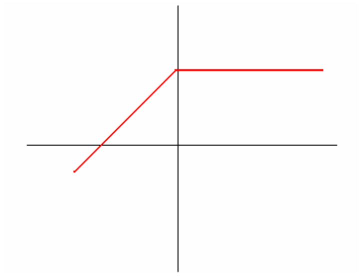
FUNCIONES ELEMENTALES I

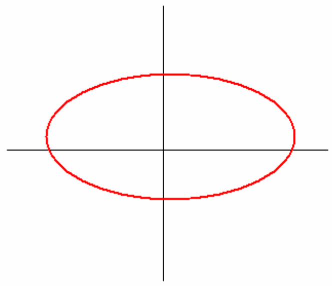
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

EJERCICIO 1 : Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:

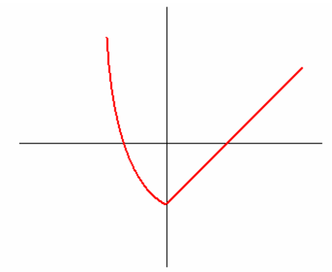
a)



b)



c)



Solución:
a) y c) son funciones, porque para cada valor de "x" hay un único valor de "y".
b) no es una función, porque para cada valor de "x" hay dos valores de "y".

DOMINIO

EJERCICIO 2 : Calcular el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}}$

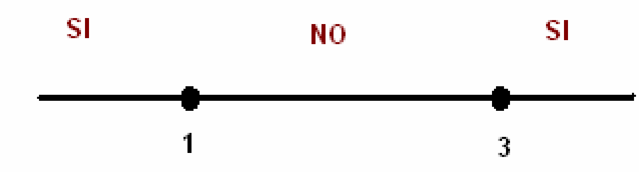
Solución:

a) D(f) = R

b) D(f) = R – $\{x \,/\, x^2 - 4x + 3 = 0\}$ $\quad x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{+4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow$ D(f) = R – {1,3}

c) D(f) = R

d) D(f) = $\{x \,/\, x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0$

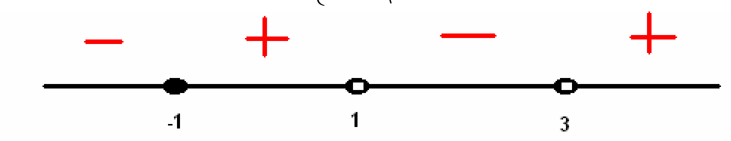


D(f) = $(-\infty,1] \cup [3,+\infty)$

e) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,1] \cup [3,+\infty) \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1] \cup [3,+\infty)$

f) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,1] \cup [3,+\infty) \\ x \notin \{1,3\} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

g) $\dfrac{x+1}{x^2-4x+3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right. \end{cases}$

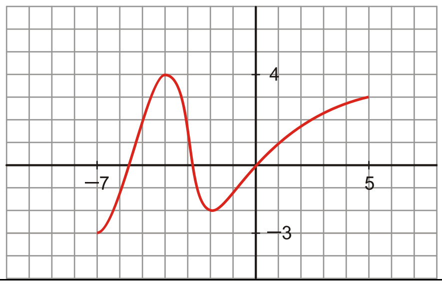


x ∈(-∞,-1] ∪ (3,+∞)

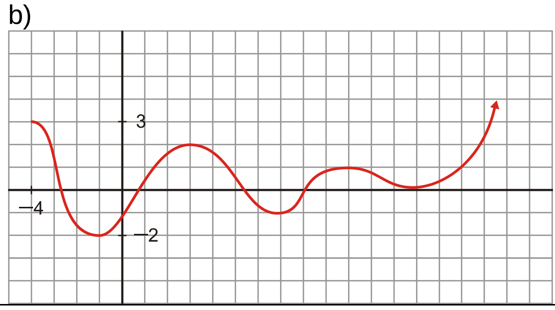
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

EJERCICIO 3 : Dada las gráficas de las siguientes funciones, estudia sus propiedades:

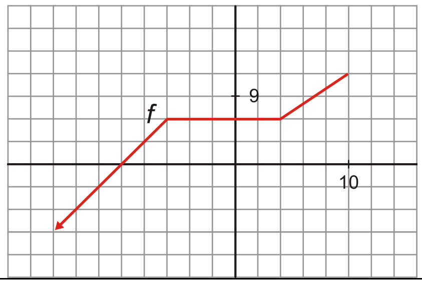
a)



