TEMA 3 – ÁLGEBRA

3.1 – DIVISIÓN DE POLINOMIOS

COCIENTE DE MONOMIOS

El **cociente de un monomIo por otro monomio de grado inferior** es un nuevo monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los monomios que se dividen.

$$(ax^m)(bx^n) = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

TÉCNICA DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- En el dividendo, dejamos huecos en los términos que faltan.
- Dividimos el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor.
- El producto de este monomio por el divisor, cambiado de signo, se coloca bajo el dividendo y se suma.
- A partir de aquí volvemos a proceder como en los apartados anteriores hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.
- Solución = $D(x) : d(x) = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

DIVISIÓN ENTERA Y DIVISIÓN EXACTA

A la división entre polinomios en la que, además del cociente, hay un resto, se le llama **división entera:** $D(x) : d(x) = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

Cuando el resto es cero, se dice que la división es **exacta**: $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x)$

3.2 – DIVIDIR UN POLINOMIO POR x – a. REGLA DE RUFFINI

3.3.1 - REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio por x – a. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtienen, así, los coeficientes del cociente y el resto de la división

3.3.2 - UN CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR x – a

Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por x – a es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por tanto, para buscar expresiones x – a que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

3.3.3 - VALOR DE UN POLINOMIO PARA x = a

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x = a, es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas. A ese número se le llama P(a).

3.3.4 - TEOREMA DEL RESTO

El valor que toma un polinomio, P(x), cuando hacemos x = a, coincide con el resto de la división P(x) : (x – a). Es decir, P(a) = r

3.3 - FACTORIZACIÓN UN POLINOMIO

3.5.1 - PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Método para factorizar un polinomio:

- Sacar factor común
- Recordar los productos notables
- Si es un polinomio de grado > 2 : Por Ruffini, probando con los divisores del término independiente, hasta obtener resto cero: P(x) = (x – a).C(x)
- Si es un polinomio de grado = 2: Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ soluciones distintas} \Rightarrow a.(x - x_1).(x - x_2) \\ 1 \text{ solución doble} \Rightarrow a.(x - x_1)^2 \\ \text{No tiene solución} \Rightarrow ax^2 + bx + c \end{cases}$$

3.5.2 - RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un número a se llama **raíz** de un polinomio P(x), si P(x) = 0

Método para calcular las raíces de un polinomio:

- Se factoriza el polinomio
- Se iguala cada uno de los factores a cero.

3.5.3 – INVENTAR POLINOMIOS

Si una raíz es x = a $\Rightarrow$ P(x) = (x – a)…..

3.4 - FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.7.1 - DEFINICIÓN

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

3.7.2 - SIMPLIFICACIÓN

Para simplificar una fracción, se factorizan numerador y denominador y se eliminan los factores comunes obteniéndose otra fracción equivalente.

3.7.3 - REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador, que será el mínimo común múltiplo de los denominadores

3.7.4 - OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Suma y resta**: Para sumar o restar fracciones algebraicas, estas se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Después se simplifica la fracción resultante.

- **Producto** : El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

- **Fracción inversa de otra** : La fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\frac{Q(x)}{P(x)}$.

- **Cociente** : El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (Producto cruzado de términos).

3.5 – RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. NÚMERO DE SOLUCIONES

Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Número de soluciones: Llamamos discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones distintas
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Una solución doble
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ No tiene solución

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Completa: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Incompletas : Si $b = 0$ $ax^2 + c = 0$ Se despeja x^2 y luego se hace la raíz
  Si $c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ Se saca factor común la x y luego cada uno de los productos se iguala a cero y se obtienen las soluciones.

ECUACIONS BICUADRÁTICAS $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se hace un cambio de variable $x^2 = t$
Se resuelve la ecuación de segundo grado en t
Se calcula las x como la raíz de t

ECUACIONES CON RADICALES

Si sólo hay una raíz – Se aísla la raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al cuadrado.

Si hay más de una raíz – Se aísla una raíz en un miembro de la ecuación y se elevan los dos miembros al cuadrado. Esto habrá que hacer tantas veces como raíces tenga.

Nota : Al elevar al cuadrado se duplican las soluciones, por tanto es necesario comprobar las soluciones en la ecuación inicial.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON "x" EN EL DENOMINADOR

Hacer común denominador
Eliminar denominadores
Resolver la ecuación lineal obtenida
Comprobar las soluciones

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Se factoriza (Utilizando sacar factor común, productos notables, ecuaciones de segundo grado, Ruffini) y luego se iguala cada factor a cero.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$| x - a | = b \quad \begin{cases} x - a = b \\ x - a = -b \end{cases}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

- Si no hay sumas :
  - Si se pueden poner todos en función de la misma base : $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
  - Si no se pueden poner todos en función de la misma base: Aplicar la definición de logaritmo : $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$
- Si hay sumas: Cambio de variable $a^x = t$
  Resolver la ecuación en t
  Calcular la x

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Utilizar las propiedades de los logaritmos:

$k = \log_a a^k$	$\log a^b = b.\log a$
$\log a + \log b = \log (a.b)$	$\log a - \log b = \log (a/b)$

Comprobar las soluciones en la ecuación inicial teniendo el cuenta que el dominio de un logaritmo es $[0,+\infty)$ $[\log (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0]$

3.6 – SISTEMAS DE ECUACIONES

SOLUCIÓN

Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que hacen cierta la igualdad.

Las soluciones con más de una incógnita suelen tener infinitas soluciones

DEFINICIÓN DE UN SISTEMA

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar su solución (o soluciones) común.

RESOLVER UN SISTEMA

Para **resolver un sistema de ecuaciones** consiste en buscar una solución común a todas ellas.

METODOS TRADICIONALES: SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN Y REDUCCIÓN

- **Sustitución**: Despejar una incógnita de una ecuación y sustituir en la otra
- **Reducción**: Multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que al sumarlas se vaya una incógnita.
- **Igualación**: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan.

3.7 – MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

El **método de Gauss** es una interesante generalización del método de reducción para sistemas lineales de más de dos ecuaciones e incógnitas.

SISTEMAS ESCALONADOS

Un **sistema escalonado** es un sistema de ecuaciones en la que en cada ecuación hay una incógnita menos:

$$\begin{array}{rrrl} ax + & by + & cz & = d \\ & b'y + & c'z & = d' \\ & & c''z & = d'' \end{array}$$

Se resuelven de abajo arriba: Primero la última ecuación, después la penúltima,..

MÉTODO DE GAUSS

Consiste en mediante operaciones elementales, sustituir una ecuación por una combinación lineal de otra, transformar un sistema en un sistema escalonado que es más sencillo de resolver.

El mismo camino puede hacerse operando sólo con el "esqueleto numérico" del sistema llamado **matriz del sistema**

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array}\right) \approx \begin{cases} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=i \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado ⇒ **Tiene una única solución** (∃! solución)

SISTEMAS INCOMPATIBLES (sin solución)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = k$ ($k \neq 0$), entonces el sistema es Incompatible ⇒ **No tiene solución**

SISTEMAS INDETERMINADOS (con infinitas soluciones)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = 0$, se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Se llama Sistema Compatible Indeterminado ⇒ **Existen Infinitas soluciones**

3.8 – INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad (<, ≤, >, ≥) entre expresiones algebraicas.

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Solución de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad.

RESOLVER UNA INECUACIÓN

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones.
Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos de R.

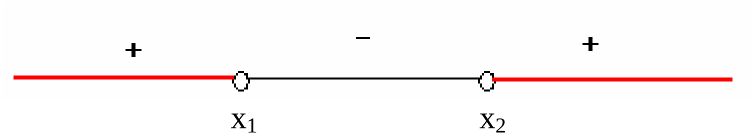
- **Inecuaciones lineales de primer grado**: (Se resuelven como una ecuación normal teniendo en cuenta que si se multiplica o divide por un número negativo la desigualdad cambia de signo)

$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b$: Si $a > 0$ $\quad x > -b/a \Rightarrow x \in (-b/a, +\infty)$
Si $a < 0$ $\quad x < -b/a \Rightarrow x \in (-\infty, b/a)$

- **Inecuaciones lineales de grado mayor o igual que dos**

  Se igualan a cero y se resuelve la ecuación. Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen todo ese intervalo es solución. También habrá que comprobar los extremos de los intervalos.

$$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

Si la desigualdad contiene el igual los puntos se pintan y se cogen los extremos.

- **Inecuaciones con cocientes**

  Se igualan a cero, por separado, numerador y denominador y se resuelve las ecuaciones.
  - Los puntos del numerador se incluyen si en la desigualdad está el igual.
  - Los puntos del denominador nunca se incluyen (no se puede dividir por cero.

  Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen todo ese intervalo es solución.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE INECUACIONES

Solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas las inecuaciones que lo forman.

RESOLVER UN SISTEMA DE INECUACIONES

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en encontrar todas sus soluciones.

Se resuelven por separado cada inecuación del sistema y luego se haya la intersección de las soluciones, es decir, las que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

3.9 – INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

DEFINICIÓN

Una inecuación lineal con dos incógnitas adopta una de estas formas:

$$ax + by + c < 0 \quad \text{ó} \quad ax + by + c > 0$$

En vez de los signos $<$ o $>$ pueden tener $\leq$ o $\geq$

En cada una de ellas, **el conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta ax + by + c = 0**. Cuando en la desigualdad está incluido el “igual”, los puntos de la recta también son soluciones.

RESOLUCIÓN GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN

Para resolver gráficamente una inecuación con dos incógnitas $f(x,y) \leq g(x,y)$:

1. Se pasa todo a un miembro y se opera hasta obtener $f(x,y) \leq 0$
2. Se representa la recta $f(x,y) = 0$ (Continua si la desigualdad no se estricta y discontinua si es estricta)
3. Esta recta divide al plano en dos partes
4. Se toma un punto cualquiera del plano que no esté en la recta. Si ese punto cumple la desigualdad todo este semiplano será la solución de la inecuación, si no la cumple, la solución será el otro semiplano.

3.10 – SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Varias inecuaciones forman un sistema cuando se buscan las soluciones comunes a todas ellas.

Como el conjunto de soluciones de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es un semiplano, el conjunto de soluciones de un sistemas de inecuaciones de este tipo es la intersección de varios semiplano, es un **recinto poligonal** o bien un **recinto abierto**.

Es posible que los semiplanos no tengan ningún punto en común. En tal caso el sistema no tiene solución y se dice que es incompatible.

Las soluciones de un sistema de inecuaciones son las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.

Pasos:

- Se resuelve cada inecuación por separado y se representa su solución en el mismo plano.
- Se toma como solución la intersección de las soluciones es decir las zonas que estén cogidas en todos los semiplanos.