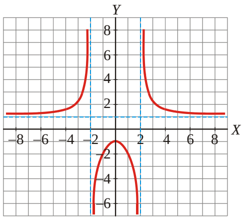
TEMA 6 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

CÁLCULO GRÁFICO DE LÍMITES

EJERCICIO 1 : Sobre la gráfica de *f(x),* halla :



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

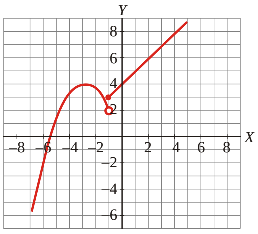
c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$

EJERCICIO 2 : A partir de la gráfica de *f(x)*, calcula:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

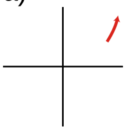
e) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=2$ d) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=3$ e) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=0$

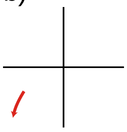
EJERCICIO 3 : Representa gráficamente los siguientes resultados: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

Solución:

a)

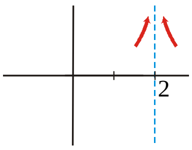


b)



EJERCICIO 4 : Representa los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

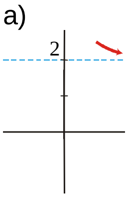
Solución:



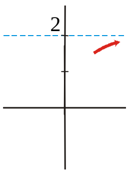
EJERCICIO 5 : Representa en cada caso los siguientes resultados: **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

Solución:

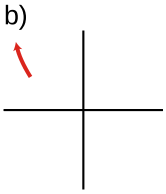
a)



o bien



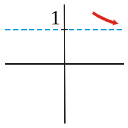
b)



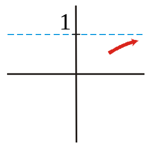
EJERCICIO 6 : Representa gráficamente: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ b) $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=0$

Solución:

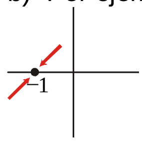
a)



o bien



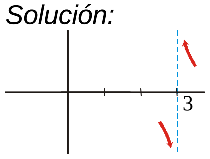
b) Por ejemplo:



EJERCICIO 7 : Para la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, sabemos que : $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x+1}{x-3}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x-3}=-\infty$

Representa gráficamente estos dos límites.

Solución:



CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS

EJERCICIO 8 : Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{x^2+2x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-9}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\cos x$ d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{6-3x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{x^2+2x+3}=\dfrac{4}{9+6+3}=\dfrac{4}{18}=\dfrac{2}{9}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9-9}=\sqrt{0}=0$ c) $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^2+x+1}=\dfrac{-1}{4+2+1}=\dfrac{-1}{7}$ e) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{6-3x}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

EJERCICIO 9 : Calcula el límite de la función $f(x)=-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x}{2}$ en $x=1$ y en $x=3$.

Solución:

$\lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$ $\lim\limits_{x\to3}\left(-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x}{2}\right)=-27+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{51}{2}$

EJERCICIO 10 : Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}$

Solución:

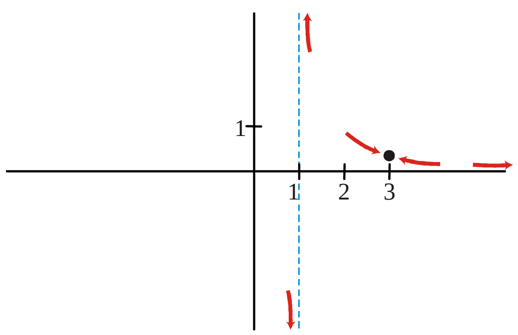
a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x(x-1)}$

Hallemos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2}{x(x-1)}=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x(x-1)}=+\infty$



<u>EJERCICIO 11</u> : Resuelve los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$

Solución:

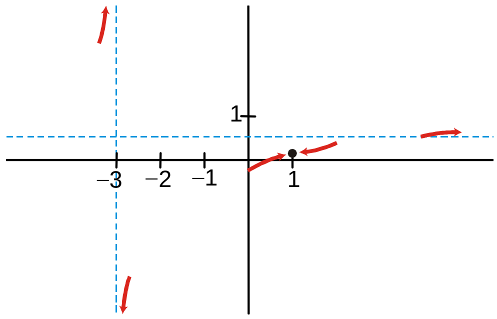
a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x(x+3)}{2(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{2(x+3)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x}{2(x+3)}=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x}{2(x+3)}=-\infty$