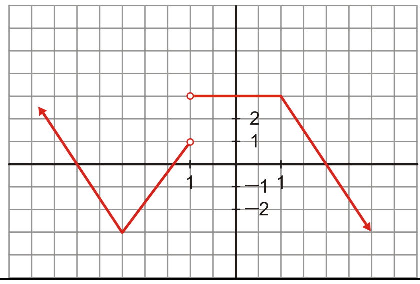
b)



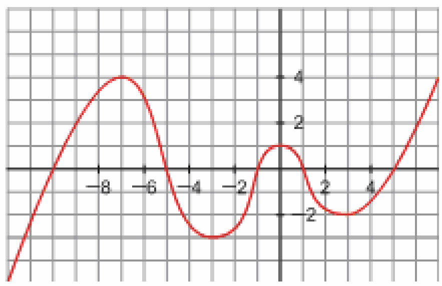
c)



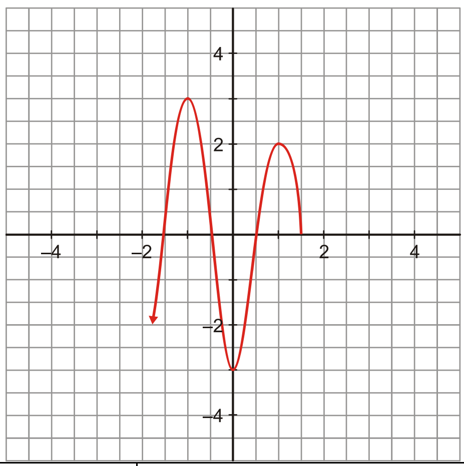
d)



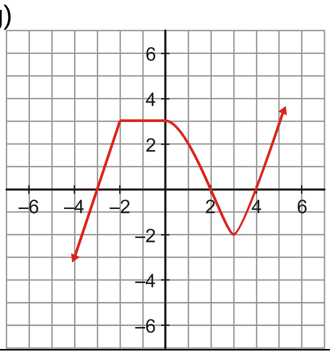
e)



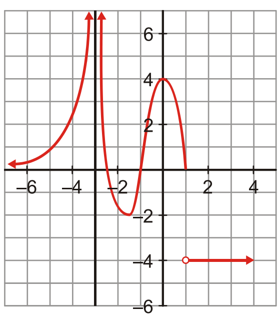
f)



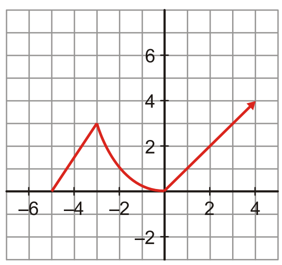
g)



h)



i)



Solución:

a) *Dom f* = [–7, 5]
Rec f = [-3,4]
Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,5;0); (-2,8,0), (0,0) OY: (0,0)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en [-7,5]
Tendencia y periodicidad: No tiene
Monotonía: Creciente [-7,-4) ∪ (-2,5] ; Decreciente (-4,-2)
Extremos relativos: Máximo relativo (-4,4) y Mínimo relativo (-2,-2)
Extremos absolutos: Máximo absoluto (-4,4) y Mínimo absoluto (-7,-3)
Curvatura: Cóncava (-6,-3) ∪ (0,5] y Convexa [-7,-6) ∪ (-3,0)
Puntos de Inflexión: (-6,-1), (-3,2), (0,0)

b) *Dom f* = [–4, ∞)
Rec f = [-2,∞)
Puntos de corte con los ejes: OX: (-2,7;0); (1,0), (5,5;0), (8,0), (13,0) y OY: (0;-1,2)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en [-4,∞)
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente (-1,3) ∪ (7,10) ∪ (13,+∞) ; Decreciente [-4,-1) ∪ (3,7) ∪ (10,13)
Extremos relativos: Máximos relativos (3,2), (10,1) y Mínimo relativo (-1,-2), (7,-1), (13,0)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (-1,-2)
Curvatura: Cóncava [-4,-3) ∪ (0;5,2) ∪ (8,12) y Convexa (-3,0) ∪ (5,2;8) ∪ (12,+∞)
Puntos de Inflexión: (-3;1,8), (5,2;0), (8,0), (12;0,8)

c) *Dom f* = (-∞, 10]
Rec f = (-∞,12]
Puntos de corte con los ejes: OX: (-10,0) OY: (0,6)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en (-∞,10]
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiene a -∞, la función tiene a -∞
Monotonía: Creciente (-∞,-6) ∪ (4,10] ; Constante (-6,4)
Extremos relativos: No tiene
Extremos absolutos: Máximo absoluto (10,12) y Mínimo absoluto no tiene
Curvatura: No tiene
Puntos de Inflexión: No tiene

