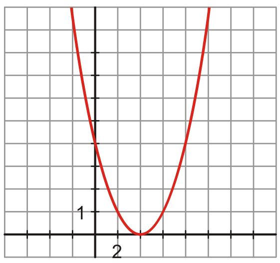
$x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8}{2}=4 \;\rightarrow\; (4,0)$, que coincide, lógicamente, con el vértice.

— Con eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=4 \;\rightarrow\; (0, 4)$

- Puntos próximos al vértice:

X	2	3	4	5	6
Y	1	1/4	0	1/4	1

- Representación



c)

- Calculamos su vértice: $x=\frac{1}{4} \;\rightarrow\; y=\frac{2}{16}-\frac{1}{4}-3=-\frac{25}{8} \;\rightarrow\; V\left(\frac{1}{4},-\frac{25}{8}\right)$
- Puntos de corte con los ejes:

— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0,-3)$

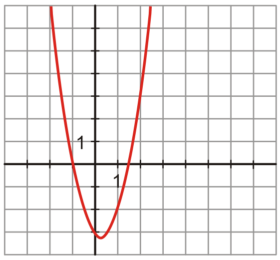
— Con eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{4}=\dfrac{1\pm 5}{4}$ $\begin{cases}\dfrac{3}{2}\\ -1\end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X son: $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ y $(-1,0)$

- Puntos próximos al vértice:

X	-1	0	1/4	1	2
Y	0	-3	--25/8	-2	3

- Representación:



d)

- Hallamos el vértice: $x=\dfrac{-75}{-50}=\dfrac{3}{2} \rightarrow y=\dfrac{-225}{4}+\dfrac{225}{2}=\dfrac{225}{4} \rightarrow V\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{225}{4}\right)$
- Puntos de corte con los ejes:

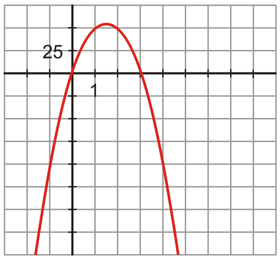
— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0)$

— Con eje $X \rightarrow y=0 \Rightarrow -25x^2+75x=0 \rightarrow -25x(x-3)=0$ $\begin{cases}x=0 \rightarrow (0,0)\\ x=3 \rightarrow (3,0)\end{cases}$

- Tabla de valores para obtener puntos próximos al vértice:

X	0	1	3/2	2	4
Y	0	50	225/4	50	-100

- Representación:



e)

- Hallamos su vértice: $x=\dfrac{-2}{-2}=1 \rightarrow y=-1+2-1=0 \rightarrow V(1,0)$
- Puntos de corte con los ejes:

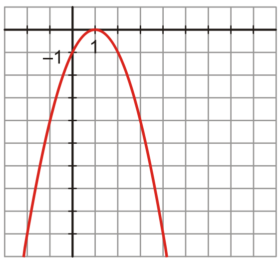
— Con eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=-1 \rightarrow (0,-1)$

— Con eje $X \rightarrow$ el único punto de corte será el vértice: (1, 0)

- Puntos próximos al vértice:

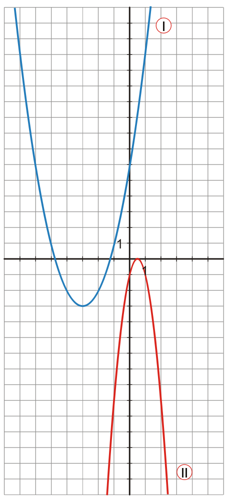
X	-1	0	1	2	3
Y	-4	-1	0	-1	-4

- Representación:

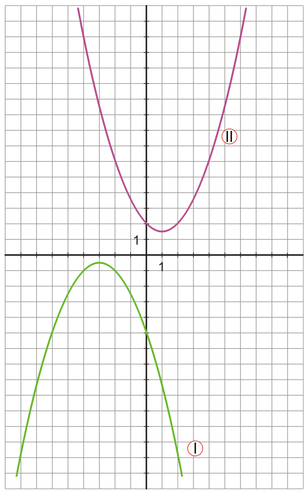


<u>EJERCICIO 12</u> : Halla las expresiones analíticas de estas parábolas:

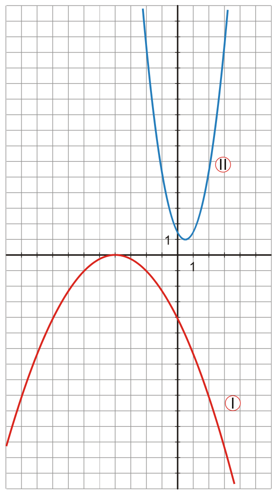
a)



b)



c)



Solución:

a) La expresión analítica de ambas parábolas será de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales que tenemos que calcular a partir de las gráficas.

- Ecuación de la parábola I:
  — Punto de corte con el eje Y: $(0, 6) \rightarrow c = 6$
  — Vértice: $V(-3, -3)$, que además es un punto de la parábola.

$$\text{Así: } \left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -3 = (-3)^2 a + (-3)b + 6 \end{array}\right\} \rightarrow -3 = 9a - 18a + 6 \rightarrow -9 = -9a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 6$$

  — La ecuación de la parábola I es: $y = x^2 + 6x + 6$
- Ecuación de la parábola II:
  — Corta al eje Y en $(0, -1) \rightarrow c = -1$

$$\text{— Vértice } V\left(\frac{1}{2}, 0\right): \left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 a + \dfrac{1}{2}b - 1 \rightarrow \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a = 1 \rightarrow a - 2a = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$$

  — La expresión analítica de la parábola II es: $y = -4x^2 + 4x - 1$

b) Sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, a, b, c, números reales.

- Ecuación de la parábola I:
  — Corta al eje Y en el punto $(0, -5)$, luego: $c = -5$
  — El vértice es $V\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, que así mismo es un punto de la parábola. Luego de aquí obtendremos dos ecuaciones cuyas incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -\dfrac{1}{2} = (-3)^2 a + (-3)b - 5 \rightarrow -\dfrac{1}{2} = 9a - 3b - 5 \end{array}\right\} -\frac{1}{2} = 9a - 18a - 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -9a - 5 \rightarrow -1 = -18a - 10 \rightarrow 9 = -18a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -3$$

  — La ecuación de la parábola I es: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$

- Ecuación de la parábola **II**:

  — Corta al eje Y en $(0,\ 2)$ $\rightarrow$ $c = 2$

$$\left.\begin{array}{l} V\left(1, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a \\ \dfrac{3}{2} = a + b + 2 \rightarrow a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - 2a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow -a = -\dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \qquad b = -1 \end{array}$$

  — La ecuación de la parábola **II** es: $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2$

c) Observamos que ambas son parábolas, luego sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales.

- Ecuación de la parábola **I**:

— $c = -4$ porque pasa por $(0, -4)$.

— Vértice $V(-4,\ 0)$, de donde sacamos dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -4 \rightarrow b = 8a \\ 0 = 16a - 4b - 4 \end{array}\right\} \rightarrow 16a - 32a = 4 \rightarrow -16a = 4 \rightarrow a = -\dfrac{1}{4} \rightarrow b = -2$$

— La ecuación de la parábola I es: $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - 2x - 4$

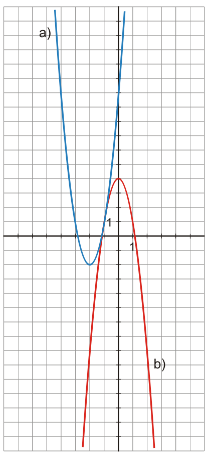
- Ecuación de la parábola **II**:

  — $c = \dfrac{3}{2}$ porque pasa por $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} — V\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 1 = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{3}{2} \rightarrow 4 = a + 2b + 6 \end{array}\right\} \rightarrow -2 = -a \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -2$$

  — La ecuación de la parábola II es: $y = 2x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$

<u>EJERCICIO 13</u> : Completa las expresiones de estas dos gráficas:



a) $\boldsymbol{y = \boxed{}\,x^2 + 12x + \boxed{}}$

b) $\boldsymbol{y = \boxed{}\,x^2 + \boxed{}}$

Solución:

- Parábola a)

  Punto de corte con el eje Y: $(0,\ 10)$ $\rightarrow$ $c = 10$

$$\left.\begin{array}{l} V(-2, -2) \\ b = 12 \end{array}\right\} \dfrac{-b}{2a} = -2 \rightarrow -12 = -4a \rightarrow a = 3$$

  Ecuación de a): $y = 3x^2 + 12x + 10$

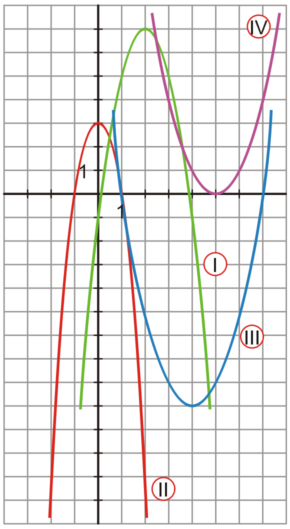
- Parábola b)