<u>EJERCICIO 12</u> : Halla los límites siguientes y representa gráficamente la información que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}$

Solución:

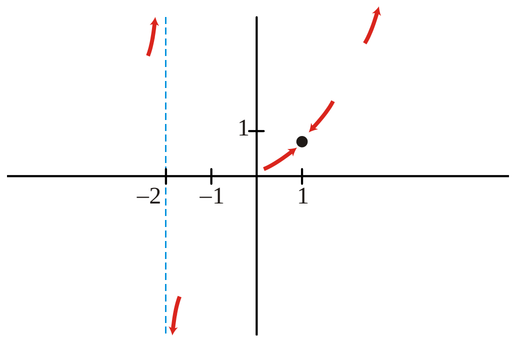
a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3(x+2)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3}{x+2}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^3}{x+2}=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x^3}{x+2}=-\infty$



<u>EJERCICIO 13</u> : Halla los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}$

Solución:

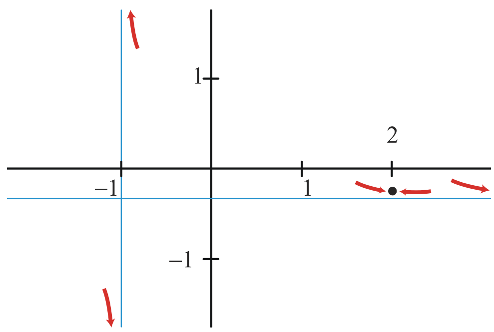
a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}=\dfrac{-6}{27}=\dfrac{-2}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}=-\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x(x+1)}{3(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x}{3(x+1)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x}{3(x+1)}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-x}{3(x+1)}=+\infty$



<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula los límites siguientes y representa gráficamente los resultados que obtengas: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

Solución:

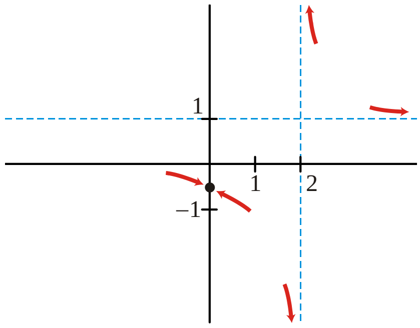
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)}{(x-2)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty; \quad \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$



CÁLCULO DE LÍMITES

<u>EJERCICIO 15</u> : Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2-3)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

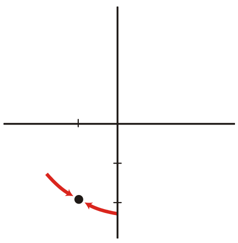
d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{3}-2x\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^4+1}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^4+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2}$ **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2}$

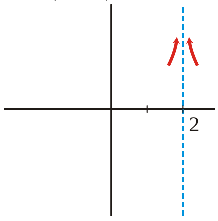
j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3-x)^3$ **k)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x+1}$

Solución:

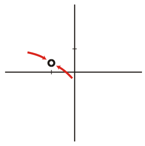
a) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2-3) = 1-3 = -2$



b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

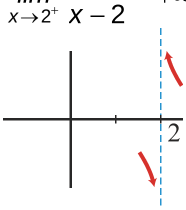


d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-2}$

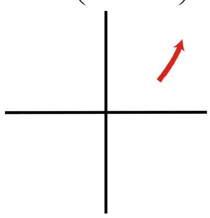
Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$

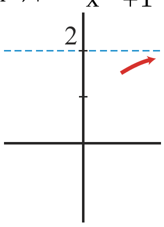
$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$



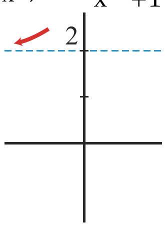
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{3}-2x\right) = +\infty$



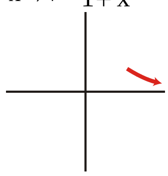
f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^4+1} = 2$



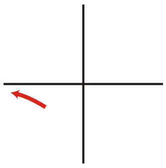
g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^4+1} = 2$



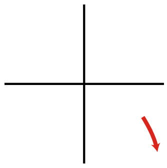
h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2} = 0$



