1. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+87}{(n+1)+1} - \dfrac{2n+87}{n+1} = \dfrac{-85}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0\ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ es monótona decreciente.

La menor de las cotas superiores es $a_1 = \dfrac{89}{2}$ y la mayor de las inferiores es 2, su límite, ya que

$\dfrac{2n+87}{n+1} - 2 = \dfrac{85}{n+1} > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$.

2. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)-1} - \dfrac{n^2}{2n-1} = \dfrac{2n^2-1}{4n^2-1} > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$

Es monótona creciente.

Cota inferior $a_1 = 1$. No está acotada superiormente. Para hallar a partir de qué término $a_n > 2\,000\,000$ se resuelve la inecuación:

$\dfrac{n^2}{2n-1} > 2\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 - 4\cdot 10^6 n + 2\cdot 10^6 > 0$ y eso ocurre $\forall n > 3\,999\,999{,}5$, es decir, a partir del término $a_{4\,000\,000}$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-5)(7-3n)}{3-2n+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(2-\dfrac{5}{n}\right)\left(\dfrac{7}{n}-3\right)}{n^2\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n}+1\right)} =$

$= \dfrac{2\cdot(-3)}{1} = -6.$

b) Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7-3n}{3-2n}\right) = \dfrac{3}{2}$ los términos de la sucesión $(-1)^n\cdot\dfrac{7-3n}{3-2n}$ se acercarán alternativamente a $-\dfrac{3}{2}$ y a $\dfrac{3}{2}$, por lo que no tiene límite y es oscilante.

c) Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{5+n^2} = 0$ y

$-\dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant (-1)^n\cdot\dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \dfrac{1+2n}{5+n^2}$ entonces

$0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1+2n}{5+n^2}\right) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{5+n^2} = 0$

y el límite buscado es 0. Converge a 0.

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \dfrac{-4}{1+1} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{4}{2n-1}\cdot(5n+1)} = e^{\frac{5}{2}}$

5. $\left|a_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+7}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{5}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$

Si $\varepsilon = 0{,}000001 \Rightarrow n > 4\,999\,999$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{2n-1} - \dfrac{n^2+5}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-9n+5}{4n^2-1} = 1$, luego es convergente.

7. a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(3x-8) = -5$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+ax) = 1+a$

Por tanto, el límite existe $\Leftrightarrow a = -6$.

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(2+\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(2-(x+1)\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(2+\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(2+(x+1)\right) = 4$. No tiene límite.

c) $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{-\infty} = 0$

No tiene límite.

8. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(3k^2x - 5k^2) = k^2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k$.

Para que exista el límite, $k^2 = 5 - 4k \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{cases}$

En el primer caso el límite es 1 y en el otro 25.

9. a) $|(2x+5)-11| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

b) $\left|\dfrac{2x^2-8}{x-2} - 8\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2(x-2)^2}{x-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

Si $\varepsilon = 0{,}02 \Rightarrow \delta = 0{,}01$

c) $\dfrac{3}{1-x} > k \Leftrightarrow 1 - x < \dfrac{3}{k} \Leftrightarrow |x-1| < \dfrac{3}{k} = \delta$

10. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-x^3-4x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^3+x^2+2x)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\left(\frac{4}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{-4}{2x}\right)} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{12\sqrt{3}}$

11. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^3-8} = \dfrac{1}{12}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{tg}2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x} = 0$