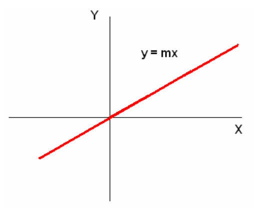
FUNCIONES ELEMENTALES

DISTINTOS TIPOS DE FUNCIONES LINEALES

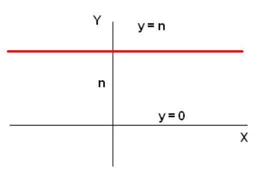
FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD: y = mx



Las funciones de proporcionalidad se representan mediante rectas que pasan por el origen. Describen una proporción entre los valores de las dos variables.

La pendiente de la recta es la razón de proporcionalidad.

FUNCIÓN CONSTANTE: y = n

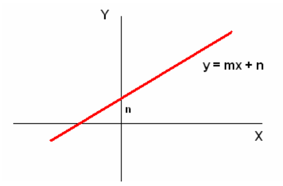


Se representan mediante una recta paralela al eje X.

Su pendiente es 0.

La recta y = 0 coincide con el eje X.

FUNCIÓN GENERAL: y = mx + n



Su representación es una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto (0,n).

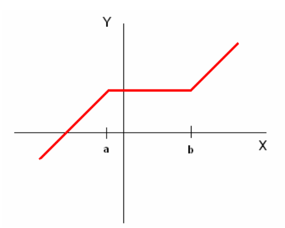
Al número n se le llama "ordenada en el origen".

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE: $y - y_0 = m.(x - x_0)$

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ la pendiente se calcula : $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1,y_1)$ y su pendiente m, la ecuación de la recta es: $y - y_1 = m.(x - x_1)$

FUNCIONES LINEALES "A TROZOS"



Es frecuente encontrarnos con funciones cuyas gráficas están formadas por trozos de rectas.

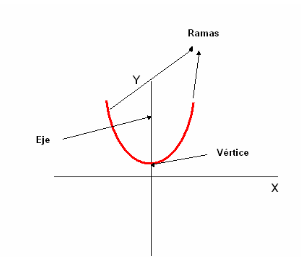
Para describir analíticamente una gráfica formada por trozos de rectas, se dan las ecuaciones de los diversos tramos, enumerando por orden de izquierda a derecha, indicando en cada uno de los tramos los valores de x para los que la función está definida.

Por ejemplo, si tiene tres trozos: $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \le a \\ f_2(x) & \text{si } a < x < b \\ f_3(x) & \text{si } x \ge b \end{cases}$

PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ llamadas **cuadráticas**, se representan todas ellas mediante **parábolas** y son continuas en todo R.



Cada una de estas parábolas tiene un eje paralelo al eje Y.

Su forma (hacia arriba, hacia abajo, más ancha, más estrecha,...) depende del coeficiente de la x^2 "a", del siguiente modo:

- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente de x^2, las parábolas correspondientes son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.
- Si $a > 0$ tiene las ramas hacia arriba, es decir, es convexa. Si $a < 0$, tiene las ramas hacia abajo, es decir, es cóncava.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas y la forma de éstas depende, exclusivamente, del coeficiente de x^2.

Veamos algunos pasos que conviene dar para la representación de: $y = ax^2 + bx + c$

1. **Obtención de la abscisa del vértice**: $V_x = -b/2a$
2. **Obtención de algunos puntos próximos al vértice**: Construcción de una tabla de valores con el vértice y un par de valores más pequeños y un par de valores más grandes.
3. **Puntos de corte con los ejes**:
   Con el eje X : $y = 0 \Rightarrow$ Resolver la ecuación $\Rightarrow$ Calcular x $\Rightarrow (x_0,0)$
   Con el eje Y : $x = 0 \Rightarrow$ Sustituir la x por cero y hallar y $\Rightarrow (0,y_0)$
4. **Representación**: Escogemos sobre los ejes unas escalas adecuadas que nos permitan plasmar la información obtenida.