d) *Dom f* = (-∞,-1) ∪ (-1,+∞) = R – {-1}
Rec f = R
Puntos de corte con los ejes: OX: (-3,5;0), (-1,3;0), (2,0) OY: (0,3)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R – {-1}. En x = -1 es discontinua inevitable de salto finito (Salto 2)
Tendencia y periodicidad: Cuando la x tiende a -∞ la función tiende a +∞. Cuando la x tiende a +∞, la función tiende a -∞.
Monotonía: Creciente (-2,5;-1) ; Decreciente (-∞;-2,5) ∪ (1,+∞) ; Constante (-1,1)
Extremos relativos: Máximo relativo: No tiene y Mínimo relativo (-2,5;-3)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene
Curvatura: No tiene
Puntos de Inflexión: No tiene

e) *Dom f* = R Rec f = R
Puntos de corte con los ejes: OX: (-10,0), (-5,0), (-1,0), (1,0), (5,0) y OY: (0,1)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R
Tendencia y periodicidad: Cuando la x tiende a -∞, la función tiende a -∞. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente (-∞,-7) ∪ (-3,0) ∪ (3,+∞) ; Decreciente (-7,-3) ∪ (0,3)
Extremos relativos: Máximos relativos (-7,4), (0,1) y Mínimos relativos (-3,-3), (3,-2)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene
Curvatura: Cóncava (-∞,-5) ∪ (-1,1) y Convexa (-5,-1) ∪ (1,+∞)
Puntos de Inflexión: (-5,0), (-1,0), (1,0)

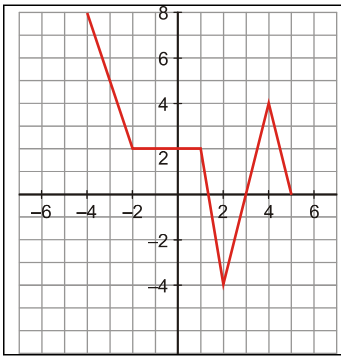
f) *Dom f* = (-∞;1,5]
Rec f = (-∞,3]
Puntos de corte con los ejes: OX: (-1,5;0), (-0,5;0), (0,5;0), (1,5;0) y OY: (0,-3)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en (-∞;1,5]
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a -∞
Monotonía: Creciente (-∞,-1) ∪ (0,1) ; Decreciente (-1,0) ∪ (1;1,5]
Extremos relativos: Máximos relativos (-1,3), (1,3) y Mínimo relativo (0,-3)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: (-1,3) y Mínimo absoluto: No tiene
Curvatura: Cóncava (-∞,-0,5) ∪ (0,5;1,5] y Convexa (-0,5;0,5)
Puntos de Inflexión: (-0,5;0), (0,5;0)

g) *Dom f* = R
Rec f = R
Puntos de corte con los ejes: OX: (-3,0), (2,0), (4,0) y OY: (0,3)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a -∞. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente (-∞,-2) ∪ (3,+∞) ; Constante (-2,0) ; Decreciente (0,3)
Extremos relativos: Máximos relativos: No tiene y Mínimo relativo (3,-2)
Extremos absolutos: No tiene
Curvatura: Cóncava (0,3) y Convexa (3,+∞)
Puntos de Inflexión: (3,-2)

h) *Dom f* = R – {-3}
Rec f = {-4} ∪ [-2,+∞)
Puntos de corte con los ejes: OX: (-2,5;0); (-1,0), (1;0) y OY: (0,4)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R – {-3,1}. En x = -3 es discontinua inevitable de salto finito. En x = 1 es discontinua inevitable de salto finito (salto 4)
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a 0. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a -4. Asíntotas: Asíntota vertical x = -3 (Se va al infinito). Asíntota horizontal y = 0
Monotonía: Creciente (-∞,-3) ∪ (-1,5,0) ; Constante (1,+∞) ; Decreciente (-3;-1,5) ∪ (0,1]
Extremos relativos: Máximos relativos (0,4) y Mínimo relativo (-1,5;-2)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto {(x,-4) / x ∈ (1,+∞)}
Curvatura: Cóncava (-1,1) y Convexa (-∞,-3) ∪ (-3,-1)
Puntos de Inflexión: (-1,0)

i) *Dom f* = [−5, ∞)
Rec f = [0,∞)
Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,0), (0,0) OY: (0,0)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en [-5,∞)
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente [-5,-3) ∪ (0,+∞) ; Decreciente (-3,0)
Extremos relativos: Máximos relativos (-3,3) y Mínimo relativo (0,0)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (-5,0), (0,0)
Curvatura: Convexa (-3,0)
Puntos de Inflexión: No tiene

EJERCICIO 4 : Observa la gráfica de la función y completa la siguiente tabla de valores:



x	–4	–3	–1	1	3	5
y						

Estudia sus propiedades.