  $c = 4$ $\rightarrow$ la ecuación será de la forma $y = ax^2 + 4$. Un punto de la parábola es el $(1,\ 1)$, así:

  $1 = a + 4 \rightarrow a = -3$

  La ecuación buscada es: $y = -3x^2 + 4$

EJERCICIO 14 : **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:**



a) $y = (x-5)^2$

b) $y = -2x^2 + 8x - 1$

c) $y = -4x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 8x + 7$

Solución: a) $\rightarrow$ IV b) $\rightarrow$ I c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ III

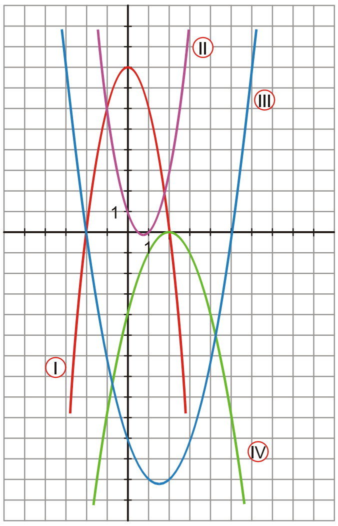
EJERCICIO 15 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:

a) $y = -2x^2 + 8$

b) $y = x^2 - 3x - 10$

c) $y = -(x-2)^2$

d) $y = 2x^2 - 3x + 1$



Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ III c) $\rightarrow$ IV d) $\rightarrow$ II

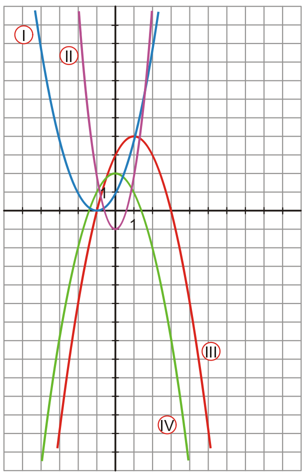
EJERCICIO 16 : Relaciona cada gráfica con una de las siguientes expresiones:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$

b) $y = (x+1)^2$

c) $y = 3x^2 - 1$

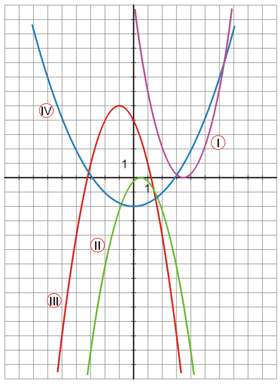
d) $y = 2 - x^2$



Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ I c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ IV

EJERCICIO 17 :

Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones: a) $y - = x^2 - 2x$ $+ 4$



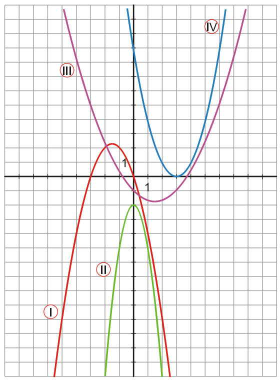
b) $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

d) $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ II c) $\rightarrow$ IV d) $\rightarrow$ I

EJERCICIO 18 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:



a) $y = -x^2 - 3x$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = -2 - 3x^2$

d) $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$

Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ III

Rectas y parábolas

EJERCICIO 19 : Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

Solución:

a)

Resolución analítica: Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - x \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Si $x = -4 \quad \rightarrow \quad y = 1 + 4 = 5$

Si $x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 0$

Las soluciones son: $x = -4,\ y = 5$; $x = 1,\ y = 0$

Resolución gráfica

- Representamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

— Cortes con los ejes:

Eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -3 \quad \rightarrow \quad (0, -3)$

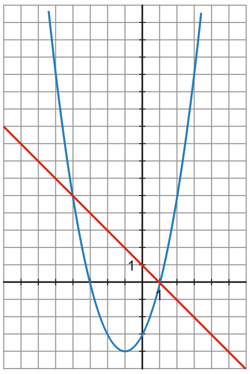
Eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}\begin{cases}1\\-3\end{cases}$ (1, 0) y (–3, 0)

— Valores en torno al vértice:

X	-4	-2	-1	0	2
Y	5	-3	-4	-3	5

- Representamos la recta $y = 1 - x$:

x	1	0
y	0	1



Observamos en la gráfica que la parábola y la recta se cortan en (–4, 5) y (1, 0).

b)
Resolución analítica : Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-4x+5 \\ y=\dfrac{x-3}{3}\end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2-4x+5=\dfrac{x-3}{3} \\ 3x^2-12x+15=x-3 \rightarrow 3x^2-13x+18=0\end{array}$$

$x=\dfrac{13\pm\sqrt{169-216}}{6}=\dfrac{13\pm\sqrt{-47}}{6} \Rightarrow$ El sistema no tiene solución.

Resolución gráfica

- Representamos la parábola $y = x^2 - 4x + 5$:

— Vértice: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{4}{2}=2 \rightarrow y=4-8+5=1 \Rightarrow V(2,1)$

— Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=5 \rightarrow (0, 5)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow$

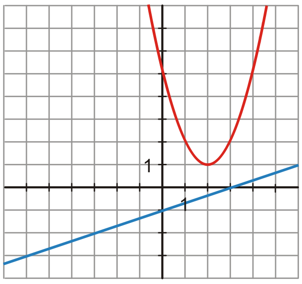
$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \rightarrow$ La parábola no corta al eje X.

— Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	5	2	2	2	5

- Representamos la recta $y=\dfrac{x-3}{3} \rightarrow y=\dfrac{1}{3}x-1.$

x	0	3
y	–1	0



Se observa en la gráfica que la parábola y la recta no se cortan.

c)
Resolución analítica : Se despeja y de cada ecuación y se igualan:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \quad -2x^2 + 8x - 11 = -3$$

$$-2x^2 + 8x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \text{La solución del sistema es: } x = 2, \quad y = -3$$

Resolución gráfica

- Se representa la parábola $y = -2x^2 + 8x - 11$:

— Vértice: $\left. \begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{-4} = 2 \\ y = -8 + 16 - 11 = -3 \end{array} \right\} V(2, -3)$

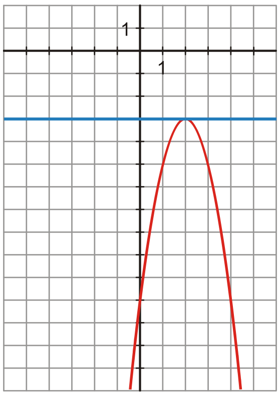
— Puntos de corte con los ejes:
Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = -11$ $\rightarrow$ $(0, -11)$
Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $-2x^2 + 8x - 11 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-88}}{-4} = \frac{-8 \pm \sqrt{-24}}{-4} \quad \rightarrow \quad \text{No corta al eje } X.$$

— Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	-11	-5	-3	-5	-11

- Por otro lado, se representa la recta $y = -3$, constante.



Hay un único punto de corte entre la recta y la parábola, que corresponde al punto $(2, -3)$.

Funciones a trozos

EJERCICIO 20 : Representa las funciones cuyas expresiones analíticas son:

a) $y=\begin{cases} -2 & \text{si } x<-1 \\ x+1 & \text{si } -1\le x<2 \\ 0 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ **b)** $y=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \\ 3 & \text{si } 0\le x<4 \\ x-6 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ **c)** $y=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x\le 3 \\ -1 & \text{si } -1\le x\le 2 \\ -2x+7 & \text{si } 2<x<6 \end{cases}$

d) $y=\begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{si } x<1 \\ 5x-1 & \text{si } 1\le x\le 2 \\ 2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **e)** $y=\begin{cases} 2 & \text{si } x\le -1 \\ 2x+4 & \text{si } -1<x\le 1 \\ 6 & \text{si } x>1 \end{cases}$

f) $y=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<-1 \\ x^2-1 & \text{si } -1\le x<2 \\ 3 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ **g)** $y=\begin{cases} -4 & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{1}{3}(4x-4) & \text{si } -2\le x<1 \\ x^2-4 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

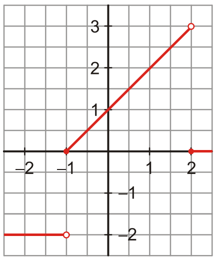
Solución:

a)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	-2	-1	-1	2	2	3	+∞
Y	-2	-2	-2	0	3	0	0	0