RECTAS Y PARÁBOLAS

ESTUDIO ANALÍTICO

Resolver el sistema: $\begin{cases} y = mx + n \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

- Si obtenemos dos soluciones: Se cortan en dos puntos $\Rightarrow$ SECANTES
- Si obtenemos una solución: Se cortan en un punto $\Rightarrow$ TANGENTES
- Si no obtenemos solución : No se cortan $\Rightarrow$ EXTERIORES

ESTUDIO GRÁFICO

Se representan las dos funciones en la misma gráfica. Y se clasifican como en el estudio analítico.

Nota: En algunas funciones a trozos también aparecerán las rectas y las parábolas conjuntamente.

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

DEFINICIÓN

Las funciones y = k/x se llaman **funciones de proporcionalidad inversa.** Se representan mediante **hipérbolas**, cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

CÁLCULO DE LÍMITES

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si grado f(x) > grado g(x)} \\ \dfrac{a}{b} & \text{si grado f(x) = grado g(x) (siendo a y b los coeficientes de mayor grado)} \\ 0 & \text{si grado f(x) < grado g(x)} \end{cases}$$

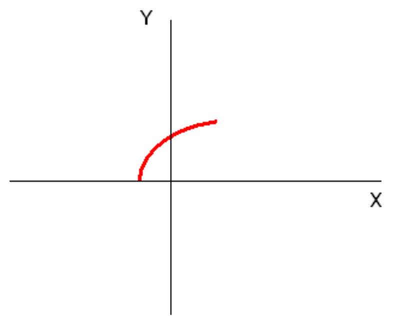
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

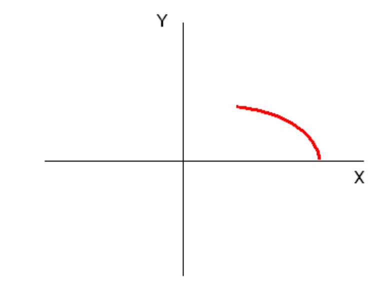
- Calcular el dominio
- Construir una tabla de valores teniendo en cuenta el dominio
- Representan teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

DEFINICIÓN

Las funciones y = $\sqrt{f(x)}$ se llaman **funciones radicales**. Su representación gráfica son medias parábolas.





REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- Calcular el dominio
- Hacer una tabla de valores teniendo en cuenta el dominio, y dando valores a la “x” de los que sepamos hallar la raíz.
- Representación gráfica.

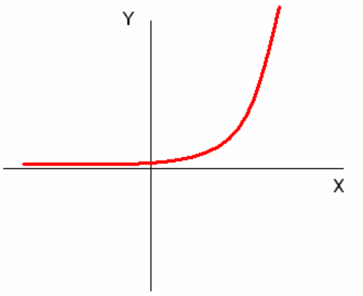
FUNCIONES EXPONENCIALES

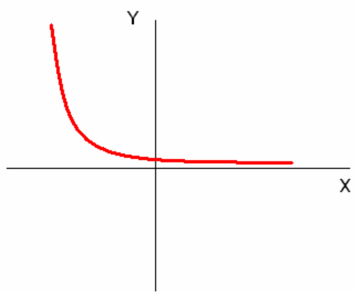
DEFINICIÓN

Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la **base** a un número real positivo distinto de 1.

Todas ellas son continuas, están definidas en todo R y pasan por los puntos (0,1) y (1,a)

Si a > 1, son crecientes y convexas
Si a < 1, son decrecientes y concavas





CÁLCULO DE LÍMITES

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 0 & \text{si } a<1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ +\infty & \text{si } a<1 \end{cases}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- Tabla de valores : Con valores de x :-∞, -2, -1, 0, 1, 2, +∞
- Representación gráfica, teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

LOGARITMOS

Se llama **logaritmo en base a de b**, y se escribe **$\log_a b$,** al exponente al que hay que elevan la base a para obtener b.

$$\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \qquad a > 0,\ a \neq 0,\ b > 0$$

CÁLCULO DE LOGARITMOS

Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales** y se escriben **log x**
Los logaritmos en base e se llaman **logaritmos neperianos** y se escriben **ln x**

Estos son los únicos logaritmos que sabe resolver la calculadora. Para hallar logaritmos en cualquier otra base, debemos utilizar:

- La definición de logaritmo: $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (Si b es una potencia de a)
- Si b no es potencia de a, la siguiente regla : $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- $\text{Log}_a 1 = 0$
- $\text{Log}_a a = 1$
- $\text{Log}_a b^c = c. \log_a b$
- $\text{Log}_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$
- $\text{Log}_a (b:c) = \log_a b - \log_a c$

FUNCIONES LOGARITMICAS

Las funciones logarítmicas son inversas de las exponenciales. Es decir son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Descripción de las funciones logarítmicas

- La función logarítmica $y = \log_a x$ es la inversa o recíproca de la exponencial $y = a^x$
- Su dominio es $(0, +\infty)$ y su recorrido todo R. Tiene una asíntota en $x = 0$
- Es continua y pasa por los puntos (1,0) y (a,1)
- Si $a > 1$ es creciente y cóncava. Y si $a < 1$ es decreciente y convexa

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Representar gráficamente $y = \log_a x$

Modo 1 :

- Se calcula su función inversa: $y = a^x$
- Se realiza una tabla de valores para la función $y = a^x$
- Se crea una tabla de valores para $y = \log_a x$, intercambiando los valores de x e y de la tabla anterior.

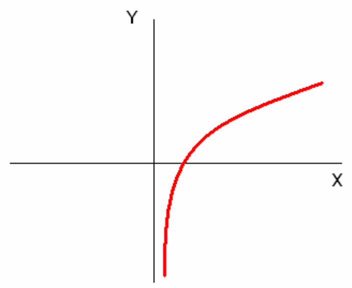
Modo 2 :

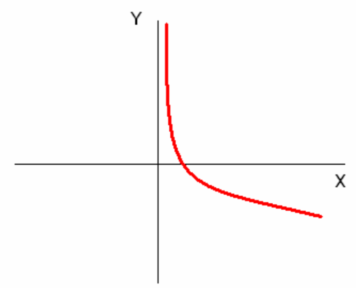
Se calcula una tabla de valores con potencias de la base: $a^{-\infty}$, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, $a^{+\infty}$

Modo 3 :

Tabla de valores en su dominio y usar la calculadora.

Se representa sobre unos ejes coordenados con las escalas convenientes.





ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIONES EXPONENCIALES **Si no**

hay sumas:

- Si se pueden poner como potencias de la misma base se igualan los exponentes.
- Si no se pueden poner como potencias de la misma base, se aplica la definición de logaritmo y se utiliza el cambio de base para calcularlo con ayuda de la calculadora.

Si hay sumas :

- Se quitan las sumas o restas de los exponentes teniendo en cuenta las propiedades de las potencias: $a^{b+c} = a^b.a^c$; $a^{b-c} = a^b : a^c$
- Se realiza el cambio de variable $a^x = z$
- Se plantea la ecuación teniendo en cuenta $(a^2)^x = a^{2x} = z^2$
- Se resuelve la ecuación en z $\Rightarrow z = z_0$
- $a^x = z_0 \Rightarrow$ Se calcula x como en el caso anterior

CUACIONES LOGARÍTMICAS

Aplicando las propiedades de los logaritmos llegaremos a uno de estos dos casos:

- Si log (f(x)) = nº $\Rightarrow$ Aplicar la definición de logaritmo para obtener una expresión exponencial.
- Si log (f(x)) = log (g(x)) $\Rightarrow$ f(x) = g(x) $\Rightarrow$ Resolver

Nota: Hay que comprobar las soluciones, teniendo en cuenta que las expresiones que hay dentro de los logaritmos deben ser positivas.