Solución:

Completamos la tabla:

x	–4	–3	–1	1	3	5
y	8	5	2	2	0	0

Propiedades:

Dom f = (-∞,5]

Rec f = [-4,+∞)

Puntos de corte con los ejes: OX: (1.5;0), (3,0), (5,0) y OY: (0,2)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en (-∞,5]

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a +∞

Monotonía: Creciente (2,4) ; Constante (-2,1) ; Decreciente (-∞,-2) ∪ (1,2) ∪ (4,5]

Extremos relativos: Máximos relativos (4,4) y Mínimo relativo (2,-1)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (2,-4)

Curvatura: No tiene

Puntos de Inflexión: No tiene

EJERCICIO 5 *:* Representa gráficamente una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:

a) Dom (*f*) = [–5, 6]

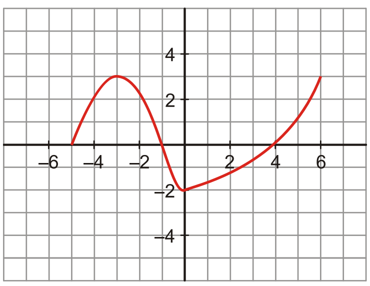
b) Crece en los intervalos (–5, –3) y (0, 6]; decrece en el intervalo (–3, 0).

c) Es continua en su dominio.

d) Corta al eje *X* en los puntos (–5, 0), (–1, 0) y (4, 0).

e) Tiene un mínimo en (0, –2) y máximo en (–3, 3)

Solución:



EJERCICIO 6 : Una función, *f*, cumple las siguientes condiciones:

a) El dominio de definición son todos los valores de $x \leq 3$.

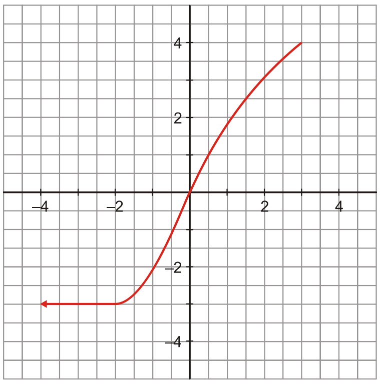
b) Es continua en su dominio.

c) Crece en el intervalo (–2, 3).

d) Pasa por los puntos (0, 0), (–2, –3) y (3, 4).

e) Es constante para todos los valores de $x \leq -2$.

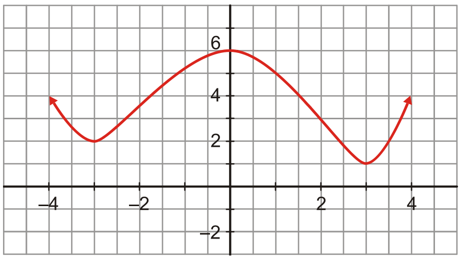
Solución:



EJERCICIO 7 : Representa gráficamente una función, f, que cumpla las siguientes condiciones:
a) Está definida en todo R
b) Es continua.
c) Corta al eje Y en (0, 6), pero no corta al eje X.
d) Crece en $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -3)$ y $(0, 3)$.

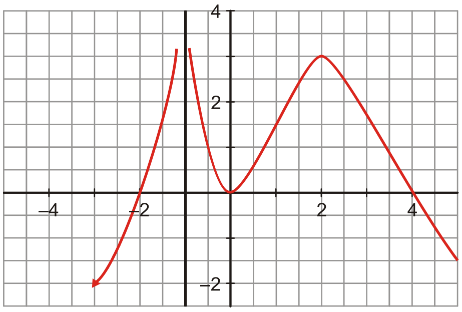
e) Su mínimo es $(3, 1)$, y pasa por el punto $(-3, 2)$.

