Soluciones

1. $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10-9 & 6-9 & 9-9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 42 = 210$

2. $|A| = 2(a + 3)(a - 1)$. Por tanto:

Si $a \neq -3$ y $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a = -3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad (uniparamétrico). La solución se escribe $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -3\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $AX - 2X = B \Rightarrow (A - 2I)X = B \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}B$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad |A - 2I| = -1.$

Por tanto, resulta $(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 & -62 & -62 \\ -20 & -20 & -20 \\ -25 & -25 & -25 \end{pmatrix}$

4. a) Radio $r = d(C, \pi) = \dfrac{|2 + 2 + 20|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 8$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 59$

b) $T = \pi \cap r$ donde $r(C, \vec{n}_\pi)$: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 2(-2\lambda) + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{8}{3} \Rightarrow T\left(\dfrac{19}{3}, \dfrac{14}{3}, -\dfrac{16}{3}\right)$

c) $A = 4\pi r^2 = 256\pi$, $\quad V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2048}{3}\pi$

5. a) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \dfrac{1 + 3 + 5}{\sqrt{3}\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha = 28^\circ\ 33'\ 39''$

c) Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, normales a π_1 y π_2 respectivamente, son directores del plano π:

$\pi = \begin{vmatrix} x - 3 & y + 5 & z - 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi:\ x + 2y - z = -10$

6. a) π: $3x + y + d = 0$. Como $P \in \pi \Rightarrow d = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi$: $3x + y + 8 = 0$.

b) $M = \pi \cap r \Rightarrow 3(1 + 3t) + (-1 + t) + 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, -2, -2)$

La distancia pedida será:

$d(P, r) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$ u

c) M es el punto medio del segmento PP', donde $P'(x, y)$ es el simétrico de P buscado. Por tanto:

$-2 = \dfrac{x - 3}{2} \Rightarrow x = -1$; $-2 = \dfrac{x + 1}{2} \Rightarrow y = -5$,

$-2 = \dfrac{z}{2} \Rightarrow z = -4 \Rightarrow P'(-1, -5, -4)$

7. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a + 2b - 4 = 2a + 12 \Rightarrow a = 2b - 16$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a = 0$ y $b = 8$

La tesis del teorema dice que:

$\exists c \in (-1, 4)\ /\ \dfrac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \dfrac{33}{5} = f'(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c < 2, \quad 8 - 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{7}{10} \\ c > 2, \quad 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{33}{10} \end{cases}$

8. $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

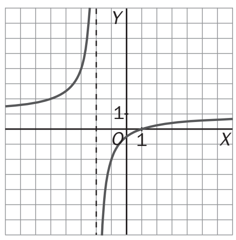
$f'(x) = \dfrac{3}{(2 + x)^2} > 0$; $f''(x) = \dfrac{-6}{(2 + x)^3} \neq 0$, $\forall x \in D$.

No tiene extremos relativos ni puntos de inflexión. Creciente en todo D.

Si $x \in (-\infty, -2)$ es cóncava hacia arriba y en $(-2, +\infty)$ es cóncava hacia abajo.

Asíntota vertical: $x = -2$.

Asíntota horizontal: $y = 1$.



9. a) $\displaystyle\int \frac{6x}{2\sqrt{5 + 3x^2}}\,dx = \sqrt{5 + 3x^2} + C$

b) $\dfrac{7}{3}\displaystyle\int \frac{dx}{x - 3} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{7}{3}\ln|x - 3| - \frac{4}{3}\ln|x| + C$

10. a) $A = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$ u^2

b) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 (e^{-x})^2\,dx = \pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ u^3