TEMA 6 – DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$

<u>EJERCICIO 2</u> : Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{3}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

<u>EJERCICIO 3</u> : Halla la derivada de la función f(x)=(x – 1)^2 en x=2, aplicando la definición de derivada

Solución: $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$

<u>EJERCICIO 4</u> : Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

Solución: $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2-2x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-2x}{(x-1)x} = \lim_{x\to 1} \frac{2(1-x)}{(x-1)x} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x} = -2$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

<u>EJERCICIO 5</u> : Halla *f´(x)*, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2+1$ **b)** $f(x) = \frac{x+1}{3}$ **c)** $f(x) = 2x^2$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **e)** $f(x) = \frac{2x}{3}$

Solución:

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+2xh+1-x^2-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h+1}{3}-\frac{(x+1)}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+h^2+2xh)-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2+2h^2+4xh-2x^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+4xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+4x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+4x) = 4x$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$

e) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3}-\frac{2x}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$

CÁLCULO DE DERIVADAS INMEDIATAS

EJERCICIO 6 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=3x^4-2x+5$ **b)** $f(x)=e^x$ **c)** $f(x)=2x^3-x^2+1$ **d)** $f(x)=\ln x$

e) $f(x)=2x^5+\frac{x}{3}$ **f)** $f(x)=\text{sen } x$ **g)** $f(x)=x^3-3x^2+\frac{1}{5}$ **h)** $f(x)=\cos x$

i) $f(x)=4x^3-3x^2+2$ **j)** $f(x)=tg\ x$ **k)** $f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$ **l)** $f(x)=xe^x$

m) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-2}$ **n)** $f(x)=x^2\,\text{sen } x$ **ñ)** $f(x)=\frac{1-x^2}{x-3}$ **o)** $f(x)=x\ln x$

p) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{x}$ **q)** $f(x)=\frac{3x+1}{e^x}$ **r)** $f(x)=\frac{3x^2}{2x+3}$ **s)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\text{sen } x$

Solución:

a) $f'(x)=12x^3-2$ b) $f'(x)=e^x$ c) $f'(x)=6x^2-2x$ d) $f'(x)=\frac{1}{x}$

e) $f'(x)=10x^4+\frac{1}{3}$ f) $f'(x)=\cos x$ g) $f'(x)=3x^2-6x$ h) $f'(x)=-\text{sen}x$

i) $f'(x)=12x^2-6x$ j) $f'(x)=1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$

k) $f'(x)=\frac{2x(2x+1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$ l) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

m) $f'(x)=\frac{3(x^2-2)-(3x-1)2x}{(x^2-2)^2}=\frac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2}=\frac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$ n) $f'(x)=2x\ \text{sen}x+x^2\cos x$

ñ) $f'(x)=\frac{-2x(x-3)-(1-x^2)}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+6x-1+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2}$ o) $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

p) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$ q) $f'(x)=\frac{3e^x-(3x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2}=\frac{2-3x}{e^x}$

r) $f'(x)=\frac{6x(2x+3)-3x^2\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{12x^2+18x-6x^2}{(2x+3)^2}=\frac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$

s) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\text{sen } x+x^{1/3}\cdot\cos x=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\text{sen } x+\sqrt[3]{x}\cdot\cos x$

CÁLCULO DE DERIVADAS

EJERCICIO 7 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=(3x^2+x)^4$ **b)** $f(x)=\sqrt{4x^3+1}$ **c)** $f(x)=e^{4x^3-2x}$ **d)** $f(x)=\ln(3x^4-2x)$

e) $f(x)=\text{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ **f)** $f(x)=3x^4-\frac{9x^2}{3}$ **g)** $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2-1}$ **h)** $f(x)=xe^x$

i) $f(x)=8x^5-2x^3+\frac{1}{3}$ **j)** $f(x)=(x^4-3x)e^x$ **k)** $f(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$ **l)** $f(x)=\frac{3x^4}{2}-\frac{6x^3}{5}$