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

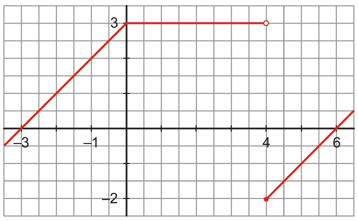


b)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	-1	0	0	4	4	5	+∞
Y	-∞	2	3	3	3	-2	-1	+∞

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

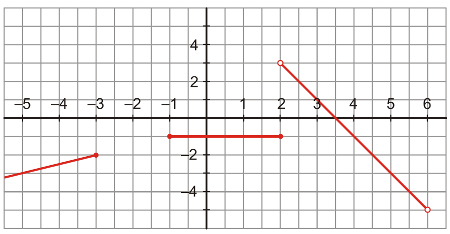


c)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	-5	-3	0	2	2	6
Y	-∞	-3	-2	-1	-1	3	-5

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

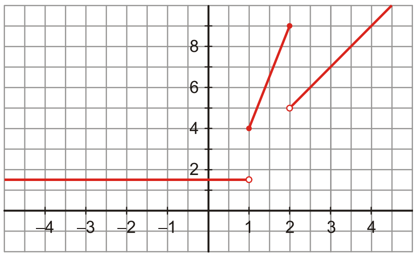


d)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	0	1	1	2	2	3	+∞
Y	1	1	1	4	9	5	7	+∞

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

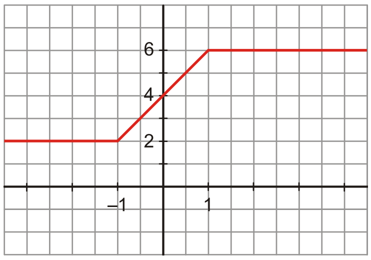


e)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	-2	-1	-1	1	1	2	+∞
Y	2	2	2	2	6	6	6	+∞

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

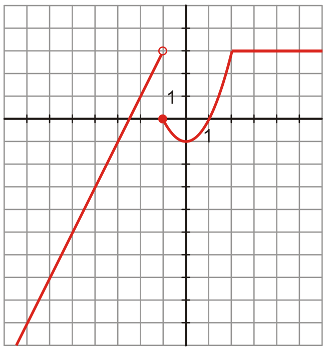


f)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	-∞	-2	-1	-1	-1/2	0	1	2	2	3	+∞
Y	-∞	1	3	0	-3/4		0	3	3	3	3

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

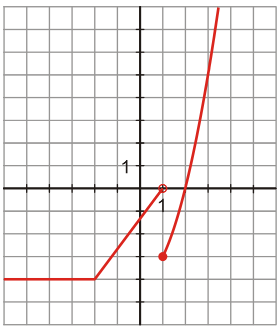


g)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

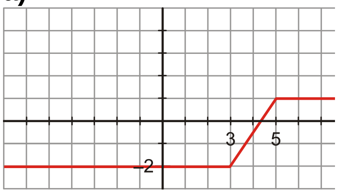
X	-∞	-3	-2	-2	1	1	2	+∞
Y	-4	-4	-4	-4	0	-3	0	+∞

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

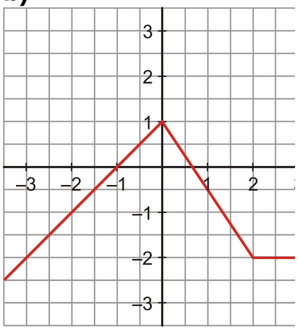


<u>EJERCICIO 21</u> : Halla las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:

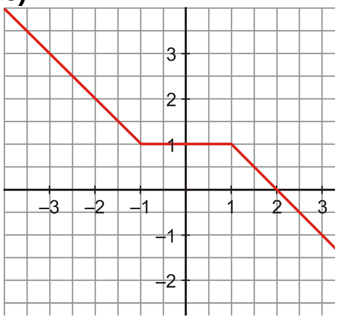
a)



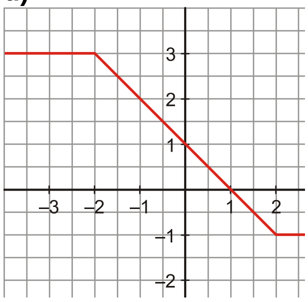
b)



c)



d)



Solución:

a)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas que forman la función:
  - — Para $x < 3$, la recta es $y = -2$.
  - — Para $3 \le x \le 5$, la recta pasa por $(3, -2)$ y $(5, 1)$:

$$m = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

  - — Para $x > 5$, la recta es $y = 1$.
- Así pues, la expresión analítica de esa función es: $y = \begin{cases} -2 & \text{si } \; x < 3 \\ \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} & \text{si } \; 3 \le x \le 5 \\ 1 & \text{si } \; x > 5 \end{cases}$

b)

- De cada tramo de la recta, buscamos la ecuación:
  - — Para $x < 0$, la recta pasa por $(-1, 0)$ y $(-3, -2)$: $m = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = x + 1$
  - — Si $0 \le x \le 2$, la recta pasa por $(0, 1)$ y $(2, -2)$: $m = \frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad y - 1 = -\frac{3}{2}x \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 1$
  - — Para $x > 2$, la recta es $y = -2$.
- La expresión analítica de la función es: $y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \; x < 0 \\ -\frac{3}{2}x + 1 & \text{si } \; 0 \le x \le 2 \\ -2 & \text{si } \; x > 2 \end{cases}$

c)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de recta que forman la función:
  - — Para $x < -1$, la recta pasa por los puntos $(-2, 2)$ y $(-3, 3)$: $m = -1 \quad \rightarrow \quad y = -x$
  - — Para $-1 \le x < 1$, la recta es $y = 1$.
  - — Para $x \ge 1$, la recta pasa por $(1, 1)$ y $(2, 0)$: $m = \frac{1}{-1} = -1 \quad \rightarrow \quad y = -1(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -x + 2$
- La expresión analítica pedida es: $y = \begin{cases} -x & \text{si } \; x < -1 \\ 1 & \text{si } \; -1 \le x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } \; x \ge 1 \end{cases}$

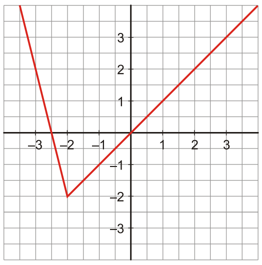
d)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas observando que hay dos que son constantes:
  - — Si $x < -2$, la recta es $y = 3$.
  - — Si $x \ge 2$, la recta es $y = -1$.
  - — Si $-2 \le x < 2$, la recta pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(0, 1)$:

$$m = \frac{1}{-1} = -1 \quad \rightarrow \quad y - 1 = -x \quad \rightarrow \quad y = -x + 1$$

- La expresión analítica de la función es: $y = \begin{cases} 3 & \text{si } \; x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } \; -2 \le x < 2 \\ -1 & \text{si } \; x \ge 2 \end{cases}$

EJERCICIO 22 : Observa la gráfica de la función *f*, completa la siguiente tabla de valores y halla su expresión analítica:



x	–3	$-\frac{5}{2}$	–1	0	1	3
y						

Solución:

- Completamos la tabla observando la gráfica:

x	–3	$-\frac{5}{2}$	–1	0	1	3
y	2	0	–1	0	1	3

- Para hallar la expresión analítica de la función *f*, buscamos la ecuación de cada tramo de recta:

— Si $x < -2$, la recta pasa por $(-3, 2)$ y $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$:

$$m = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \quad \rightarrow \quad y = -4\left(x + \frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y = -4x - 10$$

— Si $x \geq 2$, la recta pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$: $m = 1 \quad \rightarrow \quad y = x$

- La expresión analítica de la función *f* es: $y = \begin{cases} -4x - 10 & \text{si} \quad x < -2 \\ x & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$

Funciones de proporcionalidad inversa

EJERCICIO 23 : Representa gráficamente las siguientes funciones:

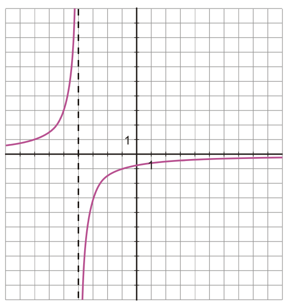
a) $\mathbf{y = \dfrac{-3}{x+4}}$ **b)** $\mathbf{y = \dfrac{-1}{x-3} - 2}$ **c)** $\mathbf{y = \dfrac{-x+7}{x-5}}$

Solución:

a) Dominio de definición: R – {-4}

Tabla de valores

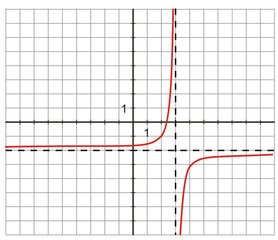
X	-∞	-7	-5	-4^-	-4^+	-3	-1	+∞
Y	0	1	3	+∞	-∞	-3	-1	0



Las asíntotas son la recta $y = 0$ y la recta $x = -4$.

b) Dominio de definición: R – {3}

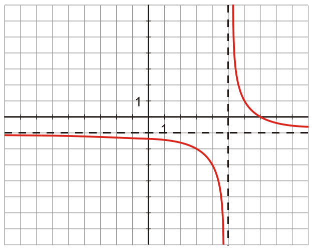
X	-∞	1	2	3^-	3^+	4	5	+∞
Y	-2	-1,5	-1	+∞	-∞	-3	-2,5	-2



Las asíntotas son las rectas $x = 3$ e $y = -2$.

c) $y = \dfrac{-x+7}{x-5} \Rightarrow y = -1 + \dfrac{2}{x-5}$ Dominio de definición: R – {5}

X	-∞	3	4	5^-	5^+	6	7	+∞
Y	-1	-2	-3	-∞	+∞	1	0	-1



. Las asíntotas son las rectas $x = 5$, $y = -1$.