Solución:



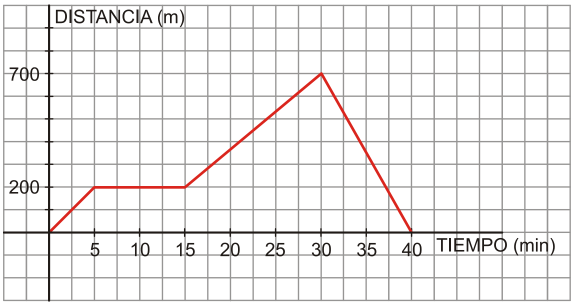
EJERCICIO 8 : Haz la gráfica de una función que cumpla:
a) Dominio de definición: R – {-1}
b) Corta al eje X en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$.
c) Crece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 2)$; y decrece en $(-1, 0)$ y $(2, +\infty)$.
d) Tiene un máximo relativo en $(2, 3)$.

Solución:



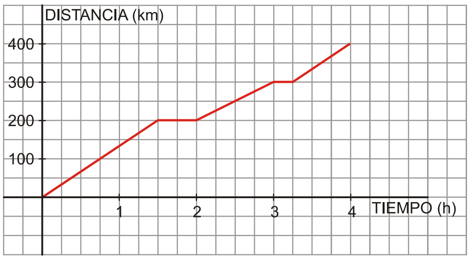
EJERCICIO 9 : Desde su casa hasta la parada del autobús, María tarda 5 minutos (la parada está a 200 m de su casa); espera durante 10 minutos, y al ver que el autobús tarda más de lo normal, decide ir andando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar andando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que el teléfono móvil se le ha olvidado en casa y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar. Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa.*

Solución:



<u>EJERCICIO 10</u> : Eduardo se va de vacaciones a una localidad situada a 400 km de su casa; para ello decide hacer el recorrido en coche. La primera parada, de 30 minutos, la hace al cabo de hora y media para desayunar, habiendo realizado la mitad del recorrido. Continúa su viaje sin problemas durante 1 hora, pero a 100 km del final sufre una parada de 15 minutos. En total tarda 4 horas en llegar a su destino. Representa la gráfica *tiempo-distancia recorrida*.

Solución:

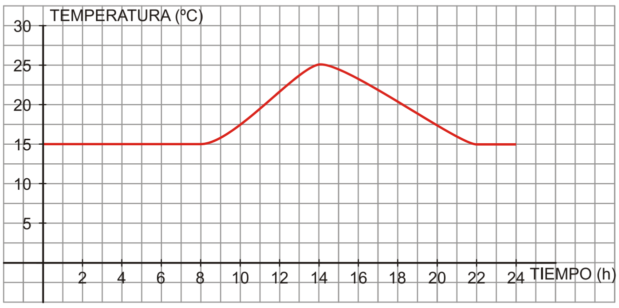


<u>EJERCICIO 11</u> : Construye una gráfica que corresponda a los ingresos anuales que obtienen unos grandes almacenes, sabiendo que: Durante los dos primeros meses del año, aumentan paulatinamente debido a las ofertas; desde marzo hasta junio los ingresos van disminuyendo alcanzando, en ese momento, el mínimo anual. En julio y agosto vuelven a crecer los ingresos, alcanzando el máximo del año en agosto. A partir de entonces se produce un decrecimiento que llega a coincidir, en diciembre, con los ingresos realizados al comienzo del año.

Solución: Esta es una posible gráfica que describe la situación anterior:

<u>EJERCICIO 12</u> : Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: A las 0 horas, la temperatura de una casa es de 15 ° C y, por la acción de un aparato que controla la temperatura, permanece así hasta las 8 de la mañana. En ese momento se enciende la calefacción y la temperatura de la casa va creciendo hasta que, a las 14:00 h, alcanza la temperatura máxima de 25 ° C. Paulatinamente, la temperatura disminuye hasta el momento en que se apaga la calefacción (a las 10 de la noche) volviendo a coincidir con la que había hasta las 8:00 horas.

Solución:



<u>EJERCICIO 13</u> : Construye una gráfica que describa la siguiente situación: Rosa tardó, esta mañana, 20 minutos en llegar desde su casa al supermercado situado a 2 km de su casa; después de 40 minutos comprando, regresó en taxi a su casa tardando 10 minutos en llegar. Tras permanecer 50 minutos en su casa, cogío el coche para ir a una cafetería situada a 6 km, para lo cual tardó un cuarto de hora. Al cabo de hora y cuarto, volvió a coger el coche y regresó a su casa, tardando en esta ocasión media hora debido al tráfico.

Solución: