1. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{a}=2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BO}=-\vec{d}-\vec{b}$

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{d})=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}$

2. $x\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-11\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+4y=-2\\-3x+y=-11\\5x+ky=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\\k=7\end{cases}$

3. a) $1(\vec{u}-\vec{v})+1(\vec{v}-\vec{w})+1(\vec{w}-\vec{u})=\vec{0}$, luego los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $\alpha(\vec{u}-\vec{v})+\beta(\vec{v}-\vec{w})+\gamma(\vec{w}+\vec{u})=\vec{0}\Rightarrow$

$(\alpha+\gamma)\vec{u}+(\beta-\alpha)\vec{v}+(\gamma-\beta)\vec{w}=\vec{0}$. Como $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, se tiene que

$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\\beta-\alpha=0\\\gamma-\beta=0\end{cases}$, cuya única solución es la trivial, $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$; luego los tres vectores pedidos son linealmente independientes.

4. $\begin{vmatrix}1&k&1\\k&1&1\\1&1&k\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3k-k^3-2=0\Leftrightarrow-(k-1)^2(k+2)=0$

Se anula si $k=1$ o $k=-2$. Para estos valores de k, los vectores son linealmente dependientes.

5. La longitud de la diagonal AC es igual al doble de la apotema, es decir, $2\cdot\frac{3}{2}=3$ y la longitud de la diagonal EB es el doble del lado, $2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 30^\circ=\frac{9}{2}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 120^\circ=-\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 120^\circ=-6$

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=3(\vec{x}\cdot\vec{x})+5(\vec{x}\cdot\vec{y})-2(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=3\cdot 2+5\cdot(-1)-2\cdot 3=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(\vec{x}+2\vec{y})=(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=2+4\cdot(-1)+4\cdot 3=10$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=(3\vec{x}-\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=9(\vec{x}\cdot\vec{x})-6(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=9\cdot 2-6\cdot(-1)+3=27\Rightarrow|\vec{b}|=+\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{27}}=-\frac{\sqrt{30}}{18}$

7. $\vec{x}\times\vec{y}=(0,2,1)$ Se normaliza y se multiplica por el módulo deseado.

$\pm\frac{\vec{x}\times\vec{y}}{|\vec{x}\times\vec{y}|}\sqrt{20}=\pm\left(0,\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}\right)=\pm(0,4,2)$

8. $\vec{u}+2\vec{v}=(-2k+2,k+2,3)$

$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{v}=0\Rightarrow-2k+2+k+2-3=0\Rightarrow k=1$

9. Se hallan tres vectores cualesquiera ortogonales al vector $\vec{a}$ y se normalizan. Por ejemplo:

$\vec{x}=(5,3,0)$, $\vec{y}=(1,0,3)$, $\vec{z}=(0,1,-5)$

$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\left(\frac{5}{\sqrt{34}},\frac{3}{\sqrt{34}},0\right)$, $\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$ Basta comprobar que $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son linealmente dependientes: $\begin{vmatrix}5&3&0\\1&0&3\\0&1&-5\end{vmatrix}=-15+15=0$

10. $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-16}{\sqrt{35}\sqrt{38}}\Rightarrow\alpha\approx 116^\circ 1'$

$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}=\frac{-6}{\sqrt{35}\sqrt{18}}\Rightarrow\beta\approx 103^\circ 50'$

$\cos\gamma=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|}=\frac{10}{\sqrt{38}\sqrt{18}}\Rightarrow\gamma\approx 67^\circ 31'$

$\cos\phi=\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{-15}{\sqrt{65}\sqrt{41}}\Rightarrow\phi\approx 106^\circ 54'$

11. $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=(6,54,-78)$

$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=(39,52,-91)$

$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=12$

$|(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}|=\sqrt{6^2+54^2+(-78)^2}=\sqrt{9036}$

$|\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})|=\sqrt{39^2+52^2+(-91)^2}=\sqrt{12506}$

12. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}\times\vec{u})-(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{v}\times\vec{u})-(\vec{v}\times\vec{v})=$

$=\vec{0}-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{v})-\vec{0}=-2(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times(-2\vec{v})$

13. $\begin{vmatrix}-1&0&3\\-2&-3&1\\k&2&-1\end{vmatrix}=2009\Rightarrow 9k-13=2009\Rightarrow k=\frac{674}{3}$

14. $\vec{w}=\vec{v}\times\vec{u}=(2,4,3)$

$\vec{w}\cdot\vec{x}=\vec{w}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda(\vec{w}\cdot\vec{u})+\mu(\vec{w}\cdot\vec{v})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$

luego es ortogonal a todos ellos.

15. Para comprobarlo se toma un vector cualquiera de V^2, por ejemplo $\vec{u}+2\vec{v}=(0,-6,7)$ y se multiplica escalarmente por otro vector de V^1, por ejemplo,

$-3\vec{w}=(-30,-21,-18)$.

$(0,-6,7)\cdot(-30,-21,-18)=0+126-126=0$

Para demostrarlo, se toma el caso general:

$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\alpha\vec{w}=\lambda\alpha(\vec{u}\cdot\vec{w})+\mu\alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})=$

$=(\lambda\alpha)\cdot 0+(\mu\alpha)\cdot 0=0$