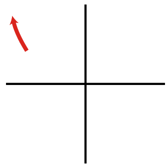
i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2}=0$



j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-x)^3=-\infty$



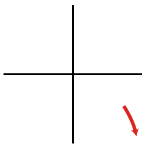
k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x+1}=+\infty$



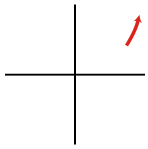
<u>EJERCICIO 16</u>: Halla el límite cuando $x\to+\infty$ de las siguientes funciones y representa gráficamente la información que obtengas: a) $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{2}+1$ b) $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x^3}{5}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{2}+1\right)=-\infty$



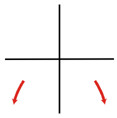
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+2x^3}{5}=+\infty$



<u>EJERCICIO 17</u> : Calcula el límite cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ de la siguiente función y representa la información que obtengas: $f(x)=\dfrac{1-2x^2+4x}{3}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x^2+4x}{3}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-2x^2+4x}{3}=-\infty$

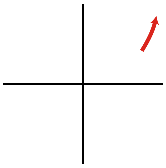


<u>EJERCICIO 18</u> : Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

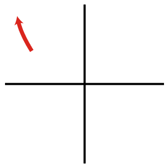
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x)^2$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-x)^2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x)^2=+\infty$



b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-x)^2=+\infty$

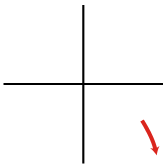


<u>EJERCICIO 19</u> : Calcula los siguientes límites y representa el resultado que obtengas:

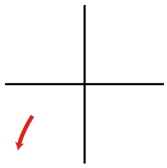
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{4}+x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^4}{4}+x\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{4}+x\right)=-\infty$



b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^4}{4}+x\right)=-\infty$



CÁLCULO DE LÍMITES

<u>EJERCICIO 20</u> : Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x - x^2 + 1\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{\log x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right]$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2}{\log x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2^x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^x - x^2\right]$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3 - \log x\right]$ **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{x^2+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x - x^2 + 1\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{\log x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^{\frac{9}{2}}\right] = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x+1} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^x - x^2\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3 - \log x\right] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{-x}}{x^2+1} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

<u>EJERCICIO 21</u> : Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{5x^2-2x}-3x\right)\left(\sqrt{5x^2-2x}+3x\right)}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-2x-9x^2}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^2-2x}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-1}{\sqrt{x^6+2x}}=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)\ (x^2-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-1-x^4-2x^3}{x^3+x+2x^2+2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3-1}{x^3+2x^2+x+2}=-2$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-4x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1-4x^2}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=-\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{-2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)\ (x^2+1)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+3x^2-x^4-x^3}{x^3+x+x^2+1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-x^3+3x^2}{x^3+x^2+x+1}=+\infty$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

<u>EJERCICIO 22</u> : Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}\right]$ **e)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}=\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\dfrac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{3x-2}}=\sqrt[3]{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{2x+4}-2)\ (\sqrt{2x+4}+2)\ (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)\ (\sqrt{x+1}+1)\ (\sqrt{2x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x+4-4)\ (\sqrt{x+1}+1)}{(x+1-1)\ (\sqrt{2x+4}+2)}=$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{2x+4}+2} = \dfrac{4}{4} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-5}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \Rightarrow$ No existe

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{2x}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3}\right] = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{-18}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = -\infty \Rightarrow$ No existe

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{9}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow$ No existe

<u>EJERCICIO 23</u> : Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}-1\right)\cdot\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6}\right)\cdot\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(-x^2+3x-2)\,(3x)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x(x-2)\,(x-1)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}} = e^{\frac{3}{6}} = e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}-1\right)\cdot\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4}\right)\cdot\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)\,(x-2)}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)}{(x^2-2x+4)}} = e^{\frac{2}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}-1\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4}\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{4x+4}\cdot\frac{2x}{x-3}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(2x)}{(4x+4)}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}-1\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1}\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-8x}{5x+1}\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}} = e^{\frac{-1}{2}}$

