TEMA 6 – DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

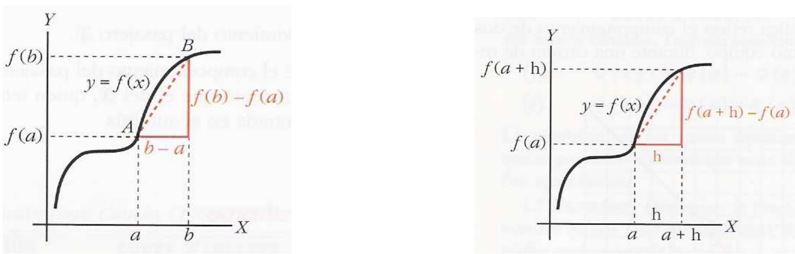
6.1 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

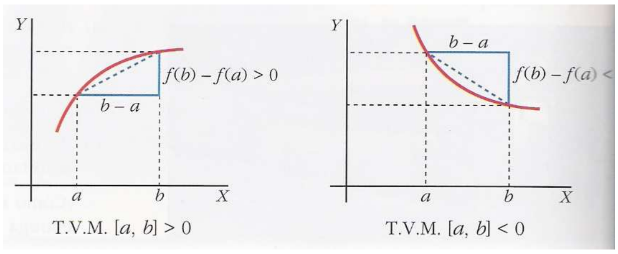
Definición

Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, y = f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: T.V.M.[a,b] = $\dfrac{\text{Variación de f(x)}}{\text{Variación de x}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Y es la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b))

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión [a,a+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene : T.V.M. [a,a+h] = $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA O DERIVADA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función, y = f(x) en un punto a o **derivada de una función en un punto x = a**, y se denota **f ´(a)**

$$\text{T.V.I.(a)} = f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Significado:
Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y = f(x) en el punto x = a.
Si es positiva $\Rightarrow$ La función es creciente en el punto a
Si es negativa $\Rightarrow$ La función es decreciente en el punto a

DERIVADAS LATERALES

Se llama **derivada por la izquierda** de f en x = a, $f\,'(a^-)$ a:

$$f\,'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se llama **derivada por la derecha** de f en x = a, $f\,'(a^+)$ a:

$$f\,'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A ambas se las llama **derivadas laterales.**

Nota: Si en un punto las derivadas laterales son distintas, el punto es **anguloso**. Si las derivadas laterales coinciden, la curva es "suave" o "lisa", es decir, es derivable.

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si una función es continua en un punto puede ser derivable o no derivable en ese punto.

Ejemplos:
a) $f(x) = 2x^2 + 3$ Continua en x = 0 y Derivable en x = 0
b) $f(x) = |x|$ Continua en x = 0 y No derivable en x = 0

Pero si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Nota: Por el resultado anterior, cuando tengamos que estudiar la derivabilidad de una función estudiaremos primero su continuidad.
- Si es continua $\Rightarrow$ Estudiaremos su derivabilidad ($f\,'(a^-) = f\,'(a^+)$)
- Si no es continua $\Rightarrow$ No es derivable.

6.2 – FUNCIÓN DERIVADA

Si una función, f, es derivable en todos los puntos de un intervalo, I, la función f ´:

$$x \to f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

definida en I, se llama **función derivada** de f.

Si f ´es derivable, su derivada se llama f ´´ (se lee derivada segunda o f segunda).
Así sucesivamente, se definen f ´´´, f^{iv}, …, $f^{n)}$ (f tercera, f cuarta,… f n-ésima).

Otra forma de nombrar las derivadas es Df, D^2f, D^3f, …, D^nf.
Habitualmente se obtienen las derivadas de las funciones a partir de las llamadas "reglas de derivación" que permiten obtener con comodidad y rapidez la derivada de cualquier función.

6.3 – REGLAS DE DERIVACIÓN

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número :(k.f(x))' = k.f '(x)

- Suma y resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto : $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- Cociente : $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición (Regla de la Cadena) : $[f(g(x))]'=f'(g(x)).g'(x)$
  $[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x.\text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\text{Ln } a.f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x.\text{Ln}a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x).\text{Ln}a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \cos f(x).f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\text{ sen } x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\text{ sen } f(x).f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} =$ $[1 + \text{tag}^2 f(x)].f'(x)$