Funciones radicales

<u>EJERCICIO 24</u> : Representa gráficamente las siguientes funciones:

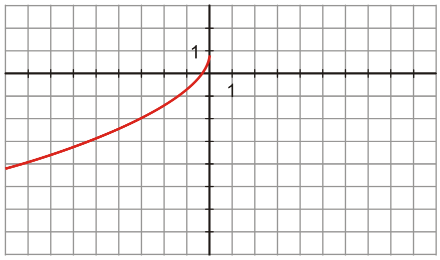
a) y = $\mathbf{1 - \sqrt{-3x}}$ **b) y =** $\mathbf{\sqrt{3x-1}}$ **c) y =** $\mathbf{\sqrt{2x+3} - 1}$

Solución:

a) Dominio de definición: (-∞,0]

Hacemos una tabla de valores:

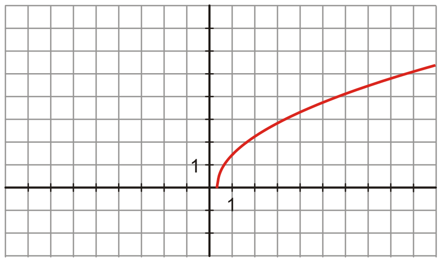
X	-∞	-3	-2	-1	0
Y	-∞	-2	-1,45	-0,73	-11



b) Dominio de definición: $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

Hacemos una tabla de valores:

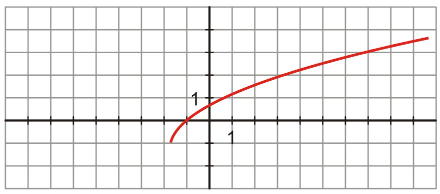
X	1/3	1	2	3	+∞
Y	0	1,41	2,24	2,83	+∞



c) Dominio de definición: $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

Tabla de valores:

X	-3/2	-1	1/2	3	+∞
Y	-1	0	1	2	+∞



Funciones radicales y de proporcionalidad inversa

<u>EJERCICIO 25</u> : Resuelve gráficamente el siguiente sistema: $\begin{cases} \mathbf{y = 2\sqrt{x-2}} \\ \mathbf{y = \dfrac{-2}{x-4}} \end{cases}$

Solución: Representamos gráficamente cada una de las funciones:

- $y = 2\sqrt{x-2} \quad \rightarrow$ Es una función radical.

— Dominio de definición: $[2, +\infty)$

— Tabla de valores:

X	2	3	6	11	$+\infty$
Y	-1	2	4	6	$+\infty$

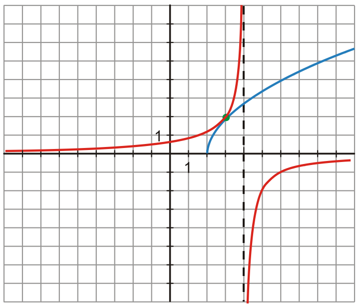
- $y = \dfrac{-2}{x-4}$ $\rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

— Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{4\}$

— Tabla de valores:

X	$-\infty$	2	3	4^-	4^+	5	6	$+\infty$
Y	0	1	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1	0

Las asíntotas son las rectas $x = 4$, $y = 0$.



En la gráfica se observa que el sistema tiene una solución: $x = 3$ $y = 2$

EJERCICIO 26

a) De la siguiente hipérbola, di cuál es su dominio, cuáles son sus asíntotas y represéntala: y = $-3+\dfrac{1}{x}$

b) Halla el valor de k para que el dominio de la función y = $\sqrt{x-k}+1$ **sea [4,+∞). Haz la representación gráfica.**

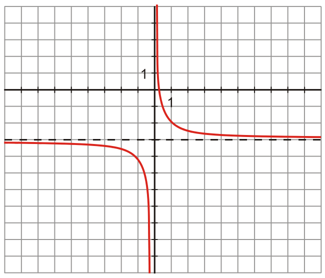
Solución:

a) Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Tabla de valores en puntos próximos a $x = 0$:

X	$-\infty$	-2	-1	0^-	0^+	1	2	$+\infty$
Y	-3	-3,5	-4	$-\infty$	$+\infty$	-2	-2,5	-3

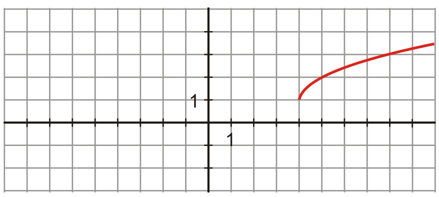
Luego las asíntotas son las rectas $x = 0$, $y = -3$.



b) Para que el dominio de definición sean los valores de $x \geq 4$, se necesita tomar $k = 4$ (así, $x - 4 \geq 0$).

Hacemos una tabla de valores

X	4	5	8	13	$+\infty$
Y	1	2	3	4	$+\infty$



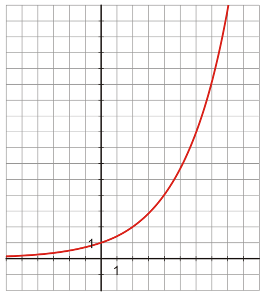
Exponenciales y logarítmicas

<u>EJERCICIO 27</u> : Representa las siguientes funciones haciendo en cada caso una tabla de valores:
a) $y = 2^{0,5x}$ **b)** $y = -\log_6 x$

Solución:

a) $y = 2^{0,5x}$ equivale a $y = 2^{\frac{x}{2}}$

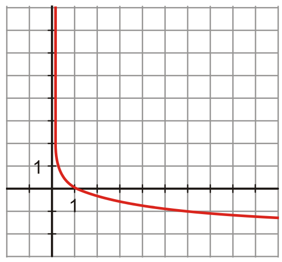
X	-∞	-4	-2	0	2	4	+∞
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	+∞



Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

b)

X	$6^{-\infty}$	6^{-2}	6^{-1}	6^{0}	6^{1}	6^{2}	$6^{+\infty}$
x	0^+	1/36	1/6	1	6	36	+∞
y	+∞	+2	1	0	-1	-2	-∞



<u>EJERCICIO 28</u>
a) **Pon en forma exponencial $4^{0,5x}$ y representa la función $y = 4^{0,5x}$.**

b) **Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = \log_5 x$ los puntos $(-1, 2)$, $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$, (3,-2) y (25,2)**

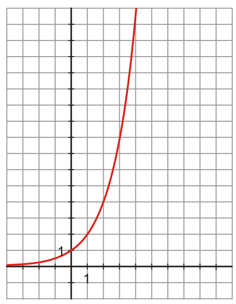
Solución:

a) $4^{0,5x} = \left(4^{0,5}\right)^x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$

Representar la función $y = 4^{0,5x}$ equivale a representar la función $y = 2^x$.

Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	+∞



b) El dominio de definición de $y = log_5\, x$ es $(0, +\infty)$, luego el punto $(-1, 2)$ no pertenece al dominio por ser $x = -1 < 0$. El resto de puntos tienen abscisa positiva, luego pueden pertenecer a la gráfica de la función:

$$\left.\begin{array}{l}(5,1) \;\to\; 1 = log_5 5 \;\to\; 5^1 = 5 \\ \left(\dfrac{1}{5},-1\right) \;\to\; -1 = log_5 \dfrac{1}{5} \;\to\; 5^{-1} = \dfrac{1}{5}\end{array}\right\} \text{Pertenecen a la gráfica.}$$

$$(3,-2) \;\to\; -2 = log_5 3 \;\to\; 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \neq 3 \quad \text{No pertenece a la gráfica.}$$

$$(25, 2) \;\to\; 2 = log_5 25 \;\to\; 5^2 = 25 \;\to\; \text{Pertenece a la gráfica.}$$

Los puntos que pertenecen a la gráfica son: $(5,1)$, $\left(\dfrac{1}{5},-1\right)$ y $(25, 2)$

EJERCICIO 29

a) Halla el valor de k y a para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$.

Indica razonadamente si la función obtenida será creciente o decreciente, sin representarla.

b) Representa la función $y = 2 + log_7 x$.

Solución:

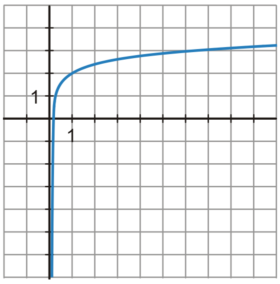
a) $y = ka^x$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}6 = ka^{-1} \\ \dfrac{3}{4} = ka^2\end{array}\right\} \frac{ka^2}{ka^{-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{6} \;\to\; a^3 = \frac{3}{24} \;\to\; a^3 = \frac{1}{8} \;\to\; a = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{1}{a} \;\to\; k = 6a \;\to\; k = 6 \cdot \frac{1}{2} \;\to\; k = 3$$

La función es $y = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, función decreciente por ser $a = \dfrac{1}{2} < 1$.

b)

X	$7^{-\infty}$	7^{-2}	7^{-1}	7^0	7^1	7^2	$7^{+\infty}$
x	0	1/49	1/7	1	7	49	$+\infty$
y	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$



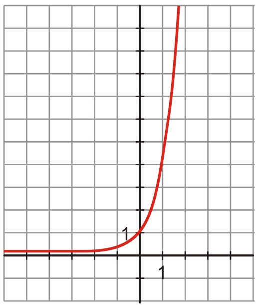
EJERCICIO 30 : Escribe el dominio de la función $y = 4^x$ y represéntala gráficamente. Escribe la expresión analítica y representa la función inversa de $y = 4^x$.

Solución:

- $y = 4^x$ es una función exponencial $\to$ su dominio son todos los números reales.

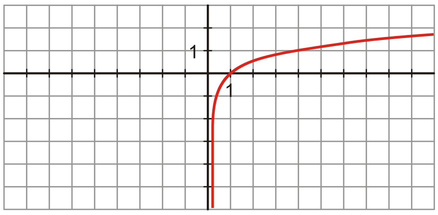
Hagamos una tabla de valores para representarla:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	0	1/16	¼	1	4	16	$+\infty$



- La expresión analítica de la función inversa de $y = 4^x$ es $y = log_4 x$, cuya tabla de valores será:

X	0	1/16	¼	1	4	16	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$



EJERCICIO 31

a) Construye la gráfica de $y = 0{,}7^x$ y, apartir de ella, representa la función $y = 0{,}7^x + 2$.

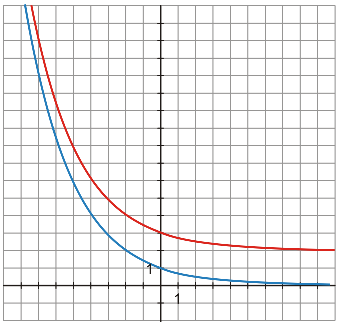
b) Indica cuál es el dominio de la función $y = log\ x$ y escribe tres puntos que pertenezcan a la gráfica.

Solución:

a) $y = 0{,}7^x$: función exponencial de base $a = 0{,}7 < 1$, luego decrece en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

- Hagamos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	2,0	1,43	1	0,7	0,49	0



La función $y = 0{,}7^x + 2$ se obtiene desplazando dos unidades hacia arriba la gráfica anterior, o lo que es igual, sumando 2 unidades a los valores obtenidos anteriormente para y.

b) $y = log_{10} x \ \rightarrow$ dominio de definición: $(0, +\infty)$

$(10, 1) \ \rightarrow \ 1 = log_{10} 10$

$(100, 2) \ \rightarrow \ 2 = log_{10} 100 \ \rightarrow \ 10^2 = 100$

$\left(\dfrac{1}{10}, -1\right) \ \rightarrow \ -1 = log_{10} \dfrac{1}{10} \ \rightarrow \ 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

EJERCICIO 32 : Calcula, usando la definición de logaritmo, y sin calculadora:

a) $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_4 \dfrac{1}{64}$ **d)** $\log_5 \dfrac{1}{25}$ **e)** $\log_5 \sqrt[4]{5}$ **f)** $\log_5 25$

g) $\log_7 \sqrt[3]{49}$ **h)** $\log_2 512$ **i)** $\log_5 0{,}008$ **j)** $\log_2 \sqrt[4]{4}$ **k)** $\log_2 0{,}5$ **l)** $\log_2 256$

m) $\log \sqrt{0{,}01}$ **n)** $\log_6 \dfrac{5}{30}$ **ñ)** $\log_3 243$

Solución:

a) $log_3 \sqrt[5]{81} = log_3 \sqrt[5]{3^4} = log_3 3^{\frac{4}{5}} = \dfrac{4}{5} \underbrace{log_3 3}_{1} = \dfrac{4}{5}$

b) $log\ 0{,}001 = log\ 10^{-3} = -3 \underbrace{log\ 10}_{1} = -3$

c) $log_4 \dfrac{1}{64} = \underbrace{log_4 1}_{0} - log_4 64 = -log_4 4^3 = -3 \underbrace{log_4 4}_{1} = -3$

d) a) $log_5 \dfrac{1}{25} = \underbrace{log_5 1}_{0} - log_5 25 = -log_5 5^5 = -2 \underbrace{log_5 5}_{1} = -2$

e) b) $log_5 \sqrt[4]{5} = log_5 5^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} \underbrace{log_5 5}_{1} = \dfrac{1}{4}$

f) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3\ log_5 5 = 3$

g) a) $log_7 \sqrt[3]{49} = log_7 \sqrt[3]{7^2} = log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \underbrace{log_7 7}_{1} = \frac{2}{3}$

h) b) $log_2 512 = log_2 2^9 = 9 \cdot \underbrace{log_2 2}_{1} = 9$

i) c) $log_5 0{,}008 = log_5 \frac{8}{1000} = log_5 \frac{1}{125} = log_5 5^{-3} = -3 \underbrace{log_5 5}_{1} = -3$

j) a) $log_2 \sqrt[4]{4} = log_2 \sqrt[4]{2^2} = log_2 2^{\frac{2}{4}} = log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \underbrace{log_2 2}_{1} = \frac{1}{2}$

k) b) $log_2 0{,}5 = log_2 \frac{1}{2} = log_2 2^{-1} = -1 log_2 2 = -1$

l) c) $log_2 256 = log_2 2^8 = 8\ log_2 2 = 8$

m) a) $log \sqrt{0{,}01} = log \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log\ 10^{-2} = -\frac{2}{2} \underbrace{log 10}_{1} = -1$

n) b) $log_6 \frac{5}{30} = log_6 \frac{1}{6} = log_6 6^{-1} = -1 \underbrace{log_6 6}_{1} = -1$

ñ) c) $log_3 243 = log_3 3^5 = 5 \cdot \underbrace{log_3 3}_{1} = 5$

<u>EJERCICIO 33</u> : Resuelve estas ecuaciones:

a) $5^{2x^2+1} = 125$ **b)** $\log_3(5x-3) = 3$ **c)** $2^{2x-6} = 0{,}25^{x-1}$ **d)** $\log_5(2x^2 - x) = 0$

e) $\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}}$ **f)** $\log_2(x-1) = 2$ **g)** $3^{3x-1} = 9^{x+6}$ **h)** $\log_2 (x^2-5x+8) = 2$

i) $4^{x^2-8x} = 1$ **j)** $\log (11x - 1) = -1$

Solución:

a) Expresamos como potencia de 5 el segundo miembro e igualamos los exponentes:

$5^{2x^2+1} = 125 \rightarrow 5^{2x^2+1} = 5^3 \rightarrow 2x^2+1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$log_3 (5x - 3) = 3 \rightarrow 5x - 3 = 3^3 \rightarrow 5x - 3 = 27 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

<u>Comprobación de la solución</u> $log_3 (5 \cdot 6 - 3) = log_3 27 = log_3 3^3 = 3 \cdot log_3 3 = 3 \rightarrow$ Solución válida

c) Expresamos el segundo miembro como potencia de 2. A continuación, igualamos exponentes:

$$2^{2x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

$$2^{2x-6} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(2^{-1}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = 2^{-2x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 6 = -2x + 2 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

d) $log_5 (2x^2 - x) = 0$, aplicando la definición de logaritmo, equivale a $2x^2 - x = 5^0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 - x = 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

<u>Comprobación de las soluciones</u>

Si $x = 1 \rightarrow log_5 (2 - 1) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = 1$ es solución.

Si $x = \frac{-1}{2} \rightarrow log_5 \left(2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = log_5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$ también es solución.

e) Expresamos el primer miembro como potencia de 7 e igualamos exponentes:

$$\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \sqrt[5]{7^2} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow 7^{\frac{2}{5}} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \frac{2}{5} = x^2 + \frac{6}{25} \rightarrow x^2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \pm \frac{2}{5}$$

f) Aplicando la definición de logaritmo, se obtiene:

$$log_2 (x-1) = -2 \rightarrow x - 1 = 2^{-2} \rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} + 1 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

<u>Comprobación de la solución:</u> $log_2\left(\frac{5}{4}-1\right)=log_2\frac{1}{4}=log_2 2^{-2}=-2log_2 2=-2 \rightarrow$ válida

La solución es: $x=\frac{5}{4}$

g) Expresamos como potencia de 3 el segundo miembro e igualamos exponentes:

$3^{3x-1}=9^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=\left(3^2\right)^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=3^{2x+10} \rightarrow 3x-1=2x+10 \rightarrow x=11$

h) $log_2(x^2-5x+8)=2 \rightarrow x^2-5x+8=2^2$ (hemos aplicado la definición de logaritmo) $\rightarrow$

$\rightarrow x^2-5x+8=4 \rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$ ↗ 4, ↘ 1

<u>Comprobación de las soluciones</u>

Si $x=4 \rightarrow log_2(16-20+8)=log_2 4=log_2 2^2=2\,log_2 2=2 \rightarrow x=4$ es solución.

Si $x=1 \rightarrow log_2(1-5+8)=log_2 4=log_2 2^2=2\,log_2 2=2 \rightarrow x=1$ es solución.

i) a) $4^{x^2-3x}=1$ equivale a $4^{x^2-3x}=4^0$

Igualando exponentes: $x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0$

Luego $x=0$ y $x=3$ son las soluciones.

j) $log(11x-1)=-1$ equivale a $11x-1=10^{-1}$ (hemos aplicado la definición de logaritmo)

$11x-1=\frac{1}{10} \rightarrow 11x=\frac{1}{10}+1 \rightarrow 11x=\frac{11}{10} \rightarrow x=\frac{1}{10}$

<u>Comprobación de la solución</u> $log\left(\frac{11}{10}-1\right)=log\frac{1}{10}=log\,10^{-1}=-1\,log\,10=-1$

La solución $x=\frac{1}{10}$ es válida.

Problemas

<u>EJERCICIO 34</u> : Colocamos en el banco 25 000 € al 5% de interés anual.

a) Escribe la función que expresa el capital acumulado en función del tiempo, *t*, que permanezca el dinero en el banco.

b) ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Solución:

a) C = capital acumulado

5% de interés anual significa que el capital que hay a principios de año se multiplica por 1,05 al final. La expresión que da el capital acumulado al cabo de t años es: $C=25000\cdot 1{,}05^t \quad t\geq 0$

b) Nos piden calcular t para que el capital se duplique:

$25000\cdot 1{,}05^t=50000 \rightarrow 1{,}05^t=2 \rightarrow t\approx 15$ años

Tardará en duplicarse, aproximadamente, 15 años.

<u>EJERCICIO 35</u> : Se cerca una finca rectangular de área *A* con 42 m de alambrada, sin que sobre ni falte nada.

a) Expresa el área de la finca en función de uno de sus lados

b) Representa gráficamente la expresión anterior.

c) ¿Cuál es el dominio de definición?

d) ¿Para qué valor de los lados obtenemos la finca de área máxima?

Solución:

Las dimensiones de la finca son x, $21-x$.

a) A = área de la finca

La expresión analítica buscada es $A(x)=x(21-x) \rightarrow A(x)=-x^2+21x$, que es una función cuadrática.

b) Será una parábola abierta hacia abajo:

- Vértice: $x=\frac{21}{2} \qquad y=-\frac{441}{4}+\frac{441}{2}=\frac{441}{4}=110{,}25 \Rightarrow V(10{,}5;\ 110{,}25)$

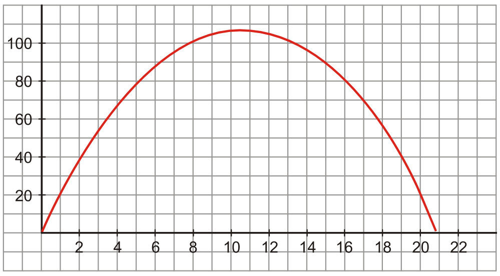
- Puntos de corte con los ejes:

— Eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $-x^2+21x=0$ $\rightarrow$ $x(-x+21)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=21 \end{cases} \Rightarrow (0,\ 0)$ y $(21,\ 0)$

— Eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $(0,\ 0)$

- Tabla de valores:

X	5	10	10,5	15	20
Y	80	110	110,25	90	20



c) Por ser x una longitud y $A(x)$ un área, la gráfica corresponde solo al primer cuadrante. Dominio de definición: $(0,\ 21)$

d) El área es máxima en el vértice, y mide 110,25 m^2. Se obtiene tomando como lados $x = 10{,}5$ m y $21–10{,}5 = 10{,}5$ m es decir, el área es máxima si la finca es cuadrada.

<u>EJERCICIO 36</u> : Expresa el lado de un cuadrado en función de su área. ¿Qué tipo de función obtienes? ¿Cuál es su dominio? Represéntala gráficamente.

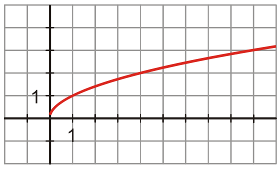
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow \text{área del cuadrado} \\ l \rightarrow \text{lado del cuadrado} \end{array}\right\} A = l^2 \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{A}$$

La función obtenida es una función radical.
Dominio de definición $= (0,\ +\infty)$

Para representarla gráficamente, hacemos una tabla de valores:

X	0	1	4	9	$+\infty$
Y	0	1	2	3	$+\infty$



<u>EJERCICIO 37</u> : Una central nuclear tiene 1 kg de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada 5 años.

a) ¿Qué cantidad de esa sustancia tendremos al cabo de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de sustancia radiactiva según los años transcurridos, suponiendo que el ritmo de desintegración se mantiene?

Solución:

a) Al cabo de 5 años habrá 0,5 kg de sustancia radiactiva, luego al cabo de 10 años habrá 0,25 kg $=$ 250 g de sustancia radiactiva.

b) Llamamos $C =$ cantidad de sustancia radiactiva (kg)
$t =$ tiempo (años)

La función que describe el problema es: $C(t) = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \quad \rightarrow \quad C(t) = 0{,}5^{\frac{t}{5}}$

<u>EJERCICIO 38</u> : María se quiere comprar una parcela rectangular que tenga como área 1 200 m^2.

a) Escribe la función que da el ancho de la finca en función del largo.

b) Haz la gráfica correspondiente.

Solución:

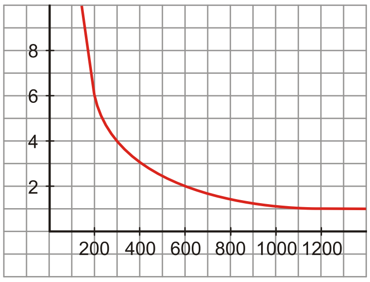
a) Llamamos $x \rightarrow$ largo de la finca
$y \rightarrow$ ancho de la finca

El área de la finca será $\rightarrow \quad x \cdot y = 1200 \quad \rightarrow y = \dfrac{1200}{x}$

b) Puesto que x e y son longitudes, ambas han de ser positivas, luego el dominio de definición será $(0, +\infty)$

Hacemos una tabla de valores para representarla:

X	0^+	200	400	600	$+\infty$
Y	$-\infty$	6	3	2	0

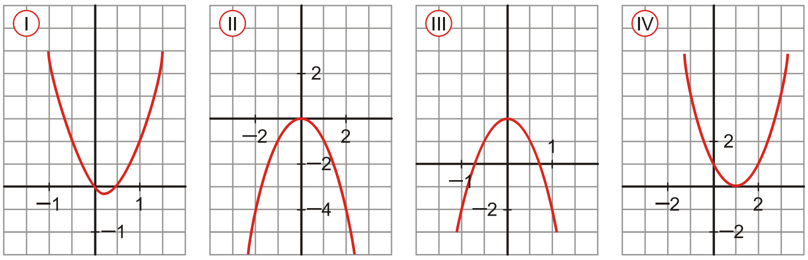


Recopilación

EJERCICIO 39 :

a) **Representa esta función:** $\mathbf{2x + 5y - 2 = 0}$

b) **Asocia a cada una de las gráficas, una de las siguientes expresiones**



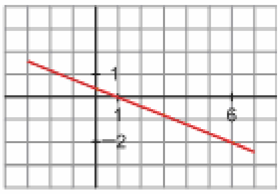
1.– $\mathbf{y = -x^2}$ **2.–** $\mathbf{y = (x-1)^2}$ **3.–** $\mathbf{y = -4x^2 + 2}$ **4.–** $\mathbf{y = 2x^2 + x}$