EJERCICIO 24 : Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+3x}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}-1\right)\cdot\left(2x^2-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x-2x-5}{2x+5}\right)\cdot\left(2x^2-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+4}{2x+5}}=e^{-\infty}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{4+5x}-1\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2-4-5x}{4+5x}\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-12x}{12+15x}}=e^{\frac{-12}{15}}=e^{\frac{-4}{5}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x-2}{-3x+5}\right)^{x^2-1}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{-2x-3}=2^{-\infty}=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{4+6x^2}}=e^{0}=1$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2-2}}=e^{0}=1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2-9x}\right)^{-x}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\infty}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x-1}{-3x+2}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}-1\right)\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2-3-2x}{3+2x}\right)\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x-5}{3+2x}}=e^{\frac{-5}{2}}$

EJERCICIO 25 : Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{4+3x}\right)^{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}}$ f) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-x^2-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x+x}=\dfrac{-3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=+\infty\Rightarrow$ Como son distintos $\Rightarrow$ No existe el límite

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1}=\dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1}=+\infty$ $\Rightarrow$ Como son distintos $\Rightarrow$ No existe el límite

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{4+3x}\right)^{x+1}=\left(1^{+\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{4+3x}-1\right)\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2-4-3x}{4+3x}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-6}{3x+4}}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{-x^3-3x}}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^{3/5}}{x}=0$

f) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-(x+1)\,(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-x^2-3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=\dfrac{-6}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=-\infty$ $\Rightarrow$ No existe el límite

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{5}{3}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}-.x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x}=$

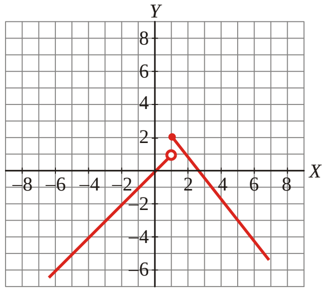
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2x}=\dfrac{-1}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2\,(x-1)-3x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3x^2-3x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{x^2-1}=-3$

j) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+3}{2x+2}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3-2x-2}{2x+2}\cdot\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-x+1}{(2x+2)(x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x+2}}=e^{\frac{-1}{4}}$

CONTINUIDAD

<u>EJERCICIO 26</u> : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



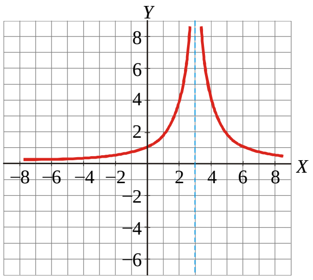
Di si es continua o no en $x = 1$ y en $x = 2$. Si en alguno de los puntos no es continua, indica cuál es la causa de la discontinuidad.

Solución:

En $x = 1$ no es continua porque presenta un salto en ese punto. Observamos que $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

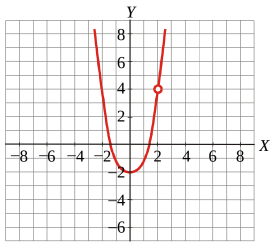
En $x = 2$ sí es continua.

<u>EJERCICIO 27</u> : A partir de la gráfica de $f(x)$ señala si es continua o no en $x = 0$ y en $x = 3$. En el caso de no ser continua, indica la causa de la discontinuidad.



Solución:
En $x = 0$, sí es continua.
En $x = 3$ es discontinua porque no está definida, ni tiene límite finito. Tiene una rama infinita en ese punto (una asíntota vertical).

<u>EJERCICIO 28</u> : Dada la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = 1$?
b) ¿Y en $x = 2$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad.

Solución:
a) Sí es continua en $x = -1$.
b) No, en $x = 2$ es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

<u>EJERCICIO 29</u> : Averigua si la siguiente función es continua en $x = 2$: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x) = 4 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Es continua en } x = 2 \text{ porque } \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

EJERCICIO 30 : Comprueba si la siguiente función es continua en $x = 0$. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x^2-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)=-1 \\ f(0)=-1 \end{array}\right\} \text{Es continua en } x=0 \text{ porque } \lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

EJERCICIO 31 : Halla el valor de *k* para que $f(x)$ sea continua en $x=1$: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ k & \text{si } x>1 \end{cases}$

Solución:

$$\text{En } x=1: \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=k \end{array}\right. \\ f(1)=2.1+1=3 \end{array}\right\} \quad k=3$$

Solución: f continua en x = 1 si k = 3

EJERCICIO 32 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq -1 \\ x^2-1 & \text{si } x>-1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\leq 2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{3x-1}{2} & \text{si } x>1 \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ i) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x\leq -2 \\ x^2 & \text{si } x>-2 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Solución:

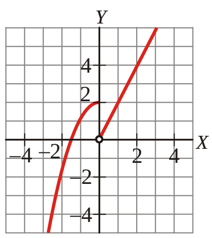
a) Continuidad:

- f continua en R – {0}
- $$\text{En } x=0: \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-x^2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x)=0 \end{array}\right. \\ f(0)=2-0^2=2 \end{array}\right\}$$ f discontinua inevitable de salto finito(2) en x=0

Representación: $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$

- Si $x\leq 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x>0$, es un trozo de recta.

