Soluciones

1. Se efectúa la división entera de polinomios $P(x) : D(x)$ y resulta:

Cociente: $C(x) = 4x - 8$. Resto: $R(x) = 21x - 7$.

2. a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{-x}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)(1+x^2)}{x^2(x+1)} = \frac{(x-1)(1+x^2)}{x}$

b) $\frac{x^2 - x - 2}{x+3} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)^3} = 1$

3. a) $3(x-1)(x+2) = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ solución doble.

b) $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3} = 0 \\ 2x + \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{10} \end{cases}$

4. La suma de las dos raíces es $S = \frac{4 + \sqrt{7}\,i}{3} + \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3} = \frac{8}{3}$ y el producto $P = \frac{4+\sqrt{7}\,i}{3} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3} = \frac{16+7}{9} = \frac{23}{9}$.

La forma canónica de la ecuación $x^2 - mx + n = 0$ conduce a: $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 23 = 0$

5. a) $3 \cdot (2x-1)^2 - 3 \cdot (2x-1) \cdot (2x+1) = -12x + 6$ b) $\frac{2x-1}{3} + \frac{5x+2}{12} - \frac{2x-3}{4} = \frac{7x+7}{12}$

6. $x_1 + x_2 = 8 \Leftrightarrow 2 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 6$, $x_1x_2 = k \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = k \Rightarrow k = 12$

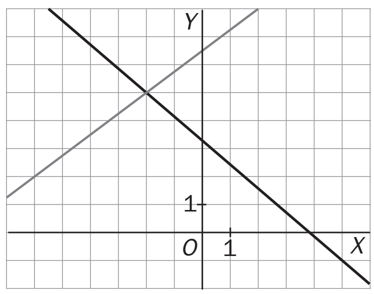
7. $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 6 + b = 0 \\ 1 + a + 3 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -14 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$

El polinomio es $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, y el valor numérico pedido es $P(3) = 27 - 27 + 9 - 2 = 7$.

8. Se denotan por x e y los lados del rectángulo original. Se plantea el sistema:

$\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ \frac{3}{4}x\,\frac{3}{2}y = xy + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 9xy = 8xy + 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x(20 - x) = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ cm} \\ y = 12 \text{ cm} \end{cases}$

Los lados del nuevo rectángulo son $x' = \frac{3}{4}x = 6$ cm e $y' = \frac{3}{2}y = 18$ cm, y su perímetro es $2 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 48$ cm.



9. La solución tiene que verificar todas las ecuaciones; por tanto

$\begin{cases} 3 \cdot (-2) - 2b \cdot 5 + 26 = 0 \\ a \cdot (-2) + 7 \cdot 5 - 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b = 20 \\ 2a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa las coordenadas del punto de corte de las dos rectas que las ecuaciones determinan.

10. Al restar las dos últimas se obtiene $2y = 4 \Rightarrow y = 2$.

Sumando las dos últimas se obtiene $2x + 2z = 8 = x + z = 4$. Y como estas dos condiciones también las cumple la primera ecuación, todas las soluciones del sistema son de la forma $S = (\lambda, 2, 4 - \lambda)$ para todo $\lambda \in$ R. Otra solución podría ser $S = (5, 2, -1)$, si se da el valor 5 al parámetro λ.

11. Suponiendo que los dos primeros días hicieran bien las cuentas y llamando x al precio de un refresco e y al precio de un café, el sistema que refleja el problema es:

$\begin{cases} 3x + 5y = 13{,}5 \\ 4x + 2y = 11 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 20y = 54 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y = 21 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$

La tercera ecuación no se verifica con los valores de las dos primeras. Luego el sistema es incompatible y, si las dos primeras cuentas están bien hechas, la tercera está necesariamente mal hecha, de ahí la reclamación.