Solución:

a) $2x + 5y - 2 = 0$

Hacemos una tabla de valores:

x	1	6
y	0	−2

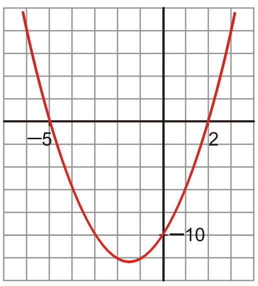


b) 1– II 2– IV 3– III 4– I

EJERCICIO 40 :

a) **Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos** $\mathbf{A(-1, 3)}$ **y** $\mathbf{B(5, -4)}$**, y haz su gráfica.**

b) **Halla la ecuación de la siguiente parábola:**

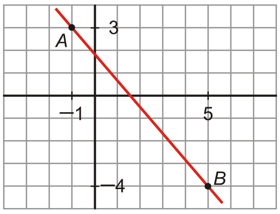


Solución:

a) Calculamos el valor de la pendiente: $m = \dfrac{3+4}{-1-5} = \dfrac{7}{-6} = \dfrac{-7}{6}$

La ecuación será de la forma: $y-3=\frac{-7}{6}(x+1) \;\rightarrow\; y=\frac{-7}{6}x+\frac{11}{6}$

La representación gráfica de la recta $y=\frac{-7}{6}x+\frac{11}{6}$ es:



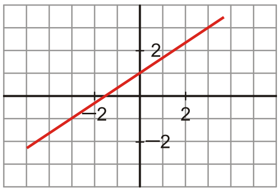
b) Por ser una parábola, su ecuación será de la forma: $y=ax^2+bx+c$
Por ser el punto de corte con el eje Y el $(0, -10) \;\rightarrow\; c=-10$
Para calcular a y b, observamos que la parábola pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(-5, 0)$:

$$0=4a+2b-10 \;\rightarrow\; 2a+b=5$$
$$0=25a-5b-10 \;\rightarrow\; 5a-b=2$$
$$7a=7 \;\rightarrow\; a=1$$

Luego $b=5-2=3 \;\rightarrow\; b=3$
Por tanto, la ecuación de la parábola es: $y=x^2+3x-10$

<u>EJERCICIO 41 :</u>

a) Halla la ecuación de la recta representada:



b) Representa esta parábola: $y=x^2-8x-9$

Solución:

a) Por ser una recta, su ecuación será de la forma: $y=mx+n$
Como pasa por $(0, 1) \;\rightarrow\; n=1$

Además, $(3, 3)$ es un punto de la gráfica $\rightarrow\; 3=3m+1 \;\rightarrow\; m=\frac{2}{3}$

La ecuación buscada es: $y=\frac{2}{3}x+1$

b) • Calculamos el vértice que tiene la parábola $y=x^2-8x+9$:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{8}{2}=4 \;\rightarrow\; y=16-32-9=-25 \;\rightarrow\; V(4,-25)$$

• Puntos de corte con los ejes:

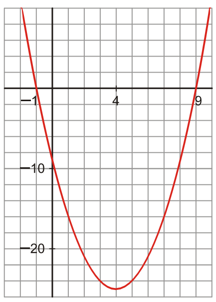
Eje Y $\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=-9 \;\rightarrow\; (0, -9)$

Eje X $\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; x^2-8x-9=0 \;\rightarrow\; x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm 10}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow 9 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

La parábola corta al eje X en $(9, 0)$ y $(-1, 0)$.

• Tabla de valores en torno al vértice:

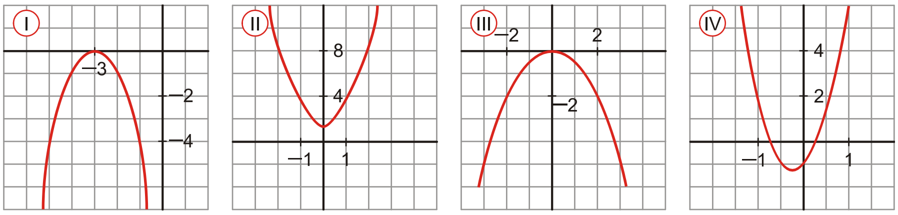
X	1	2	4	5	6
Y	-16	-21	-25	-24	-7



<u>EJERCICIO 42</u> :

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por (1,2) y cuya pendiente es m = 2/3. Represéntala gráficamente.

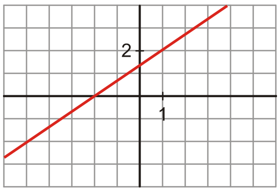
b) Asocia a cada gráfica una de las siguientes expresiones:



1.– $y = 2x^2 + 1$ **2.–** $y = \dfrac{-x^2}{2}$ **3.–** $y = 5x^2 + 2x - 1$ **4.–** $y = -(x+3)^2$

Solución:

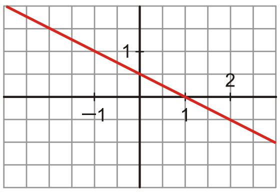
a) Ecuación punto-pendiente: $y - 2 = \dfrac{2}{3}(x-1) \;\rightarrow\; y = 2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$



b) 1 → II 2 → III 3 → IV 4 → I

<u>EJERCICIO 43</u> :

a) Halla la ecuación de la recta dada por la siguiente gráfica:



b) Representa la parábola siguiente: $y = x^2 - 8x + 12$

Solución:

a) La ecuación de la recta será de la forma: $y = mx + n$

Por ser el punto de corte con el eje Y $\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; n = \dfrac{1}{2}$

Además, la recta pasa por (1, 0), luego: $0 = m + \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; m = \dfrac{-1}{2}$

Por tanto, la ecuación es: $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $y = x^2 - 8x + 12$

- Vértice $\rightarrow\; x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{2} = 4 \;\rightarrow\; y = 16 - 32 + 12 = -4 \;\rightarrow\; V(4,-4)$
- Puntos de corte con los ejes:

  Eje Y $\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 12 \;\rightarrow\;$ (0, 12)

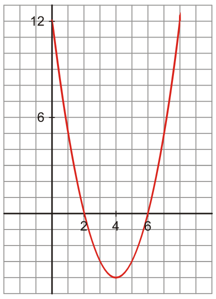
  Eje X $\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 8x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{2} =$

  $$= \dfrac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

  Los puntos de corte con el eje X son (6, 0) y (2, 0).

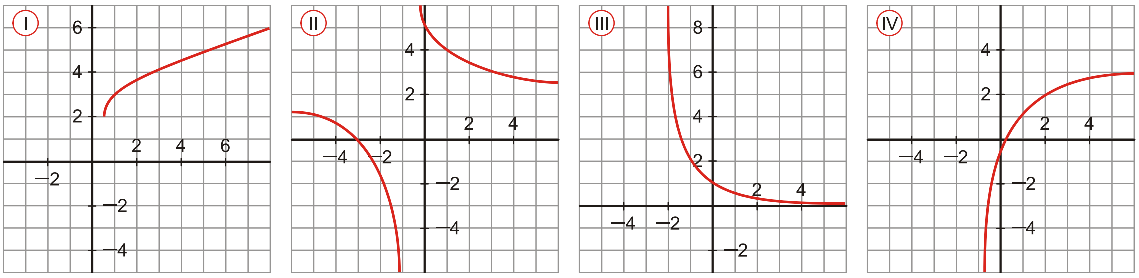
- Tabla de valores en torno al vértice:

X	1	3	4	5	7
Y	5	-3	-4	-3	5



<u>EJERCICIO 44</u> : Asocia cada gráfico con una de estas expresiones:

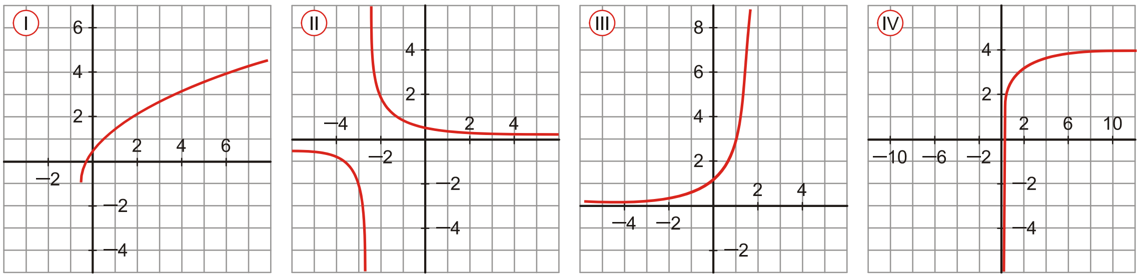
a) $y = \dfrac{4}{x+1} + 2$ **b)** $y = \log_2 (x+1)$ **c)** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ **d)** $y = \sqrt{2x-1} + 2$



Solución: a) II b) IV c) III d) I

<u>EJERCICIO 45</u> : Asigna a cada gráfica, la expresión que le corresponde:

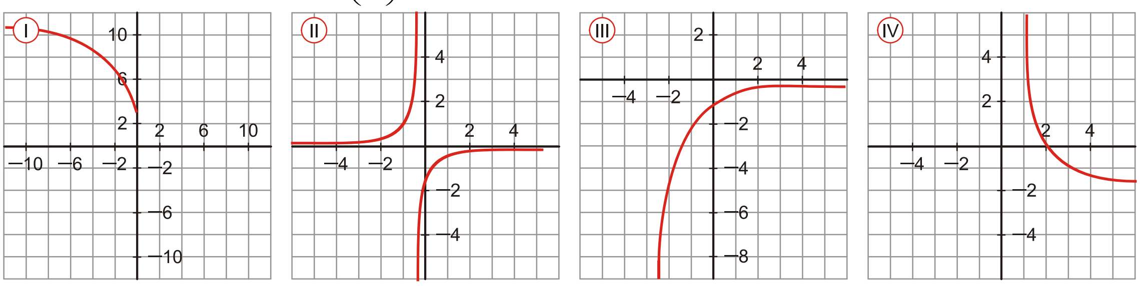
a) $y = 3{,}2^x$ **b)** $y = 3 + \log x$ **c)** $y = \dfrac{2}{2x+5}$ **d)** $y = -1 + \sqrt{4x+2}$



Solución: a) III b) IV c) II d) I

<u>EJERCICIO 46</u> : Relaciona cada gráfica con su expresión correspondiente:

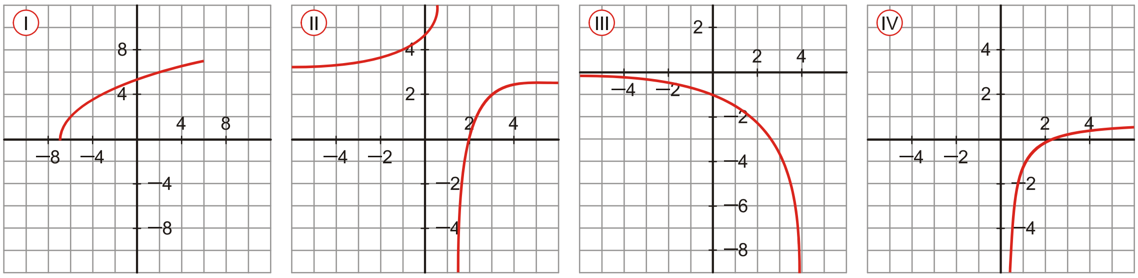
a) $y = \sqrt{-5x} + 3$ **b)** $y = -\left(\dfrac{4}{9}\right)^x$ **c)** $y = -\log_3 (x-1)$ **d)** $y = \dfrac{-1}{4x+1}$



Solución: a) I b) III c) IV d) II

<u>EJERCICIO 47</u> : Asocia cada gráfica con una de estas expresiones:

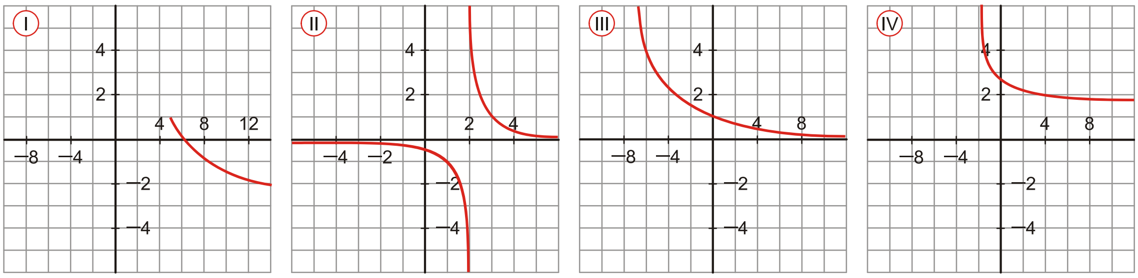
a) $y = -1 + \log_5 2x$ **b)** $y = -1{,}7^x$ **c)** $y = 2\sqrt{x+7}$ **d)** $y = \dfrac{-2}{x-1} + 3$



Solución: a) IV b) III c) I d) II

<u>EJERCICIO 48</u> : Asocia cada gráfica con la expresión que le corresponda:

a) $y = -0{,}8^x$ **b)** $y = 1 - \sqrt{x-5}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x-2}$ **d)** $y = 3 - \log_6 (x+2)$



Solución: a) III b) I c) II d) IV

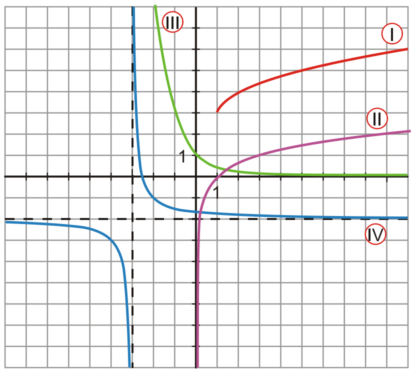
<u>EJERCICIO 49</u> : Asocia a cada gráfica la expresión que le corresponde:

a) $y = 3 + \sqrt{x-1}$

b) $y = -2 + \dfrac{1}{x+3}$

c) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

d) $y = \log_3 x$



Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ III d) $\rightarrow$ II

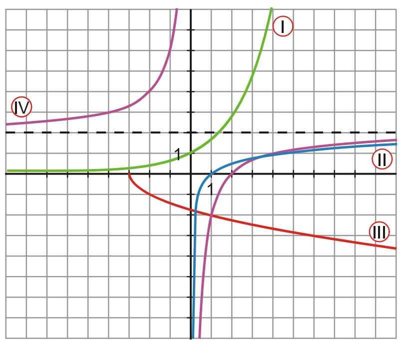
<u>EJERCICIO 50</u> : Asocia a cada gráfica una de estas expresiones:

a) $y = -\sqrt{x+3}$

b) $y = -\dfrac{4}{x} + 2$

c) $1{,}7^x$

d) $y = \log_5 x$



Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ I d) $\rightarrow$ II

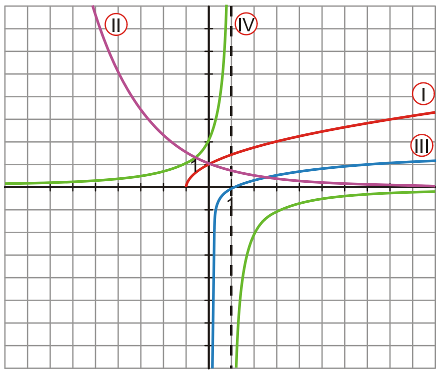
<u>EJERCICIO 51</u> : Asocia a cada gráfica una de las siguientes expresiones:

a) $y = \log_7 x$

b) $y = \sqrt{x+1}$

c) $y = \dfrac{2}{1-x}$

d) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$



Solución: a) $\to$ III   b) $\to$ I   c) $\to$ IV   d) $\to$ II

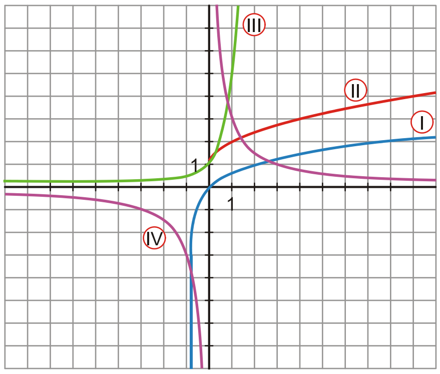
<u>EJERCICIO 52</u> : Asocia a cada gráfica una de estas expresiones:

a) $y = 1 + \sqrt{x}$

b) $y = 5^x$

c) $y = \log_3 (x+1)$

d) $y = \dfrac{3}{x}$



Solución: a) $\to$ II   b) $\to$ III   c) $\to$ I d) $\to$ IV

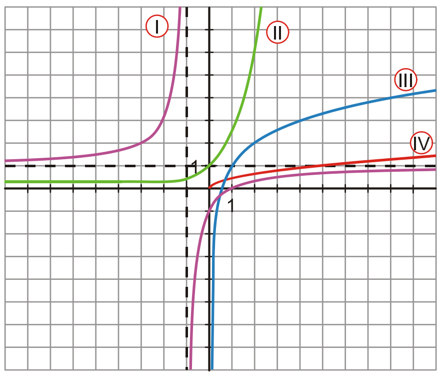
<u>EJERCICIO 53</u> : Relaciona cada gráfica con la expresión analítica correspondiente:

a) $y = 2{,}5^x$

b) $y = \dfrac{-2}{x+1} + 1$

c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = \sqrt{0{,}2x}$



Solución: a) $\to$ II   b) $\to$ I   c) $\to$ III   d) $\to$ IV