X	-∞	-2	-1	0	0^+	1	+∞
Y	-∞	-2	1	2	0	2	+∞



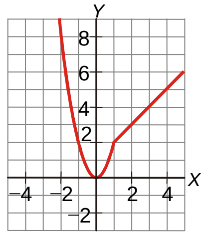
b) Continuidad

- f continua en R – {1}
- En $x = 1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x^2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2 \end{cases} \\ f(1) = 2.1^2 = 2 \end{array}\right\}$. f continua en x = 1
- Solución: f continua en todo R.

Representación

- Si $x \le 1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 1$, es un trozo de recta.

X	-∞	-2	-1	0	1	1^+	2	+∞
Y	+∞	8	2	0	2	2	3	+∞



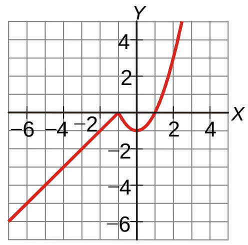
c) Continuidad

- f continua en R – {-1}
- En $x = -1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{cases} \\ f(-1) = -1+1 = 0 \end{array}\right\}$. f continua en x = -1
- Solución: f continua en todo R.

Representación:

- Si $x \le -1$, es un trozo de recta.
- Si $x > -1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	-∞	-2	-1	-1^+	0	1	2	+∞
Y	-∞	-1	0	0	-1	0	3	+∞



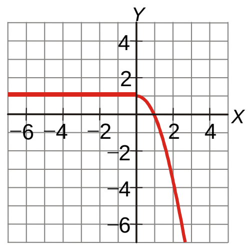
d) Continuidad

- f continua en R – {0}
- En $x = 0$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{cases} \\ f(0) = 1 = 1 \end{array}\right\}$. f continua en x = 0
- Solución: f continua en todo R

Representación:

- Si $x \le 0$, es un trozo de recta horizontal.
- Si $x > 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	-∞	-1	0	0	1^+	2	+∞
Y	1	1	1	1	0	-3	-∞

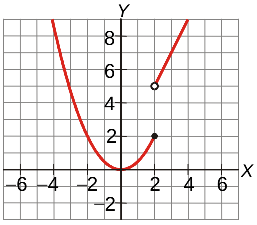


e) Continuidad:

- f continua en R – {2}
- En $x = 2$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1) = 5 \end{array}\right. \\ f(2) = \dfrac{2^2}{2} = 2 \end{array}\right\}$ f discontinua inevitable de salto finito(3) en x=2

Representación:

- Si $x \le 2$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 2$, es un trozo de recta.



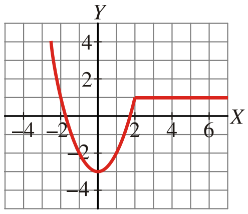
f) Continuidad:

- f continua en R – {2}
- En $x = 2$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-3) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(1) = 1 \end{array}\right. \\ f(2) = 2^2 - 3 = 1 \end{array}\right\}$ f continua en x = 2
- Solución: f continua en todo R.

Representación:

- Si $x \le 2$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 2$, es un trozo de recta horizontal.

X	-∞	-2	-1	0	1	2	2^+	3	+∞
Y	+∞	1	-2	-3	-2	1	1	1	1



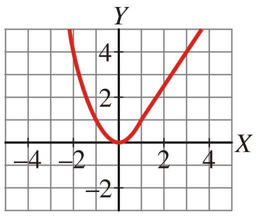
g) Continuidad

- f continua en R – {1}
- En $x = 1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x-1}{2}\right) = 1 \end{array}\right. \\ f(1) = 1^2 = 1 \end{array}\right\}$ f continua en x = 1
- Solución: f continua en todo R.

Representación:

- Si $x \le 1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 1$, es un trozo de recta.

