1. Calculamos $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(2x+1)(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{4}{7}.$

La función sería continua en $x=3 \Leftrightarrow f(3)=\dfrac{4}{7}.$

En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=-\infty \qquad \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=+\infty$$

2. a) $D=\mathbb{R}$ c) $D=[3,+\infty)$

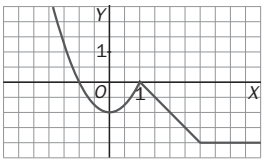
b) $D=\mathbb{R}-\{-1,3\}$ d) $D=[2,3)$

Las cuatro funciones son continuas en sus respectivos dominios.

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(ax+b)=3a+b\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-2)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+b=-2$

De donde se obtiene $a=-1$ y $b=1$.



4. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3k^2x-5k^2)=k^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2kx+1)=5-4k\end{array}\right\}\Rightarrow k^2=5-4k$

Se obtienen dos valores: $k=1$ y $k=-5$.

5. Se estudian los puntos en donde cambia la definición de la función.

$$x=-1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(e^{-x}-e)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3+x}{x+1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

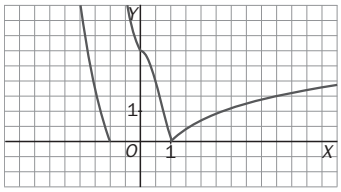
$\Rightarrow$ Discontinuidad inevitable de salto infinito.

$$x=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+x}{x+1}=3\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Discontinuidad evitable. Se elimina tomando $f(0)=3$.

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)}(k+\ln x)=k+\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sería continua si $k=-\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$



6. Como $f(1)=5>0$ y $f(3)\approx -0{,}38<0\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_1\in(1,3)\,/\,f(x_1)=0$

Como $f(3)\approx -0{,}38<0$ y $f(e^6)=5>0\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_2\in(3,e^6)\,/\,f(x_2)=0$

En este caso x_1 y x_2 se pueden determinar de manera exacta, pues resolviendo la ecuación $f(x)=0$ se obtiene:

$$\ln x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}1\Rightarrow x_1=e\\ 5\Rightarrow x_2=e^5\end{cases}$$

7. La función $g(x)=x^3+2x-7$ es continua en $[2,4]$.

Como $g(2)=-3<0$ y $g(4)=49>0$, existe un valor en el intervalo $(2,4)$ que anula g, es decir, la función del denominador de f y, por tanto, la función f no es continua en $[2,4]$ y no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

8. Consideramos la función $f(x)=x^3+x-5$ que es continua en $[1,2]$ y, además, $f(1)=-3<0$, $f(2)=5>0$.

Por el teorema de Bolzano se sabe que $\exists c\in(1,2)\,/\,f(c)=0$ luego c es solución de la ecuación dada.

Si se calculan los valores $f(1{,}2)$, $f(1{,}4)$, $f(1{,}6)$, $f(1{,}8)$ se puede determinar el intervalo en el que se encuentra la solución:

$f(1{,}4)=-0{,}856<0$; $f(1{,}6)=0{,}696>0\Rightarrow$

$\Rightarrow c\in(1{,}4;\,1{,}6)$

9. La función es continua y positiva en $\mathbb{R}$ y, además, como su derivada $f'(x)=\dfrac{5e^x}{(1+e^x)^2}>0\ \forall x$, f es monótona creciente.

Se calculan $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5e^x}{1+e^x}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5e^x}{1+e^x}=5$, por lo que el ínfimo es 0 y el supremo 5 y no son alcanzables, es decir, no hay ni máximo ni mínimo absolutos.

10. La derivada $f'(x)=\dfrac{e^x(e^{2x}+2e^x-1)}{(1+e^x)^2}$ solo se anula para $x=\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\approx -0{,}9$.

Se hallan $f(3)\approx 0{,}9549$, $f\left(\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)\approx 0{,}82$ y $f(1)\approx 2{,}25$.

Luego en el intervalo $[-3,1]$, f alcanza el mínimo en $x=\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$ y el máximo en $x=1$.