FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIONES

Una **función** liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se les llama "x" e "y".

- "x" es la **variable independiente.**
- "y" es la **variable dependiente** (depende de la "x").

La función, que se suele denominar y = f(x), asocia a cada valor de x un **único** valor de y : $x \Rightarrow y = f(x)$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos, con sendas escalas, representamos las dos variables:

- La x sobre el eje horizontal o eje de **abscisas**.
- La y sobre el eje vertical o eje de **ordenadas.**

Cada punto de la gráfica tiene dos **coordenadas**, su abscisa, x, y su ordenada, y.

Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por Dom f o D(f), al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f y se designa Rec(f) o R(f), al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuando hay un x tal que f(x) = y

CÓMO SE NOS PRESENTAN LAS FUNCIONES

MEDIANTE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su **representación gráfica**. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

MEDIANTE UN ENUNCIADO

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

MEDIANTE UNA TABLA DE VALORES

Con frecuencia se nos dan los datos de una función mediante una tabla de valores en la cual se obtienen directamente los datos buscados, aunque en otros casos, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

MEDIANTE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA O FÓRMULA

La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

DOMINIO DE DEFINICIÓN Y EXPRESIÓN ANALÍTICA

DEFINICIÓN

Se llama **dominio de definición** o simplemente **dominio de una función** f, y se designa por D(f) = Dom (f), al conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales hay un f(x).

RESTRICCIONES DEL DOMINIO

El dominio de una función puede quedar restringido por una de las siguientes causas:

- Imposibilidad de realizar alguna operación.
  - Valores que anulen el denominador.
  - Raíces de índice par de números negativos.
- Contexto real del cual se ha extraído la función.
- Voluntad de quien propone la función.

CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

- Polinomios: D = R
- Cocientes : $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$: D = R – {x / d(x) = 0}
- Raíces de índice impar: D = R
- Raíces de índice par: $f(x) = \sqrt[n]{r(x)}$: D = {x/ r(x) ≥ 0}

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN

Se llama **recorrido de una función** f, y se designa por R(f), al conjunto de valores de y para los cuales existe x, es decir, conjunto de valores que toma la variable dependiente "y".

CÁLCULO DEL RECORRIDO

Para calcular el recorrido de una función, se dibuja y luego se estudia sobre el eje de ordenadas.

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES DE COORDENADAS

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ABSCISAS, OX

Como el eje de abscisas, tiene de ecuación y = 0, los puntos serán de la forma $(x_o,0)$

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ORDENADAS, OY

Como el eje de ordenadas, tiene de ecuación x = 0, los puntos serán de la forma $(0,y_o)$.

SIMETRÍA

DEFINICIÓN

Una función es **par** ó **simétrica respecto del eje OY** si f(x) = f(-x)

Una función es **impar** ó **simétrica respecto del origen O** si f(x) = - f(-x).

Una función que no es par ni impar se dice que es **no simétrica**.

DISCONTINUIDADES. CONTINUIDAD

IDEA INTUITIVA

La idea de función continua es la de que puede ser representada con un solo trazo.
Una función que no es continua presenta alguna **discontinuidad.**

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo. Una función puede ser **continua en un intervalo** si solo presenta discontinuidades fuera de él.
Las funciones con expresiones analíticas elementales son continuas en sus dominios.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Varias razones por las que una función puede ser discontinua en un punto:

- Tiene ramas infinitas en ese punto. Es decir, los valores de la función crecen o decrecen indefinidamente cuando la x se acerca al punto. Se dice que presenta una **discontinuidad inevitable de salto infinito** en ese punto.
- Presenta un salto. Se dice que presenta una **discontinuidad inevitable de salto finito** en ese punto.
- No está definida (le falta un punto) ó el punto que parece que le falta lo tiene desplazado. Se dice que presenta una **discontinuidad evitable** en ese punto.

TENDENCIA Y PERIODICIDAD

TENDENCIA

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara. Estas ramas reciben el nombre de **asíntotas.**
Existen tres tipo de asíntotas:

- Asíntotas verticales: x = a
- Asíntotas horizontales: y = b
- Asíntotas oblicuas: y = mx + n

PERIODICIDAD

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo**.

MONOTONÍA, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

MONOTONÍA

Una función es **creciente** cuando al aumentar la x aumenta la y.
Una función es **decreciente** cuando al aumentar la x disminuye la y.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función presenta un **máximo absoluto** en un punto cuando es el valor más alto de su representación gráfica. Este punto debe de ser del dominio.
Una función presenta un **mínimo absoluto** en un punto cuando es el valor más bajo de su representación gráfica. Este punto debe de ser del dominio.

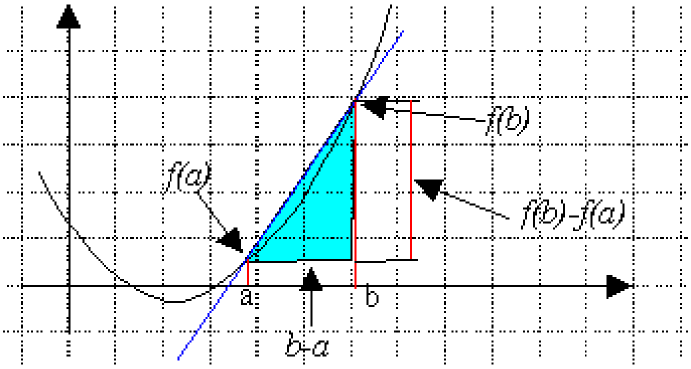
Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando en dicho punto la función pasa de creciente a decreciente. Este punto debe de ser del dominio.
Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando en dicho punto la función pasa de decreciente a creciente. Este punto debe de ser del dominio.

TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M)

Para medir la variación (aumento o disminución) de una función en un intervalo se utiliza la **tasa de variación media.**

Se llama **tasa de variación media de una función f en el intervalo [a,b]** al cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo.

$$\text{T.V.M de f en } [a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



La T.V.M. de f en [a,b] es la pendiente del segmento AB.

CURVATURA, PUNTOS DE INFLEXIÓN

CURVATURA

Una función es **cóncava** cuando presenta la siguiente forma: ∩
Una función es **convexa** cuando presenta la siguiente forma: ∪

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Puntos (del dominio) donde la función cambia de curvatura, es decir, pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.