X	-∞	-2	-1	0	1	1^+	2	+∞
Y	+∞	4	1	0	1	1	5/2	+∞



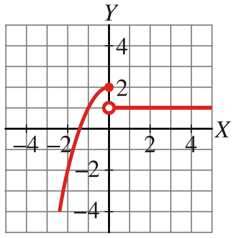
h) Continuidad

- f continua en R – {0}
- En $x = 0$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2-x^2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1) = 1 \end{array}\right. \\ f(0) = 2 - 0 = 2 \end{array}\right\}$ f discontinua inevitable de salto finito(1) en x=0

Representación:

- Si $x \le 0$, es un trozo de parábola.($V_x = 0$)
- Si $x > 0$, es un trozo de recta horizontal.

X	-∞	-2	-1	0	2^+	3	+∞
Y	-∞	-2	1	2	1	1	1



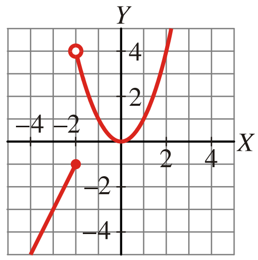
i) Continuidad

- ➢ f continua en R – {-2}
- ➢ En $x = -2$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x+3) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \left(x^2\right) = 4 \end{array}\right. \\ f(-2) = 2.(-2)+3 = -1 \end{array}\right\}$ f discontinua inevitable de salto finito(5) en x=-2

Representación

- Si $x \le -2$ es un trozo de recta.
- Si $x > -2$ es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	-∞	-3	-2	-2^+	-1	0	1	2	+∞
Y	-∞	-3	-1	4	1	0	1	4	+∞



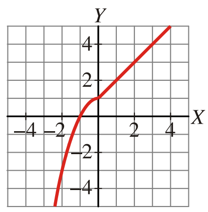
j) Continuidad

- ➢ f continua en R – {0}
- ➢ En $x = 0$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1-x^2\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right. \\ f(0) = 1-0^2 = 1 \end{array}\right\}$ f continua en x = 0
- ➢ Solución: f continua en todo R

Representación:

- Si $x \le 0$, es un trozo de parábola.($V_x = 0$)
- Si $x > 0$, es un trozo de recta.

X	-∞	-2	-1	0	2^+	3	+∞
Y	-∞	-3	0	1	3	4	+∞



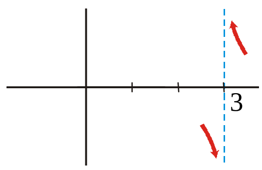
ASÍNTOTAS

<u>EJERCICIO 33</u> : Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

Solución: $x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

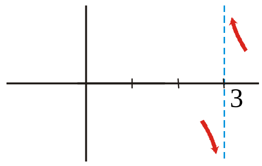


<u>EJERCICIO 34</u> : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x^2 - 9} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x^2 - 9} = +\infty$

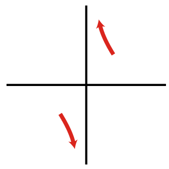


<u>EJERCICIO 35</u> : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x^2 + 2x}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x(x+2)}$

Calculamos los límites laterales:

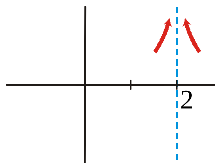
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{x^2 + 2x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2 + 2x} = +\infty$



<u>EJERCICIO 36</u> : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

Solución:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$

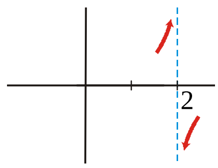


<u>EJERCICIO 37</u> : Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.

Solución: $\dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$



<u>EJERCICIO 38</u> : Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

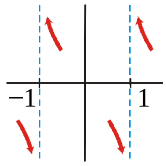
Solución:

a) • $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$; $x = 1. \Rightarrow$ Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.

Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

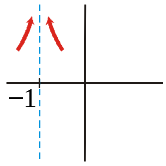


b) • $x^2+2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \Rightarrow$ Solo tiene una asíntota vertical: $x=-1$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

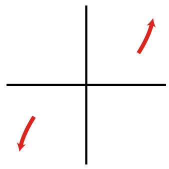


<u>EJERCICIO 39</u> : Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos:

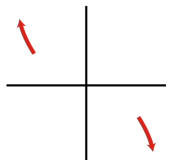
a) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x$ **b)** $f(x)=(3-x)^3$ **c)** $f(x)=\frac{1-x^4}{x^2}$ **d)** $f(x)=\frac{2x^3+x}{1-x}$

Solución:

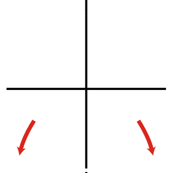
a)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=-\infty$$



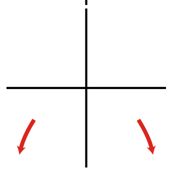
b) $\lim_{x\to +\infty}(3-x)^3=-\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}(3-x)^3=+\infty$



c)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$



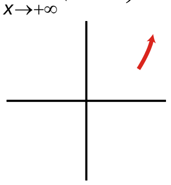
d)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$



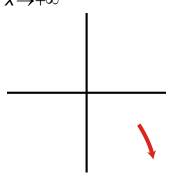
<u>EJERCICIO 40</u> : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to +\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas: a) $f(x)=(x+2)^4$ **b)** $f(x)=x-x^2$

Solución:

a) $\lim_{x\to +\infty}(x+2)^4=+\infty$



b) $\lim_{x\to +\infty}(x-x^2)=-\infty$

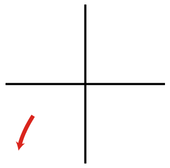


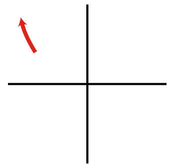
<u>EJERCICIO 41</u> : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas: a) $f(x)=(x-1)^3$ **b)** $f(x)=x^2-x$

Solución:

a) $\lim_{x\to -\infty}(x-1)^3=-\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty}(x^2-x)=+\infty$





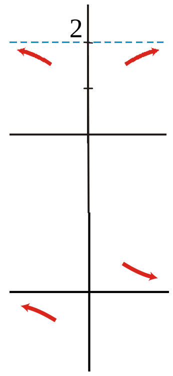
<u>EJERCICIO 42</u> : Calcular las asíntotas horizontales de estas funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+2}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{A.V. } y=2\Rightarrow\begin{cases}f(100)<2\\ f(-100)<2\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{A.V. } y=0\Rightarrow\begin{cases}f(100)>0\\ f(-100)<0\end{cases}$



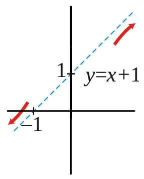
<u>EJERCICIO 43</u> : Las siguientes funciones tienen una asíntota oblicua. Hállala y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

Solución: y = mx + n

a) $\left\{\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}=1\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+2x}{x+1}-1.x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}y=x+1\Rightarrow$

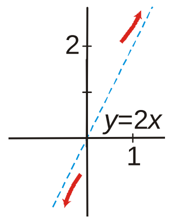
$\text{Asíntota oblicua: } y=x+1\begin{cases}f(100)<\text{A sin t}(100)\\ f(-100)>\text{A sin t}(-100)\end{cases}$



b) $\left\{\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^3-x}=2\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^3}{x^2-1}-2.x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=0\end{array}\right\}y=2x\Rightarrow$

Asíntota oblicua: $y=2x$

$\begin{cases}f(100)>\text{A sin t}(100)\\ f(-100)<\text{A sin t}(-100)\end{cases}$



<u>EJERCICIO 44</u> : Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^2}$

Solución:

a)

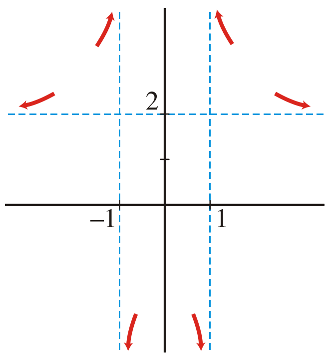
- Asíntotas verticales: Puntos que anulan el denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$x = -1 \quad \begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = +\infty; \\ &\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = -\infty \end{aligned} \qquad\qquad x = 1 \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = -\infty; \\ &\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = +\infty \end{aligned}$$

- Asíntota horizontal:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = 2 \\ &\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 2 \\ f(-100) > 2 \end{cases}$$

- Representación:



b)

- Asíntota vertical: Puntos que anulan el denominador $\Rightarrow$ $x^2 = 0 \Rightarrow$ $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^2} = 1 \\ &\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x}{x^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) > 1 \end{cases}$$

- Representación: