TEMA 4 - FUNCIONES ELEMENTALES

4.1 – CONCEPTO DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN : Una **función real de variable real** es una aplicación de un subconjunto D de R en R tal que a cada valor de la variable "x" le hace corresponder un único valor "y".

Lo denotamos por : f : D -----> R
x -----> y = f(x)

"x" es la **variable independiente** e "y" es la **variable dependiente** o **imagen** de x

Si y = f(x), también se dice que x = $f^{-1}(y)$ y se dice que "x" es la **antiimagen** de "y".

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Al conjunto D se le llama **dominio** de la función y lo representamos por D(f) y es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente "x"

RECORRIDO O IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente "y" se le llama **recorrido** o **imagen** de una función y se representa por Im(f) o R(f)

4.2 – DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Se llama **Dominio de definición** de una función f(x) y se designa D(f), o simplemente, D, al conjunto de valores de "x" para los cuales existe la función, para los que hay un f(x).

$$D(f) = \{x \in R / \exists f(x)\} = R - \{x \in R / \nexists f(x)\}$$

El dominio de una función depende:

- Imposible de realizar alguna operación con ciertos valores de x: denominadores que se anulan, raíces cuadradas de números negativos,....
- Contexto real del que se ha extraído la función : Un pie mide un metro,...
- Por voluntad de quien propone la función: Número menor que 7,...

Cálculo del dominio

- POLINOMIOS: El dominio de un polinomio es todo R : f (x) = P(x) D(f) = R
- FUNCIONES RACIONALES: El dominio de las funciones racionales es todo R menos los puntos donde se anula el denominador:

  f (x) = g(x) / h(x) $D(f) = \{ x \in R / h(x) \neq 0\} = R - \{ x \in R / h(x) = 0\}$
- FUNCIONES RADICALES

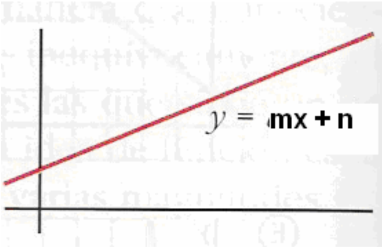
  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ Si n es impar D(f) = R

  Si n es par $D(f) = \{ x \in R / g(x) \geq 0\} = R - \{x \in R / g(x) < 0\}$
- FUNCIONES EXPONENCIALES : $f(x) = a^{g(x)}$ D(f) = R
- FUNCIONES LOGARÍTMICAS

  $f(x) = \log_a g(x)$ $D(f) = \{ x \in R / g(x) > 0\} = R - \{x \in R / g(x) \leq 0\}$
- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS :
  - Las funciones seno y coseno ⇒ Dominio R
  - El resto (tangente, secante, cosecante, cotangente) ⇒ Estudiarlas como racionales

4.3 – FUNCIONES LINEALES : y = mx + n

La **función polinómica de primer grado** o **función lineal:** y = mx + n, se representa mediante una recta de pendiente m y que pasa por el punto (0,n). La n se llama ordenada en el origen.



Pendiente de una recta es la variación (aumento o disminución) que se produce en la y cuando la x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente de la recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y.

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ la pendiente se calcula :

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Δy = Incremento de "y" entre Δx = Incremento de "x")

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1,y_1)$ y su pendiente m, la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Para representarla se dan dos valores cualesquiera a la "x" y se calcula el correspondiente valor de la "y".

4.4 – INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN LINEAL

Si sabemos que una función es lineal (al menos aproximadamente) y que pasa por dos puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ podemos hallar su valor en cualquier otro punto $x = x_3$

1. Hallamos la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos A y B $\Rightarrow$ y = mx + n
2. Sustituimos el valor de x_3 en x y calculamos la y.

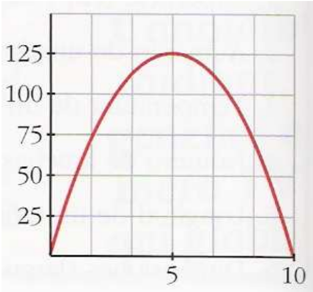
Si $x_3 \in (x_1,x_2)$ estamos interpolando.
Si $x_3 \in (-\infty,x_1) \cup (x_2,+\infty)$ estamos extrapolando.

En la extrapolación, cuanto más alejado esté x_3 del intervalo (x_1,x_2), menos fiable es el valor que obtenemos para $f(x_3)$.

