TEMA 2 – MATRICES

OPERACIONES CON MATRICES

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla todas las matrices X, no nulas, de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = X$

<u>EJERCICIO 2</u> : Halla los valores de "a" y "b" en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 3</u> : Calcula los valores de x para que la matriz: $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = O$, donde I y O son respectivamente las matrices identidad y nula de orden tres.

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1, 0), y que verifica

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMAS CON MATRICES

<u>EJERCICIO 5</u> : En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:
- Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.
a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A*, *B* y *C*.

<u>EJERCICIO 6</u> : Una empresa produce tres bienes *A*, *B*, y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	FACTORÍA 2	FACTORÍA 3
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A*, *B* y *C* que fabrica la empresa.

b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A*, *B* y *C*.

EJERCICIO 7 : Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 unidades en la terminación *L* y 30 unidades en la terminación *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.
b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

EJERCICIO 8 : Un constructor construye chalés de lujo (C.L.), chalés adosados (C.A.) y viviendas de protección oficial (V.P.O.). Se sabe que cada C.L. tiene 3 cuartos de baño, 2 aseos y 2 cocinas; cada C.A. tiene 1 cuarto de baño, 1 aseo y una cocina; y cada V.P.O. tiene 1 aseo y una cocina. Por otra parte, cada cuarto de baño tiene una ventana grande y una pequeña; cada aseo tiene una ventana pequeña y cada cocina tiene dos grandes y una pequeña.

a) Halla la matriz A que expresa el número de habitáculos (cocinas, cuartos de baño y aseos) en función de cada tipo de vivienda.
b) Halla la matriz B que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función del tipo de habitáculo.
c) Halla la matriz C que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función del tipo de vivienda. ¿Puede calcularse C como resultado de una operación matricial entre A y B?

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 9 : Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}.\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.\quad E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

CALCULAR LA POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 10 : Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$, calcula A^2, A^4 y A^{33}

EJERCICIO 11 : Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5 b) Halla el valor de $A^{25}+A^{-1}$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

EJERCICIO 12 :

a) Calcula una matriz X que verifique la igualdad:

$$A\cdot X=B,\quad \text{con}\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X\cdot A=B$?

<u>Ejercicio 13</u> : Halla una matriz, X, tal que X.A = B, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Ejercicio 14</u> : Halla una matriz, X, tal que AX + B = 0, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 15</u> : Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$,

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

SISTEMAS CON MATRICES

<u>EJERCICIO 16</u> : Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ Halla X e Y, y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1}

<u>EJERCICIO 17</u> : Resuelve el sistema (donde X e Y son matrices de dimensión 2 x 3)

$$\begin{cases} 5X - 7Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

HALLAR MATRICES QUE CONMUTEN CON UNA DADA

<u>EJERCICIO 18</u> : Halla todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 19</u> : Calcular las matrices cuadradas de dimensión 2 que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

COMBINACIÓN LINEAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

<u>EJERCICIO 20</u> : Estudiar si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes $u_1 = (2,1,-4,3)$, $u_2 = (-1,2,0,-3)$, $u_3 = (7,-4,-8,15)$, $u_4 = (-6,7,4,-15)$

<u>EJERCICIO 21</u> : Estudiar la dependencia o independencia de los vectores: $u_1(1,2,3)$, $u_2(-1,0,2)$, $u_3(3,4,4)$. Expresa el vector $u(2,-3,4)$ como combinación lineal de ellos.

RANGO DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 22 : Calcula el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -4 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4 & -1\\ 5 & 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 1 & 12 & -11 & 7\\ 0 & 7 & -7 & 3\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 23 : Dados los vectores: $\vec{u}_1=(3,-1,2,0)$, $\vec{u}_2=(1,2,-1,1)$, $\vec{u}_3=(2,1,0,-1)$
Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1, u_2, u_3

EJERCICIO 24 : Halla el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes: $m=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix}$

Ejercicio 25 :

a) Calcula el rango de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

b) ¿Cuántas filas hay en la matriz A que sean linealmente independientes? Razona tu respuesta.

Ejercicio 26 : Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores del parámetro:

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 3 & 0\\ 1 & a & 2 & 1\\ 2 & 2a & 5 & a\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & a & -3 & 0\\ 4 & 1 & a & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & t & 3 & 2\\ 1 & 8-3t & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda+1 & 1\\ \lambda & 0 & 0 & 2\\ 0 & \lambda & 2 & 0\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 2\\ 0 & t & 4 & 0\\ -1 & 3 & t & -2\end{pmatrix}$$

SISTEMAS EN FORMA MATRICIAL

Ejercicio 27 : Expresa y resuelve los siguientes sistemas de forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-3\\ 3x+y+z=0\\ x-y+z=2\end{array}\right\}$ b) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1\\ 3x+2y=1\\ x+y+2z=2\end{array}\right.$ c) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=1\\ 3x-y+2z=-4\\ x-y+z=-1\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=7\\ x+y-2z=5\\ y+2z=0\end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=6\\ 2x-y+z=8\\ x-2y+z=7\end{array}\right\}$ f) $\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=-5\\ x+2y+z=0\\ 2x+z=3\end{array}\right.$ g) $\left\{\begin{array}{l} 4x+2y-z=6\\ x+z=1\\ 2x+y+z=3\end{array}\right.$