m) $f(x)=\frac{x^2-3}{2x^3+1}$ **n)** $f(x)=\ln(x^4-2x)$ **ñ)** $f(x)=\frac{-2x^4+3x^2}{5}$ **o)** $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+3x}$

p) $f(x)=\sqrt{2x^3-3}$ **q)** $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{5}x^7$ **r)** $f(x)=e^x\cdot\text{sen}x$ **s)** $f(x)=\cos\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f(x)=4x^5-\frac{2x}{3}$ **u)** $f(x)=(x^2-3x)e^x$ **v)** $f(x)=\text{sen}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$ **x)** $f(x) = \frac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$ **y)** $f(x) = e^{7x^4 - 3}$

z) $f(x) = 9x^2 - 3x^4 + \frac{1}{3}$ **1)** $f(x) = \frac{3x^3}{4 - x^2}$ **2)** $f(x) = ln\left(2x^5 + 3x\right)$

3) $f(x) = \frac{-3x^5 + 2x}{7}$ **4)** $f(x) = x^4 cosx$ **5)** $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6) $f(x) = \frac{4x^6}{3} - 2x + 5$ **7)** $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ **8)** $f(x) = \sqrt{2x - 3x^4}$

Solución:

a) $f'(x) = 4\left(3x^2 + x\right)^3 \cdot (6x + 1)$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$

c) $f'(x) = e^{4x^3 - 2x} \cdot \left(12x^2 - 2\right)$

d) $f'(x) = \frac{1}{3x^4 - 2x} \cdot \left(12x^3 - 2\right) = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$

e) $f'(x) = cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x - 3 - 2x - 2}{(2x-3)^2} \cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$

f) $f'(x) = 12x^3 - \frac{18x}{3}$

g) $f'(x) = \frac{6x\left(x^2 - 1\right) - \left(3x^2 - 2\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

h) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ i) $f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

j) $f'(x) = \left(4x^3 - 3\right)e^x + \left(x^4 - 3x\right)e^x = \left(4x^3 - 3 + x^4 - 3x\right)e^x = \left(x^4 + 4x^3 - 3x - 3\right)e^x$

k) $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

l) $f'(x) = \frac{12x^3}{2} - \frac{18x^2}{5} = 6x^3 - \frac{18x^2}{5}$

m) $f'(x) = \frac{2x\left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 - 3\right) \cdot 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{\left(2x^3 + 1\right)^2}$

n) $f'(x) = \frac{1}{x^4 - 2x} \cdot \left(4x^3 - 2\right) = \frac{4x^3 - 2}{x^4 - 2x}$

ñ) $f'(x) = \frac{-8x^3 + 6x}{5}$

o) $f'(x) = \frac{3\left(x^2 + 3x\right) - (3x - 4)(2x + 3)}{\left(x^2 + 3x\right)^2} = \frac{3x^2 + 9x - 6x^2 - 9x + 8x + 12}{\left(x^2 + 3x\right)^2} = = \frac{-3x^2 + 8x + 12}{\left(x^2 + 3x\right)^2}$

p) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - 3}} \cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 - 3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 3}}$

q) $f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$

r) $f'(x) = e^x \cdot senx + e^x \cdot cosx = (senx + cosx)e^x$

s) $f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)\cdot\frac{3(x^2+2)-3x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\left(\frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) =$

$= -\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) = \frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f'(x) = 20x^4 - \frac{2}{3}$

u) $f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x)e^x = e^x(2x-3+x^2-3x) = e^x(x^2-x-3)$

v) $f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\cdot\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$

x) $f'(x) = \frac{12x^2(x^2-1)-(4x^3-3)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^4-12x^2+6x}{(x^2-1)^2}$

y) $f'(x) = e^{7x^4-3}\cdot(28x^3) = 28x^3\cdot e^{7x^4-3}$

z) $f'(x) = 18x - 12x^3$

1) $f'(x) = \frac{9x^2(4-x^2)-3x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2-9x^4+6x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2-3x^4}{(4-x^2)^2}$

2) $f'(x) = \frac{1}{2x^5+3x}\cdot(10x^4+3) = \frac{10x^4+3}{2x^5+3x}$

3) $f'(x) = \frac{-15x^4+2}{7}$

4) $f'(x) = 4x^3\cos x + x^4(-\text{sen}\,x) = 4x^3\cos x - x^4\,\text{sen}\,x$

5) $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

6) $f'(x) = \frac{24x^5}{3} - 2 = 8x^5 - 2$

7) $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

8) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}}\cdot(2-12x^3) = \frac{2-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{2(1-6x^3)}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{1-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$

<u>EJERCICIO 8</u> : Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = (e^x + x^5)^3$ **b)** $f(x) = \frac{2x}{(x+2)^2}$ **c)** $f(x) = (x^2+\sqrt{x})\cdot\ln x$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

e) $y = e^{2x+1}\cdot\text{sen}\,x$ **f)** $y = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$ **g)** $y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$ **h)** $y = \cos^2(x^4-2)$

i) $f(x) = (x^2-2)\cdot e^x$ **j)** $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{4x+2}}$

Solución:

a) $f'(x) = 3\,(e^x + x^5)^2 \cdot (e^x + 5x^4)$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x+2)^2 - 2x\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{(x+2)\,[2(x+2)-4x]}{(x+2)^4} = \dfrac{2x+4-4x}{(x+2)^3} = \dfrac{-2x+4}{(x+2)^3}$

c) $f'(x) = \left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot \ln x + \left(x^2+\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x} = \left(2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln x + x + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x+2}}\cdot\dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)}{(x-1)}\cdot\dfrac{(x+2-x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x-1)\,(x+2)} = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

e) $y' = e^{2x+1}\cdot 2\cdot sen\,x + e^{2x+1}\cdot cos\,x = 2\,e^{2x+1}\cdot sen\,x + e^{2x+1}\cdot cos\,x = = e^{2x+1}\,(2sen\,x + cos\,x)$

f) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{x+3}{2x+1}}\cdot\dfrac{2x+1-(x+3)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{(2x+1)}{(x+3)}\cdot\dfrac{(2x+1-2x-6)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-5}{(x+3)\,(2x+1)} = = \dfrac{-5}{2x^2+7x+3}$

g) $y' = \dfrac{3(x-1)^2 - (3x+1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)\,[3(x-1)-2(3x+1)]}{(x-1)^4} = \dfrac{3x-3-6x-2}{(x-1)^3} = = \dfrac{-3x-5}{(x-1)^3}$

h) $y' = 2cos\,(x^4-2)\cdot[-sen\,(x^4-2)]\cdot 4x^3 = -8x^3\,cos\,(x^4-2)\cdot sen\,(x^4-2)$

i) $f'(x) = 2x\cdot e^x + (x^2-2)\cdot e^x = (2x+x^2-2)\,e^x = (x^2+2x-2)\,e^x$

j) $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{3(4x+2)-(3x-1)\cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4x+2}{3x-1}\right)^{1/2}\cdot\frac{12x+6-12x+4}{(4x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(4x+2)^{1/2}}{(3x-1)^{1/2}}\cdot\frac{10}{(4x+2)^2} = \frac{5}{(3x-1)^{1/2}\cdot(4x+2)^{3/2}} = \frac{5}{\sqrt{(3x-1)\,(4x+2)^3}}$$

ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD

<u>EJERCICIO 9</u> : Estudia la derivabilidad de esta función, según los valores de *a* y *b*:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x^3+ax^2 & \text{si } 0\le x<1 \\ bx+\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Solución:

- Continuidad:

- En $x\neq 0$ y $x\neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x^2+1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3+ax^2\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no es continua en $x=0$.

- En $x=1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+ax\right) = 1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(bx+\ln x) = b \\ f(1) = b \end{array}\right.$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$, ha de ser $b=1+a$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+2ax & \text{si} \quad 0<x<1 \\ b+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

- En $x=0$: $f(x)$ no es derivable, pues no es continua en $x=0$.
- En $x=1$: Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, han de ser iguales las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=3+2a \\ f'(1^+)=b+1 \end{array}\right\} 3+2a=b+1$$

- Por tanto, $f(x)$ será derivable en $\mathbf{R}-\{0\}$ cuando y solo cuando: $\left.\begin{array}{l} b=1+a \\ 3+2a=b+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-1 \\ b=0 \end{array}$
- En $x=0$ no es derivable, cualesquiera que sean a y b.

<u>EJERCICIO 10</u> : Calcula *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable en todo R:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ -bx^2+2x & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

Solución:

- Continuidad:

- En $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.
- En $x=-1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)=1-a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-bx^2+2x\right)=-b-2 \\ f(-1)=-b-2 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-1$, ha de ser $1-a=-b-2$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x<-1 \\ -2bx+2 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

- En $x=-1$: Como $f'(-1^-)=-2-a$ y $f'(-1^+)=2b+2$, para que $f(x)$ sea derivable en $x=-1$, ha de ser $-2-a=2b+2$.

- Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable en todo $\mathbf{R}$ cuando:

$$\left.\begin{array}{l} 1-a=-b-2 \\ -2-a=2b+2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a-b=3 \\ a+2b=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{-7}{3} \end{array}$$

EJERCICIO 11 : Estudia la derivabilidad de la función: $f(x)=\begin{cases} -x^4+3x^2 & \text{si } x<1 \\ 2x^2 & \text{si } 1\le x<2 \\ x^2+4x-4 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Solución:

- Continuidad:

- En $x \neq 1$ y $x \neq 2$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^4+3x^2\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^2\right)=2 \\ f(1)=2 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=1$.

- En $x=2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2\right)=8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+4x-4\right)=8 \\ f(2)=8 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=2$.

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$: f (x) es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} -4x^3+6x & \text{si } x<1 \\ 4x & \text{si } 1<x<2 \\ 2x+4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

- En $x=1$: Como $f'(1^-)=2\neq f'(1^+)=4$, $f(x)$ no es derivable en $x=1$.

- En $x=2$: Como $f'(2^-)=8=f'(2^+)$, $f(x)$ es derivable en $x=2$, y su derivada es $f'(2)=8$.

EJERCICIO 12 : Halla los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-ax+b & \text{si } x<1 \\ ax^3-bx+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Solución:

- Continuidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x=1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2-ax+b\right)=3-a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax^3-bx+2\right)=a-b+2 \\ f(1)=a-b+2 \end{array}\right.$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$, ha de ser $3-a+b=a-b+2$; es decir, $2a-2b=1$.

- Derivabilidad:

- Si $x\neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-a & \text{si } x<1 \\ 3ax^2-b & \text{si } x>1 \end{cases}$

- En $x=1$: Para que sea derivable en $x=1$, las derivadas laterales han de ser iguales: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=6-a \\ f'(1^+)=3a-b \end{array}\right\}$ $6-a=3a-b$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable si: $\left.\begin{array}{l} 2a-2b=1 \\ 6-a=3a-b \end{array}\right\}$ $a=\dfrac{11}{6};\quad b=\dfrac{4}{3}$

<u>EJERCICIO 13</u> : Estudia la derivabilidad de la siguiente función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & si \quad x<-1 \\ x^2+4 & si \quad -1\le x<0 \\ 2^x-x+3 & si \quad x\ge 0 \end{cases}}$

Solución:

- Continuidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=-1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(3x^2-2x\right) = 5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2+4\right) = 5 \\ f(-1)=5 \end{cases}$ $f(x)$ es continua en $x=-1$

- En $x=0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2+4\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2^x-x+3\right) = 4 \\ f(0)=4 \end{cases}$ $f(x)$ es continua en $x=0$

- Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & si \quad x<-1 \\ 2x & si \quad -1<x<0 \\ 2^x \ln 2-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

- En $x=-1$: Como $f'(-1^-)=-8 \neq f'(-1^+)=-2$; $f(x)$ no es derivable en $x=-1$.

- En $x=0$: Como $f'(0^-)=0 \neq f'(0^+)=(\ln 2)-1$; $f(x)$ tampoco es derivable en $x=0$.