4.5 – OTRAS FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **funciones cuadráticas** : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

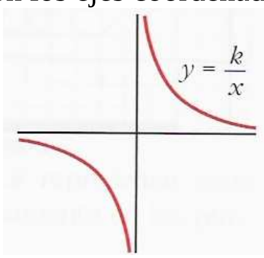


- Tienen ejes paralelos al eje Y
- Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:
  - Si a > 0, las ramas van hacia arriba (Cónvexa)
  - Si a < 0, las ramas van hacia abajo (Cóncava)
  - Cuando mayor sea |a|, más estilizada es la parábola
- La abscisa del vértice de la parábola es : $V_x = -\frac{b}{2a}$

Para representarla se calcula el vértice en la "x" y dos valores más pequeños y dos valores más grandes y se calculan las respectivas "y" de estos valores.

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a aquellas cuya ecuación es y = f(x)/g(x) y sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son los ejes coordenados.

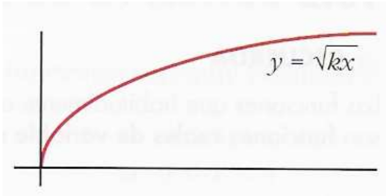


También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Para representarlas se hace previamente la división.

Representación :
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio
- Dibujarlas teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

Se llaman **funciones radicales** a aquellas cuya ecuación es y = $\sqrt[n]{f(x)}$



Para representarlas:
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio. (Importante: f(x) = 0)

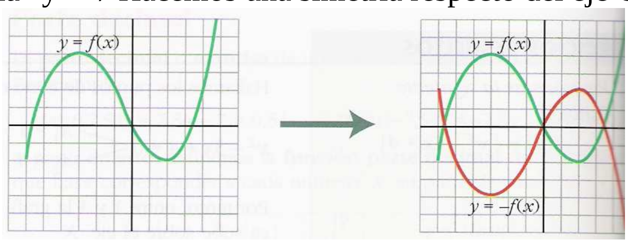
4.6 – ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

REPRESENTACIÓN DE y = f(x) ± k APARTIR DE y = f(x)

Si sumamos una constante “k” a la “y” ⇒ Subimos “k” unidades
Si restamos una constante “k” a la “y” ⇒ Bajamos “k” unidades

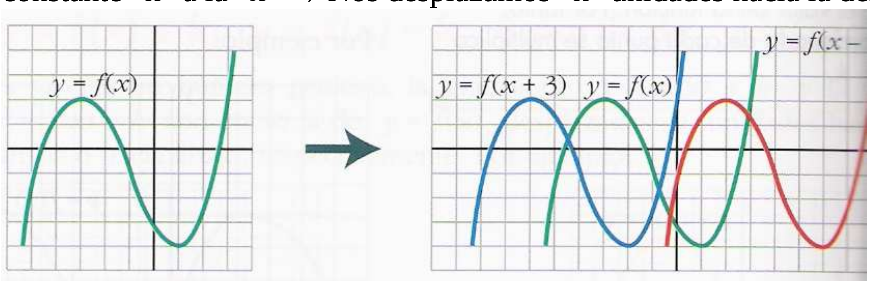
REPRESENTACIÓN DE y = - f(x) A PARTIR DE y = f(x)

Si cambiamos de signo a la “y” ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OX



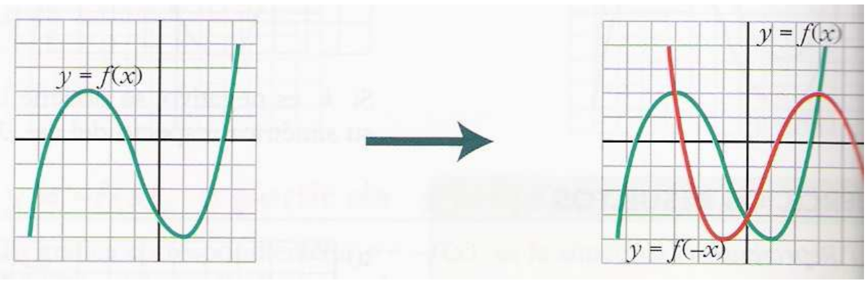
REPRESENTACIÓN DE y = f(x ± k) A PARTIR DE y = f(x)

Si sumamos una constante “k” a la “x” ⇒ Nos desplazamos “k” unidades hacia la izquierda
Si restamos una constante “k” a la “x” ⇒ Nos desplazamos “k” unidades hacia la derecha



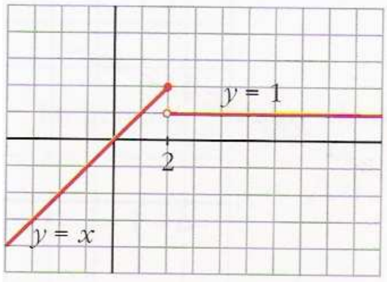
REPRESENTACIÓN DE y = f(-x) A PARTIR DE y = f(x)

Si cambiamos de signo a la "x" ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OY



4.7 – FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"

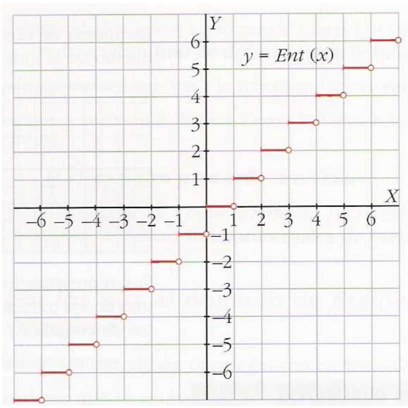
Se calcula su dominio y se hace una tabla de valores para cada trozo.



4.8 – DOS FUNCIONES INTERESANTES

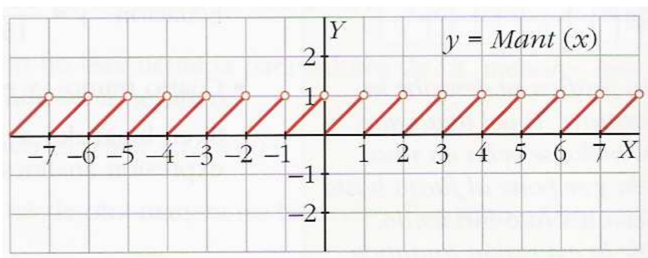
FUNCIÓN PARTE ENTERA

Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x. A partir de esto, definimos la **función parte entera de x**, Ent(x), que hace corresponder a cada número x su parte entera.



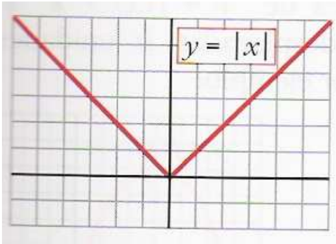
FUNCIÓN PARTE DECIMAL

La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es Mant(x) = x – Ent(x). A partir de esto, definimos la **función parte decimal de x,** Mant(x) que hace corresponder a cada número x su parte decimal.



4.9 – VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

El valor absoluto de un número "x" coincide con "x" si es positivo o nulo, o con su opuesto si es negativo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



El general el valor absoluto de una función se define así: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

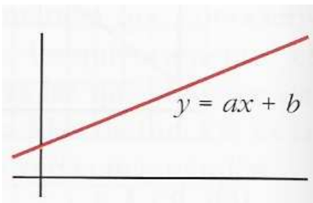
Para representarla se iguala lo de dentro del valor absoluto a cero y se resuelve. Estos puntos nos dividen la función en trozos por tanto podemos tratarla como una función a trozos.

4.10– LAS FUNCIONES DESCRIBEN FENÓMENOS REALES

Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos,… Tales funciones se obtienen experimentalmente, mediante observación. Después se idealizan y sirven de modelos para las grandes familias de funciones.

FUNCIONES LINEALES

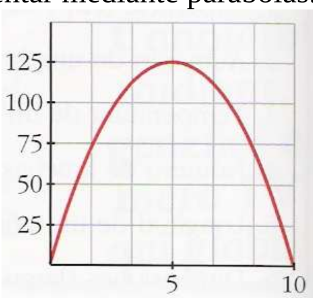
Las funciones lineales se describen con ecuaciones de primer grado, y = ax + b, y se representan mediante rectas.



Ejemplos: Presión a distintas altitudes, longitud de un muelle al colgar de distintas masas,…

FUNCIONES CUADRÁTICAS

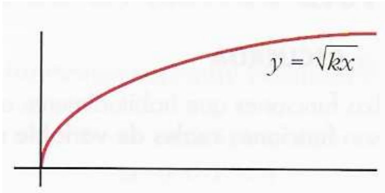
Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$. Se representar mediante parábolas.



Ejemplos: Distancia recorrido por un coche desde que pisa el freno hasta que para, altura que alcanza un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba,…

FUNCIONES RADICALES

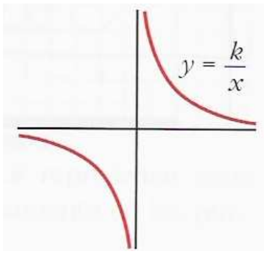
Las funciones y = $\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje X.



Ejemplos: El periodo de un péndulo T es función de su longitud,…

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Su expresión analítica es y = $\frac{k}{x}$. Su representación gráfica son hipérbolas con las asíntotas paralelas a los ejes coordenados.



OTROS TIPOS DE FUNCIONES

Funciones exponenciales y logarítmicas (más adelante).

Otras funciones no siguen un modelo fijo. Por ejemplo: El punto de fusión de una aleación depende de las proporciones en que intervienen cada uno de sus componentes.